# 哥德爾：1930「論數學原理及相關系統中的形式無法決定陳述句」德文直譯版

## 譯序

這是一篇人類智慧史上被誤用最多也影響力最大的數學論文，宗教家用此證明神跡的存在、哲學家用來闡述人類理性的極限、數學家驚恐於確定性基礎被剷平、電腦科學家用來說明電腦的極限，如此有趣又重要的論文，讓我從22 歲就希望讀懂，那時希望能有中文版，更希望是從德文直譯的中文版，讓我能更貼近作者的原始思想，回歸到論文的本來面目。

無論如何2013 年我開始著手學德文來翻譯這篇論文，感謝現在網路資訊的發達，讓我僅僅使用3年內的假日就完成翻譯。不同於一些大部頭的翻譯書，譯文不一致處能由前後文校正回原文之意，本論文相當精簡，且用字精確，任何一字譯錯，都必然導向錯誤結論，舉例而言，德語有漢語缺乏的冠詞，其用法為第一次提到的不定事物用不定冠詞，再次提到便用定冠詞，明確指出就使用指示代詞。在論文中首次提到的數學物件，絕對使用eine，提過的數學物件便用die，當此物件被明確縮小在特定範圍時，便使用dieser，經由冠詞便了解修飾的概念是否於論文前面所定義。

但也因為相當精簡，所以這篇論文我補充了許多背景資料，期望能讓高中生就可以讀懂這篇論文，一般人也能省去查閱資料的時間，並對本文的主題有更深刻的理解。

文中最引人注目的就是建構不可決定之命題，大部分有關本論文的書都著墨於這塊領域，例如日本作家及程式設計師，結城浩，其創作的科普小說「數學女孩：哥德爾不完全定理」，對建構不可決定命題有詳盡說明，但卻未對形式系統相互表現和如何定義可決定性之技術細節多作著墨，讀者若未讀過原文，便失去對不可決定命題進一步理解的機會，但「數學女孩」系列書籍使用例子解釋深奧的觀念，並認為惟有能提出例子才算是理解，所以我附註了許多為了理解而製作的例子幫助您理解文中的觀念。

現今為物聯網時代，人類生活中的每樣器物，幾乎都開始殖入晶片了，在這個潮流下，程式設計無所不在，有著大量的需求，我國也準備將程式設計列為國高中課程。

本篇論文雖然主題是形式證明，但其中包含了許多現代程式設計的概念，即更重要的，高級的技巧，我將會在譯註中一一說明，也希望這篇經典論文能作為引子，將計算理論深植於我們文化之中。

**Über formal unentsheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter System I 1) 論數學原理及相關系統中的形式無法決定陳述句 1)**

Von Kurt Gödel in Wien.

庫爾特．哥德爾於維也納

1) Vgl. die im Anzeiger der Akad. d. Wiss. in Wien (math.-naturw. KI.) 1930, Nr. 19 erschienene Zusammenfassung der Resultate dieser Arbeit.

1) 參閱於維也納，1930 年 19 期的阿卡德．德．維斯期刊(math.-naturw. KI.) 發表這個工作成果的摘要。

/173頁/

# 1.摘要

**導讀**

一開始哥德爾便指出本論文的數學基礎是希爾伯特的形式主義。形式主義係視數學可化為一組無預先詮釋意義的符號操作。在形式主義之前是以集合論作為數學基礎的 ZF 公理系統，其源自羅素的邏輯主義，認為數學可用邏輯建構出來，也就是邏輯是數學的基礎。他也在腳註1)至3)列出他形式系統基礎參考文獻，某些概念上更精確的定義，必須回到這些文獻去查找。像是以下提到的P系統就是植基於羅素的數學原理，某些定理的證明就必須引用數學原理。

1.

Die Entwicklung der Mathematik in der Richtung zu größerer Exaktheit hat bekanntlich dazu geführt, daß weite Gebiete von ihr formalisiert wurden, in der Art, daß das Beweisen nach einigen wenigen mechanischen Regeln vollzogen werden kann. Die umfassendsten derzeit aufgestellten formalen Systeme sinddas System der Principia Mathematica (PM) 2) einerseits, das Zermelo-Fraenkelsche(von J. v. Neumann weiter ausgebildete)Axiomensystem der Mengenlehre 3) andererseits. Diese beiden Systeme sind so weit,daß alle heute in der Mathematik angewendeten Beweismethoden in ihnen formalisiert, d. h. auf einige wenige Axiome und Schlußregeln zurückgeführt sind. Es liegt daher die Vermutung nahe, daß diese Axiome und Schlußregeln dazu ausreichen, alle mathematischen Fragen, die sich in den betreffenden Systemen überhaupt formal ausdrücken lassen,auch zu entscheiden. Im folgenden wird gezeigt, daß dies nicht der Fall ist, sondern daß es in den beiden angeführten Systemen sogar relativ einfache Probleme aus der Theorie der gewöhnlichen ganzen Zahlen gibt 4), die sich aus den Axiomen nicht entscheiden lassen.

眾所皆知數學朝著更精確方向的發展使得其眾多領域更為形式化，以此方式，證明能依據少數統整之機械化規則達成。現存最全面的形式系統一個是數學原理(PM) 2)之系統，另一個策梅若．佛蘭克集合論之公理系統 3)(由馮鈕曼擴增)。這兩系統廣泛到現今所有數學應用到的證明方法都可在其下形式化，即簡化至少數的公理及推論規則。因此似乎可假定這些公理及推論法可決定所有能完全以前述系統所表達的數學問題。下面將證明並非如此，就算前述兩個系統下公理所衍生實際相對簡單的普通整數論問題 4)也不可被決定。

2) A. Whitehead und B. Russell, Principia Mathematica, 2. Aufl., Cambridge 1925. Zu den Axiomen des Systems PM rechnen wir insbesondere auch: Das Unendlichkeitsaxiom (in der Form: es gibt genau abzählbar viele Individuen), das Reduzibilitäts und das Auswahlaxiom (für alle Typen).

2) 懷海德及羅素，數學原理，第二版，劍橋出版 1925。PM 系統特別包含以下公理： 無窮公理(形式如下：存在精確可數多個之個體)，簡化公理和選擇公理(對所有類型)。

譯註：哥德爾會於之後直接定義簡化公理，請見 P 系統。

3) Vgl. A. Fraenkel, Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre, Wissensch. u. Hyp. Bd. XXXI.

參閱艾．法蘭柯，論集合論基礎工作之十個講題，科學與假設 XXXI 期。

譯註：Wissensch. u. Hyp. Bd. XXXI 為以下之縮寫： Wissenschaft und Hypothese Bd. XXXI

J.v. Neumann, Die Axiomatisierung der Mengenlehre. Math. Zeitschr. 27, 1928. Journ. f. reine u. angew. Math. 154 (1925), 160 (1929).

馮．紐曼，集合論之公理化。 數學精選 27 期，1928。純粹及應用數學期刊。154(1925)，160(1929)。

譯註：上述期刊的縮寫應如下： Mathematik Zeitschrift Journal für reine und angewandte Mathematik.

Wir bemerken, daß man zu den in der angeführten Literatur gegebenen mengentheoretischen Axiomen noch die Axiome und Schlußregeln des Logikkalküls hinzufügen muß, um die Formalisierung zu vollenden.

注意對前述文獻給定之集合理論公理而言，仍須加上邏輯計算之公理及推論規則以達成形式化。

Die nachfolgenden Überlegungen gelten auch für die in den letzten Jahren von D. Hilbert und seinen Mitarbeitern aufgestellten formalen Systeme (soweit diese bisher vorliegen).

近幾年希爾伯特和他的同事所建置之形式系統(與未出版的工作)也是如此。

Vgl. D. Hilbert, Math. Ann. 88, Abh. aus d. math. Sem. der Univ. Hamburg I (1922), VI (1928). 參閱希爾伯特，88，漢堡大學數學研討會論文集 I(1922), VI(1928)

譯註：Abh. aus d. math. Sem. der Univ. Hamburg 為以下縮寫： Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg

P. Bernays, Math. Ann. 90. 伯納斯，數學年報 90.

譯註：Math. Ann. 為以下縮寫： Mathematische Annalen

J. v. Neumann, Math. Zeitsch. 26 (1927). 馮紐曼，數學雜誌 26 (1927)

譯註：Math. Zeitsch. Mathematische Zeitschrift

W. Ackermann, Math. Ann. 93. 亞克瑪，數學年報 93

4) D. h. genauer, es gibt unentscheidbare Sätze, in denen außer den logischen Konstanten: -- (nicht), V (oder), (x) (für alle), = (identisch mit) keine anderen Begriffe vorkommen als + (Addition), . (Multiplikation), beide bezogen auf natürliche Zahlen, wobei auch die Präfixe (x) sich nur auf natürliche Zahlen beziehen dürfen.

4) 即更精確一點，存在一個不可判定定理，除了邏輯常數： -- (非), V (或), (x) (對全部), = (等於) 沒有其它的詞，例如基於整數的 + (加), . (乘) 出現於中， 這裡前置 (x) 也僅能包含整數。

/174頁/

Dieser Umstand liegt nicht etwa an der speziellen Natur der aufgestellten Systeme, sondern gilt für eine sehr weite Klasse formaler Systeme,zu denen insbesondere alle gehören, die aus den beiden angeführten durch Hinzufügung endlich vieler Axiome entstehen 5), vorausgesetzt, daß durch die hinzugefügten Axiome keine falschen Sätze von der in Fußnote 4) angegebenen Art beweisbar werden.

這情形並非前述系統的特定本質所致，在更廣泛形式系統類別中也會發生，特別是加入有限公理 5) 至前兩個系統衍生之系統，我們並假定加入的公理不會使得註腳 4 給定方式之假命題可證。

5) Dabei werden in PM nur solche Axiome als verschieden gezählt, die aus einander nicht bloß durch Typenwechsel entstehen.

