

# 光纤 Fabry-Perot 干涉仪在传感应用中的数学模型

毕卫红

(燕山大学光电子工程系, 秦皇岛 066004)

**摘 要** 本文应用光学和数学理论导出光纤 Fabry-Perot 干涉仪在两反射面反射率不同时的反射光与透射光的数学模型、低反射率 Fabry-Perot 干涉腔长度的变化与干涉光光强的数学模型及传感中的应用; 为这种光纤干涉仪的准确使用提供基础。

**关键词** 光纤; 干涉; 模型

## 0 引言

光纤传感器是最有希望实现灵巧结构的传感器。它具有体积小、易弯曲、抗电磁干扰等特点, 具有很大的研究、开发和应用价值。在光纤传感器中, 干涉仪精度最高, 干涉型光纤传感器按其结构分有麦克耳逊、马赫-泽德、赛格纳克和法布里-珀罗 (Fabry-Perot 缩写为 F-P) 型。而 F-P 型因只用一根光纤而受到研究者的广为研究和应用。F-P 干涉式传感器又分为非本征型和本征型(如图 1) 两种。非本征 F-P 型光纤传感器制作简单, 近年来国内的研究多限于此<sup>2</sup>, 但这种传感器的缺点是其空气腔易受环境干扰。而本征 F-P 光纤传感器是由全光纤构成, 不但环境影响很小, 而且传感头体积非常小, 但它制作工艺较难。近年来, 国外应用 F-P 干涉结构构成传感器的一些方案得以实现, 如本征法布里-珀罗干涉压力传感器<sup>3</sup>等。虽然光纤 F-P 干涉仪广为应用, 然而人们使用的公式均是在 F-P 腔两反射面反射率相等这一条件下的公式。而实际上两反射面的反射率是不同的, 这时的 F-P 腔数学模型与反射率相同时的数学模型有何区别及由此引入误差等未见文章论述。另外, 在实际应用中, 总是要从检测到的光电信号中还原被测信号, 而根据常规公式<sup>4</sup>还原信号不易由硬件实现, 使用软件将影响整个系统的速度。为此本文作者对由两反射率不同的反射面构成的 F-P 的数学模型腔进行了详细的研究, 寻找较为简捷的数学模型, 以利于用硬件快速进行信号处理。本文为所得结果, 文中采用在单模光纤

端面镀膜<sup>5</sup>的方法构成如图 1(a) 所示的 F-P 干涉腔, 导出光纤 Fabry-Perot 干涉腔在两反射率不等时反射光与透射光、干涉腔长度的变化与干涉光光强的数学模型, 为光纤 Fabry-Perot 干涉仪的准确、方便的使用提供基础。

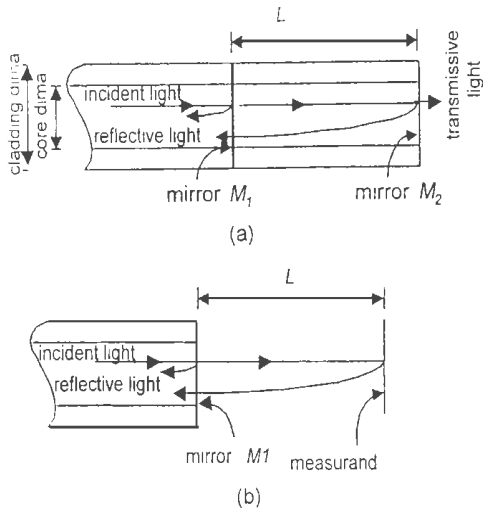


图 1 F-P 干涉式光纤传感头  
(a) 本征光纤 F-P 干涉腔; (b) 非本征光纤 F-P 干涉腔

Fig. 1 The F-P interferometric fiber optical head  
(a) intrinsic F-P cave, (b) nonintrinsic F-P cave

