第八章 多元函数微分学

一、极限与连续性

1. 判断连续性，证明所给方程的绝对值极限 $\lim|f-A|\le\sqrt{x^2+y^2}\ (<\varepsilon)$

此时 $\sqrt{x^2+y^2}$ 也可换成 x^2+y^2，$|x|+|y|$ 等，

其中常用不等式 $|\sin(xy)|\le|xy|$，$\frac{x^2}{x^2+y^2}\le1$，$|xy|\le\frac{1}{2}(x^2+y^2)$

2. 若 $P\to P_0$，$f(P)\to l$，则当 P 沿任一条曲线 $y=y(x)$ 趋于 P_0 时，都应有 $f(P)\to l$。

因此，当分子分母同时除以某一值 (x^2) 时，变为 $\frac{k}{1+k^n}$ 的形式，说明极限不存在（$\frac{xy}{x^2+y^2}$，$(0,0)$）

可令 $u=x^2+y^2\to0$ 换元，用一元极限法来判别

3. 多元函数同样有最值性和介值性等定理 $\begin{cases}\text{闭区间上连续 } m<f(P)<M\\ \text{任给 } P.Q\in D\text{，若 } f(P)\le k\le f(Q)\text{，则 }\exists M\text{ 使 } f(M)=k\end{cases}$

二、偏导数与全微分

1. (1) $f_x(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 利用定义求定点偏导时，先代入点，再求极限（18.09.10.3）

判断偏导的连续性 ① 运用公式法写出 $f_x'(x,y)$ 非定点，判断 $P\to P_0$ 时是否存在 / 与定义法相同

② $f(x,y)$ 在 P 点不可微，则偏导在 P 点不连续

---

(2) $f_x(x,y)$ 将 y 看作常量对 x 求导，偏导的存在与连续性无关

$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, & r_x=\frac{x}{r}\\ u=1/r, & u_x=-\frac{x}{r^3}\end{cases}$$

(3) 高阶偏导 1° 若 $z=f(x,y)$ 在 D 上存在连续的 f_{xy} 与 f_{yx}，则 $f_{xy}=f_{yx}$。

"混合偏导连续"这一条件不可去掉（18.09.10.4）

2. 全微分 $dz=z_x\,dx+z_y\,dy$（可微则偏导存在）

(1) 可微判别 检验 $\lim\limits_{\rho\to0}\frac{\Delta z-[f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y]}{\rho}$ 是否为0，先代入 (x_0,y_0) 的偏导值

偏导存在且连续 ⇒ 可微，偏导不存在，不可微 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$

(2) 复合函数微分法 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，$z=f(u,v)$

1° $z_x=f_u u_x+f_v v_x=f_1'u_x+f_2'v_x$ 注意 f_1' 和 f_2' 还是二元复合函数

$z_{xy}=u_{xy}f_1'+u_xu_yf_{11}''+(u_xv_y+u_yv_x)f_{12}''+v_xv_yf_{22}''+v_{xy}f_2'$

2° $dz=z_u\,du+z_v\,dv$

题目给出等式 $\frac{\partial^2z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=0$ 要求变换为 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 时 $\frac{\partial^2z}{\partial u\partial v}=0$，直接写出

$z<\begin{matrix}u\\v\end{matrix}\times\begin{matrix}x\\y\end{matrix}$ 偏导关系代入等式，除此项外其余系数均为0（18.09.10.8）

(3) 隐函数微分法

1° $F(x,y)$. $P_0(x_0,y_0)$ 邻域内 F_x. F_y 连续 且 $F(x_0,y_0)=0$, $F_y(x_0,y_0)\neq 0$. 则在 P_0 一邻域内有唯一可微函数 $y=y(x)$. 且 $y'=-F_x/F_y$

2° $F(x,y,z)$. $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 邻域内有连续偏导. $F(x_0,y_0,z_0)=0$. $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$. 存在 $z=z(x,y)$. 且 $z_x=-F_x/F_z$ $z_y=-F_y/F_z$. (F 对 $x.y.z$ 求偏导时忽略 $z(x,y)$ 关系)

给出表达式时,对表达式两边求导可解出 u_x. u_y (18.eg.10.10). 多次求导 (18.eg.10.1)