5) 這是在 PM 中僅這些公理視為不同而計數，其不只以形別轉換自公理間相互衍生。

Wir skizzieren, bevor wir auf Details eingehen, zunächst den Hauptgedanken des Beweises, natürlich ohne auf Exaktheit Anspruch zu erheben.

進入細節前，我們先草繪證明的主要觀念，自然不作出精確之聲明。

Die Formeln eines formalen Systems (wir beschränken uns hier auf das System PM) sind äußerlich betrachtet endliche Reihen der Gzundzeichen (Variable, logische Konstante und Klammern bzw. Trennungspunkte) und man kann leicht genau präzisieren,welche Reihen von Grundzeichen sinnvolle Formeln sind undwelche nicht 6).

形式系統之式(在此限制為PM系統)外顯上可視為有限基礎符(變數、邏輯常數和括號或分隔點)字串，而且可輕易精確指出那些基礎符字串是有意義地而那些不是 6)。

6) Wir verstehen hier und im folgenden unter "Formel aus PM" immer eine ohne Abkürzungen (d. h. ohne Verwendung von Definitionen) geschriebene Formel. Definitionen dienen ja nur der kürzeren Schreibweise und sind daher prinzipiell überflüssig.

6) 現在開始「 PM 之式」是指不含有縮寫（即沒有使用定義）之已寫出之式。 定義只是幫助書寫更為精簡，因此原則上是不必要的。

Analog sind Beweise vom formalen Standpunkt nichts anderes als endliche Reihen von Formeln (mit bestimmten angebbaren Eigenschaften).

同樣地形式觀點上，證明不過是式之有限序列(經由特定特質)。

Für metamathematische Betrachtungen ist es natürlich gleichgültig, welche Gegenstände man als Grundzeichen nimmt, und wir entschließen uns dazu, natürliche Zahlen 7) als solche zu verwenden.

從後設數學觀點考慮接受何種物件來表示基礎符號本就沒有差異，因此決定使用自然數 7) 來表示基礎符號。

7) D. h. wir bilden die Grundzeichen in eineindeutiger Weise auf natürliche Zahlen ab. (Vgl. die Durchführung auf S. 179.)

7) 即將基礎符號以一對一方式對應到自然數。(實作請參閱頁 179)

Dementsprechend ist dann eine Formel eine endliche Folge natürlicher Zahlen 8) und eine Beweisfigur eine endliche Folge von endlichen Folgen natürlicher Zahlen.

據此公式為有限自然數數列 8) 而證明表示是有限自然數數列組成之有限序列。

譯註：Beweisfigur 源自 Beweis(證明) 及 Figur(資訊表示) 之複合名詞，Figur 是一種承載某向資訊之描繪或表示， 在此為用來描繪一個證明的表示，所以譯為證明表示。

8) D.h. eine Belegung eines Abschnittes der Zahlenreihe mit natürlichen Zahlen. (Zahlen können ja nicht in räumliche Anordnung gebracht werden.)

8) 即配賦自然數作為數列元素之值。 (數字無法作為排列次序使用)。

譯註：在德文維基百科，Belegung 定義如下： Belegung (Mathematik), Zuweisung eines Wertes zu einer Variablen

配賦一個數值給變數。 B. MELTZER 的英譯本誤譯成下文： i.e. a covering of a section of the number series by natural numbers. 專有名詞還是要看德文本才行。

Die metamathematischen Begriffe (Sätze) werden dadurch zu Begriffen (Sätzen) über natürliche Zahlen bzw. Folgen von solchen 9) und daher (wenigstens teilweise) in den Symbolen des Systems PM selbst ausdrückbar.

後設數學之項目(命題)可轉為自然數或其數列 9) 之項目(命題)，因而(至少部分)可以PM系統之符號表達。

9) m. a. W.: Das oben beschriebene Verfahren liefert ein isomorphes Bild des Systems PM im Bereich der Arithmetik und man kann alle metamathematischen Überlegungen ebenso gut an diesem isomorphen Bild vornehmen. Dies geschieht in der folgenden Beweisskizze, d. h. unter "Formel", "Satz", "Variable" etc. sind immer die entsprechenden Gegenstände des isomorphen Bildes zu verstehen. 換言之，上述程序產出一個 PM 系統在算術領域的同構對映， 在此對映下可得出所有同等之後設數學推論。 這應用在以下的證明大綱，即「式」、「命題」及「變數」等等， 均可被理解為同構對映之對應物件。 譯註：beschreiben 過去式為 beschriebene，為強變化不規則動詞， 母音由 ei 變音為 ie。 A unter B verstehen A 可被理解為 B

Insbesondere kann man zeigen, daß die Begriffe "Formel", "Beweisfigur", "beweisbare Formel" innerhalb des Systems PM definierbar sind, d. h. man kann z. B. eine Formel F(v) aus PM mit einer freien Variablen v (vom Typus einer Zahlenfolge) angeben 10), so daß F(v) inhaltlich interpretiert besagt: v ist eine beweisbare Formel.

特別是可指出「式」、「證明表示」、「可證式」項目可以 PM 系統來定義，即例如存在具有一個自由變數 v (其類別為數列) 的 PM 系統式 F(v) 10)， 其意義可說為：v 是一個可證式。

10) Es wäre sehr leicht (nur etwas umständlich), diese Formel tatsächlich hinzuschreiben.

10) 這將很容易(但要費點功夫)去實際寫下此式。

Nun stellen wir einen unentscheidbaren Satz des Systems PM, d. h. einen Satz A, für den weder A noch non-A beweisbar ist, folgendermalßen her:

現在建置一個系統 PM 之不可決定之命題，即對命題 A 而言，A 或非 A 都可證，如下：

/175頁/

Eine Formel aus PM mit genau einer freien Variablen, u. zw. vom Typus der natürlichen Zahlen (Klasse von Klassen) wollen wir ein Klassenzeichen nennen.

僅具一個自由變數之 PM 公式，且具體型別為自然數群(類別群的類別)稱為類別符號。

譯註：自然數在本文中定義為類別群之類別。 u. zw. 是 und zwar 的縮寫，意為事實上。 Zahlen 為名詞之複數形，故譯為數群，即此型別定義域為數群。 Klassen 也為複數形，故譯為類別群。

Die Klassenzeichen denken wir uns irgendwie in eine Folge geordnet 11), bezeichnen das n-te mit R(n) und bemerken, daß sich der Begriff "Klassenzeichen" sowie die ordnende Relation R im System PM definieren lassen.

類別符號可想成某種序列 11)，並以 R(n) 表示其第 n 個元素，且注意能於 PM 系統中定義「類別符號」觀念及順序關係 R。

譯註：R(n) 之名應該來自於序列之德語名詞 Rheine。

11) Etwa nach steigender Gliedersumme und bei gleicher Summe lexikographisch.

11) 如以成員和之漸增順序，當和相等時以字彙順序。

譯註：etwa nach 有大致上之意。

Sei α ein beliebiges Klassenzeichen; mit [α; n] bezeichnen wir diejenige Formel, welche aus dem Klassenzeichen α dadurch entsteht, daß man die freie Variable durch das Zeichen für die natürliche Zahl n ersetzt.

令 α 為任意類別符號；用 [α; n] 代表以自然數 n 取代 α 中自由變數所得之式。

譯註：[α; n] 類比於 λ 運算中的應用。

entsteht 為 durch etwas hervorgerufen werden， 由某些事物影響。

Auch die Tripel-Relation x = [y; z] erweist sich als innerhalb PM definierbar.

三元關係 x = [y; z] 也可證明能於 PM 中定義。

Nun definieren wir eine Klasse K natürlicher Zahlen folgendermaßen: \_\_\_nεK ≡ Bew[R(n);n] 11a) (1)

(wobei Bew x bedeutet: x ist eine beweisbare Formel).

現在我們定義自然數類別 K 如下： \_\_\_nεK ≡ Bew[R(n);n] 11a) (1)

(這裡 Bew x 指 x 是一個可證式)。譯註：K 集合中的數字為 R 集合中不可證數之索引。

11a) Durch Überstreichen wird die Negation bezeichnet. 11a) 覆寫線標記否定。

Da die Begriffe,welche im Definiens vorkommen, sämtlich in PM definierbar sind, so auch der daraus zusammengesetzte Begriff K, d. h. es gibt ein Klassenzeichen S 12), so daß die Formel [S; n] inhaltlich gedeutet besagt, daß die natürliche Zahl n zu K gehört.

所有出現於定義項目均可在 PM 中定義。衍生自複合項目 K 之項目也是如此，即存在一個類別符號 S 12) 使式 [S; n] 之意義可陳述為：自然數 n 屬於 K。

譯註：S 指命名於 R 之後。

S ist als Klassenzeichen mit einem bestimmten R(q) identisch,d. h. es gilt

S 是與特定 R(q) 同義之類別符號，即一個存在特定自然數 q 使得：

S=R(q)

für eine bestimmte natürliche Zahl q.

譯註：從此可知類別符號以大寫拉丁字母，常數以小寫拉丁字母表示。

12) Es macht wieder nicht die geringsten Schwierigkeiten, die Formel S tatsächlich hinzuschreiben.

12) 再次毫無困難地具體寫下 S。

譯註：hinzuschreiben 是不定子句，作為名詞之定語， 因為 hin+schreiben 是分離動詞， 所以不定式的 zu 加在分離動詞中間 hin+zu+schreiben。

Wir zeigen nun, daß der Satz [R(q);q] 13) in PM unentseheidbar ist.

現在展示在 PM 下，命題 [R(q);q] 13) 不可決定。

13) Man beachte, daß "[R(q); q]" (oder was dasselbe bedeutet "[S;q]") bloß eine metamathematische Beschreibung des unentscheidbaren Satzes ist. Doch kann man, sobald man die Formel S ermittelt hat, natürlich auch die Zahl q bestimmen und damit den unentscheidbaren Satz selbst effektiv hinschreiben.