## 1 光纤 F-P 干涉腔的数学模型

### 1.1 光纤 F-P 干涉腔的反射光和透射光光强与相位的数学模型

光纤 F-P 干涉腔是由一段光纤的两个端面

上所镀的反射面形成 · 光射入光纤 F-P 干涉腔后光的反射与折射的示意图如图 2 所示, 图中入射

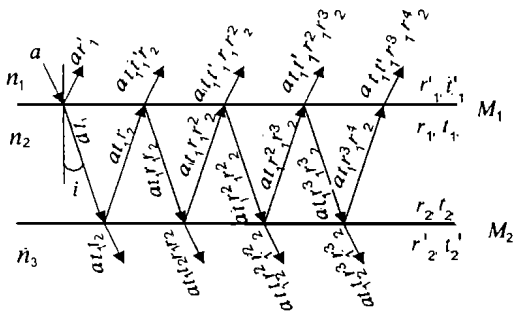


图 2 光射入 F-P 腔后的折射与反射

Fig.2 The reflection and refraction of the incident light  
光的振幅为  $a$ , 频率  $\omega$  初相为  $\varphi$ ; 干涉腔的反射面  $M_1$  的介质 1 侧反射比为  $r_1'$ , 介质 2 侧反射比为  $r_1$ ,  $r_1 = -r_1'$ ; 反射面  $M_2$  的介质 2 侧反射比为  $r_2$ , 介质 3 侧反射比为  $r_2'$ ; 由介质 1 到介质 2 的透射比为  $t_1$ , 由介质 2 到介质 1 的透射比为  $t_1'$ , 由介质 2 到介质 3 的透射比为  $t_2$  · 由图 2 可知, 反射光(或透射光)中任何两束光的光程差或相位差是相同的, 设第一次反射光的初相为  $\varphi$ , 第一束透射光的初相为  $\varphi$ , 任两束光间的相位差为  $\Phi$  则反射光合成振幅的复数形式为

$$\begin{aligned} A_R &= ar_1'e^{j(\omega+\varphi)} + at_1t_1'r_2e^{j(\omega+\varphi+\Phi)} \\ &+ at_1t_1'r_1r_2^2e^{j(\omega+\varphi+2\Phi)} + at_1t_1'r_1r_2^3e^{j(\omega+\varphi+3\Phi)} + \dots \\ &= \{ar_1' + at_1t_1'r_2e^{j\Phi}(1-r_1r_2e^{j\Phi})^{-1}\}e^{j(\omega+\varphi)} \end{aligned} \quad (1)$$

透射光的合成振幅为

$$\begin{aligned} A_T &= at_1t_2e^{j(\omega+\varphi)} + at_1t_2r_1r_2e^{j(\omega+\varphi+\Phi)} \\ &+ at_1t_2r_1^2r_2^2e^{j(\omega+\varphi+2\Phi)} + at_1t_2r_1^3r_2^3e^{j(\omega+\varphi+3\Phi)} + \dots \\ &= \{at_1t_2/(1-r_1r_2e^{j\Phi})\}e^{j(\omega+\varphi)} \end{aligned} \quad (2)$$

反射光的光强为

$$\begin{aligned} I_R &= A_R \times A_R^* = a^2r_1'^2 + \\ &\frac{a^2(t_1t_1'r_2)^2 - 2a^2t_1t_1'r_1r_1r_2^2 + 2a^2t_1t_1'r_1r_2\cos\Phi}{1+(r_1r_2)^2 + 2r_1r_2\cos\Phi} \end{aligned} \quad (3)$$

透射光的光强为

$$I_T = A_T \times A_T^* = \frac{(at_1t_2)^2}{1+(r_1r_2)^2 + 2r_1r_2\cos\Phi} \quad (4)$$

由于  $t_1t_1' = 1-r_1'^2$ , 则式(3)、(4)变形为

$$I_R = \frac{a^2[r_1'^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos\Phi]}{1+(r_1r_2)^2 + 2r_1r_2\cos\Phi} \quad (5a)$$

$$I_T = \frac{a^2(1-r_1'^2)}{1+(r_1r_2)^2 + 2r_1r_2\cos\Phi} \quad (5b)$$

式(5)为 F-P 腔两反射面反射率为任意值时的数学模型 · 由式(5)可以看出反射光的光强为两束光的相位差  $\Phi$  的函数 ·

## 1 2 低反射率光纤 F-P 腔长与反射光波相位的关系

若式(3)中  $r_1' = t_1t_1'r_2 = r$ , 且  $r_1r_2 \ll 1$ ,  $t_1t_1' = 1-r_1'^2 \approx 1$ , 则 F-P 腔光的干涉可近似的看作两束等幅光的干涉, 反射光的强度为

$$I_R = 2a^2r^2(1+\cos\Phi) = 2I_0R(1+\cos\Phi) \quad (6)$$

式中  $I_0 = a^2$ ,  $R = r^2$  ·

由式(6)得到反射光强与入射光强、反射率及任两束反射光相位差的关系, 而相位差  $\Phi$  与光程差  $\Delta$  光程差  $\Delta$  与光纤 F-P 腔长的关系为