偏微分积分 eg. $f\frac{\partial f}{\partial x}=1$. 则 $\ln|f|=x+C(y)$

三. 多元函数的极值与最值

1. 必要条件 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 一阶偏导存在且取极值, 则 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$

充分条件 $\begin{cases} f_{xx}=A \\ f_{xy}=B \\ f_{yy}=C \end{cases}$ 则 $\Delta=B^2-AC \begin{cases} <0 \text{ 必取极值 } A<0 \text{ 极大. } A>0 \text{ 极小} \\ >0. \text{ 非极值} \\ =0. \text{ 失效 另谋他法} \end{cases}$

利用必要条件求出可疑点, 用充分条件判别可疑点

若 $\Delta=0$. 则在 (x_0,y_0) 的任一邻域内 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2<1$. 取点 eg $(\varepsilon,\varepsilon)$ $(\varepsilon,-\varepsilon)$ 说明此点是/否为极值 (18.eg.10.16)

2. 条件极值 $u=f(x,y,z)$ 在条件 $\varphi(x,y,z)=0$, $\psi(x,y,z)=0$ 下的最值.

构造辅助函数 $F=u+\lambda\varphi+\mu\psi$ $\begin{cases} F_x'=0,\ F_y'=0.\ F_z'=0 \\ \varphi=0.\ \psi=0 \end{cases}$

$x^2=y^2$ 利用轮换对称性时有正负两种情况

解出方程组的备选点 P_i. 求出 $f(P_i)$ 得最值.

可以将边界条件直接代入 u 中. 若可使之消去 $x.y$ 中之一, 则变为求一元函数极值

若所给方程为隐函数. 对两边 $x.y$ 求偏导不变 得到 $x.y.z$ 关系 回代到方程才能得出具体的点, 再对方程求二阶偏导 (此时 $z_x, z_y=0$) 判断是极大还是极小

① 设函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处 $f_x'(x_0,y_0)=0$，$f_y'(x_0,y_0)=0$ 则在 (x_0,y_0) 处不一定取极值

② 偏导数的连续性：$\begin{cases} \text{用公式法求出 } f_x(x,y) \text{ 并取极限，} x\to x_0,\ y\to y_0 \\ \text{与定义法比较，看是否相同} \end{cases}$

③ 多元函数 $f(x,y)$ 的二阶泰勒展开（在 (x_0,y_0) 点）

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)$$
$$+\frac{1}{2}\left(f_{xx}''(x_0,y_0)(x-x_0)^2+2f_{xy}''(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)+f_{yy}''(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right)+R_2$$

④ 求 $ax^2+bxy+cy^2=1$ 条件下 x^2+y^2 的极值

$F=x^2+y^2-\lambda(ax^2+bxy+cy^2-1)$

$F_x=2x-\lambda(2ax+by)=0$ ①

$F_y=2y-\lambda(bx+2cy)=0$ ②

此时不要消去 λ. 用 $\frac{x}{2}\cdot$① $+\frac{y}{2}\cdot$② 得

$x^2+y^2-\lambda(ax^2+bxy+cy^2)=0$ $\therefore x^2+y^2=\lambda$

如何求 λ？ $\begin{cases}(2-2a\lambda)x-b\lambda y=0 \\ -b\lambda x+(2-2c\lambda)y=0\end{cases}$ 有非零解

$\therefore |A|=0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ 为最大，最小值

⑤ 设 $z=z(x,y)$ 由方程组 $\begin{cases} x=(t+1)\cos z \\ y=t\sin z\end{cases}$ 确定，且 $t=t(x,y)$. 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$.

$\Rightarrow z=z(x,y)$ 则最终结果中不应出现 t. 对两方程两边同时对 x 求导.

$$\begin{cases} 1=\cos z\,\frac{\partial t}{\partial x}-(t+1)\sin z\cdot\frac{\partial z}{\partial x} \\ 0=\sin z\cdot\frac{\partial t}{\partial x}+t\cos z\,\frac{\partial z}{\partial x}\end{cases} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\sin z}{(1+t)\sin^2 z+t\cos^2 z}=-\frac{\sin z}{y+\sin^3 z}$$