13) 注意 "[R(q);q]" (或同義詞 "[S;q]") 只是用後設數學描敘之不可決定命題。 事實上當決定公式 S 時，明顯地也決定數 q， 因此可有效寫出不可決定命題。

Denn angenommen der Satz [R(q);q] wäre beweisbar, dann wäre er auch richtig, d. h. aber nach dem obigen q würde zu K gehören, \_\_\_d. h. nach (1) es würde Bew[R(q); q] gelten, im Widerspruch mit der Annahme.

假定命題 [R(q);q] 是可證的，即由此推得上述 q 屬於 K 為真。 \_\_\_即由 (1) 得 Bew[R(q);q] 為真，這與假設矛盾。

Wäre dagegen die Negation von [R(q);q] beweisbar, \_\_\_so würde (nεK), d. h. Bew[R(q); q] gelten. \_\_\_假定 [R(q);q] 之否定可證，則 (nεK) 如此，即 Bew[R(q); q] 為真。

[R(q);q] wäre also zugleich mit seiner Negation beweisbar, was wiederum unmöglich ist.

[R(q);q] 與其否定同時可證，這也是不可能的。

Die Analogie dieses Schlusses mit der Antinomie Richard springt in die Augen; auch mit dem "Lügner" besteht eine nahe Verwandtschaft 14), denn der unentscheidbare Satz [R(q); q] besagt ja, daß q zu K gehört, d. h. nach (1), daß [R(q); q] nicht beweisbar ist. Wir haben also einen Satz vor uns, der seine eigene Unbeweisbarkeit behauptet 15).

上述結果顯見類比於理查悖論，也與說謊者悖論相當接近14)。因為不可決定命題 [R(q); q] 說明 q 包含於 K，依據 (1) 即為 [R(q); q] 是不可證明。我們眼前有一個定理斷言它本身是不可證明15)。

譯註：Antinomie Richard 理查悖論內容為， 若對每個整數命題以至多100個中文字描述， 並將命題依字母順序排列編號， 若編號數字符合命題描述的性質，則此數為理查數，否則此數 不為理查數。

假設某個命題的編號為 q，此命題內容如下： 「理查數是與對應的編號命題不相符之正整數。」， 則無法決定 q 是否為理查數。 若 q 為理查數，則其命題為真，其應與命題內容不相符， 若 q 不為理查數，則其命題為假，應與命題內容相符。

本文哥德爾之證明類比於理查悖論如下： 假設某個命題的編號為 q，此命題內容如下： 「q 為不可證命題之編號。」 若 q 為不可證命題之編號為真，則證明編號 q 命題為真，q 為假。 若 q 非不可證命題之編號，則 q 不符合命題之內容。

14) Es läßt sich überhaupt jede epistemologische Antinomie zu einem derartigen Unentscheidbarkeitsbeweis verwenden.

14) 每個認識論悖論都可應用此類不可決定證明。

15) Ein solcher Satz hat entgegen dem Anschein nichts Zirkelhaftes an sich, denn er behauptet zunächst die Unbeweisbarkeit einer ganz bestimmten Formel (nämlich der q-ten in der lexikographischen Anordnung bei einer bestimmten Einsetzung), und erst nachträglich (gewissermaßen zufällig) stellt sich heraus, daß diese Formel gerade die ist, in der er selbst ausgedrückt wurde. 此命題於形式上並非循環論證， 因為先聲明指定之公式(因為以特定排序之字母順序的第 q 個)的不可證性， 僅在之後(適時地)證明這些公式可以直接被自我表達。 譯註： 「因為以特定排序之字母順序的第 q 個」 參見前面類別符號 R(n) 的定義， R(n) 為一個以特定排序類別的第 n 個元素。

stellt sich heraus 在句中為反身動詞形式， 在 Duden 上其意義為 sich herausstellen: sich [als etwas Bestimmtes] erweisen 當某事確定時，可被證明 但許多英譯本將其譯為 emerge 或 turn out， 這證明德文與英文是 2 種截然不同的語言。 gewissermaßen zufällig 以隨機的方式，意為不能確定何時發生，但會發生， 我譯為適時地。 /176/

Die eben auseinandergesetzte Beweismethodeläßt sich offenbar auf jedes formale System anwenden, das erstens inhaltlich gedeutet über genügend Ausdrucksmittel verfügt, um die in der obigen Überlegung vorkommenden Begriffe (insbesondere den Begriff "beweisbare Formel") zu definieren, und in dem zweitens jede beweisbare Formel auch inhaltlich richtig ist.

上面解釋過之證明方法顯然可應用於下述每個形式系統，首先其內容詮釋具有具足夠表達力其去定義前述之觀念（特別是可證式），其次每個可證式本質為真。

譯註：sich auf etw (acc) anwenden lassen 可應用到某事

über etw (acc) verfügen 提供某物 Die nun folgende exakte Durchführung des obigen Beweises wird unter anderem die Aufgabe haben, die zweite der eben angeführten Voraussetzungen durch eine rein formale und weit schwächere zu ersetzen.

現在下面前述證明精確實作特別具以下目標，將剛提的第二個假設取代為純形式且較弱的一個。

譯註：第二個假設：[R(q);q] 之否定可證並用 (nεK) 取代。

folgende 為 folgend 於冠詞後主格變格 unter anderem 副詞片語：特別地

Aus der Bemerkung, daß [R(q); q] seine eigene Unbeweisbarkeit behauptet, folgt sofort, daß [R(q);q] richtig ist, denn [R(q); q] ist ja unbeweisbar (weil unentscheidbar). Der im System PM unentscheidbare Satz wurde also durch metamathematische Überlegungen doch entschieden. Die genaue Analyse dieses merkwürdigen Umstandes führt zu überraschenden Resultaten, bezüglich der Widerspruchsfreiheitsbeweise formaler Systeme, die in Abschn. 4 (Satz XI)näher behandelt werden.

從注釋知 [R(q);q] 聲明其本身為不可證，可推得 [R(q);q] 為真，

譯注：應是注釋 15)

因為 [R(q);q] 實際上不可證（因為其不可判定）。在 PM 系統中不可判定之命題無論如何已經由後設數學內容決定。這特殊情況的精確分析產生關於形式系統一致性之證明的驚奇結果，即將於第 4 章(定理 XI)提到。

**4.遞迴函數**

*導讀*

哥德爾引入遞迴函數系統，一種僅包含 3 個基礎遞迴函數及 2 個函數轉換規則的簡單形式系統，若某項事物可從基礎遞迴函數逐步經由函數轉換建構出來，代表此項事物可於遞迴函數系統內決定，換句話說，證明。

因為很簡單，若形式系統 A 能實作遞迴函數系統的基礎遞迴函數及函數轉換規則，所有能由遞迴函數系統內決定或證明的事物，可立即推論也能形式系統A內證明。

本文中哥德爾先利用遞迴函數建構出P系統及形式不可決定命題，再證明普通的算術系統，即包含加法及乘法的自然數算術系統，可實作遞迴函數，便直接將不可決定命題推廣至算術系統。

遞迴函數系統對程式設計相當重要，其最早的實作就是 LISP 語言，且已全面滲入現代所有的程式語言中了。

遞迴函數轉換規則係指能從已存在的函數衍生新的函數， 哥德爾提到2種方式，第1種稱為遞迴定義，第2種稱為函數合成，詳如以下論文本文。

**4.1.遞迴定義**

Wir schalten nun eine Zwischenbetrachtung ein, die mit dem formalen System P vorderhand nichts zu tun hat, und geben zunächst folgende Definition:

Eine zahlentheoretische Funktion 25) φ(x1,x2...xn) heißt rekursiv definiert aus den zahlentheoretischen Funktionen ψ(x1,x2...x(n-1)) und μ(x1,x2...x(n+1)), wenn für alle x2...xn,k 26) folgendes gilt:

現在先轉換至一個觀念，其與 P 系統並無關聯，首先給定以下定義:

一個數論函數 25) φ(x1,x2...xn) 稱作遞迴定義自數論函數 ψ(x1,x2...x(n-1)) 及 μ(x1,x2...x(n+1))， 若其對所有引數 x2...xn,k 26) 使得：

φ(0 ,x2...xn) = ψ(x2...xn) (2)

φ(k+1,x2...xn) = μ(k,φ(k,x2...xn),x2...xn)

25) D. h. ihr Definitionsbereich ist die Klasse der nicht negativen ganzen Zahlen (bzw. der n-tupel von solchen) und ihre Werte sind nicht negative ganze Zahlen.

25) 即其定義域為非負整數(或 n 元非負整數值組) 且其值為非負整數。

26) Kleine lateinische Buchstaben (ev. mit Indizes) sind im folgenden immer Variable für nicht negative ganze Zahlen (falls nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt ist).

26) 小寫拉丁字母(可能帶有索引)於後文均表示非負整數變數 (除非例外情形已被明確說明)。

/180/

**4.2.遞迴數論函數**

Eine zahlentheoretische Funktion φ heißt rekursiv, wenn es eine endliche Reihe von zahlentheor Funktionen φ1,φ2...φn gibt, welche mit φ endet and die Eigenschaft hat, daß jede Funktion φk der Reihe entweder aus zwei der vorhergehenden rskursiv definiert ist oder aus irgend welchen der vorhergehenden durch Einsetzung entsteht 27) oder schließlich eine Konstante oder die Nachfolgerfunktion x+1 ist.

一個數論函數 φ 稱為遞迴的，若且惟若存在一個數論函數的有限序列 φ1,φ2...φn，其以 φ 結束且具備以下特性，序列中的每個函數 φk 不是由前兩項遞迴定義而來，就是由對前幾項執行取代操作而得 27)，不然就是一個常數或是後繼函數 x+1。

**4.3.函數合成**

27) Genauer: durch Einsetzung gewisser der vorhergehenden Funktionen an die Leerstellen einer der vorhergehenden, z.B. φp(x1, x2) = φp[φq(x1, x2), φr(x2)] (p, q, r < k). Nicht alle Variable der linken Seite müssen auch rechts vorkommen (ebenso im Rekursionsschema (2)).

