**4.遞迴函數**

*導讀*

哥德爾引入遞迴函數系統，一種僅包含 3 個基礎遞迴函數及 2 個函數轉換規則的簡單形式系統，若某項事物可從基礎遞迴函數逐步經由函數轉換建構出來，代表此項事物可於遞迴函數系統內決定，換句話說，證明。

因為很簡單，若形式系統 A 能實作遞迴函數系統的基礎遞迴函數及函數轉換規則，所有能由遞迴函數系統內決定或證明的事物，可立即推論也能形式系統A內證明。

本文中哥德爾先利用遞迴函數建構出P系統及形式不可決定命題，再證明普通的算術系統，即包含加法及乘法的自然數算術系統，可實作遞迴函數，便直接將不可決定命題推廣至算術系統。

遞迴函數系統對程式設計相當重要，其最早的實作就是 LISP 語言，且已全面滲入現代所有的程式語言中了。

遞迴函數轉換規則係指能從已存在的函數衍生新的函數， 哥德爾提到2種方式，第1種稱為遞迴定義，第2種稱為函數合成，詳如以下論文本文。

**4.1.遞迴定義**

Wir schalten nun eine Zwischenbetrachtung ein, die mit dem formalen System P vorderhand nichts zu tun hat, und geben zunächst folgende Definition:

Eine zahlentheoretische Funktion 25) φ(x1,x2...xn) heißt rekursiv definiert aus den zahlentheoretischen Funktionen ψ(x1,x2...x(n-1)) und μ(x1,x2...x(n+1)), wenn für alle x2...xn,k 26) folgendes gilt:

現在先轉換至一個觀念，其與 P 系統並無關聯，首先給定以下定義:

一個數論函數 25) φ(x1,x2...xn) 稱作遞迴定義自數論函數 ψ(x1,x2...x(n-1)) 及 μ(x1,x2...x(n+1))， 若其對所有引數 x2...xn,k 26) 使得：

φ(0 ,x2...xn) = ψ(x2...xn) (2)

φ(k+1,x2...xn) = μ(k,φ(k,x2...xn),x2...xn)

25) D. h. ihr Definitionsbereich ist die Klasse der nicht negativen ganzen Zahlen (bzw. der n-tupel von solchen) und ihre Werte sind nicht negative ganze Zahlen.

25) 即其定義域為非負整數(或 n 元非負整數值組) 且其值為非負整數。

26) Kleine lateinische Buchstaben (ev. mit Indizes) sind im folgenden immer Variable für nicht negative ganze Zahlen (falls nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt ist).

26) 小寫拉丁字母(可能帶有索引)於後文均表示非負整數變數 (除非例外情形已被明確說明)。

/180/

**4.2.遞迴數論函數**

Eine zahlentheoretische Funktion φ heißt rekursiv, wenn es eine endliche Reihe von zahlentheor Funktionen φ1,φ2...φn gibt, welche mit φ endet and die Eigenschaft hat, daß jede Funktion φk der Reihe entweder aus zwei der vorhergehenden rskursiv definiert ist oder aus irgend welchen der vorhergehenden durch Einsetzung entsteht 27) oder schließlich eine Konstante oder die Nachfolgerfunktion x+1 ist.

一個數論函數 φ 稱為遞迴的，若且惟若存在一個數論函數的有限序列 φ1,φ2...φn，其以 φ 結束且具備以下特性，序列中的每個函數 φk 不是由前兩項遞迴定義而來，就是由對前幾項執行取代操作而得 27)，不然就是一個常數或是後繼函數 x+1。

**4.3.函數合成**

27) Genauer: durch Einsetzung gewisser der vorhergehenden Funktionen an die Leerstellen einer der vorhergehenden, z.B. φp(x1, x2) = φp[φq(x1, x2), φr(x2)] (p, q, r < k). Nicht alle Variable der linken Seite müssen auch rechts vorkommen (ebenso im Rekursionsschema (2)).

27) 精確而言：經由配置一些前項函數於前項之空位置，例如： φk(x1, x2) = φp[φq(x1, x2), φr(x2)] (p, q, r < k). 所有左側變數不一定要在右側出現(就如同遞迴框架(2))。

**4.4.基礎遞迴函數**

譯註：由哥德爾的定義可知基礎遞迴函數公為零或常數函數或是後繼函數 x+1，基礎遞迴函數不是經由遞迴定義或函數合成所得，而是預先就接受為遞迴函數，如同邏輯上，公理是預先就接受的定理。哥德爾提到基礎遞迴函數如下表：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **編號** | **名稱** | **定義** |
| RA1 | 零函數或常數函數 | 0(x)=0 或 c(x)=c |
| RA2 | 後繼函數 | f(x)=x+1 |
| 現代通常會包含投影函數： | | |
| RA3 | 投影函數 | p kj(x1,x2,...,xj,...,xk)=xj |

但現在我們知道只要零函數接受為公理，可推論出常數函數具遞迴封閉性，所以基礎遞迴函數可以不須要常數函數，如下面的定理：

**R1：常數函數為遞迴**

*證明*

常數函數為形式如c(x)=c 之函數，其中 c 代表任意常數，例如1(x)為恆等於 1之常數函數，2(x)為恆等於2 之常數函數等等。  
我們知道零函數及後繼函數為遞迴的，定義常數函數 1(x) = f(0(x))，可推得 1(x)為遞迴。  
現在假設常數函數c(x) = c 為遞迴，則有下式成立：  
(c+1)(x) = c+1 = f(c(x))  
依數學歸納法，所有常數函數均為遞迴。

**4.5.級數**

/180/

Die Länge der kürzesten Reihe von φi, welche zu einer rekursiven Funktion φ gehört, heißt ihre Stufe.

定義遞迴函數 φ 的最短 φi 序列長度稱為其級數。

譯註：遞迴函數 φ 之級數描述從基礎遞迴函數至少須經幾次函數轉換而得到φ，依定義可直接推得基礎遞迴函數的級數為 1，再看一個例子，僅包含 0 的集合{0}的級數為何？集合可視為單元關係，關係可由特徵函數定義，集合{0}的特徵函數χ{0}能經由1次遞迴定義建構如下：

χ{0}(0) = f(0)

χ{0}(x+1) = 0(x) (R2)

因為χ{0}(x)是經過一次的遞迴定義，故其級數為 2，前揭證明也說明集合 {0} 是遞迴的。

**4.6.遞迴關係**

Eine Relation zwischen natürlichen Zahlen R(x1...xn) heißt rekursiv 28), wenn es eine rekursive Funktion φ(x1...xn) gibt, so daß für alle x1,x2...xn

一個自然數關係 R(x1...xn) 稱為遞迴 28)， 若且惟若存在一個遞迴函數 φ(x1...xn)， 使得所有的 x1,x2...xn 滿足下式：

R(x1...xn) ~ [φ(x1...xn)=0] 29).

28) Klassen rechnen wir mit zu den Relationen (einstellige Relationen). Rekursive Relationen R haben natürlich die Eigenschaft, daß man für jedes spezielle Zahlen-n-tupel entscheiden kann, ob R(x1...xn) gilt oder nicht.

28) 類別也算此種關係(其為單元關係)，遞迴關係 R 自然具備下列特性， 對每個特定 n 元數對，可決定對 R(x1...xn) 是否成立。

譯註：φ 函數稱為關係 R 的特徵函數，因為哥德爾定義關係成立時特徵函數為 0， 故知 0 為邏輯真值，1 為邏輯假值。類別(或集合)可視為單元關係，故也具有特徵函數，以下我們使用 χ{K} 表示類別 K 的特徵函數。以下我們以證明正整數類別是遞迴來作說明：

**定理 R3：正整數類別是遞迴的。**

*證明：*

令正整數類別 ℕ\* = ℕ\{0}，即不含 0 之自然數類別。其特徵函數 χℕ\*(n) 可遞迴定義如下：

* χℕ\*(0)=f(0)
* χℕ\*(x+1)=0

故可知 ℕ\* 為遞迴，得證。

29) Für alle inhaltlichen (insbes. auch die metamathematischen) Überlegungen wird die Hilbertsche Symbolik verwendet. Vgl. Hilbert-Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik, Berlin 1928.

