第四章 中值定理

一. 十大定理 （设$f(x)$在$[a,b]$上连续）

①有界定理 $|f(x)| \le K$

②最值定理 $m \le f(x) \le M$ 存在最大最小值

③介值定理 若$\mu \in [m,M]$，则$\exists \xi \in [a,b]$，使$f(\xi)=\mu$

④零点定理 若$f(a)\cdot f(b)<0$，则$\exists \xi \in [a,b]$，使$f(\xi)=0$

⑤费马定理 $f(x)$在x_0处可导且取极值，则$f'(x_0)=0$

⑥罗尔定理 设$f(x)$闭连续，开可导，$f(a)=f(b)$ 则$\exists \xi \in (a,b)$，使$f'(\xi)=0$

⑦拉格朗日中值定理 设$f(x)$闭连续，开可导，则$\exists \xi \in (a,b)$，使$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

⑧柯西中值定理 设$f(x)$，$g(x)$闭连续，开可导，$g'(x)\ne 0$，则$\exists \xi \in (a,b)$，使$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

⑨泰勒公式
$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\begin{cases}\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} & 拉\\ o((x-x_0)^n) & 皮\end{cases}$$

麦克劳林展开
$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\begin{cases}\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} & 拉\\ o(x^n) & 皮\end{cases}$$

对拉格朗日余项要求$n+1$阶可导。 区间中点展开。

⑩积分中值定理 设$f(x)$在$[a,b]$连续，$\exists \xi \in (a,b)$，使$f(\xi)=\dfrac{\int_a^b f(t)dt}{b-a}$ 称f为平均值。

离散 $\rightarrow$ $f(\xi)=\frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n))$，$\xi \in (x_1, x_n)$

二. 三种区间

①指定区间 $\xi \in (a,b)$

②缩小区间 要证$\xi \in (a,b)$时将其缩小到 $\xi \in (c,d) \subset (a,b)$

③划分区间 多中值

JUREN WENEM

1° 在开区间 (a,b) 上运用罗尔定理时，可将极限和无穷大看作广义数.

2° 拉氏中值定常见子 $f(x)=f(a)+f'(\xi)(x-a)$

积分形式为 $f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)dt$

3° 题目中给出 $f(x)$ 有一/二阶连续导数，$f(0)=0$，并求导数与积分的中值关系，首先对导数运用最值定理给出整体范围，再对积分麦克劳林展开并运算，使之出现在范围之中，由介值定理可得中值存在性 (18.eg.5.4)

三. 辅助函数构造法.

① $f'(\xi)+g(\xi)f(\xi)=0 \sim F(x)=f(x)\cdot e^{\int g dx}$

② $f(x)f'(x) \sim F(x)=f^2(x)$ ⑥ $F=\int_0^x f(t)dt$

③ $f'(x)/f(x) \sim F(x)=\ln(f(x))$

$(f''(x)f(x)-(f'(x))^2)/f^2(x) \sim f'(x)/f(x)$ 两次构造

④ $g''f-f''g \sim F(x)=fg'-f'g$

~~⑤ $(e^x f(x))'=e^x(f(x)+f'(x))$ $(e^{-x}f)'=e^{-x}(f'-f)$~~

1° 某些题目涉及 $f''(\xi)=0$，需要多次使用罗尔定理，找到三个点使 $f(a)=f(b)=f(c)$ 即可

2° 使用费马定理时只须说明可导函数的最值在区间内部取到，题目中往往带有不等式关系

3° 双中值问题，为保证两中值不同需把原区间分为无交集的子区间 (18.eg.5.14)，不同的 ξ,η 使成立

若题目无相关提示，可手动划分区间为 $[a,\xi],[\xi,b]$ 再运用中值定理

题目不要求中值不同 ($\exists\xi,\eta$ 使成立)，不必分区间，重点在寻找函数 (18.eg.5.16)

对 $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 可化为 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$，则与区间可扯上关系，同时有 $b-a=\frac{f(b)-f(a)}{f'(\xi)}=\frac{g(b)-g(a)}{g'(\eta)}$

4° 涉及高阶导数的中值问题，考虑使用泰勒公式，在区间端点或中点使用泰勒展开

端点展开时 $f(u)=f(x)+f'(x)(u-x)+\frac{f''(\xi)}{2!}(u-x)^2$，令 $u=a,b$

相减可得出 $f'(x)$ 与 $f(a)$，$f(b)$，拉氏余项间关系 (18.eg.5.18)

5°. 拉氏中值定理另一形式 $f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a)$，$0<\theta<1$ 可为函数

对 $f''(x)$ 和 $f(x)$ 关系. ① $f''(x)=f(x)$. $\Rightarrow f''(x)+f'(x)-f'(x)-f(x)=0$

令 $\varphi(x)=e^{-x}(f'(x)+f(x))$

② $f''(x)-3f'(x)+2f(x)=0 \Rightarrow f''(x)-f'(x)-2(f'(x)-f(x))=0$

令 $\varphi(x)=e^{-x}f(x)$. $\phi(x)=e^{-2x}(f'(x)-f(x))$

1. 当把原函数写成积分形式, 此时的中值定理不易于察觉. 需特别注意. 给出一例.

$\int_{-1}^{1} f(x)dx=0 \Rightarrow F(-1)=0$. $F(1)=0$. 若无零点则 x 不变号.

$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx=\int_{-1}^{1} g(x)dF(x)=g(x)F(x)\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}F(x)dg(x)=-\int_{-1}^{1}F(x)dg(x)$ 可检验零点.

2. 若给出积分与导数 而不知 $f(x)$ 在某点的情况 此时不宜用 $F=\int_0^x f(t)dt$ 会造成 $f'(x)$ 条件的不方便使用. 故使用分部积分. $\int_a^b f(x)g(x)dx=\int_a^b f(x)dG(x)=f(x)\cdot G(x)-\int_a^b G(x)f'(x)dx$

3. 求 $f(x)=A-B$ 型的等价无穷小时, 可使用在定点的泰勒展开. 特别是 A 或 B 中有常数时.