第五章 零点问题和不等式问题

一.零点

$\begin{cases} \text{存在性. } f(x)\text{在}[a,b]\text{连续}f(a)\cdot f(b)<0.\text{则}f(x)=0\text{在}(a,b)\text{内至少有一根} \\ \text{唯一性. } f(x)\text{在}(a,b)\text{内单调} \end{cases}$

在实际的题目中常常将等式问题转化为零点问题求解

罗尔推论 若$f^{(n)}(x)$至多有k个根.则$f(x)=0$至多有$k+n$个根.

实系数奇次方程至少有一实根,复数根成对(共轭出现)

二.不等式

1.常用不等式

① 均值不等式 $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ $a_1,a_2\cdots a_n>0$

② 柯西不等式 $(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\le(a_1^2+a_2^2+\cdots a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$

③ 伯努利不等式 $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\ge1+a_1+a_2+\cdots+a_n$ $a_1,a_2\cdots a_n>-1$ 且同号

④ 施瓦茨不等式 $(\int_a^b f\cdot g\,dx)^2\le\int_a^b f^2dx\int_a^b g^2dx$

---

⑤ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,则 $xy<\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$ $x.y.p.q>0$

⑥ $\sin x<x<\tan x$, $x>0$

$\arctan x<x<\arcsin x$, $0<x<1$

⑦ $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x<e^x-1$, $x>0$ 用拉氏中值定理证明

⑧ 有界性. $f(x)$在$[a,b]$连续. $m\le f(x)\le M$

$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

2.利用函数性质证明不等式. 对函数单调性 凹凸性 最值的性态来判断. 通常是作差或作商来转换为函数问题

常数变量化,化简后选择的量替换为x. 给出x范围并计算.(18.eg.6.12)

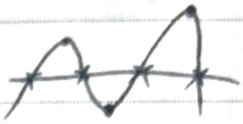
利用中值定理和泰勒公式也是证明不等式的有力工具.(18.eg.6.15)

一阶泰勒展开时，余项符号与$f(x)$相同，可以"去余项化不等式"

零点判断. $F(a)+F(b)+F(c)=0$. 则必有两项异号 存在零点

采用反证法证明存在$f(\xi)=0$的问题.

① 若$f(x)$有n个零点. 则$f'(x)$至少有$n-1$个零点



进而用多项式的阶数判断零点最大值m. $\therefore$ $m\le k\le n-1$. 一大一小确定k.