29) 所有內容觀念(特別是後設數學)是使用希爾伯特符號。 參考希爾伯特-阿克曼， 理論邏輯基礎，柏林 1928。

譯註：哥德爾在後面建構算術系統除了 ≡ 外， 都是使用希爾伯特的符號，可參閱註 33)， 符號定義如下表：

|  |  |
| --- | --- |
| **符號** | **意義** |
|  | 否定，此符號為命題符號上方的頂線 |
| & | 且，合取 |
| ∨ | 或，析取 |
| → | 推論 |
| ~ | 等值 |
| (x) | 全稱量詞 |
| (Ex) | 存在量詞 |

**4.7.遞迴定理**

譯註：哥德爾描述並略為證明了4個定理， 描述以下的操作是封閉在遞迴函數系統內，I 陳述遞迴定義及函數合成具遞迴封閉性；II 陳述基本邏輯操作具遞迴封閉性，包含否定、合取及析取，其它的邏輯操作可從前三個操作衍生出來； III描述了相等關係是具遞迴封閉性；IV 描述了最小操作具遞迴封閉性，這是最難證明的定理，但此定理卻給定之後的定理能有量化限制，此量化限制為一個定理能於有限步驟內建構的堅實基礎，若能有限步驟建構之定理，就是可判定的定理。

Es gelten folgende Sätze:

以下定理成立：

I.Jede aus rekursiven Funktionen (Relationen) durch Einsetzung rekursiver Funktionen an Stelle der Variablen entstehende Funktion (Relation) ist rekursiv; ebenso jede Funktion, die aus rekursiven Funktionen durch rekursive Definition nach dem Schema (2) entsteht.

I.每個經由插入遞迴函數在已建構函數(關係)之變數位置上而得之遞迴函數(關係) 是遞迴的； 每個藉由框架(2)遞迴定義產出之遞迴函數也同樣如此。

II. Wenn R und S rekursive Relationen sind, dann auch R, R ∨ S (daher auch R & S).

II.若 R 及 S 為遞迴關係，則 R, R ∨ S 也是(由此 R & S 也是) 。

III.Wenn die Funktionen φ(𝔵), ψ(𝔶) rekursiv sind, dann auch die Relation: φ(𝔵) =ψ(𝔶) 30)

III.若函數 φ(𝔵)及ψ(𝔶)是遞迴則以下關係也是：φ(𝔵)=ψ(𝔶)30)

30) Wir verwenden deutsche Buchstaben 𝔵, 𝔶 als abkürzende Bezeichnung für beliebige Variablen-n-tupel, z. B. x1 x2 ... xn.

30) 利用哥德字母 𝔵, 𝔶表示 n 元數組變數(即 x1 x2 ... xn)。

IV.Wenn die Funktion φ(𝔵) und die Relation R(x,𝔶) rekursiv sind, dann auch die Relationen S,T

IV.若函數 φ(𝔵) 及關係 R(x,𝔶) 是遞迴，則以下關係 S, T 也是：

S(𝔵,𝔶)~(Ex)[x≦φ(𝔵)&R(x,𝔶)]

T(𝔵,𝔶)~(x) [x≦φ(𝔵)→R(x,𝔶)]

sowie die Funktion ψ

以及函數 ψ 也是：

ψ(𝔵,𝔶)=εx[x≦φ(𝔵)&R(x,𝔶)]

wobei εxF(x) bedeutet: Die kleinste Zahl x, für welche F(x) gilt und 0, falls es keine solche Zahl gibt.

其中 εxF(x) 指： 最小數 x 滿足 F(x)，而 0 表示不存在這樣的數。

Satz I folgt unmittelbar aus der Definition von "rekursiv".

定理 I 由遞迴之定義直接推得。

**4.8.基本邏輯操作是遞迴的**

Satz II und III beruhen darauf, daß die den logischen Begriffen -, ∨, = entsprechenden zahlentheoretischen Funktionen

α(x), β(x,y), γ(x,y)

nämlich:

α(0)=1 ; α(x) =0 für x≠0

β(0,x)=β(x,0)=0; β(x,y)=1, wenn x,y beide ≠0 sind

γ(x,y)=0, wenn x=y;γ(x,y)=1, wenn x≠y

/181/

recursiv sind, wie man sich leicht überzeugen kann.

定理 II 及 III 根據邏輯觀念 -, ∨, = 對應到數論函數

α(x), β(x,y), γ(x,y)

即：

α(0)=1 ; α(x) =0 當 x≠0

β(0,x)=β(x,0)=0; β(x,y)=1, 當 x,y 都 ≠0

γ(x,y)=0, 當 x=y;γ(x,y)=1, 當 x≠y

前揭函數是遞迴能輕易證明。

譯註：雖然哥德爾說邏輯操作能輕易證明，但為了讓你們省下一些思考的時間，我還是把證明作完整補充。與現代程式語言大大不同，哥德爾將邏輯真以0表示，邏輯假以1表示，前揭函數的證明如下：

**定理 R4：否定是遞迴**

*證明：*

α 即正整數集合 ℕ\* 的特徵函數 χℕ\*，可由定理 R3 知該函數是遞迴，得證。

**定理 R5：析取是遞迴**

*證明：*

令 β 定義如下：  
β(x,y) = α(α(x.y))  
由定理 R4 否定是遞迴及定理 R12 乘法是遞迴得證。  
以實例說明如下：

β(0,0) = α(α(0.0))

= α(α(0))

= α(1)

= 0

β(0,2) = α(α(0.1))

= α(α(0))

= α(1)

= 0

β(2,0) = α(α(2.0))

= α(α(0))

= α(1)

= 0

β(2,4) = α(α(2.4))

= α(α(8))

= α(0)

= 1

**4.9.相等關係為遞迴**

譯註：γ(x,y) 表示相等關係，詳細證明如定理R6 至 R11：

**定理 R6:前項函數是遞迴。**

*證明：*

前項函數 p 為後繼函數之對立函數。  
建構 p 之遞迴定義如下：

p(0) = 0

p(x+1)=(x,p(x))

由定理 RA1 常數 0 為遞迴及定理 RA3 投影函數為遞迴，得證。

**定理 R7:隔斷減法是遞迴。**

*證明：*

隔斷減法 ㅗ定義如下（我以韓文字母 ㅗ表示）：

n ㅗ m = 0 : n < m

= n-m : n > m

可得

n ㅗ m+1 = 0 : nㅗm = 0

= (n-|m)-1 : nㅗm > 0

可將 n ㅗ m 遞迴定義如下：

n ㅗ m = n : m=0

= p(nㅗ(m-1)) : m>0

由定理 R6 前項函數為遞迴，得證。

**定理 R8：絕對差是遞迴。**

*證明：*

n, m 的絕對差記為 |n-m|，為 2 數的差異值， 例如 |1,2| 為 1，|4,2| 為 2。 其建構定義如下：  
|n-m| = (nㅗm) + (mㅗn)  
  
= (nㅗm) + (p22(n,m)ㅗ p21(m,n))  
  
由定理 RA3 投影函數為遞迴、 定理 R7 隔斷減法是遞迴及定理 RA11 加法為遞迴，得證。

**定理 R9：相等關係是遞迴。**

*證明：*

2 數相等關係等價於 2 數絕對差是否等於 0，如以下所述：

* x=y~|x-y|=0
* x≠y~|x-y|>0

哥德爾定義 γ 為相等關係之特徵函數，令 γ(x,y) = χ{0}(|x-y|)， 由定理 R2 集合 {0} 是遞迴及定理 R8 絕對差是遞迴，得證。  
以幾個例子計算來檢核此定義是否正確，如下例：

* γ(2,2) = χ{0}(|2-2|) = χ{0}(0) = 0
* γ(3,4) = χ{0}(|3-4|) = χ{0}(1) = 1

**命題 R10：符號函數是遞迴。**

*證明：*

符號函數 sgn 用來判斷一數值的正負號，定義如下：

sgn(n) = 0 : n > 0

= 1 : n < 0

取 sgn(n) = χℕ\*(n)， 再依定理 R2 正整數類別是遞迴的，得證。

**4.10.定理 IV 證明**

Der Beweis für Satz IV ist kurz der folgende: Nach der Voraussetzung gibt es ein rekursives ρ(x,), so daß:

命題 IV 之證明很簡短如下：  
設存在一個遞迴函數 ρ(x,𝔶) 使得：  
R(x,)~[ρ(x,𝔶)=0].

譯註：取 ρ 表 R 之特徵函數係其為 R 的希臘音字母。哥德爾說前揭證明很簡短， 我想他認為 1,000 行以內的證明都算簡短:(

Wir definieren nun nach dem Rekursionsschema (2) eine Funktion χ(x,) folgendermaßen:

現在根據遞迴框架(2)定義函數 χ(0,𝔶) 如下：

* χ(0,𝔶)=0
* χ(n+1,𝔶)=(n+1).a+χ(n,𝔶).α(a) 31)

χ表特徵函數，德文為 charakteristische Funktion ，其為ch的希臘音字母。

31) Wir setzen als bekannt voraus, daß die Funktionen x+y (Addition), x.y (Multiplikation) rekursiv sind.

