第七章 常微分方程

一. 一阶微分方程的求解

1. 变量可分离型 $\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(y)$

① $\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c)$ 令 $u=ax+by+c$ 两边对x求导 $\frac{du}{dx}=a+bf(u)$

② 齐次方程 $\frac{dy}{dx}=\varphi(\frac{y}{x})$ 令 $u=y/x$ 则 $y=xu$. $y'=u'x+u=g(u)$

$$\frac{du}{g(u)-u}=\frac{dx}{x}$$

③ 其它形式可能更加灵活,运用换元法.凑成分离型 eg. $f'(x,y)=f(x,y)\cdot g(x)$

2. 一阶线性方程 $y'+a(x)y=b(x)$

① 两边同时乘以 $e^{\int adx}$ 解出 $y=\frac{C+\int be^{\int adx}dx}{e^{\int adx}}$

此处可不加绝对值.

其它计算中出现 $\ln u$ 且不知正负,一律加绝对值.不知正负放入根号时要注意讨论.

② 伯努利方程. $y'=a(x)y+b(x)y^n$ $n\neq 0,1$ 可为负

两边除以 y^n. $(y^{1-n})'+(n-1)a\,y^{1-n}=(1-n)b$ 当 $n=-1$ 时 $yy'=ay^2+b$

令 $y^{1-n}=t$. $t'+(n-1)\cdot a\cdot t=(1-n)b$ 与xy函数关系颠倒相混合.

二. 二阶可降阶型微分方程的解

1. $y^{(n)}=f(x)$. 积分n次.将得n个任意常数的通解

2. $y''=f(x,y')$ 缺y方程. 令 $p=y'$ 则 $y''=p'$. 化为 $p'=f(x,p)$.

可解出 $p=y'=\varphi(x,C_1)$. 积分得 $y=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2$

3. $y''=f(y,y')$ 缺x方程. 令 $p=y'$, 则 $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot p$ 以y作自变量

化为 $p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$. 同理解出 $p=y'$

三. 线性微分方程解的结构

二阶为例 $y''+p(x)y'+q(x)y=\begin{cases}0 & \text{齐次}\\ f(x) & \text{非齐次}\end{cases}$

(1) 设 y_1,y_2 是齐次方程两解 若 $y_1/y_2\neq C$ 常数 则称 y_1,y_2 线性无关

则 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 是齐次方程通解

(2) 若 y^* 是非齐次方程一特解 则 $y=C_1y_1+C_2y_2+y^*$ 是非齐次方程通解

(3) 若 $\begin{cases}y_1\text{是 } y''+py'+qy=f_1 \text{ 的解}\\ y_2\text{是 } y''+py'+qy=f_2\end{cases}$ 则 y_1+y_2 是 $y''+py'+qy=f_1+f_2$ 的解

四. 二阶常系数线性微分方程 $p.q$ 为常数.

1.齐次通解 $y''+py'+q=0$. 特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$

$$\begin{cases} ① p^2-4q>0. & \lambda_1,\lambda_2\text{是两不等实根} & y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x} \\ ② p^2-4q=0 & \lambda\text{是重根} & y=(C_1+C_2x)e^{\lambda x} \\ ③ p^2-4q<0 & \alpha\pm\beta i\text{是共轭复根} & y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x) \end{cases}$$

2.非齐次特解.

① $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$ $\qquad y^*=e^{\alpha x}\cdot Q_n(x)\cdot x^k$

$e^{\alpha x}$相同. P_n与Q_n是同次多项式. k是α与特征根相重的次数 $\begin{cases} 0. & \alpha\neq\lambda_1,\alpha\neq\lambda_2 \\ 1. & \alpha=\lambda_1\text{或}\alpha=\lambda_2 \\ 2. & \alpha=\lambda_1=\lambda_2 \end{cases}$

② $f(x)=e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x)$

$y^*=e^{\alpha x}(Q_l^1(x)\cos\beta x+Q_l^2\sin\beta x)x^k$

$$\begin{cases} e^{\alpha x}\text{相同}. \ l=\max(m,n). \ Q^1,Q^2\text{为两不同的}l\text{次多项式} \\ k=0,\ \alpha\pm\beta i\text{不是特征根} \\ k=1.\ \alpha\pm\beta i\text{是特征根} \end{cases}$$

若$\alpha=0$ 可直接设$f(x)$为多项式

3.欧拉方程 $x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=f(x)$

通过代换 $x=e^t$ 化为以t为自变量的常系数线性微分方程

高阶方程 $y^{(n)}+P_1y^{(n-1)}+\cdots+P_{n-1}y'+P_ny=0$.

$\lambda^n+P_1\lambda^{(n-1)}+\cdots+P_{n-1}\lambda+P_n=0$ 求出特征根.

(1).特征根为单实根λ时,微分方程中对应一项 $Ce^{\lambda x}$

(2).k重实根λ,对应k项$(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})e^{\lambda x}$

(3).单复根 $\alpha\pm\beta i$ 对应两项. $e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

(4).k重复根$\alpha\pm\beta i$. 对应$2k$项. $e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x+(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x]$

在解微分方程时,将$x.y$同等看待,在解x为自变量的方程遇到困难时,不妨以y为自变量一试

微分方程两边求导时,一定要注意y或换元后变量t是x的函数

求出特征根后直接用λ_1,λ_2表示,一些情况下带来方便.(韦达定理)

含有积分的方程往往隐含有定解条件($f(0)=0$)

定解条件应尽早使用以确定出任意常数

① $2(ydx+xdy)+xdx-5ydy=0$. 应用多元微分学.

$(2y+x)dx+(2x-5y)dy=0$ ∴ $P_y=Q_x$ 是全微分方程

对x积分 $2xy+\frac{1}{2}x^2+f(y)=0$.

对y求偏导 $2x+f'(y)=2x-5y$ ∴ $f(y)=-\frac{5}{2}y^2$

∴ 解为 $x^2+4xy-5y^2=C$

② 由非齐次权反推特解, 结合初始条件求出 y^*.

eg. $y=y(x)$ 是 $y''+ay'+by=e^{3x}$ 的特解且 $y(0)=y'(0)=0$.

特解只有三种情形. $y_1^*=Ae^{3x}$, $y_2^*=Axe^{3x}$, $y_3^*=Ax^2e^{3x}$, 由定解条件知为 y_3^*

∴ 3是特征方程的二重根 ∴ $a=-6$, $b=9$

③ 举一例 伯努利方程 与 xy颠倒关系. $y'=\frac{xy}{3x^2-y^4}$

$\frac{dx}{dy}=3\frac{x}{y}-\frac{y^3}{x}=\frac{3}{y}x-\frac{1}{y^3}\frac{1}{x}$ $\quad 2xx'=\frac{6}{y}x^2-\frac{2}{y^3}$

$(x^2)'-\frac{6}{y}(x^2)=-\frac{2}{y^3}$ $\quad x^2=y^4+Cy^6$