27) 精確而言：經由配置一些前項函數於前項之空位置，例如： φk(x1, x2) = φp[φq(x1, x2), φr(x2)] (p, q, r < k). 所有左側變數不一定要在右側出現(就如同遞迴框架(2))。

**4.4.基礎遞迴函數**

譯註：由哥德爾的定義可知基礎遞迴函數公為零或常數函數或是後繼函數 x+1，基礎遞迴函數不是經由遞迴定義或函數合成所得，而是預先就接受為遞迴函數，如同邏輯上，公理是預先就接受的定理。哥德爾提到基礎遞迴函數如下表：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **編號** | **名稱** | **定義** |
| RA1 | 零函數或常數函數 | 0(x)=0 或 c(x)=c |
| RA2 | 後繼函數 | f(x)=x+1 |
| 現代通常會包含投影函數： | | |
| RA3 | 投影函數 | p kj(x1,x2,...,xj,...,xk)=xj |

但現在我們知道只要零函數接受為公理，可推論出常數函數具遞迴封閉性，所以基礎遞迴函數可以不須要常數函數，如下面的定理：

**R1：常數函數為遞迴**

*證明*

常數函數為形式如c(x)=c 之函數，其中 c 代表任意常數，例如1(x)為恆等於 1之常數函數，2(x)為恆等於2 之常數函數等等。  
我們知道零函數及後繼函數為遞迴的，定義常數函數 1(x) = f(0(x))，可推得 1(x)為遞迴。  
現在假設常數函數c(x) = c 為遞迴，則有下式成立：  
(c+1)(x) = c+1 = f(c(x))  
依數學歸納法，所有常數函數均為遞迴。

**4.5.級數**

/180/

Die Länge der kürzesten Reihe von φi, welche zu einer rekursiven Funktion φ gehört, heißt ihre Stufe.

定義遞迴函數 φ 的最短 φi 序列長度稱為其級數。

譯註：遞迴函數 φ 之級數描述從基礎遞迴函數至少須經幾次函數轉換而得到φ，依定義可直接推得基礎遞迴函數的級數為 1，再看一個例子，僅包含 0 的集合{0}的級數為何？集合可視為單元關係，關係可由特徵函數定義，集合{0}的特徵函數χ{0}能經由1次遞迴定義建構如下：

χ{0}(0) = f(0)

χ{0}(x+1) = 0(x) (R2)

因為χ{0}(x)是經過一次的遞迴定義，故其級數為 2，前揭證明也說明集合 {0} 是遞迴的。

**4.6.遞迴關係**

Eine Relation zwischen natürlichen Zahlen R(x1...xn) heißt rekursiv 28), wenn es eine rekursive Funktion φ(x1...xn) gibt, so daß für alle x1,x2...xn

一個自然數關係 R(x1...xn) 稱為遞迴 28)， 若且惟若存在一個遞迴函數 φ(x1...xn)， 使得所有的 x1,x2...xn 滿足下式：

R(x1...xn) ~ [φ(x1...xn)=0] 29).

28) Klassen rechnen wir mit zu den Relationen (einstellige Relationen). Rekursive Relationen R haben natürlich die Eigenschaft, daß man für jedes spezielle Zahlen-n-tupel entscheiden kann, ob R(x1...xn) gilt oder nicht.

28) 類別也算此種關係(其為單元關係)，遞迴關係 R 自然具備下列特性， 對每個特定 n 元數對，可決定對 R(x1...xn) 是否成立。

譯註：φ 函數稱為關係 R 的特徵函數，因為哥德爾定義關係成立時特徵函數為 0， 故知 0 為邏輯真值，1 為邏輯假值。類別(或集合)可視為單元關係，故也具有特徵函數，以下我們使用 χ{K} 表示類別 K 的特徵函數。以下我們以證明正整數類別是遞迴來作說明：

**定理 R3：正整數類別是遞迴的。**

*證明：*

令正整數類別 ℕ\* = ℕ\{0}，即不含 0 之自然數類別。其特徵函數 χℕ\*(n) 可遞迴定義如下：

* χℕ\*(0)=f(0)
* χℕ\*(x+1)=0

故可知 ℕ\* 為遞迴，得證。

29) Für alle inhaltlichen (insbes. auch die metamathematischen) Überlegungen wird die Hilbertsche Symbolik verwendet. Vgl. Hilbert-Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik, Berlin 1928.

29) 所有內容觀念(特別是後設數學)是使用希爾伯特符號。參考希爾伯特-阿克曼，理論邏輯基礎，柏林 1928。

譯註：哥德爾在後面建構算術系統除了 ≡ 外， 都是使用希爾伯特的符號，可參閱註 33)， 符號定義如下表：

|  |  |
| --- | --- |
| **符號** | **意義** |
|  | 否定，此符號為命題符號上方的頂線 |
| & | 且，合取 |
| ∨ | 或，析取 |
| → | 推論 |
| ~ | 等值 |
| (x) | 全稱量詞 |
| (Ex) | 存在量詞 |

**4.7.遞迴定理**

譯註：哥德爾描述並略為證明了4個定理，描述封閉在遞迴函數系統內的操作，定理I陳述遞迴定義及函數合成具遞迴封閉性；定理II 陳述基本邏輯操作具遞迴封閉性，包含否定、合取及析取，而其它的邏輯操作可從前三個操作衍生出來；定理III描述了相等關係是具遞迴封閉性；定理IV 描述了最小操作具遞迴封閉性，這是最難證明的定理，但卻給定之後之定理能遞迴的描述量化限制，作為定理能於有限步驟內建構的堅實基礎。後面會提到若能有限步驟建構之定理，就是可判定的定理。

Es gelten folgende Sätze:

以下定理成立：

I.Jede aus rekursiven Funktionen (Relationen) durch Einsetzung rekursiver Funktionen an Stelle der Variablen entstehende Funktion (Relation) ist rekursiv; ebenso jede Funktion, die aus rekursiven Funktionen durch rekursive Definition nach dem Schema (2) entsteht.

I.每個經由插入遞迴函數在已建構函數(關係)之變數位置上而得之遞迴函數(關係) 是遞迴的；每個藉由框架(2)遞迴定義產出之遞迴函數也同樣如此。

II. Wenn R und S rekursive Relationen sind, dann auch R, R ∨ S (daher auch R & S).

II.若 R 及 S 為遞迴關係，則 R, R ∨ S 也是(由此 R & S 也是) 。

III.Wenn die Funktionen φ(𝔵), ψ(𝔶) rekursiv sind, dann auch die Relation: φ(𝔵) =ψ(𝔶) 30)

III.若函數φ(𝔵)及ψ(𝔶)是遞迴則以下關係也是：φ(𝔵)=ψ(𝔶)30)

30) Wir verwenden deutsche Buchstaben 𝔵, 𝔶 als abkürzende Bezeichnung für beliebige Variablen-n-tupel, z. B. x1 x2 ... xn.

30) 哥德字母 𝔵, 𝔶用來表示 n 元數組變數(即 x1 x2 ... xn)。

IV.Wenn die Funktion φ(𝔵) und die Relation R(x,𝔶) rekursiv sind, dann auch die Relationen S,T

IV.若函數 φ(𝔵) 及關係 R(x,𝔶) 是遞迴，則以下關係 S, T 也是：

S(𝔵,𝔶)~(Ex)[x≦φ(𝔵)&R(x,𝔶)]

T(𝔵,𝔶)~(x) [x≦φ(𝔵)→R(x,𝔶)]

sowie die Funktion ψ

以及函數 ψ 也是：

ψ(𝔵,𝔶)=εx[x≦φ(𝔵)&R(x,𝔶)]

wobei εxF(x) bedeutet: Die kleinste Zahl x, für welche F(x) gilt und 0, falls es keine solche Zahl gibt.

其中 εxF(x) 指： 最小數 x 滿足 F(x)，而 0 表示不存在這樣的數。

Satz I folgt unmittelbar aus der Definition von "rekursiv".

定理 I 由遞迴之定義直接推得。

**4.8.基本邏輯操作是遞迴的**

Satz II und III beruhen darauf, daß die den logischen Begriffen -, ∨, = entsprechenden zahlentheoretischen Funktionen

α(x), β(x,y), γ(x,y)

nämlich:

α(0)=1 ; α(x) =0 für x≠0

β(0,x)=β(x,0)=0; β(x,y)=1, wenn x,y beide ≠0 sind

γ(x,y)=0, wenn x=y;γ(x,y)=1, wenn x≠y

/181/

recursiv sind, wie man sich leicht überzeugen kann.