31) 預設已知函數 x+y (加法)及 x.y (乘法) 是遞迴的。

譯註：哥德爾說加法及乘法之遞迴封閉性是預設，表示將省略其證明，在此我補充證明如下：

**定理 R11：加法是遞迴的**

x+y 可遞迴定義如下：

* y=0 → x+y=x
* y>0 → x+y=f(x+(y-1))=f(p33(x,y-1,x+(y-1)))

由定理 RA2 後繼函數為遞迴及定理 RA3 投影函數為遞迴，得證。

**定理 R12：乘法是遞迴的。**

x.y 可遞迴定義如下：

* x=0 → x.y=0
* x>0 → (x+1).y=x.y+y=p32(x,x.y,y)+p33(x,x.y,y)

由定理 RA3 投影函數為遞迴及定理 R11 加法是遞迴的，得證。

wobei

其中  
a=α[α(ρ(0,𝔶))].α[ρ(n+1,𝔶))].α[χ(n,𝔶)].

譯註：a 可由以下程式碼表達：

# ρ 是關係 R 的特徵函數

a = if ρ(0 ,𝔶)≠0 # 0不滿足關係R，即R(0,𝔶)成立。

and ρ(n+1,𝔶)=0 # n+1 滿足關係R，即R(0,𝔶)成立。

and χ(n ,𝔶)=0 # χ為0

then 0

else 1

χ(n+1,𝔶) ist daher entweder =n+1 (wenn a = 1) oder == χ(n, 𝔶) (wenn a = 0) 32)

因此 χ(n+1,𝔶) 若非 =n+1 (當 a = 1 時) 則 = χ(n, 𝔶) (當 a = 0 時) 32)

32) Andere Werte als 0 und 1 kann a, wie aus der Definition für α ersichtlich ist, nicht annehmen.

32) 由 α 的定義明顯得知 a 不能接受 0 與 1 以外之值。

Der erste Fall tritt offenbar dann und nur dann ein, wenn sämtliche Faktoren von a 1 sind, d.h. wenn gilt:

第一種情形顯然僅在 a 的所有乘數為 1 時才成立， 即下式成立：

R(0,𝔶) & R(n+1,𝔶) & [χ(n,𝔶)=0].

譯註：R(0,𝔶) & R(n+1,𝔶) & [χ(n,𝔶)=0] 即  
ρ(0,𝔶)≠0 & ρ(n+1,𝔶)=0 & χ(n ,𝔶)=0   
由上可知哥德爾以乘法代表合取，故取 0 表示邏輯假值，

Daraus folgt, daß die Funktion χ(n, 𝔶) (als Funktion von n betrachtet) 0 bleibt bis zum kleinsten Wert von n, für den R(n, 𝔶) gilt, und von da ab gleich diesem Weft ist (falls schon R(0,𝔶) gilt, ist dem entsprechend χ(n,𝔶) konstant und =0). Demnach gilt:

可推得函數 χ(n, 𝔶) (視為 n 之單元函數 ) 保持為 0 直到 n 為滿足 R(n, 𝔶) 的最小值， 且開始恆等於此值。 (若 R(0,𝔶) 成立則 χ(n,𝔶) 對應到常數 0)。 因此：

* ψ(𝔵,𝔶) = χ(φ(𝔵),𝔶)
* S(𝔵,𝔶) ~ R[ψ(𝔵,𝔶),𝔶]

譯註：哥德爾寫了「若 R(0,𝔶) 成立則 χ(n,𝔶) 對應到常數 0」， 這是因為一開始 0 就滿足關係 R，則特徵函數 χ 永遠為 0， 因為一開始就找到啦！ 以現代程式語言定義χ函數非常簡短，如下：

def χ(n,𝔶)

for(i=0;i<n;i++)

if R(i, 𝔶) then return i

return 0

Die Relation T läßt sich durch Negation auf einen zu S analogen Fall zurückführen, womit Satz IV bewiesen ist.

關係 T 可輕易以 S 的否定寫成， 故命題 IV 得證。

譯註：把目標與建構法擺近一點，讓讀者比較，因為相隔太遠，反而不利理解：  
  
ψ(𝔵,𝔶)=εx[x≦φ(𝔵)&R(x,𝔶)]  
可輕易以 χ 定義如下：  
ψ(𝔵,𝔶) = χ(φ(𝔵),𝔶)  
  
S(𝔵,𝔶)~(Ex)[x≦φ(𝔵)&R(x,𝔶)]  
可輕易以 ψ 定義如下：  
S(𝔵,𝔶) ~ R[ψ(𝔵,𝔶),𝔶]  
  
T(𝔵,𝔶)~(x) [x≦φ(𝔵)→R(x,𝔶)]  
可輕易以 S 否定定義。

**4.11.基本算術是遞迴的**

Die Funktionen x+y, x.y, xy, ferner die Relationen x<y, x=y sind, wie man sich leicht überzeugt, rekursiv und wir definieren nun, von diesen Begriffen ausgehend, eine Reihe von Funktionen (Relationen) 1-45, deren jede aus den vorhergehenden mittels der in den Sätzen I bis IV genannten Verfahren definiert ist.

x+y, x.y, xy 等函數，甚至 x<y, x=y 等關係， 可以輕易證明為遞迴的， 後可從這些項目開始定義 1-45 一系列的函數(關係)， 其中每項經由定理 I 至 IV 相關之操作自前項定義而來。

譯註：同樣哥德爾又說次方、次序及相等關係可輕易證明，我仍備妥證明如下：

**定理 R13：次方是遞迴的。**

xy可遞迴定義如下：  
當y=0時，xy=1  
當y>0時，xy+1=xy.x = p 32(y,xy,x).p 33(y,xy,x)  
由 RA3 投影函數為遞迴及 R12 乘法是遞迴的，得證。

**定理 R14：次序關係是遞迴的**

次序關係等價於以下關係：  
n<m ~ mㅗn>0  
n≥m ~ mㅗn=0  
故可以定義 < 的特徵函數為  
χ<(n,m) = χℕ\*(mㅗn)  
由 R3 集合 ℕ\* 是遞迴的及 R4 隔斷減法是遞迴，得證。  
令 ≥ 的特徵函數為  
χ≥(n,m) = χ0(mㅗn)  
由 R2 集合 0 是遞迴的及 R4 隔斷減法是遞迴，得證。

**6.表現定理**

*導讀*

以下定理有人稱為表現定理，因為此定理證明所有遞迴函數均可於 P 系統內表現。 遞迴函數系統僅包含 3 個基礎遞迴函數及 2 個函數轉換規則， 所以要證明 P 系統能表現所有的遞迴函數， 只要能以 P 系統實作遞迴函數系統的 3 個基礎遞迴函數及 2 個函數轉換規則 即可證明。

Die Tatsache, die man vage so formulieren kann: Jede rekursive Relation ist innerhalb des Systems P (dieses inhaltlich gedeutet) definierbar, wird, ohne auf eine inhaltliche Deutung der Formeln aus P Bezug zu nehmen, durch folgenden Satz exakt ausgedrückt:

以下定理精確表達之事實概略形式化如下： 每個遞迴關係可於 P 系統內定義（這被內容詮譯）， 不須參照由 P 衍生之公式之內容詮譯。

Satz V. Zu Jeder rekursiven Relation R(x1...xn) gibt es ein n-stelliges Relationenszeichen r (mit den freien Variablen 38) (u1, u2...un), so daß für alle Zahlen-n-tuple (x1, x2,...xn) gilt:

定理 V：對每個遞迴關係 R(x1...xn) 而言， 存在一個 n 元關係符號 r (帶有自由變數) (u1,u2...un) 38)， 使得所有 n 元整數值組 (x1,x2...xn) 滿足下式：

| u1 .....un |

R(x1...xn) → Bew[Sb|r Z(x1)...Z(xn)|] (3)

| u1......un |

~R(x1...xn) → Bew[Neg Sb|r Z(x1)...Z(xn)|] (4)

Wir begnügen uns hier damit, den Beweis dieses Satzes, da er keine prinzipiellen Schwierigkeiten bietet und ziemlich umständlich ist, in Umrissen anzudeuten 39).