$$\Phi = (2\pi/\lambda)\Delta \quad (7)$$

式中  $\Delta = 2nL\cos i$ ,  $\lambda$  为光波的波长,  $n$  为 F-P 腔光纤的折射率,  $L$  为光纤 F-P 腔的长度,  $i$  为两反射面间反射光与反射平面法线的夹角 · 则

$$\Phi = (4n\pi/\lambda)L\cos i \quad (8)$$

由式(8)可知, 任两束反射光间相位差与光纤 F-P 腔的长度成正比 · 当光纤 F-P 腔 的长度变化时, 相位差  $\Phi$  也随之变化, 由式(6)得反射光的光强也随之变化 · 因此, F-P 光纤传感器的设计是使被测量的变化转换为光纤 F-P 腔长度  $L$  的变化, 则通过测量反射光强的变化进而测出被测量的变化 ·

## 1 3 光纤 F-P 干涉腔反射光强与单模光纤 F-P 干涉腔的长度变化规律

F-P 干涉仪传感器是将被测量的变化转为光纤的长度的变化, 进而达到改变光波相位的目的 · 当光纤受纵向(或横向)的机械作用时, 光纤的长度、芯径、纤芯折射率都将发生变化, 则光纤中的相位也随之变化 · 当光波通过长度为  $L$  的光纤 F-P 腔后的相位延迟由式(8)推得

$$\Phi = (2\pi/\lambda)(2L) = \beta L \quad (9)$$

式中  $\beta = 4\pi/\lambda$  为光波在光纤中的传播常量 ·

当光纤 F-P 腔在外界因数作用下长度发生变化时, 光纤中光波的相位变化为

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= (\beta\Delta L + L\Delta\beta)\cos i = [\beta_L(\Delta L/L) \\ &+ L(\beta/\eta)\Delta\eta + L(\beta/\eta)\Delta\eta]\cos i \end{aligned} \quad (10)$$

式中  $b$  为光纤芯的半径, 第一项表示由光纤长度变化引起的相位延迟(应变效应); 第二项表示折射率变化引起的相位延迟(光弹效应); 第三项则表示光纤的半径改变所产生的相位延迟(泊松效应) ·

根据弹性力学<sup>6</sup>可证明

$$\Delta\varphi=\frac{4\pi}{\lambda}\{1-\frac{1}{2}n^2[(1-\mu)p_{12}-\mu_{11}]+[\frac{1}{2}(\frac{\lambda}{4bn})^2[1-(\frac{\lambda}{4bn})^2]^{-1/2}]\}\Delta L\cos i$$
$$=\kappa^14\pi\cos i\{k_l+k_a\}\Delta L\tag{11}$$

式中  $\mu$  称为横向变形系数(泊松比),  $p_{12}$ 、 $p_{11}$  为光弹系数,  $k_l=1-(1/2)n^2[(1-\mu)p_{12}-\mu_{11}]$  为光纤应变系数, 是由应变效应与光弹效应共同作用的和;  $k_a$  为第二中括号内的表达式, 是由表泊松效应产生. 由泊松效应引起的相位变化约占总量变化的 1% 左右, 可以忽略不计; 由应变效应和光弹效应产生的光纤中光波的相位延迟可表示为

$$\Delta\varphi=(4\pi/\lambda)k_l\Delta L\cos i\tag{12}$$

对于单模硅光纤(光纤直径为  $5\text{ }\mu\text{m}$ ), 当光源的波长为  $0.6328\text{ }\mu\text{m}$  时,  $k_l$  为  $0.7912$ . 由式(12)可知, 相位差的变化规律与光纤 F-P 腔长度的变化成正比.

对于如图 1 所示的光纤 F-P 腔, 设其 F-P 干涉腔初始长度为  $L_0$ , 由式(8)与(12)得

$$\varphi=\varphi+\Delta\varphi=(4\pi/\lambda)(L_0+k_l\Delta L)\cos i$$
$$=((4\pi/\lambda)L_0+(4\pi\kappa/\lambda)\Delta L)\cos i\tag{13}$$

将式(13)代入式(6)得

$$I_R=2I_0R[1+\cos((4\pi L_0/\lambda)\cos i)$$
$$\cdot\cos((4\pi\kappa_l/\lambda)\cos i)-\sin((4\pi L_0/\lambda)\cos i)$$
$$\cdot\sin((4\pi\kappa_l/\lambda)\Delta L\cos i)]\tag{14}$$