定理 II 及 III 根據邏輯觀念 -, ∨, = 對應到數論函數

α(x), β(x,y), γ(x,y)

即：

α(0)=1 ; α(x)=0 當 x≠0

β(0,x)=β(x,0)=0; β(x,y)=1, 當 x,y 都 ≠0

γ(x,y)=0, 當 x=y;γ(x,y)=1, 當 x≠y

前揭函數是遞迴能輕易證明。

譯註：雖然哥德爾說邏輯操作能輕易證明，但為了讓你們省下一些思考的時間，我還是把證明作完整補充。與現代程式語言大大不同，哥德爾將邏輯真以0表示，邏輯假以1表示，前揭函數的證明如下：

**定理 R4：否定是遞迴**

*證明：*

α 即正整數集合 ℕ\* 的特徵函數 χℕ\*，可由定理 R3 知該函數是遞迴，得證。

**定理 R5：析取是遞迴**

*證明：*

令 β 定義如下：  
β(x,y) = α(α(x.y))  
由定理 R4 否定是遞迴及定理 R12 乘法是遞迴得證。  
以如下實例更能清楚了解析取β函數之定義：

β(0,0)= α(α(0.0))

= α(α(0))

= α(1)

= 0

β(0,2) = α(α(0.1))

= α(α(0))

= α(1)

= 0

β(2,0) = α(α(2.0))

= α(α(0))

= α(1)

= 0

β(2,4) = α(α(2.4))

= α(α(8))

= α(0)

= 1

**4.9.相等關係為遞迴**

譯註：γ(x,y) 表示相等關係，詳細證明如定理R6 至 R11：

**定理 R6:前項函數是遞迴。**

*證明：*

前項函數p為後繼函數之對立函數。  
建構p之遞迴定義如下：

p(0) = 0

p(x+1)=(x,p(x))

由定理RA1常數0為遞迴及定理RA3投影函數為遞迴，得證。

**定理 R7:隔斷減法是遞迴。**

*證明：*

隔斷減法 ㅗ定義如下（我以韓文字母 ㅗ表示）：

n ㅗ m = 0 : n < m

= n-m : n > m

n ㅗ m 可遞迴定義如下：

nㅗ 0 = n

nㅗ m = p(nㅗ(m-1))

由定理 R6 前項函數為遞迴，得證。

**定理 R8：絕對差是遞迴。**

*證明：*

n, m 的絕對差記為|n-m|，為 2 數的差異值，例如 |1,2| 為 1，|4,2| 為 2。 其建構定義如下：  
|n-m| = (nㅗm) + (mㅗn)  
由定理 R7 隔斷減法是遞迴及定理 RA11 加法為遞迴，得證。

**定理 R9：相等關係是遞迴。**

*證明：*

2 數相等關係等價於2數絕對差是否等於 0，如以下所述：

* x=y~|x-y|=0
* x≠y~|x-y|>0

哥德爾定義γ為相等關係之特徵函數，令 γ(x,y) = χ{0}(|x-y|)，由定理 R2 集合{0}是遞迴及定理 R8 絕對差是遞迴，得證。  
以幾個例子計算來檢核此定義是否正確，如下例：

* γ(2,2) = χ{0}(|2-2|) = χ{0}(0) = 0
* γ(3,4) = χ{0}(|3-4|) = χ{0}(1) = 1

**命題 R10：符號函數是遞迴。**

*證明：*

符號函數 sgn 用來判斷一數值的正負號，定義如下：

sgn(n)=0:n>0

=1:n<0

取 sgn(n) = χℕ\*(n)，再依定理R2正整數類別是遞迴的，得證。

**4.10.定理 IV 證明**

Der Beweis für Satz IV ist kurz der folgende: Nach der Voraussetzung gibt es ein rekursives ρ(x,), so daß:

命題 IV 之證明很簡短如下：  
設存在一個遞迴函數 ρ(x,𝔶) 使得：  
R(x, 𝔶)~[ρ(x,𝔶)=0].

譯註：取 ρ 表 R 之特徵函數係其為 R 的希臘音字母。哥德爾說前揭證明很簡短，我想他認為 1,000 行以內的證明都算簡短:(

Wir definieren nun nach dem Rekursionsschema (2) eine Funktion χ(x, 𝔶) folgendermaßen:

現在根據遞迴框架(2)定義函數 χ(x,𝔶) 如下：

* χ(0,𝔶)=0
* χ(n+1,𝔶)=(n+1).a+χ(n,𝔶).α(a) 31)

譯註：χ表特徵函數，德文為 charakteristische Funktion ，其為ch的希臘音字母。

31) Wir setzen als bekannt voraus, daß die Funktionen x+y (Addition), x.y (Multiplikation) rekursiv sind.

31) 預設已知函數 x+y (加法)及 x.y (乘法) 是遞迴的。

譯註：哥德爾說加法及乘法之遞迴封閉性是預設，表示將省略其證明，在此我補充證明如下：

**定理 R11：加法是遞迴的**

x+y 可遞迴定義如下：

* x+0=x
* x+y=f(x+(y-1))=f((x,y-1,x+(y-1)))

由定理RA2後繼函數為遞迴及定理RA3投影函數為遞迴，得證。

**定理 R12：乘法是遞迴的。**

x.y 可遞迴定義如下：

* 0.y=0
* (x+1).y=x.y+y=(x,x.y,y)+(x,x.y,y)

由定理 RA3 投影函數為遞迴及定理 R11 加法是遞迴的，得證。

wobei

其中  
a=α[α(ρ(0,𝔶))].α[ρ(n+1,𝔶))].α[χ(n,𝔶)].

譯註：a 可由以下程式碼表達：

# ρ 是關係 R 的特徵函數

a = if ρ(0 ,𝔶)≠0 # 0不滿足關係R，即R(0,𝔶)成立。

and ρ(n+1,𝔶)=0 # n+1 滿足關係R，即R(0,𝔶)成立。

and χ(n ,𝔶)=0 # χ為0

then 0

else 1

χ(n+1,𝔶) ist daher entweder =n+1 (wenn a = 1) oder == χ(n, 𝔶) (wenn a = 0) 32)

因此 χ(n+1,𝔶) 若非=n+1(當 a=1 時)則=χ(n,𝔶)(當a=0時) 32)

32) Andere Werte als 0 und 1 kann a, wie aus der Definition für α ersichtlich ist, nicht annehmen.

32) 由 α 的定義明顯得知 a 不能接受 0 與 1 以外之值。

Der erste Fall tritt offenbar dann und nur dann ein, wenn sämtliche Faktoren von a 1 sind, d.h. wenn gilt:

第一種情形顯然僅在 a 的所有乘數為 1 時才成立， 即下式成立：

R(0,𝔶) & R(n+1,𝔶) & [χ(n,𝔶)=0].

譯註：R(0,𝔶) & R(n+1,𝔶) & [χ(n,𝔶)=0] 即  
ρ(0,𝔶)≠0 & ρ(n+1,𝔶)=0 & χ(n ,𝔶)=0   
由上可知哥德爾以乘法代表合取，故取 0 表示邏輯假值，

Daraus folgt, daß die Funktion χ(n, 𝔶) (als Funktion von n betrachtet) 0 bleibt bis zum kleinsten Wert von n, für den R(n, 𝔶) gilt, und von da ab gleich diesem Weft ist (falls schon R(0,𝔶) gilt, ist dem entsprechend χ(n,𝔶) konstant und =0). Demnach gilt:

可推得函數 χ(n, 𝔶) (視為 n 之單元函數 ) 保持為 0 直到 n 為滿足 R(n, 𝔶) 的最小值， 且開始恆等於此值。 (若 R(0,𝔶) 成立則 χ(n,𝔶) 對應到常數 0)。 因此：

* ψ(𝔵,𝔶) = χ(φ(𝔵),𝔶)
* S(𝔵,𝔶) ~ R[ψ(𝔵,𝔶),𝔶]

譯註：哥德爾寫了「若 R(0,𝔶) 成立則 χ(n,𝔶) 對應到常數 0」， 這是因為一開始 0 就滿足關係 R，則特徵函數 χ 永遠為 0， 因為一開始就找到啦！ 以現代程式語言定義χ函數非常簡短，如下：

def χ(n,𝔶)

for(i=0;i<n;i++)

if R(i, 𝔶) then return i

return 0

Die Relation T läßt sich durch Negation auf einen zu S analogen Fall zurückführen, womit Satz IV bewiesen ist.

關係 T 可輕易以 S 的否定寫成， 故命題 IV 得證。

譯註：把目標與建構法擺近一點，讓讀者比較，因為相隔太遠，反而不利理解：  
  
ψ(𝔵,𝔶)=εx[x≦φ(𝔵)&R(x,𝔶)]  
可輕易以 χ 定義如下：  
ψ(𝔵,𝔶) = χ(φ(𝔵),𝔶)  
  
S(𝔵,𝔶)~(Ex)[x≦φ(𝔵)&R(x,𝔶)]  
可輕易以 ψ 定義如下：  
S(𝔵,𝔶) ~ R[ψ(𝔵,𝔶),𝔶]  
  
T(𝔵,𝔶)~(x) [x≦φ(𝔵)→R(x,𝔶)]  
可輕易以 S 否定定義。

**4.11.基本算術是遞迴的**

Die Funktionen x+y, x.y, xy, ferner die Relationen x<y, x=y sind, wie man sich leicht überzeugt, rekursiv und wir definieren nun, von diesen Begriffen ausgehend, eine Reihe von Funktionen (Relationen) 1-45, deren jede aus den vorhergehenden mittels der in den Sätzen I bis IV genannten Verfahren definiert ist.

x+y, x.y, xy 等函數，甚至 x<y, x=y 等關係， 可以輕易證明為遞迴的， 後可從這些項目開始定義 1-45 一系列的函數(關係)， 其中每項經由定理 I 至 IV 相關之操作自前項定義而來。

譯註：同樣哥德爾又說次方、次序及相等關係可輕易證明，我仍備妥證明如下：

**定理 R13：次方是遞迴的。**

xy可遞迴定義如下：  
當y=0時，xy=1  
當y>0時，xy+1=xy.x = (y,xy,x).(y,xy,x)  
由 RA3 投影函數為遞迴及 R12 乘法是遞迴的，得證。

**定理 R14：次序關係是遞迴的**

次序關係等價於以下關係：  
n<m ~ mㅗn>0  
n≥m ~ mㅗn=0  
故可以定義 < 的特徵函數為  
χ<(n,m) = χℕ\*(mㅗn)  
由 R3 集合 ℕ\* 是遞迴的及 R4 隔斷減法是遞迴，得證。  
令 ≥ 的特徵函數為  
χ≥(n,m) = χ0(mㅗn)  
由 R2 集合 0 是遞迴的及 R4 隔斷減法是遞迴，得證。

**6.表現定理**

*導讀*

定理V現代稱稱為表現定理，因為此定理證明所有遞迴函數均可於 P 系統內表現。遞迴函數系統僅包含 3 個基礎遞迴函數及 2 個函數轉換規則，所以要證明 P 系統能表現所有的遞迴函數，只要能以 P 系統實作遞迴函數系統的 3 個基礎遞迴函數及 2 個函數轉換規則 即可證明。

Die Tatsache, die man vage so formulieren kann: Jede rekursive Relation ist innerhalb des Systems P (dieses inhaltlich gedeutet) definierbar, wird, ohne auf eine inhaltliche Deutung der Formeln aus P Bezug zu nehmen, durch folgenden Satz exakt ausgedrückt:

以下定理精確表達之事實概略形式化如下：每個遞迴關係可於 P 系統內定義（這被內容詮譯），不須參照由 P 衍生之公式之內容詮譯。

Satz V. Zu Jeder rekursiven Relation R(x1...xn) gibt es ein n-stelliges Relationenszeichen r (mit den freien Variablen 38) (u1, u2...un), so daß für alle Zahlen-n-tuple (x1, x2,...xn) gilt:

定理 V：對每個遞迴關係 R(x1...xn) 而言，存在一個 n 元關係符號 r (帶有自由變數) (u1,u2...un) 38)，使得所有n元整數值組 (x1,x2...xn) 滿足下式：

R(x1...xn) → Bew[Sb (3)

~R(x1...xn) → Bew[Neg Sb (4)

Wir begnügen uns hier damit, den Beweis dieses Satzes, da er keine prinzipiellen Schwierigkeiten bietet und ziemlich umständlich ist, in Umrissen anzudeuten 39).