概略指出此定理證明可說服我們， 因為沒有任何理論障礙且在合理的複雜程度內 39) 。

38) Die Variablen u1...un können willkürlich vorgegeben werden. Es gibt z. B. immer r mit den freien Variablen 17, 19, 23...usw., für welches (3) und (4) gilt.

38) 變數 u1...un 可被任意指定， 例如總是存在 r 帶有自由變數 17, 19, 23...等等， 使得 (3) 及 (4) 成立。

39) Satz V beruht natürlich darauf, daß bei einer rekursiven Relation R für jedes n-tupel von Zahlen aus den Axiomen des Systems P entscheidbar ist, ob die Relation R besteht oder nicht.

39) 命題 V 自然基於， 無論 R 關係是成立與否， 遞迴關係 R 對每個 n 元整數數組是可由系統 P 之公理決定的，

Wir beweisen den Satz für alle Relationen R(x1...xn) der Form:  
x1 = φ(x2...xn) 40)  
(wo φ eine rekursive Funktion ist) und wenden vollständige Induktion nach der Stufe von φ an.

我們證明對所有具以下形式關係 R(x1...xn) 而言，定理成立：  
x1 = φ(x2...xn) 40)  
(其中 φ 是一個遞迴函數) 並對 φ 之級數應用完整歸納法。

40) Daraus folgt sofort seine Geltung für jede rekursive Relation, da eine solche gleichbedeutend ist mit 0=φ(x1... xn), wo φ rekursiv ist.

40) 這可直接推得對每個遞迴關係也成立， 因為此類關係與 0 = φ(x1... xn)（其中 φ 是遞迴的） 同義，

**6.1.以 P 系統表現基礎遞迴函數**

Für Funktionen erster Stufe (d. h. Konstante and die Funktion x+1) ist der Satz trivial.

對 1 級函數（即常數及函數 x+1）此定理是顯而成立的。

譯註： 如何證明某一個函數滿足定理 V， 最重要的是找出 P 系統表示該遞迴函數的合式公式， 該對應的合式公式對所有滿足遞迴函數的數組而言， 經由 Z 函數轉換成 P 系統之數組後，可由 P 系統證明為真， 對所有為不滿足遞迴函數的數組而言， 經由 Z 函數轉換成 P 系統之數組後，可由 P 系統證明為假， 其中 Z 函數為將整數轉為表示 P 系統之哥德爾數。

1 級函數就是基礎遞迴函數， 不過哥德爾認為用 P 系統表達基礎遞迴函數是顯而成立的， 那是因為他基本上已熟讀數學原理這本書， P 系統如哥德爾已說明過，是數學原理與皮亞諾公理的綜合， 所以以下證明都會引用到 x=x 自身相等的定理， 但如何從 P 系統的公理去推論出 x=x 呢？ 證明寫在數學原理這本大書中，我會寫出頁數， 請自已去翻吧 :(

**定理 P1：x=x**

*證明*

1. 由數學原理 PM (第 2 版, 1927, 168頁) \*13.15 |- x=x

**定理 R31：0(x) 可由 P 系統表達。**

*證明*

1. 基礎遞迴函數 0(x)=0 標準化為 R(x1,x2)~x2=0
2. 令其 P 系統對應公式為 r(u1,u2) ≡ u2=z(0)
3. 顯然得證

以一個例子驗證 0(9)=0 可在 P 系統證明為真：

| | u1, u2 ||

1.套入 P 系統的合式公式 sb|r|Z(9), Z(0)||

因為 r = u2=z(0) 代入上式

2. | | u1, u2 ||

sb|u2=Z(0)|Z(9), Z(0)||

3.執行取代得 Z(0)=Z(0)，再由定理 P1 得證。

**命題 R32：x+1 可於 P 系統決定。**

1. 令後繼函數之標準化函數為 R(x1,x2)~x1=x2+1
2. 令 R 的 P 系統對應公式為 r(u1,u2) ≡ u1=fu2，
3. 顯然得證

舉例說明：

1.R(1,0) ~ 1 = 0+1

| u1 , u2 |

2.Sb|r Z(1),Z(0)| = r(f0,0) ≡ f0=f(0)=f0

3.由定理P1 知 f0=f0 為真。

**6.2.替換操作及遞迴定義可由 P 系統表達**

Habe also φ die m-te Stufe. Es entsteht aus Funktionen niedrigerer Stufe φ1...φk durch die Operationen der Einsetzung oder der rekursiven Definition. Da für φ1...φk nach induktiver Annahme bereits alles bewiesen ist, gibt es zugehörige Relationszeichen r1...rk, so daß (3), (4) gilt. Die Definitionsprozesse, durch die φ aus φ1...φk entsteht (Einsetzung und rekursive Definition), können sämtlich im System P formal nachgebildet werden.

φ 為 m 階也成立。 它以替換操作或遞迴定義建構自較為前階之函數 φ1...φk。 因為依據歸納假設 φ1...φk 全部都可以證明， 所以存在對映的關係符號 r1...rk 使得 (3)、(4) 成立。 定義流程，其自已成立的 φ1...φk (經由替代及遞迴定義)所衍生的 φ， 均能於系統 P 找到形式對應。

/187/

Tut man dies, so erhält man aus r1...rk ein neues Relationszeichen r 41), für welches man die Geltung von (3), (4) unter Verwendung der induktiven Annahme ohne Schwierigkeit beweisen kann.

至此可自 r1...rk 衍生一個新的關係符號 r 41)， 並毫無困難應用歸納假設證明 (3)、(4) 是有效的。

41) Bei der genauen Durchführung dieses Beweises wird natürlich r nicht auf dem Umweg über die inhaltliche Deutung, sondern durch seine rein formale Beschaffenheit definiert.

41) 由證明的精確建構可知 r 本質上並非衍生自內容意義之迂迴中， 而是經由其本身之純形式組成所定義。

Ein Relationszeichen r, welches auf diesem Wege einer rekursiven Relation zugeordnet ist 42), soll rekursiv heißen.

關係符號 r 其可如此對應到遞迴關係 42)，應稱為遞迴。

42) Welches also, inhaltlich gedeutet, das Bestehen dieser Relation ausdrückt.

42) 其於此內容解釋下也表達了此關係的存在。

譯註： 哥德爾於定理 VII 說明遞迴函數的替換操作(函數合成)及 遞迴定義以算術系統表示的方法， 於表現定理也可應用來作為 P 系統的表示法， 也就是如腳註 41)所說的一組形式定義，以下面 2 個定理說明：

**定理 R33：替換操作可於 P 系統表示。**

替換操作即為現代述語的函數合成。 以下的定義以希臘字母代表遞迴函數， 以拉丁字母代表 P 系統關係符號。

1. 若函數 η 為自遞迴函數 θ 及 γ1...γk 之函數合成， 則以下等式關係成立：  
   η(χ1...χn)=θ(γ1(χ1...χn)...γk(χ1...χn))
2. 依據定理 V 之歸納假設，θ 與 γ1...γk 等函數為遞迴函數， 故於 P 系統存在以下公式 f, g1...gn，使得  
   f (y1...yk,y ) 為表示 υ =θ (υ1...υk) 之關係符號，  
   g1(x1...xn,y1) 為表示 υ1=γ1(χ1...χn) 之關係符號，  
   .   
   .   
   .   
   gk(x1...xn,yk) 為表示 υk=γk(χ1...χn) 之關係符號。
3. 在 P 系統可以建構出下式：

(Ey1,...,yk)[f (y1,...,yk,y)

.g1(x1,...,xn,y1)

.

.

.

.gk(x1,...,xn,yk)]

1. 由上我們於 P 系統中定義出新的關係符號 h 如下：

h(x1,...,xn,y)≡(Ey1,...,yk)[f (y1,...,yk,y)

.g1(x1,...,xn,y1)

.

.

.

