

Rasterizacao de Imagens por Testes de Pertinencia e Superamostragem

Ana da Hora

Instituto Nacional de Matematica Pura e Aplicada — Temas de Computacao Visual, 2026

1. Introducao

O problema fundamental da rasterizacao consiste em discretizar uma representacao geometrica continua em uma grade regular de pixels. Formalmente, dada uma regiao $R \subseteq \mathbb{R}^2$ e uma grade de amostragem $\{p_{ij}\}$ com resolucao $W \times H$, desejamos computar para cada pixel (i,j) uma cor c_{ij} que represente fielmente a contribuicao de R naquela vizinhanca. Na abordagem mais simples, cada pixel recebe a cor da primitiva que contem seu centro; abordagens mais sofisticadas estimam a cobertura fracionaria do pixel pela primitiva via superamostragem.

Este relatorio descreve a implementacao de um rasterizador baseado em testes de pertinencia (in/out tests) para triangulos, circulos e funcoes implicitas. Discutimos os artefatos de aliasing decorrentes da amostragem pontual, propomos solucoes via filtros de reconstrucao, e apresentamos os desafios de rotacao de cenas e visualizacao do conjunto de Mandelbrot.

2. Teste de Pertinencia Ponto-em-Triangulo

Seja $T = (v_1, v_2, v_3)$ um triangulo em \mathbb{R}^2 e p um ponto de consulta. O teste de pertinencia empregado baseia-se nas *funcoes de aresta* (edge functions), que correspondem ao sinal da componente z do produto vetorial entre vetores formados pelas arestas e o ponto de consulta.

Definicao. A funcao de aresta associada aos pontos a, b e avaliada em p e definida como:

$$E(p, a, b) = (p.x - b.x)(a.y - b.y) - (a.x - b.x)(p.y - b.y)$$

Geometricamente, $E(p, a, b)$ corresponde ao dobro da area sinalizada do triangulo (p, a, b) . O sinal indica de qual lado da aresta orientada de b para a o ponto p se encontra.

Proposicao. Um ponto p pertence ao triangulo T se e somente se as tres funcoes de aresta possuem o mesmo sinal: $sgn(d_1) = sgn(d_2) = sgn(d_3)$, onde $d_1 = E(p, v_1, v_2)$, $d_2 = E(p, v_2, v_3)$, $d_3 = E(p, v_3, v_1)$. Equivalentemente, $p \in T \Leftrightarrow \neg(\text{has_neg} \wedge \text{has_pos})$, onde has_neg e has_pos indicam a existencia de sinais negativos e positivos entre $\{d_1, d_2, d_3\}$. Esta formulacao e invariante a orientacao (horaria ou anti-horaria) dos vertices.

2.1 Rasterizacao em Multiplas Resolucoes

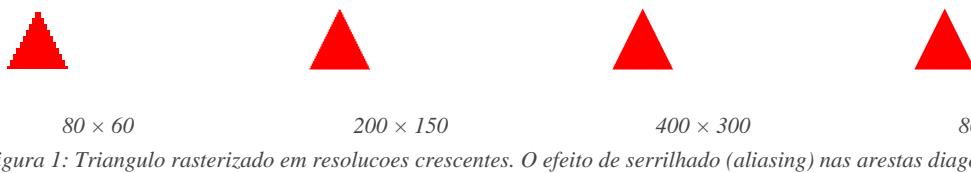


Figura 1: Triangulo rasterizado em resolucoes crescentes. O efeito de serrilhado (aliasing) nas arestas diagonais decorre da amostragem pontual: a funcao indicadora $I_T(p)$ e descontínua na fronteira de T , e sua amostragem em frequencia finita introduz componentes espectrais espurias (teorema de Nyquist-Shannon).

2.2 Triangulos Adjacentes e Separados

Na rasterizacao de dois triangulos T_1 e T_2 compartilhando uma aresta, a condicao de pertinencia inclusiva (\leq) garante que ambos reivindiquem os pontos sobre a aresta compartilhada, eliminando gaps. Contudo, a aresta e contada duas vezes (overlap). Em pipelines profissionais, *top-left rules* resolvem esta ambiguidade atribuindo cada ponto de borda a exatamente um triangulo.

Para triangulos separados por um gap δ , quando $\delta < \Delta x = (x_{\max} - x_{\min})/W$ (largura de um pixel), nenhum centro de pixel cai no intervalo vazio, e os triangulos aparecem visualmente conectados — um artefato de sub-amostragem.



Figura 2: Triangulos adjacentes (esq.) e separados (dir.). O gap $\delta=0.01$ desaparece em resolucao 80×60 pois $\delta < \Delta x$.