概略指出此定理證明因為沒有任何理論障礙且在合理的複雜程度內 39)，所以可滿足我們。

38) Die Variablen u1...un können willkürlich vorgegeben werden. Es gibt z. B. immer r mit den freien Variablen 17, 19, 23...usw., für welches (3) und (4) gilt.

38) 變數 u1...un 可被任意指定，例如總是存在 r 帶有自由變數 17, 19, 23...等等，使得 (3) 及 (4) 成立。

39) Satz V beruht natürlich darauf, daß bei einer rekursiven Relation R für jedes n-tupel von Zahlen aus den Axiomen des Systems P entscheidbar ist, ob die Relation R besteht oder nicht.

39) 命題 V 自然基於，無論 R 關係是成立與否，遞迴關係 R 對每個 n 元整數數組是可由系統 P 之公理決定的，

Wir beweisen den Satz für alle Relationen R(x1...xn) der Form:  
x1 = φ(x2...xn) 40)  
(wo φ eine rekursive Funktion ist) und wenden vollständige Induktion nach der Stufe von φ an.

我們證明對所有具以下形式關係 R(x1...xn) 而言，定理成立：  
x1 = φ(x2...xn) 40)  
(其中 φ 是一個遞迴函數) 並對 φ 之級數應用完整歸納法。

40) Daraus folgt sofort seine Geltung für jede rekursive Relation, da eine solche gleichbedeutend ist mit 0=φ(x1... xn), wo φ rekursiv ist.

40) 這可直接推得對每個遞迴關係也成立， 因為此類關係與0=φ(x1... xn)（其中 φ 是遞迴的）同義，

**6.1.以P系統表現基礎遞迴函數**

Für Funktionen erster Stufe (d. h. Konstante and die Funktion x+1) ist der Satz trivial.

對 1 級函數（即常數及函數 x+1）此定理是顯而成立的。

譯註：如何證明某一個函數滿足定理 V，最重要的是找出 P 系統表示該遞迴函數的合式公式，該對應的合式公式對所有滿足遞迴函數的數組而言，經由 Z 函數轉換成 P 系統之數組後，可由 P 系統證明為真；對所有為不滿足遞迴函數的數組而言，經由 Z 函數轉換成 P 系統之數組後，可由 P 系統證明為假，其中 Z 函數為將整數轉為表示 P 系統之哥德爾數。

1 級函數就是基礎遞迴函數，不過哥德爾認為用 P 系統表達基礎遞迴函數是顯而成立的，那是因為他基本上已熟讀數學原理這本書， P系統是數學原理與皮亞諾公理的綜合，而以下證明都會引用到 x=x 自身相等的定理，但如何從 P 系統的公理去推論出 x=x 呢？證明寫在數學原理這本大書中，我會寫出頁數，請自已去翻吧 :(

**定理 P1：x=x**

*證明*

1. 由數學原理 PM (第 2 版, 1927, 168頁) \*13.15 |- x=x

**定理 R31：0(x) 可由 P 系統表達。**

*證明*

1. 基礎遞迴函數 0(x)=0 標準化為 R(x1,x2)~x2=0
2. 令其 P 系統對應公式為 r(u1,u2) ≡ u2=z(0)
3. 顯然得證

以一個例子驗證 0(9)=0 可在 P 系統證明為真：

1.套入 P 系統的合式公式 sb

因為 r = u2=z(0) 代入上式

2. sb

3.執行取代得 Z(0)=Z(0)，再由定理 P1 得證。

**命題 R32：x+1 可於 P 系統決定。**

1. 令後繼函數之標準化函數為 R(x1,x2)~x1=x2+1
2. 令 R 的 P 系統對應公式為 r(u1,u2) ≡ u1=fu2，
3. 顯然得證

舉例說明：

1.R(1,0) ~ 1 = 0+1

2. sb= r(f0,0) ≡ f0=f(0)=f0

3.由定理P1 知 f0=f0 為真。

**6.2.替換操作及遞迴定義可由 P 系統表達**

Habe also φ die m-te Stufe. Es entsteht aus Funktionen niedrigerer Stufe φ1...φk durch die Operationen der Einsetzung oder der rekursiven Definition. Da für φ1...φk nach induktiver Annahme bereits alles bewiesen ist, gibt es zugehörige Relationszeichen r1...rk, so daß (3), (4) gilt. Die Definitionsprozesse, durch die φ aus φ1...φk entsteht (Einsetzung und rekursive Definition), können sämtlich im System P formal nachgebildet werden.

φ 為 m 階時，是以替換操作或遞迴定義建構自較為前階之函數 φ1...φk。依據歸納假設 φ1...φk 可以證明存在對映的關係符號 r1...rk 使得 (3)、(4) 成立。由已建構之 φ1...φk (經由替代及遞迴定義)所衍生的 φ之定義流程都能於系統 P 找到形式對應。

/187/

Tut man dies, so erhält man aus r1...rk ein neues Relationszeichen r 41), für welches man die Geltung von (3), (4) unter Verwendung der induktiven Annahme ohne Schwierigkeit beweisen kann. Ein Relationszeichen r, welches auf diesem Wege einer rekursiven Relation zugeordnet ist 42), soll rekursiv heißen.

至此可由 r1...rk 衍生一個新的關係符號 r 41)，並毫無困難應用歸納假設證明 (3)、(4)的有效性。如此對應到遞迴關係的關係符號 r將稱為遞迴42)。

41) Bei der genauen Durchführung dieses Beweises wird natürlich r nicht auf dem Umweg über die inhaltliche Deutung, sondern durch seine rein formale Beschaffenheit definiert.

41) 由證明的精確建構可知 r 本質上並非衍生自內容意義之迂迴中，而是經由其本身之純形式組成所定義。

42) Welches also, inhaltlich gedeutet, das Bestehen dieser Relation ausdrückt.

42) 其於此內容解釋下也表達了此關係的存在。

譯註：哥德爾於定理 VII 以算術系統表示遞迴函數的替換操作(函數合成)及遞迴定義的方法，就是 P 系統的表示法，此法如腳註 41)所說明的為一組形式定義，我以下面 2 個定理說明：

**定理 R33：替換操作可於 P 系統表示。**

替換操作即為現代述語的函數合成。以下的定義以希臘字母代表遞迴函數，以拉丁字母代表 P 系統關係符號。

1. 若函數η為自遞迴函數 θ 及 γ1...γk 之函數合成， 則以下等式關係成立：  
   η(χ1...χn)=θ(γ1(χ1...χn)...γk(χ1...χn))
2. 依據定理V之歸納假設，θ 與 γ1...γk 等函數為遞迴函數，故於 P 系統存在以下公式 f, g1...gn，使得  
   f (y1...yk,y ) 為表示 υ =θ (υ1...υk) 之關係符號，  
   g1(x1...xn,y1) 為表示 υ1=γ1(χ1...χn) 之關係符號，  
   .   
   .   
   .   
   gk(x1...xn,yk) 為表示 υk=γk(χ1...χn) 之關係符號。
3. 在 P 系統可以建構出下式：

(Ey1,...,yk)[f (y1,...,yk,y)

.g1(x1,...,xn,y1)

.

.

.

f .gk(x1,...,xn,yk)]

1. 由上我們於 P 系統中定義出新的關係符號 h 如下：

h(x1,...,xn,y)≡(Ey1,...,yk)[f (y1,...,yk,y)

.g1(x1,...,xn,y1)

.

.

.