.gk(x1,...,xn,yk)]

1. 得證

**定理 R34：遞迴定義可由 P 系統表示。**

1. 若函數 φ 為自函數 ψ 及 μ 之遞迴定義， 則以下等式關係成立：  
   φ(0 ,χ2...χn) = ψ(χ2...χn)  
   φ(κ+1,χ2...χn) = μ(κ,φ(κ,χ2...χn),χ2...χn)
2. 依據定理 V 之歸納假設，ψ 與 μ 等函數為遞迴函數， 故於 P 系統存在以下公式 s, p, m，使得  
   p(x2...xn,y ) 為表示 υ=θ(χ1...χk) 之關係符號。
3. 可於 P 系統寫出公式，
4. f(z,x2...xn,y)≡(Es)[|s|=z+1
5. .p( x2...xn,s(0))
6. .(iΠ(i<z)[m(i,x2...xn,s(i+1))

. y=s(z)]

**8.算術系統**

*導讀*

哥德爾為了不完備定理推廣至所有算術系統， 在本章精確定義「算術系統」為僅使用自然數之加法和乘法， 四個邏輯常數 ∨,x, (x)及 = 的數論系統。

之後他證明了定理 VII：每個遞迴關係是算術的， 證明此定理需要使用遞迴定義中的每個步驟結果值的數列， 他利用了中國剩餘定理，成功將數列以數對表達， 並由模數運算取出數列指定位置的元素值， 完全破除我們認為陣列要用指標運算去存取的既定想法， 因為有了電腦的我們， 總視以位址直接存取記憶體為理所當然， 當然其背後的數位組合及序列邏輯基礎都相當複雜。 哥德爾的電腦就是數論， 有興趣的讀者也可以在 C 語言中， 用 int 數對實作一個數字陣列來練習， 相當有趣，也定會使程式設計的能力大幅成長。

**8.1.算術命題**

3.  
Wir ziehen nun aus Satz VI weitere Folgerungen und geben zu diesem Zweck folgende Definition:

現在要從命題 VI 導出更廣泛的結論故給定以下定義：

Eine Relation (Klasse) heißt arithmetisch, wenn sie sich allein mittels der Begriffe +, . [Addition und Multiplikation, bezogan auf natürliche Zahlen 49)] und den logischen Konstanten ∨, x, (x), = definieren läßt, wobei (x) und = sich nur auf natürliche Zahlen beziehen dürfen 50). Entsprechend wird der Begriff "arithmetischer Satz" definiert. Insbesondere sind z. B. die Relationen "größer" und "kongruent nach einem Modul" arithmetisch, denn es gilt:

一個關係（類別）稱為算術， 在於其本身僅由 +, . 「自然數之加法和乘法 49)」 之觀念和邏輯常數 ∨,x, (x), = 所定義，其中 (x) 和 = 僅能應用在自然數 50)。 「算術命題」項目能被相應的定義出， 特別是如關係「大於」和「單模數同餘」均為算術， 故如下成立：

* x<y~(Ez)[y=x+z]
* x≡y(mod n)~(Ez)[x=y+z.n ∨ y=x+z.n]

49) Die Null wird hier und im folgenden immer mit zu den natürlichen Zahlen gerechnet.

49) 此後自然數包括零。

50) Das Definiens eines solchen Begriffes muß sich also allein mittels der angeführten Zeichen, Variablen für natürliche Zahlen x, y,... und den Zeichen 0, 1 aufbauen (Funktions und Mengenvariable dürfen nicht vorkommen). (In den Präfixen darf statt x natürlich auch jede andere Zahlvariable stehen.)

50) 這些概念之定義僅由已提過之符號、自然數變數 x, y,...及 符號 0, 1 建構。 (不允許出現函數與集合變數)。 (每個不同於 x 之數目變數當然也成立)。

**8.2.遞迴關係是算術的**

Es gilt der Satz VII: Jede rekursive Relation ist arithmetisch.

這可得定理 VII：每個遞迴關係是算術的。

Wir beweisen den Satz in der Gestalt:  
Jede Relation der Form x0=φ(x1...xn), wo φ rekursiv ist, ist arithmetisch, und wenden vollständige Induktion nach der Stufe von φ an.  
φ habe die s-te Stufe(s>1). Dann gilt entweder:

我們以下述論述證明此命題：  
每個形式如 x0=φ(x1...xn)（其中 φ 是遞迴的）之關係是算術的， 且可對 φ 的級數作完整歸納法。  
設 φ 為第 s-級(s>1)函數。 其非下式成立：

/192頁/

1.φ(x1...xn)=ρ[χ1(x1...xn),χ2(x1...xn)...χm(x1...xn)]51)  
  
(wo ρ und sämtliche χi kleinere Stufe haben als s) oder:

(其中 ρ 和所有的 χi 其級數小於 s)  
就是下式成立：

2.φ(0 ,x2...xn)=ψ( x2...xn)  
φ(k+1,x2...xn)=μ[k,φ(k,x2...xn),x2...xn]  
  
(wo ψ,μ niedrigere Stufe als s haben).

(其中 ψ,μ 其級數小於 s)。

譯註：1.式即為函數合成、 2.式即為遞迴定義。 等式右側的函數級數（ρ、χ、ψ 及 µ）均小於 φ 之級數 s， 說明函數合成及遞迴定義須由已定義之遞迴函數生成。 此操作會定義新的遞迴函數，即可利用作為推論規則之實作。

51) Es brauchen natürlich nicht alle x1...xn in den χi tatsächlich vorzukommen [vgl. das Beispiel in Fußnote 27)].

51) 不是所有於 χi 中的 x1...xn 都需要實際出現。 「參閱腳註 27) 之例子」。

Im ersten Falle gilt:

情形一下式成立：

x0=φ(x1...xn)~(Ey1...ym)[ R(x0,y1...ym)& S1(y1,x1...xn)&...&Sm(y1,x1...xn)],  
  
wo R bzw. Si die nach induktiver Annahme existierenden mit x0=ρ(y1...ym) bzw. y=χ1(x1...xn) äquivalenten arithmetischen Relationen sind. Daher ist x0=φ(x1,x2...xn) in diesem Fall arithmetisch.

依據歸納假設，存在分別與 x0=ρ(y1...ym) 及 y=χ1(x1...xn) 等值之算術關係 R 和 Si。 因此於此情形下 x0=φ(x1,x2...xn) 為算術的。

Im zweiten Fall wenden wir folgendes Verfahren an: Man kann die Relation x0=φ(x1,x2...xn) mit Hilfe des Begriffes "Folge von Zahlen" (f) 52) folgendermaßen ausdrüeken:

情形二應用以下程序： 以「整數序列」(f) 觀念 52) 表達關係 x0=φ(x1,x2...xn) 如下：

x0=φ(x1...xn)~(Ef){f0=ψ(x2...xn) &  
(k)[k<x1→fk+1=μ(k,fk,x2...xn)] & x0=fx1}  
  
52) f bedeutet hier eine Variable, deren Wertbereich die Folgen natürl. Zahlen sind. Mit fk wird das k+1-te Glied einer Folge f bezeichnet (mit f0 das erste).

52) f 於此指一個變數，其值域是自然數序列。 fk 用來表示 f 序列之第 k+1-個元素（f0 表示第一個）。

Wenn S(y,x2...xn) bzw. T(z,x,...xn+l) die nach induktiver Annahme existierenden mit y=ψ(x2...xn) bzw. z=μ(x1...xn+1) äquivalenten arithmetische Relationen sind, gilt daher:

依據歸納假設，分別存在與 y=ψ(x2...xn) 及 z=μ(x1...xn+1) 等值之算術關係 S(y,x2...xn) 和 T(z,x,...xn+l)。 故可得：

x0=φ(x1...xn)~(Ef){S(f0,x2...xn) & (k)[k<x1→T(fk+1,k,fk,x2...xn)] & x0=fx1} (17)

**8.3.整數對表現整數序列**

Nun ersetzen wir den Begriff "Folge von Zahlen" durch "Paar von Zahlen", indem wir dam Zahlenpaar n, d die Zahlenfolge f(n,d)(fk(n,d)=[n]1+(k+1)d) zuordnen, wobei [n] den kleinsten nicht negativen Rest von n modulo p bedeutet. Es gilt dann der Hilfssatz 1:  
  
Ist f eine beliebige Folge natürlicher Zahlen und k eine beliebige natürliche Zahl, so gibt es ein Paar von natürlichen Zahlen n, d, so daß f(n,d) und f in den ersten k Gliedern übereinstimmen.