当  $L_0=(\lambda/8n)(2m+1)$ , ( $m=0, 1, 2, \dots$ ),  $i=0^\circ$ ; 式(14)可近似等效为

$$I_R=2I_0R(1-\sin(4\pi\kappa_l/\lambda)\Delta L)\tag{15}$$

由式(15)可见, 除常量外, 干涉信号中包含有光纤长度变化分量. 令

$$I_d=2I_0R$$
$$I_s=2I_0R\sin 4\pi\kappa_l\lambda^{-1}\Delta L\tag{16}$$

则  $I_s=I_d+I_s$ . 去掉直流分量  $I_d$ , 再经光电转换后得

参考文献

1 于荣金. 光子学与光子技术. 燕山大学学报. 1998, 22(1): 18~22

2 卢启柱等. 干涉式光纤位移传感器. 仪表技术与传感器. 1998, (8): 7~10

3 Kao T W, Tayler H F. High-sensitivity intrinsic fiber-optic Fabry-Perot pressure sensor. Optics Letter, 1996, 21(8): 15~19

4 母国光. 光学. 北京: 人民教育出版社, 1979: 250~253

5 毕卫红等. 光纤端面镀膜反射率检测系统. 传感技术学报, 1998, 11(4): 56~60

6 柯斯克 A, 罗迪逊 G 著, 王燮山等译. 光弹性应力分析. 上海科学技术出版社, 1984: 260~270

$$u_s=kI_s=U_a\sin(4\pi\kappa_l\lambda^{-1})\Delta L\tag{17}$$

对式(17)只需进行反正弦变换即可得到光纤长度的变化  $\Delta L=\arcsin(u_s)$ , 进而得到被测量.

2 误差分析

F-P 干涉为多光干涉, 而本文用近似的双光束代替而引进相干光合成振幅的误差为

$$\Delta A_R=at1t_1r_1r_2^2e^{j(\varphi+\varphi+2\varphi)}+at1t_1r_1r_2^3e^{j(\varphi+\varphi+3\varphi)}+\dots$$
$$=\{at1t_1r_1r_2^2e^{j\varphi}(1-r_1r_2e^{j\varphi})^{-1}\}e^{j(\varphi+\varphi)}\tag{18}$$

相应光强的误差为

$$\Delta I_R=\Delta A_R\times\Delta A_R^*=\frac{a^2(t1t_1)^2(r_1r_2^2)^2}{1+(r_1r_2)^2+2r_1r_2\cos\varphi}$$
$$=\frac{a^2(1-r_1^2)^2(r_1r_2^2)^2}{1+(r_1r_2)^2+2r_1r_2\cos\varphi}\tag{19}$$

反射光强误差与反射光强的比为

$$F=\frac{(1-r_1^2)^2(r_1r_2^2)^2}{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos\varphi}\tag{20}$$

将  $r_1^2=8\%$ ,  $r_2^2=10\%$ ,  $\cos\varphi=\pm 1$  代入式(20)得

$$F_{\max}=0.00413, F_{\min}=0.00345\tag{21}$$

由式(21)可得, 对于 F-P 腔用双光束代替多光束的误差小于 0.4%.

3 结束语

本文推导了由不同反射率反射面构成的光纤 F-P 腔反射光及透射光光强与入射光强、反射光与相位差的关系, 以单模光纤为例导出反射光强与低反射率光纤 F-P 腔长变化的关系. 应用本文所设计的 F-P 干涉仪构成传感器既充分利用 F-P 结构简单特点, 又克服了以往信号处理复杂的缺点. 所得结论可用于 F-P 光纤传感器的理论探讨和实用研究, 为光纤传感器的广泛和深入研究打下理论基础.

# MATHEMATICAL MODELS FOR FIBER-OPTICAL FABRY-PEROT INTERFEROMETRIC CAVITY

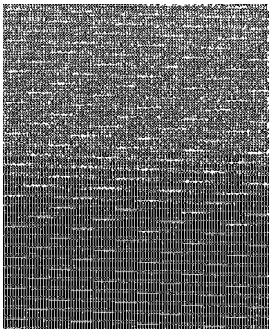
Bi Weihong

*Dept. of Photonics, Yanshan University, Qinhuangdao 066004*

Received date: 1999-06-04

**Abstract** In this paper, mathematical models for fiber-optical Fabry-Perot Interferometric cavity is presented; The Fabry-Perot interferential cavity consists of a section of optical fiber and the reflecting films coated on its both ends. The general formulas about the change of intensity with longitudinal are obtained.

**Keywords** Fiber-optics; Interferometry; Characteristics



**Bi Weihong** was born in Qinhuangdao, China, on June 28, 1960. She received the B. S., M. S. degrees in electrical engineering from Yanshan University, China, in 1982 and 1988, respectively. She has been engaged in the research work on optical fiber sensor and signal processing.