.gk(x1,...,xn,yk)]

1. 關係符號h即為遞迴函數η於P系統之對應符號，得證

**定理 R34：遞迴定義可由 P 系統表示。**

1. 若函數 φ 為自函數 ψ 及 μ 之遞迴定義， 則以下等式關係成立：  
   φ(0 ,χ2...χn) = ψ(χ2...χn)  
   φ(κ+1,χ2...χn) = μ(κ,φ(κ,χ2...χn),χ2...χn)
2. 依據定理 V 之歸納假設，ψ 與 μ 等函數為遞迴函數，故於P系統存在以下公式s, p, m，使得下式成立：  
   f(z,x2...xn,y)≡(Es)[|s|=z+1 # s 的元素為 z+1  
    .p(x2...xn,s(0))  
    .(iΠ(i<z)[m(i,x2...xn,s(i+1)).y=s(z)]

**8.算術系統**

*導讀*

哥德爾在本章精確定義「算術系統」為僅使用自然數之加法和乘法，四個邏輯常數∨,x,(x)及=的數論系統，以將不完備定理推廣至所有算術系統，。

之後他證明了定理 VII：「每個遞迴關係是算術的。」證明此定理需要一個數列儲存遞迴定義中每個步驟的結果值，他精巧地利用中國剩餘定理將數列以數對表達，並由模數運算取出數列指定位置的元素值，完全破除我們認為陣列要用指標運算去存取的既定想法，因為有了電腦的我們，總視以位址直接存取記憶體為理所當然。就哥德爾的時代而言，他的電腦就是數論，有興趣的讀者也可以在 C 語言中，用int數對以哥德爾的方法實作一個數字陣列來練習，相當有趣，肯定會使程式設計的能力大幅成長。

**8.1.算術命題**

3.  
Wir ziehen nun aus Satz VI weitere Folgerungen und geben zu diesem Zweck folgende Definition:

Eine Relation (Klasse) heißt arithmetisch, wenn sie sich allein mittels der Begriffe +, . [Addition und Multiplikation, bezogan auf natürliche Zahlen 49)] und den logischen Konstanten ∨, x, (x), = definieren läßt, wobei (x) und = sich nur auf natürliche Zahlen beziehen dürfen 50). Entsprechend wird der Begriff "arithmetischer Satz" definiert. Insbesondere sind z. B. die Relationen "größer" und "kongruent nach einem Modul" arithmetisch, denn es gilt:

現在要從命題 VI 導出更廣泛的結論故給定以下定義：

一個關係（類別）稱為算術，在於其本身僅由 +, . 「自然數之加法和乘法 49)」 之觀念和邏輯常數 ∨,x,(x),= 所定義，其中(x)和=僅能應用在自然數 50)。「算術命題」項目也能對應的定義出來，特別是如關係「大於」和「單模數同餘」均為算術，故如下成立：

* x<y~(Ez)[y=x+z]
* x≡y(mod n)~(Ez)[x=y+z.n ∨ y=x+z.n]

49) Die Null wird hier und im folgenden immer mit zu den natürlichen Zahlen gerechnet.

49) 此後自然數包括零。

50) Das Definiens eines solchen Begriffes muß sich also allein mittels der angeführten Zeichen, Variablen für natürliche Zahlen x, y,... und den Zeichen 0, 1 aufbauen (Funktions und Mengenvariable dürfen nicht vorkommen). (In den Präfixen darf statt x natürlich auch jede andere Zahlvariable stehen.)

50) 這些概念之定義僅由已提過之符號、自然數變數 x, y,...及符號 0, 1 建構。(不允許出現函數與集合變數)。(前者對每個不同於 x 之數目變數當然也成立)。

**8.2.遞迴關係是算術的**

Es gilt der Satz VII: Jede rekursive Relation ist arithmetisch.

這可得定理 VII：每個遞迴關係是算術的。

Wir beweisen den Satz in der Gestalt:  
Jede Relation der Form x0=φ(x1...xn), wo φ rekursiv ist, ist arithmetisch, und wenden vollständige Induktion nach der Stufe von φ an.  
φ habe die s-te Stufe(s>1). Dann gilt entweder:

我們以下述論述證明此命題：  
每個形式如 x0=φ(x1...xn)（其中 φ 是遞迴的）之關係是算術的， 且可對 φ 的級數作完整歸納法。  
設 φ 為第 s-級(s>1)函數，且若非下式成立：

/192頁/

1.φ(x1...xn)=ρ[χ1(x1...xn),χ2(x1...xn)...χm(x1...xn)]51)  
(wo ρ und sämtliche χi kleinere Stufe haben als s) oder:

(其中 ρ 和所有的 χi 其級數小於 s)  
就是下式成立：

2.φ(0,x2...xn)=ψ(x2...xn)  
 φ(k+1,x2...xn)=μ[k,φ(k,x2...xn),x2...xn]  
(wo ψ,μ niedrigere Stufe als s haben).

(其中 ψ,μ 其級數小於 s)。

譯註：1.式即為函數合成；2.式即為遞迴定義。等式右側的函數級數（ρ、χ、ψ 及 µ）均小於 φ 之級數 s，說明函數合成及遞迴定義須由已定義之遞迴函數生成。此操作會定義新的遞迴函數，即可利用作為推論規則之實作。

51) Es brauchen natürlich nicht alle x1...xn in den χi tatsächlich vorzukommen [vgl. das Beispiel in Fußnote 27)].

51)不是所有於 χi 中的 x1...xn 都需要實際出現。「參閱腳註 27) 之例子」。

Im ersten Falle gilt:

情形一下式成立：

x0=φ(x1...xn)~(Ey1...ym)[R(x0,y1...ym)& S1(y1,x1...xn)&...&Sm(y1,x1...xn)],  
  
wo R bzw. Si die nach induktiver Annahme existierenden mit x0=ρ(y1...ym) bzw. y=χi(x1...xn) äquivalenten arithmetischen Relationen sind. Daher ist x0=φ(x1,x2...xn) in diesem Fall arithmetisch.

依據歸納假設，存在分別與 x0=ρ(y1...ym) 及 y=χi(x1...xn) 等值之算術關係 R 和 Si。因此於此情形下 x0=φ(x1,x2...xn) 為算術的。

譯註：前述證明的y=χi(x1...xn)應該寫成yi=χi(x1...xn)更為明確。另外你可以注意到式子：

(Ey1...ym)[R(x0,y1...ym)&S1(y1,x1...xn)&...&Sm(y1,x1...xn)]

僅由 (x) 及 & 兩個運算子應用於算術關係 R 及 Si 所建構，故可證明函數合成封閉於算術關係下。

Im zweiten Fall wenden wir folgendes Verfahren an: Man kann die Relation x0=φ(x1,x2...xn) mit Hilfe des Begriffes "Folge von Zahlen" (f) 52) folgendermaßen ausdrüeken:

情形二應用以下程序： 以「整數序列」(f) 觀念 52) 表達關係 x0=φ(x1,x2...xn) 如下：

x0=φ(x1...xn)~(Ef){f0=ψ(x2...xn) &  
(k)[k<x1→fk+1=μ(k,fk,x2...xn)] & x0=fx1}

Wenn S(y,x2...xn) bzw. T(z,x1...xn+1) die nach induktiver Annahme existierenden mit y=ψ(x2...xn) bzw. z=μ(x1...xn+1) äquivalenten arithmetische Relationen sind, gilt daher:

依據歸納假設，分別存在與 y=ψ(x2...xn) 及 z=μ(x1...xn+1) 等值之算術關係 S(y,x2...xn) 和 T(z,x1...xn+1)。故可得：

x0=φ(x1...xn)~(Ef){S(f0,x2...xn) & (k)[k<x1→T(fk+1,k,fk,x2...xn)] & x0=fx1} (17)

52) f bedeutet hier eine Variable, deren Wertbereich die Folgen natürl. Zahlen sind. Mit fk wird das k+1-te Glied einer Folge f bezeichnet (mit f0 das erste).

52) f 於此表示一個其值域是自然數序列的變數。fk 用來表示 f 序列之第 k+1-個元素（f0 表示第一個）。

**8.3.整數對表現整數序列**

Nun ersetzen wir den Begriff "Folge von Zahlen" durch "Paar von Zahlen", indem wir dam Zahlenpaar n, d die Zahlenfolge f(n,d)(fk(n,d)=[n]1+(k+1)d) zuordnen, wobei [n] den kleinsten nicht negativen Rest von n modulo p bedeutet. Es gilt dann der Hilfssatz 1:  
Ist f eine beliebige Folge natürlicher Zahlen und k eine beliebige natürliche Zahl, so gibt es ein Paar von natürlichen Zahlen n, d, so daß f(n,d) und f in den ersten k Gliedern übereinstimmen.

現在以「整數對」替代「整數序列」之觀念， 將整數對 n, d 對映到數列 f(n, d) (元素fk(n,d)=[n]1+(k+1)d)， 其中 [n]p 指n 除 p 之最小非負數餘數。這可由引理 1 得證：  
令f 是一個任意的自然數序列且 k 是一個任意自然數，則存在一個自然數 n, d 之數對，使得 f(n,d) 和 f 與第一個 k 項目一致。

譯註：讀者可注意 f 及 f(n,d) 都是表示數列之符號，且 2 數列每個位置元素都一致，即陣列相等是定義為每個位置的元素都相同。

Beweis: Sei l die größte der Zahlen k,f0,f1...fk-1. Man bestimme n so, daß:  
n≡fi[mod(1+(i+1)l!)] für i=0,1...k-1

/193/

was möglich ist, da je zwei der Zahlen 1+(i+1)l!(i=0,1...k-1) relativ prim sind. Denn eine in zwei von diesen Zahlen enthaltene Primzahl müßte auch in der Differenz (i1-i2)l! und daher wegen |i1-i2|<l in l! enthalten sein, was unmöglich ist. Das Zahlenpaar n,l! leistet dann das Verlangte. Da die Relation x=[n]p durch:  
  
x≡n (mod p) & x<p  
  
definiert und daher arithmetisch ist, so ist auch die folgendermaßen definierte Relation P(x0,xl...xn):

證明：令 l 為 k,f0,f1...fk-1 中最大的整數，則可限定 n 為：  
  
n≡fi[mod(1+(i+1)l!)] 對 i=0,1...k-1  
  
這是因為數列 1+(i+1)l!(i=0,1...k-1) 中任 2 個數是互質的。因為若否，則數列中任 2 個數所包含的質數也應包含在 (i1-i2)l! 數段中，且因 |i1-i2|<l 故應包含於l!中，這是不可能的。因此數對 n,l! 滿足前面規範。又關係 x=[n]p 可由下式：  
  
x≡n (mod p) & x<p  
  
所定義且該式為算術，所以如下所定義的關係 P(x0,x1...xn) 也是算術的。

P(x0...xn)≡(En,d){S([n]d+1,x2...xn)

& (k)[k<x1 → T([n]1+d(k+2)

,k

,[n]1+d(k+1)

,x2...xn]

& x0=[n]1+d(x1+1)}

arithmetisch, welche nach (17) and Hilfssatz I mit: x0=φ(x1...xn) äiquivalent ist (es kommt bei der Folge f in (17) nur auf ihren Verlauf bis zum x1+1-ten Glied an). Damit ist Satz VII bewiesen.