現在以「整數對」替代「整數序列」之觀念， 將整數對 n, d 對映到數列 f(n, d) (元素fk(n,d)=[n]1+(k+1)d)， 其中 [n]p 指最小 n 除 p 之非負數餘數。 這可由引理 1 得證：  
  
f 是一個任意的自然數序列且 k 是一個任意自然數， 存在一個自然數 n, d 之數對， 使得 f(n,d) 和 f 與第一個 k 項目一致。

譯註： 讀者可注意 f 及 f(n,d) 都是表示數列之符號， 且 2 數列每個位置元素都一致， 即陣列相等是定義為每個位置的元素都相同。

Beweis: Sei l die größte der Zahlen k,f0,f1...fk-1. Man bestimme n so, daß:  
n≡fi[mod(1+(i+1)l!)] für i=0,1...k-1

/193/

was möglich ist, da je zwei der Zahlen 1+(i+1)l!(i=0,1...k-1) relativ prim sind. Denn eine in zwei von diesen Zahlen enthaltene Primzahl müßte auch in der Differenz (i1-i2)l! und daher wegen |i1-i2|<l in l! enthalten sein, was unmöglich ist. Das Zahlenpaar n,l! leistet dann das Verlangte. Da die Relation x=[n]p durch:  
  
x≡n (mod p) & x<p  
  
definiert und daher arithmetisch ist, so ist auch die folgendermaßen definierte Relation P(x0,xl...xn):

證明： 令 l 為 k,f0,f1...fk-1 中最大的整數， 可限定 n 為：  
  
n≡fi[mod(1+(i+1)l!)] 對 i=0,1...k-1  
  
這是因為數列 1+(i+1)l!(i=0,1...k-1) 中任 2 個數是互質的。 因為若否，則數列中任 2 個數所包含的質數也應包含在 (i1-i2)l! 數段中， 且因 |i1-i2|<l 故應包含於 l!中，這是不可能的。 數對 n,l! 滿足前面規範。 因為關係 x=[n]p 可由下式：  
  
x≡n (mod p) & x<p  
  
所定義且因該式為算術的， 所以如下所定義的關係 P(x0,xl...xn) 也是算術的。

P(x0...xn)≡(En,d){S([n]d+1,x2...xn)

& (k)[k<x1 → T([n]1+d(k+2)

,k

,[n]1+d(k+1)

,x2...xn]

& x0=[n]1+d(x1+1)}

arithmetisch, welche nach (17) and Hilfssatz I mit: x0=φ(x1...xn) äiquivalent ist (es kommt bei der Folge f in (17) nur auf ihren Verlauf bis zum x1+1-ten Glied an). Damit ist Satz VII bewiesen.

依據 (17) 與輔助定理 I 知關係 P 等價於 x0=φ(x1...xn)。 (藉由 (17) 中之數列 f，只要對其前 x1+1 個元素進行運算便能推得)。 據此命題 VII 已證明。

譯註： 我先舉一例說明哥德爾如何用上述方法以數對表示數列：  
設有一數列 s 其元素為 2, 3, 2。

1. 找出 l。  
   取 3(數列長度)及數列所有元素值 2, 3, 2 中最大數，得 l=3。
2. 求出 n。  
   n 滿足以下的一元同餘方程組 S 如下：
3. n≡fi[mod(1+(i+1)l! ]
4. n≡ 2[mod 1+(0+1)3!=7 ]
5. n≡ 3[mod 1+(1+1)3!=13]
6. n≡ 2[mod 1+(2+1)3!=19]

利用中國剩餘定理解 S 的最小解 n 如下：

n = 2.4.19.13 + 3.9.7.19 + 2.14.7.13 + kM (K 為任意整數)

= 8115 + k.7.13.19 = 8115 + (-4).1729 = 1199

1. 知道 n 及 l 後，數列 s 第 i 個元素值可使用以下算式求出：
2. fi = n mod 1+(i+1)l!
3. 第 0 個元素 f1=1199 mod 1+(0+1)3! = 2
4. 第 1 個元素 f2=1199 mod 1+(1+1)3! = 3
5. 第 2 個元素 f3=1199 mod 1+(2+1)3! = 2

哥德爾對數列 1+(i+1)l! 任 2 數為互質之性質， 僅用 2 句話即完成證明， 雖已提示應使用反證法來證明此命題， 但太精簡，讓人不容易理解，我將在以下的定理 41 詳細說明。 定理 41 之證明是參閱 gribskoff, 2013。

**定理 41：數列 1+(i+1)l! (i=0,1...k-1) 中任 2 個數是互質的。**

*證明*

1. 設反命題為真， 即數列 1+(i+1)l! 存在 2 個數並非互質，故存在質數 p 使得下式成立：
   1. p|(i +1)l!+1
   2. p|(i+j+1)l!+1, j 為任意整數。

即等同以下同餘關係：  
[(i+1)l!+1]≡[(i+j+1)l!+1] (mod p)  
可推得下式成立：  
p | [(i+j+1)l!+1]-[(i+1)l!+1] = jl!  
再推得：  
p|jl! → p|j ∨ p|l!

1. 若 p|l! 成立（即哥德爾說的「因 |i1-i2|<l 故應包含於 l!中」）， 則 p|l!(i+1) 成立， 但其與前述 p|(i+1)l!+1 不可能同時成立， 故 p 不整除 l!。
2. 若 p|j 成立（即哥德爾說「質數也應包含在 (i1-i2)l! 數段中」） 因為 j≦max(1...k)=l 故對所有 j，j|l! 成立。
3. 由 p|j ∧ j|l! → p|l!
4. 若 p|l! 成立，則 p|l!(i+1) 成立， 但其與前述 p|(i+1)l!+1 不可能同時成立， 故 p 不整除 j
5. 依反證法得證。

**定理 42：中國剩餘定理**

已知任意數列 a1,a2...an 及 m1,m2...mn， 若 m1,m2...mn 任 2 數互質， 則下列一元線性同餘方程組 S：

x≡a1 (mod m1)

x≡a2 (mod m2)

.

.

.

x≡an (mod mn)

有解且可由下列通用程序解出：

1.設 M = m1.m2...mn

Mi = M/mi

2.令 tiMi = 1 (mod mi)，求得 ti。

3.方程組 S 的通解為

x = a1t1M1 + a2t2M2 +...+ antnMn + kM (K 為任意整數)

*例子：*

孫子算經「物不知數」問題，原文如下： 有物不知其數，三三數之剩二，五五數之剩三， 七七數之剩二。問物幾何？

解：

x≡2 (mod 3)

x≡3 (mod 5)

x≡2 (mod 7)

M=3.5.7=105

t1.35 = 1 (mod 3)

t1 = 2

t2.21 = 1 (mod 5)

t2 = 1

t2.15 = 1 (mod 7)

t2 = 1

x=2.2.35+3.1.21+2.1.15=140+63+30=233

≡ 23 (mod 105)

*證明：*省略，網路一打「中國剩餘定理」，就有成千個證明。

關係 P 是用來描述遞迴定義， 但論文中公式之轉換與說明交雜，不易看出轉換方式， 若將 4 個建構的公式並列一起， 便能簡易的看出 P 是如何建構的：

1. 原遞迴定義：
2. φ(0 ,x2...xn)=ψ( x2...xn)
3. φ(k+1,x2...xn)=μ[k,φ(k,x2...xn),x2...xn]
4. 導入 f 數列，f 數列為函數 φ 的前 k 階遞迴結果值  
   x0=φ(x1...xn)~(Ef){f0 =ψ( x2...xn)  
   &(k)[k<x1 → fk+1=μ(k,fk,x2...xn)]  
   & x0=fx1}
5. 去除右式等號，將其轉為一般化關係 S 及 T 之表示。  
   x0=φ(x1...xn)~(Ef){S(f0,x2...xn)  
   &(k)[k<x1 → T(fk+1,k,fk,x2...xn)]   
   & x0=fx1}
6. 導入數對 n 及 d 取代 f 來表示前 k 階結果數列。  
   P(x0...xn)≡(En,d){S([n]d+1,x2...xn)  
   & (k)[k<x1 → T([n]1+d(k+2),k,[n]1+d(k+1), x2...xn]  
   & x0=[n]1+d(x1+1)}

**8.4.存在無法決定之算術命題**

Gemäß Satz VII gibt es zu jedem Problem der Form (x)F(x) (F rekursiv) ein äquivalentes arithmetisches Problem und da der ganze Beweis von Satz VII sich (für jedes spezielle F) innerhalb des Systems P formalisieren läßt, ist diese Äquivalenz in P beweisbar. Daher gilt:

依據定理 VII， 對每個形式為 (x)F(x) 之問題（F 遞迴）存在一個等值算術問題， 由於（對每個特定之 F）定理 VII 整個證明本身 能於系統 P 內形式化，故其等值性可於 P 內證明。 因此可得：

Satz VIII: In jedem der in Satz VI genannten formalen Systeme 53) gibt es unentscheidbare arithmetische Sätze.