3. Rasterizacao de Curvas Implicitas

Uma curva implicita em R^2 e o conjunto de nivel zero de uma funcao $f: R^2 \rightarrow R$. A regiao interior e definida como $\Omega = \{(x,y) \in R^2 : f(x,y) \leq 0\}$. O teste de pertinencia reduz-se a avaliar o sinal de f no ponto de consulta, o que confere grande generalidade ao metodo: qualquer regiao representavel como subnivel de uma funcao escalar pode ser rasterizada.

A funcao implicita polinomial de grau 4 proposta no enunciado e:

$$\begin{aligned} f(x,y) = & 0.004 + 0.110x - 0.177y - 0.174x^2 + 0.224xy - 0.303y^2 \\ & - 0.168x^3 + 0.327x^2y - 0.087xy^2 - 0.013y^3 \\ & + 0.235x^4 - 0.667x^3y + 0.745x^2y^2 - 0.029xy^3 + 0.072y^4 \end{aligned}$$

Note que f e um polinomio em duas variaveis com 15 termos (todos os monomios ate grau 4). A regiao $\Omega = \{f \leq 0\}$ forma uma figura nao-convexa com topologia nao-trivial, incluindo uma componente conexa menor desconectada da principal.

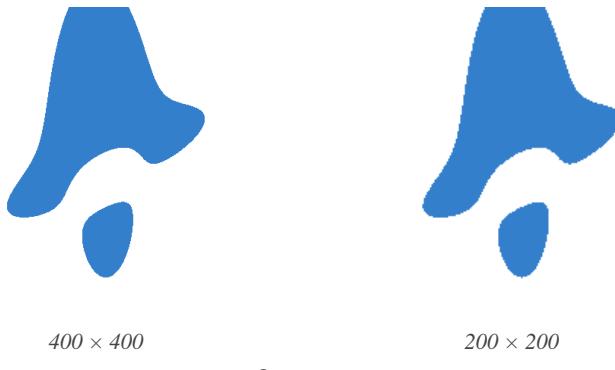


Figura 3: Regiao $\Omega = \{f \leq 0\}$ rasterizada. A fronteira $\partial\Omega$ apresenta serrilhado caracteristico da amostragem pontual.

4. Anti-Aliasing por Superamostragem e Filtragem

O aliasing resulta da violacao do teorema da amostragem: a funcao indicadora $1_{\Omega}(x,y)$ possui descontinuidades na fronteira $\partial\Omega$, implicando conteudo espectral de banda ilimitada. Como a taxa de amostragem (resolucao) e finita, componentes de alta frequencia sao rebatidas (aliased) para baixas frequencias.

A solucao classica e a *pre-filtragem* por convolucao com um nucleo de reconstrucao h antes da amostragem. Na pratica, aproximamos a integral de convolucao por quadratura numerica (superamostragem). Para cada pixel centrado em p_{ij} , tomamos $N = n^2$ sub-amostras $\{s_k\}_{k=1..N}$ distribuidas uniformemente no pixel e computamos:

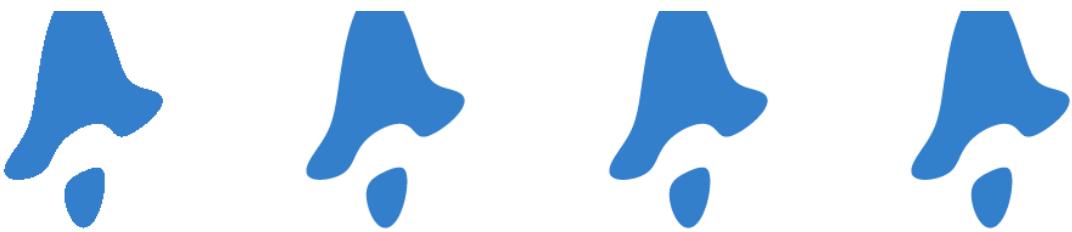
$$c_{ij} = (1/W) \sum_{k=1}^N h(s_k - p_{ij}) \cdot c(s_k), \quad W = \sum_k h(s_k - p_{ij})$$

onde $c(s_k)$ e a cor avaliada na sub-amostra s_k e h e o nucleo de filtragem. Implementamos tres nucleos:

Box (retangular): $h(d) = 1$ se $\|d\|_\infty \leq r$, e 0 caso contrario. Equivale a media aritmetica simples das sub-amostras. E o filtro ideal no sentido L^2 para minimizar erro de cobertura, mas produz transicoes abruptas.

Hat (tent/triangular): $h(d) = \max(0, 1 - \|d\|_2/r)$. O decaimento linear privilegia sub-amostras proximas ao centro do pixel, resultando em transicoes mais suaves. Corresponde a convolucao de dois filtros box (auto-convolucao).

