第九章 二重积分

一、定义 曲顶柱体的体积、底面积 $d\sigma>0$

1. 在直角坐标系下 $\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}i,\ c+\frac{d-c}{n}j\right)\cdot\frac{b-a}{n}\cdot\frac{d-c}{n}$

此时D是长方形区域．若 $b-a=1$, $d-c=1$ 则步骤为 提出 $\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}$，凑出 $\frac{i}{n},\frac{j}{n}$ 写成二重积分

2. 存在性 类比定积分 $\begin{cases} f(x,y)\text{在D上连续，则可积} \\ f(x,y)\text{在D上有界，除有限点或有限光滑曲线外连续，则可积} \end{cases}$

二、性质 ①可加性 $D=D_1+D_2$ 则 $\iint_D f\,d\sigma=\iint_{D_1} f\,d\sigma+\iint_{D_2} f\,d\sigma$

②线性 $\iint_D(\alpha f+\beta g)\,d\sigma=\alpha\iint_D f\,d\sigma+\beta\iint_D g\,d\sigma$

③保号性 若 $f<g$ 则 $\iint_D f\,d\sigma\le\iint_D g\,d\sigma$

④有界性 若 $f(x,y)$ 在D上可积，则必有界

⑤估值定理 若 $m<f\le M$ 则 $mA\le\iint_D f\,d\sigma\le MA$

---

⑥中值定理 f 在D上连续 则存在 (ξ,η) 使 $\iint_D f\,d\sigma=f(\xi,\eta)\cdot A$

普通对称性
- D关于y轴对称 $\iint_D f\,d\sigma=\begin{cases}0, & f\text{是x的奇}\\ 2\iint_{D_1} f\,d\sigma, & f\text{是x的偶}\end{cases}$
- D关于x轴对称 $\iint_D f\,d\sigma=\begin{cases}0, & f\text{是y的奇}\\ 2\iint_{D_1} f\,d\sigma, & f\text{是y的偶}\end{cases}$

在判断 f 是 y 的奇或偶时，将 x 视为常数

轮换对称性 区域D关于 $y=x$ 对称 有 $\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\iint_D f(y,x)\,d\sigma=I$

即交换 x,y 位置，积分不变 则 $I=\frac{1}{2}\iint_D(f(x,y)+f(y,x))\,d\sigma$

三、运算 $\begin{cases}\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \\ \int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r,\theta)\,r\,dr\end{cases}$ 这里的下限都必需小于等于 $\le$ 上限

1.直接运算. 在计算中通过拆分多利用区域与函数的对称性来化简计算

2.转化坐标. 画出被积区域. 出现x^2+y^2时是使用极坐标的信号

注意 $rdr=\frac{1}{2}dr^2$ 此时的$\frac{1}{2}$容易遗漏.

3.积分次序. 由图形得上下限,被积函数不变

将二次积分转化为二重积分时,若下限>上限,需添加负号,分段求解 (18.eg.11.10)

1° 分块函数 分块求解 (18.eg.11.14)

2° D: $x^2+y^2\le R^2$. 则

$$\begin{cases}\iint_D (x^2+y^2-R^2)\,d\sigma = -\frac{1}{2}\pi R^4 \\ \iint k(x+y)\,d\sigma = 0\end{cases}$$

3° 二重积分取极值 $\begin{cases}\text{洛必达法则 适用于(换元后)t只存在于上下限中} \\ \text{中值定理. } f(\xi,\eta)\text{极限存在可直接取时. (18.eg.11.17, 11.23)}\end{cases}$

注意中值位置与t关系.

4° 一重积分化二重. 多用于相乘的情况.

$$\int_a^b f(x)dx\cdot\int_c^d g(x)dx = \int_a^b f(x)dx\cdot\int_c^d g(y)dy = \iint f(x)\cdot g(y)d\sigma = \iint f(y)g(x)d\sigma$$

主要利用最后一个等号 $2I=\iint(f(x)g(y)+f(y)g(x))d\sigma$

用于判断符号或使某项相消 (18.eg.11.18)

5° 在$D=[a,b]\times[c,d]$. $\iint f_{xy}\,dxdy = \int_a^b dx\int_c^d f_{xy}\,dy = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big|_c^d dx$

$$=\int_a^b\left(\frac{\partial f(x,d)}{\partial x}-\frac{\partial f(x,c)}{\partial x}\right)dx = f(x,d)-f(x,c)\Big|_a^b$$

$$= f(b,d)-f(b,c)-f(a,d)+f(a,c)$$

① 摆线方程 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$

$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$

② 从x轴往上面积的重心 可以直接用公式计算 $\begin{cases} \iint x\,dxdy = \int xy\,dx \\ \iint y\,dxdy = \int \frac{1}{2}y^2\,dx \end{cases}$

只适用于  型的区域

③ 利用对称性扩展积分区域 $\int_0^1\int_0^y f(x)\cdot f(y)\,dxdy = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 f(x)\cdot f(y)\,dxdy = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2$