定理 VIII： 在每個命題 VI 所提到之形式系統 53) 存在無法決定之算術命題。

**8.5.存在不可決定之受限函數計算命題**

Dasselbe gilt (nach der Bemerkung auf Seite 190) für das Axiomensystem der Mengenlehre und dessen Erweiterungen durch ω-widerspruchsfreie rekursive Klassen von Axiomen. Wir leiten schließlich noch folgendes Resultat her:

（依據頁190之注釋）同樣可推廣至集合公理系統 及其經由ω-一致性遞迴公理類別所擴展之系統。 總結可得以下結果：

Satz IX: In allen in Satz VI genannten formalen Systemen 53) gibt es unentscheidbare Problem des engeren Funktionenkalküls 54) (d. h. Formeln des engeren Funktionenkalküls, für die weder Allgemeingültigkeit noch Existenz eines Gegenbeispiels beweisbar ist) 55).

命題 IX: 所有命題 VI 提到之形式系統 53)存在不可決定之受限函數計算問題 54) （即受限函數計算公式之有效性或反例存在性均不可證明）55)。

53) Das sind diejenigen ω-widerspruchsfreien Systeme, welche aus P durch Hinzufügung einer rekursiv definierbaren Klasse von Axiomen entstehen.

53) 這是 P 系統經由增加遞迴可定義之公理類別而得之 ω-一致系統 。

54) Vgl. Hilbert-Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik. Im System P sind unter Formeln des engeren Funktionenkalküls diejenigen zu verstehen, welche aus den Formeln des engeren Funktionenkalküls der PM durch die auf S.176 angedeutete Ersetzung der Relationen durch Klassen höheren Typs entstehen.

54) 參閱希爾伯特-阿克曼，理論邏輯基礎。 在系統 P 中， 受限函數計算之公式可理解為那些衍生自 176 頁所指出的， PM 中藉由以較高型別之類別替代關係較受限函數計算之公式。

55) In meiner Arbeit: Die Vollstiändigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, Monatsh. f. Math. u. Phys. XXXVII, 2, habe ich gezeigt, daß jede Formel des engeren Funktionenkalküls entweder als allgemeingültig nachweisbar ist oder ein Gegenbeispiel existiert; die Existenz dieses Gegenbeispiels ist aber nach Satz IX nicht immer nachweisbar (in den angeführten formalen Systemen). Monatsh. für Mathematik and Physik. XXXVIII. Band. 1

55) 在我的工作：邏輯函數運算公理之完備性， 數學與物理月刊 XXXVII, 2, 已指出每個受限函數計算之公式既非普遍可證也不存在任一反例； 依據命題 IX 反例之存在並非總是可證（在前述形式系統內）。 數學與物理月刊 XXXVIII, 2, Band. 1。  
/194頁/

**形式如 (x)F(x) 之問題可化約成受限函數運算公式滿足問題。**

Dies beruht auf:

這基於：

Satz X: Jedes Problem der Form (x)F(x) (F rekursiv) läßt sich zurückführen auf die Frage nach der Erfüllbarkeit einer Formel des engeren Funktionenkalküls (d.h. zujedem rekursiven F kann man eine Formel des engeren Funktionenkalküls angeben, deren Erfüllbarkeit mit der Richtigkeit von (x)F(x) äquivalent ist).

命題 X： 每個形式如 (x)F(x) （F 遞迴）之問題可化約成受限函數運算公式滿足問題。 （即對每個遞迴 F 可給定一個受限函數運算之公式， 其可滿足性等價於 (x)F(x) 之正確性）。

Zum engeren Funktionenkalkül (e.F.) rechnen wir diejenigen Formeln, welche sich aus den Grundzeichen: -,V, (x), =; x,y...(Individuenvariable) F(x), G(x y), H(x, y, z)... (Eigenschafts- und Relationsvariable) aufbauen 56), wobei (x) und = sich nur auf Individuen beziehen dürfen.

受限函數計算（以下稱為 e.F.）包含這些公式， 其由下述基本符號建構 56)： -,∨,(x),=; x,y...（個體變數） F(x), G(x y), H(x, y, z)...（屬性變數及關係變數） 其中 (x) 及 = 僅能參照於個體。

Eine Formel, die außer den zuerst angeführten Zeichen des e. F. noch Variable dritter Art (φ(x), ψ(x y)... etc.) enthält, soll eine Formel im weiteren Sinne (i. w. S.) heißen 58). Die Begriffe "erfüllbar" , "allgemeingültig" übertragen sich ohneweiters auf Formeln i.w.S. und es gilt der Satz, daß man zu jeder Formel i.w.S. A eine gewöhnliche Formel des e.F. B angeben kann, so daß die Erfüllbarkeit von A mit der von B äquivalent ist. Wir fügen zu diesen Zeichen noch eine dritte Art von Variablen φ(x), ψ(x y), χ(x y z) etc. hinzu, die Gegenstandsfunktionen vertreten (d. h. φ(x), ψ(x y) etc. bezeichnen eindeutige Funktionen, deren Argumente und Werte Individuen sind 57).

對這些符號增加第三種變數形式 φ(x), ψ(x y), χ(x y z) 等等， 表示物件函數（即 φ(x), ψ(x y) 等等用來表示參數與值為個體之單射函數。57) 除了一開始引入的受限函數計算之符號還包含第三種變數（φ(x), ψ(x y)...等） 之公式稱為較廣義公式（簡寫 i. w. S.） 58)。 「可滿足性」、「普遍有效性」等觀念是直接傳給較廣義公式且對以下命題成立， 對每個較廣義公式 A 而言，可給定一個較受限函數計算之正常公式， 使得 A 的可滿足性與 B 等價。

譯註：哥德爾上面定義了三種變數形式：

1. 個體變數 x,y,z
2. 屬性或關係變數 F(x), G(x y), H(x,y,z)，注意到其值為邏輯值， 關於此種變數的問題是其是否為真（或可被滿足）。
3. 物件函數φ(x), ψ(x y), χ(x y z)，其值為個體，且為單射函數， 即函數對所有參數都會回傳一個個體。

B erhält man aus A, indem man die in A vorkommenden Variablen dritter Art φ(x), ψ(x y).. durch Ausdrücke der Form: (ɿ z)F(z x),(ɿ z)G(z,xy)... ersetzt, die "beschreibenden" Funktionen im Sinne der PM I\*14 auflöst und die so erhaltene Formel mit einem Ausdruck logisch multipliziert 59), der besagt, daß sämtliche an Stelle der φ, ψ..

B 衍生自 A 如下， 將 A 中出現的第三種變數 φ(x), ψ(x y).. 以形式如 (ɿ z)F(z x), (ɿ z)G(z,xy)... 等表示式來取代。 以 PM I\*14 之方式消去「描述」函數且 將如此具有表示式之公式作邏輯相乘 59)， 也就是說將 φ, ψ.. 全部的參數相對於 F, G.. 之第一個空參數 一一配置其餘參數。

譯註：ɿ 是倒過來的希臘字母ι，用來表示存在個體 z 滿足 F(z x)，羅素 PM 的符號。

56) D. Hilbert und W.Ackermann rechnen in dem eben zitierten Buch das Zeichen = nicht zum engeren Funktionenkalkül. Es gibt aber zu jeder Formel, in der das Zeichen = vorkommt, eine solche ohne dieses Zeichen, die mit der ursprünglichen gleichzeitig erfüllbar ist (vgl. die in Fußnote 55) zitierte Arbeit).

56) 在正引述的書中， 希爾伯特及阿克曼並未將符號 = 計入受限函數運算。 對每個出現符號 = 之公式， 卻存在一個沒有此符號公式，初始時便能同時被滿足 （參閱腳註 55 引述之成果）。

57) Und zwar soll der Definitionsbereich immer der ganze individuenbereich sein.

57) 且事實上定義域總是整個個體域。

58) Variable dritter Art dürfen dabei an allen Leerstellen für Individuenvariable stehen, z.B.: y=φ(x), F(x,φ(y)),G[ψ(x,ψ(y)),x] usw.

58) 第三種變數於此可配置於所有個體變數空位上， 如： y=φ(x), F(x,φ(y)),G[ψ(x,ψ(y)),x] 等等。

譯註：因為第三種變數其值為個體，所以可以視為個體變數。

59) D. h. die Konjunktion bildet.

59) 即建構成合取式。

Wir zeigen nun, daß es zu jedem Problem der Form (x)F(x) (F rekursiv) ein äquivalentes betreffend die Erfüllbarkeit einer Formel i.w.S. gibt, woraus nach der eben gemachten Bemerkung Satz X folgt.