Gaussiano: $h(d) = \exp(-\|d\|_2^2 / 2\sigma^2)$, com $\sigma = r/2$. Possui decaimento exponencial e e infinitamente diferenciavel (C^∞), produzindo as transicoes mais suaves. Sua transformada de Fourier tambem e gaussiana, o que garante boa localizacao tanto no dominio espacial quanto no frequencial.



Sem filtro

Box (4×4)

Hat (4×4)

Gaussiano (4×4)

Figura 4: Anti-aliasing na função implícita (200×200 , $N=16$). Os três filtros suavizam a fronteira $\partial\Omega$; hat e gaussiano produzem gradientes marginalmente mais suaves por concentrarem peso no centro do pixel.

5. Desafios

5.1 Rotacao de Cenas por Transformacao Inversa

Para rasterizar uma cena rotacionada por um angulo θ em torno da origem, empregamos a tecnica de *transformacao inversa* no espaco de amostragem. Ao inves de transformar a geometria da primitiva — o que para funcoes implicitas exigiria reescrever todos os coeficientes polinomiais — aplicamos a rotacao inversa $R^{-1}(\theta) = R^T(\theta)$ ao ponto de consulta.

Proposicao. Seja $\Omega = \{(x,y) : f(x,y) \leq 0\}$ e $\Omega_\theta = R(\theta)\Omega$ a regiao rotacionada. Entao $(x,y) \in \Omega_\theta \Leftrightarrow R^{-1}(\theta)(x,y) \in \Omega$. Explicitamente:

$$\begin{aligned} x' &= \cos(\theta) \cdot x + \sin(\theta) \cdot y \\ y' &= -\sin(\theta) \cdot x + \cos(\theta) \cdot y \end{aligned}$$

e o teste torna-se $f(x', y') \leq 0$. Esta abordagem explora o fato de que o grupo ortogonal $O(2)$ preserva normas e que $R^{-1} = R^T$ para matrizes de rotacao, sendo computacionalmente eficiente (2 multiplicacoes e 2 adicoes por ponto) e exata.

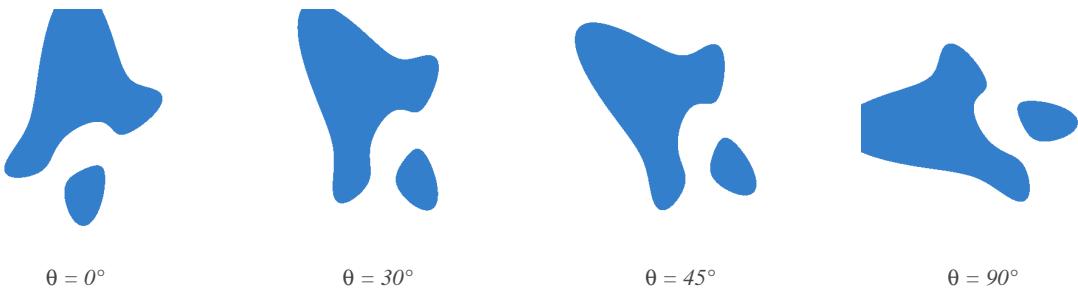


Figura 5: Regiao implicita Ω rotacionada por $\theta \in \{0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 90^\circ\}$ via transformacao inversa no espaco de amostragem.

5.2 Conjunto de Mandelbrot como Funcao Implicita

O conjunto de Mandelbrot $M \subset C$ e definido como o conjunto dos parametros $c \in C$ para os quais a orbita da iteracao $z_{n+1} = z_n^2 + c$, com $z_0 = 0$, permanece limitada. Formalmente:

$$M = \{ c \in C : \sup_n |z_n(c)| < \infty \}$$

Na pratica, utiliza-se o criterio de escape $|z_n| > 2$ (consequencia do lema de escape para polinomios quadraticos) com um numero maximo de iteracoes $N_{\max} = 100$. Para integrar o Mandelbrot ao framework de rasterizacao, definimos a funcao implicita $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \{-1, +1\}$ onde $g(c_x, c_y) = -1$ se $c = c_x + ic_y \in M$ (nao escapou) e $g = +1$ caso contrario. Como $g \leq 0 \Leftrightarrow c \in M$, o teste in_out da classe `ImplicitFunction` applica-se diretamente.

A fronteira ∂M e um fractal com dimensao de Hausdorff $d_H = 2$, o que implica que o aliasing na borda do conjunto e intrinsecamente irredutivel por aumento de resolucao: novas estruturas emergem em qualquer escala de observacao, demandando anti-aliasing adaptativo ou superamostragem com numero elevado de sub-amostras nas regioes de fronteira.

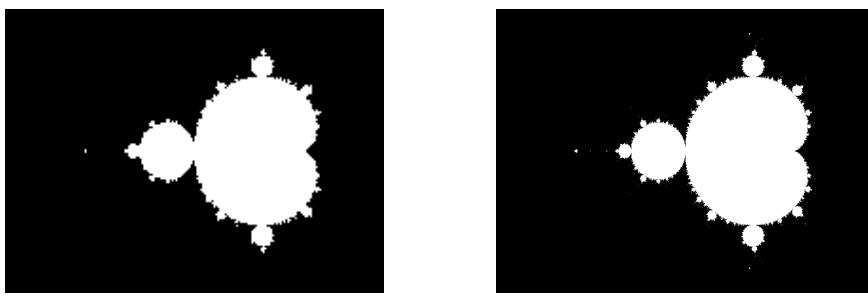


Figura 6: Conjunto de Mandelbrot M . A cardiod principal corresponde ao locus dos parametros c para os quais z_n converge a um ponto fixo; o bulbo secundario, a um ciclo de periodo 2.

6. Discussao

Os resultados evidenciam dois fenomenos centrais da teoria de amostragem aplicada a rasterizacao. Primeiro, o *aliasing espacial*: a funcao indicadora 1_{Ω} possui descontinuidades de salto ao longo de $\partial\Omega$, implicando que seu espectro de Fourier decai como $O(1/\omega)$ — insuficiente para satisfazer a condicao de Nyquist em qualquer taxa de amostragem finita. Os filtros de superamostragem atenuam esse efeito ao aproximar a convolucao $(1_{\Omega} * h)(p)$, transformando a decisao binaria dentro/fora em uma estimativa da cobertura fracionaria, o que suaviza as transicoes na fronteira.

Segundo, a *consistencia topologica* em malhas triangulares: a condicao inclusiva (\leq) evita gaps entre triangulos adjacentes mas introduz overdraw nas arestas compartilhadas. A solucao rigorosa — regras top-left ou winding-number conventions — garante que cada ponto do plano pertence a exatamente uma primitiva, propriedade essencial para rasterizacao correta de malhas fechadas como a cena do leao.

A tecnica de transformacao inversa para rotacao demonstra um principio mais geral: para qualquer transformacao afim invertivel ϕ , o teste de pertinencia a $\phi(\Omega)$ reduz-se a avaliar $f(\phi^{-1}(p))$, evitando a transformacao explicita da geometria. Este principio estende-se naturalmente a translacoes, escalas, cisalhamentos e composicoes de transformacoes, constituindo a base dos pipelines graficos modernos.

7. Conclusao

Este trabalho implementou e analisou um rasterizador baseado em testes de pertinencia para tres classes de primitivas geometricas: triangulos (via funcoes de aresta), circulos (via distancia euclidiana) e regioes implicitas (via avaliacao de funcao escalar). A unificacao dessas primitivas sob a interface `in_out` ilustra o poder de abstracao do paradigma de rasterizacao por classificacao de pontos.

A analise dos artefatos de aliasing confirmou as predicoes da teoria de amostragem: descontinuidades na funcao amostrada geram componentes especrais de alta frequencia que, sub-amostradas, produzem artefatos visiveis. A superamostragem com filtros de reconstrucao (box, hat, gaussiano) demonstrou eficacia na atenuacao desses artefatos, com o filtro gaussiano apresentando a melhor relacao entre suavidade espectral e localizacao espacial, consistente com sua propriedade de minimizar o produto das incertezas tempo-frequencia (princípio de Heisenberg-Gabor).

Os desafios ilustraram extensoes naturais do framework: a rotacao via transformacao inversa conecta rasterizacao a geometria do grupo euclidiano $E(2)$, enquanto o conjunto de Mandelbrot demonstra que o paradigma de funcao implicita acomoda ate objetos fractais cuja fronteira possui dimensao de Hausdorff nao-inteira. Uma direcao futura promissora seria a implementacao de superamostragem adaptativa (concentrando amostras nas regioes de fronteira detectadas por gradiente numerico de f), o que reduziria o custo computacional mantendo a qualidade visual nas regioes criticas.

Referencias

- [1] J. Pineda. A parallel algorithm for polygon rasterization. *SIGGRAPH Computer Graphics*, 22(4):17-20, 1988.
- [2] A. Glassner. *An Introduction to Ray Tracing*. Academic Press, 1989.
- [3] T. Akenine-Moller, E. Haines, N. Hoffman. *Real-Time Rendering*. 4th ed., CRC Press, 2018.
- [4] H.-O. Peitgen, P. Richter. *The Beauty of Fractals*. Springer-Verlag, 1986.