現在指出對每個形式 (x)F(x) （F 遞迴）之問題， 存在一個問題等價於較廣義公式可滿足性， 依據前述可推得命題 X。

Da F rekursiv ist, gibt es eine rekursive Funktion Φ(x), so daß F(x)~[Φ(x)=0], und für Φ gibt es eine Reihe von Funktionen Φ1 Φ2...Φn so daß: Φn=Φ, Φ1(x)=x+1 und für jedes Φk(1<k≦ n) entweder:

若 F 是遞迴的，則存在一個遞迴函數 Φ(x)，使得 F(x)~[Φ(x)=0]， 又對 Φ 而言存在函數序列 Φ1 Φ2...Φn，其中 Φn=Φ, Φ1(x)=x+1， 且對每個 Φk(1<k≦n) 不是：

1.(x2...xm)[Φk(0,x2...xm)=Φp(x2...xm)]

(x,x2...xm){Φk[Φ1(x),x2...xm)=Φq(x,Φk(x,x2...xm),x2...xm]} (18)

p,q<k

譯註：表達遞迴定義。

/195/

oder:

就是：

2.(x1...xm)[Φk(x1...xm)=Φr(Φi1(ξ1)...Φis(ξs))] 60) (19)

r<k,iv<k(für v= 1,2...s)

譯註：表達遞迴合成。

60) ξi(i=1..s) vertreten irgend welche Komplexe der Variablen x1,x2..xm, z. B.: x1 x3 x2.

60) ξi(i=1..s) 代表任意變數 x1,x2..xm 之複數，例如： x1 x2 x3

oder:

或是：

3.(x1...xm)[Φk(x1...xm)=Φ1(Φ1...Φ1(0))] (20)

譯註：表達常數函數。

Ferner bilden wir die Sätze:

再來建構以下命題：

(x)Φ1(x)=0 & (xy)[Φ1(x)=Φ1(y)→x=y] (21)

譯註：定義後繼函數Φ1。

(x)[Φn(x)=0] (22)

譯註：定義 F 的遞迴特徵函數Φn。

Wir ersetzen nun in allen Formeln (18), (19), (20) (für k=2,3...n) und in (21)(22) die Funktionen Φi durch Funktionsvariable φi, die Zahl 0 durch eine sonst nicht vorkommende Individuenvariable x0und bilden die Konjunktion C sämtlicher so erhaltener Formeln.

我們現在將公式 (18),(19),(20) (對 k=2,3...n), (21) 及 (22) 中的函數 Φ i 以函數變數 φi 取代， 數字 0 以未於其它地方出現之個體變數 x0 取代， 並將所有得到的公式形成建構成合取式 C。

譯註：C 是一個受限函數系統之公式

Die Formel (Ex0)C hat dann die verlangte Eigensehaft, d. h.  
1.Wenn (x)[Φ(x)=0] gilt, ist (Ex0)C erfüllbar, denn die Funktionen Φ1,Φ2...Φn ergeben dann offenbar in (Ex0)C für φ1,φ2...φn eingesetzt einen richtigen Satz.  
2.Wenn (Ex0)C erfüllbar ist, gilt (x)[Φ(x)=0].

公式 (Ex0)C 具有必要特質，即：  
1.若 (x)[Φ(x)=0] 成立，則 (Ex0)C 是可滿足的， 因為函數 Φ1,Φ2...Φn 明顯可插入至 (Ex0)C 中的 φ1,φ2...φn 以形成正確的命題。  
2.若 (Ex0)C 可滿足，則 (x)[Φ(x)=0] 成立。

Beweis: Seien Ψ1,Ψ2...Ψn die nach Voraussetzung existierenden Funktionen, welche in (Ex0)C für φ1,φ2..φn eingesetzt einen richtigen Satz liefern. Ihr Individuenbereich sei 𝕴. Wegen der Richtigkeit von (Ex0)C für die Funktionen Φi gibt es ein Individuum a (aus 𝕴), so daß sämtliche Formeln (18) bis (22) bei Ersetzung der Φi durch Ψi und von 0 durch a in richtige Sätze (18') bis (22') übergehen.

證明： 假設存在 Ψ1,Ψ2...Ψn 函數被指定給 (Ex0)C 中 φ1,φ2..φn 可形成一個正確命題。 其個體域為 𝕴。 依據 (Ex0)C 之正確性，對函數 Ψi 存在一個個體 a（屬於 𝕴）， 對所有 (18) 至 (22) 之公式中的 Φi 以 Ψi 取代， 其中的 0 以 a 取代轉換成正確命題 (18') 至 (22')。

譯註：𝕴 是德文字型的 I，表示個體的範圍。

Wir bilden nun die kleinste Teilklasse von 𝕴, welche a enthält und gegen die Operation Ψ1(x) abgeschlossen ist. Diese Teilklasse (𝕴') hat die Eigensehaft, daß jede der Funktionen Ψi auf Elemente aus 𝕴' angewendet wieder Elemente aus 𝕴' ergibt. Denn für Ψi gilt dies nach Definition von 𝕴' und wegen (18'), (19'), (20') überträgt sich diese Eigensehaft von Ψi mit niedrigerem Index auf solche mit höherem. Die Funktionen, welche aus Ψi durch Beschränkung auf den Individuenbereich 𝕴' entstehen, nennen wir Ψi'. Auch für diese Funktion gelten sämtliche Formeln (18) bis (22) (bei der Ersetzung von 0 durch a und Φi durch Ψi).

現在建構一個 𝕴 的最小子類別， 其包含 a 且封閉於操作 Ψ1(x) 下。 此子類別 (𝕴') 具如下特性， 每個函數 Ψi 應用 𝕴' 之元素將會產出 𝕴' 之元素。 因為這依據 𝕴' 之定義對 Ψi 而言是成立的， 且依據 (18'),(19'),(20') 這些特質從較小下標傳遞至較高下標之 Ψi。 我們將限制 Ψi 個體域為 𝕴' 所衍生之函數稱為 Ψi'。 且對這些函數 (18) 至 (22) 之全部公式均成立 （藉由將 0 以 a 取代及 Φi 以 Ψi 取代）。

Wegen der Riehtigkeit von (21) für Ψi' und a kann man die Individuen aus I' eineindeutig auf die natürlichen Zahlen abbilden u.zw. so, daß a in 0 und die Funktion Ψ1' in die Nachfolgerfunktion Φ1 übergeht. Durch diese Abbildung gehen aber sämtliche Funktionen Ψi' in die Funktionen Φi über und wegen der Richtigkeit von (22) für Ψn' und a gilt (x)[Φn(x)=0] oder (x)[Φ(x)=0], was zu beweisen war 61).

依據 (21) 之正確性， 對 Ψi' 及 a 可將 𝕴' 之個體與自然數間作 1 對 1 對映， 實務上將 a 轉成 0 且函數 Ψ1' 轉成後繼函數 Φ1。 藉由此對映，所有 Ψi' 函數轉換成函數 Φi 且依據 (22) 對 Ψn' 及 a 之正確性， (x)[Φn(x)=0] 或 (x)[Φ(x)=0] 可被證明成立 61)。

61) Aus Satz X folgt z. B., daß das Fermatsche und das Goldbachsche Problem lösbar wären, wenn man das Entscheidungsproblem des e. F. gelöst hätte.

61) 從命題 X 導出， 例如若已解出受限函數計算決定問題，則費馬及哥德巴赫問題可解。 /196/

Da man die Überlegungen, welche zu Satz X führen, (für jedes spezielle F) auch innerhalb des Systems P durchführen kann, so ist die Äquivalenz zwischen einem Satz der Form (x)F(x)(F rekursiv) und der Erfüllbarkeit der entsprechenden Formel des e. F. in P beweisbar und daher folgt aus der Unentscheidbarkeit des einen die des anderen, womit Satz IX bewiesen ist. 62)

因為導出命題 X 之脈絡（對每個特例 F）也能於 P 系統重新實現， 所以形式如 (x)F(x)（F 遞迴） 之命題與所對應受限函數計算公式之可滿足性之間的等價性是 P 可證的， 且於此推論出對立面之不可決定性， 故證明命題 IX。62)

62) Satz IX gilt natürlich auch für das Axiomensystem der Mengenlehre und dessen Erweiterungen durch rekursiv definierbare ω-widerspruchsfreie Klassen von Axiomen, da es ja auch in diesen Systemen unentscheidbare Sätze der Form (x)F(x) (F rekursiv) gibt.

62) 命題 IX 自然也對集合公理系統及其經由公理之遞迴可定義 ω-一致性類別之擴充有效， 這是因為這些系統也確實存在形式如(x)F(x)（F 遞迴）之不可決定命題。