依據 (17) 與輔助定理 I 知關係 P 等價於 x0=φ(x1...xn)。(藉由 (17) 中之數列 f，只要對其前 x1+1 個元素進行運算便能推得)。據此命題 VII 已證明。

譯註：我先舉一例說明哥德爾如何用上述方法以數對表示數列：  
設有一數列 s 其元素為 2, 3, 2。

1. 找出 l。  
   取 3(數列長度)及數列所有元素值 2, 3, 2 中最大數，得 l=3。
2. 求出 n。  
   n 滿足以下的一元同餘方程組 S 如下：
3. n≡fi[mod(1+(i+1)l! ]
4. n≡ 2[mod 1+(0+1)3!=7 ]
5. n≡ 3[mod 1+(1+1)3!=13]
6. n≡ 2[mod 1+(2+1)3!=19]

利用中國剩餘定理解 S 的最小解 n 如下：

n = 2.4.19.13 + 3.9.7.19 + 2.14.7.13 + kM (K 為任意整數)

= 8115 + k.7.13.19 = 8115 + (-4).1729 = 1199

1. 知道 n 及 l 後，數列 s 第 i 個元素值可使用以下算式求出：

fi = n mod 1+(i+1)l!

第 0 個元素 f1=1199 mod 1+(0+1)3! = 2

第 1 個元素 f2=1199 mod 1+(1+1)3! = 3

第 2 個元素 f3=1199 mod 1+(2+1)3! = 2

哥德爾對數列 1+(i+1)l! 任 2 數為互質之性質，僅用 2 句話即完成證明， 雖已提示應使用反證法來證明此命題，但太精簡，讓人不容易理解，我將在以下的定理 41 詳細說明。定理 41 之證明是參閱 gribskoff, 2013。

**定理 41：數列 1+(i+1)l! (i=0,1...k-1) 中任 2 個數是互質的。**

*證明*

1. 設反命題為真， 即數列 1+(i+1)l! 存在 2 個數並非互質，故存在質數 p 使得下式成立：
   1. p|(i +1)l!+1
   2. p|(i+j+1)l!+1, j 為任意整數。

即等同以下同餘關係：  
[(i+1)l!+1]≡[(i+j+1)l!+1] (mod p)  
可推得下式成立：  
p | [(i+j+1)l!+1]-[(i+1)l!+1] = jl!  
再推得：  
p|jl! → p|j ∨ p|l!

1. 若 p|l! 成立（即哥德爾說的「因 |i1-i2|<l 故應包含於 l!中」）， 則 p|l!(i+1) 成立，但其與前述 p|(i+1)l!+1 不可能同時成立， 故 p 不整除 l!。
2. 若 p|j 成立（即哥德爾說「質數也應包含在 (i1-i2)l! 數段中」） 因為 j≦max(1...k)=l 故對所有 j，j|l! 成立。
3. 由 p|j ∧ j|l! → p|l!
4. 若 p|l! 成立，則 p|l!(i+1) 成立， 但其與前述 p|(i+1)l!+1 不可能同時成立， 故 p 不整除 j
5. 依反證法得證。

**定理 42：中國剩餘定理**

已知任意數列 a1,a2...an 及 m1,m2...mn，若 m1,m2...mn 任 2 數互質， 則下列一元線性同餘方程組 S：

x≡a1 (mod m1)

x≡a2 (mod m2)

.

.

.

x≡an (mod mn)

有解且可由下列通用程序解出：

1.設 M = m1.m2...mn

Mi = M/mi

2.令 tiMi = 1 (mod mi)，求得 ti。

3.方程組 S 的通解為

x = a1t1M1 + a2t2M2 +...+ antnMn + kM (K 為任意整數)

*例子：*

孫子算經「物不知數」問題，原文如下： 有物不知其數，三三數之剩二，五五數之剩三， 七七數之剩二。問物幾何？

解：

x≡2 (mod 3)

x≡3 (mod 5)

x≡2 (mod 7)

M=3.5.7=105

t1.35 = 1 (mod 3)

t1 = 2

t2.21 = 1 (mod 5)

t2 = 1

t2.15 = 1 (mod 7)

t2 = 1

x=2.2.35+3.1.21+2.1.15=140+63+30=233

≡ 23 (mod 105)

*證明：*省略，網路一打「中國剩餘定理」，就有成千個證明。

關係 P 是用來描述遞迴定義，但論文中公式之轉換與說明交雜，不易看出轉換方式，若將 4 個建構的公式並列一起，便能簡易的看出 P 是如何建構的：

1. 原遞迴定義：

φ(0 ,x2...xn)=ψ(x2...xn)

φ(k+1,x2...xn)=μ[k,φ(k,x2...xn),x2...xn]

1. 導入f數列，f數列為函數φ的前 k 階遞迴結果值  
   x0=φ(x1...xn)~(Ef){f0=ψ(x2...xn)  
   &(k)[k<x1 → fk+1=μ(k,fk,x2...xn)]  
   & x0=fx1}
2. 去除右式等號，將其轉為一般化關係 S 及 T 之表示。  
   x0=φ(x1...xn)~(Ef){S(f0,x2...xn)  
   &(k)[k<x1 → T(fk+1,k,fk,x2...xn)]   
   &x0=fx1}
3. 導入數對 n 及 d 取代 f 來表示前 k 階結果數列。  
   P(x0...xn)≡(En,d){S([n]d+1,x2...xn)  
   & (k)[k<x1 → T([n]1+d(k+2),k,[n]1+d(k+1), x2...xn]  
   & x0=[n]1+d(x1+1)}

**8.4.存在無法決定之算術命題**

Gemäß Satz VII gibt es zu jedem Problem der Form (x)F(x) (F rekursiv) ein äquivalentes arithmetisches Problem und da der ganze Beweis von Satz VII sich (für jedes spezielle F) innerhalb des Systems P formalisieren läßt, ist diese Äquivalenz in P beweisbar. Daher gilt:

依據定理 VII，對每個形式為 (x)F(x) 之問題（F 遞迴）存在一個等值算術問題，由於（對每個特定之 F）定理 VII 整個證明本身能於系統 P 內形式化，故其等值性可於 P 內證明。因此可得：

Satz VIII: In jedem der in Satz VI genannten formalen Systeme 53) gibt es unentscheidbare arithmetische Sätze.

定理 VIII： 在每個命題 VI 所提到之形式系統 53) 存在無法決定之算術命題。

**8.5.存在不可決定之受限函數計算命題**

Dasselbe gilt (nach der Bemerkung auf Seite 190) für das Axiomensystem der Mengenlehre und dessen Erweiterungen durch ω-widerspruchsfreie rekursive Klassen von Axiomen. Wir leiten schließlich noch folgendes Resultat her:

（依據頁190之注釋）同樣可推廣至集合公理系統及其經由ω-一致性遞迴公理類別所擴展之系統。總結可得以下結果：

Satz IX: In allen in Satz VI genannten formalen Systemen 53) gibt es unentscheidbare Problem des engeren Funktionenkalküls 54) (d. h. Formeln des engeren Funktionenkalküls, für die weder Allgemeingültigkeit noch Existenz eines Gegenbeispiels beweisbar ist) 55).

命題 IX: 所有命題 VI 提到之形式系統 53)存在不可決定之受限函數計算問題 54) （即受限函數計算公式之有效性或反例存在性均不可證明）55)。

53) Das sind diejenigen ω-widerspruchsfreien Systeme, welche aus P durch Hinzufügung einer rekursiv definierbaren Klasse von Axiomen entstehen.

53) 這是 P 系統經由增加遞迴可定義之公理類別而得之 ω-一致系統 。

54) Vgl. Hilbert-Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik. Im System P sind unter Formeln des engeren Funktionenkalküls diejenigen zu verstehen, welche aus den Formeln des engeren Funktionenkalküls der PM durch die auf S.176 angedeutete Ersetzung der Relationen durch Klassen höheren Typs entstehen.

54) 參閱希爾伯特-阿克曼，理論邏輯基礎。在系統 P 中，受限函數計算之公式可理解為 176 頁所指出的，藉由以較高型別之類別替代關係所衍生之PM 受限函數計算之公式。

55) In meiner Arbeit: Die Vollstiändigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, Monatsh. f. Math. u. Phys. XXXVII, 2, habe ich gezeigt, daß jede Formel des engeren Funktionenkalküls entweder als allgemeingültig nachweisbar ist oder ein Gegenbeispiel existiert; die Existenz dieses Gegenbeispiels ist aber nach Satz IX nicht immer nachweisbar (in den angeführten formalen Systemen). Monatsh. für Mathematik and Physik. XXXVIII. Band. 1

55) 在我的工作：邏輯函數運算公理之完備性， 數學與物理月刊 XXXVII, 2, 已指出每個受限函數計算之公式既非普遍可證也不存在任一反例；依據命題 IX 反例之存在並非總是可證（在前述形式系統內）。數學與物理月刊 XXXVIII, 2, Band. 1。  
/194頁/

**8.6.形式如 (x)F(x) 之問題可化約成受限函數運算公式滿足問題。**

Dies beruht auf:

這基於：

Satz X: Jedes Problem der Form (x)F(x) (F rekursiv) läßt sich zurückführen auf die Frage nach der Erfüllbarkeit einer Formel des engeren Funktionenkalküls (d.h. zujedem rekursiven F kann man eine Formel des engeren Funktionenkalküls angeben, deren Erfüllbarkeit mit der Richtigkeit von (x)F(x) äquivalent ist).

命題 X：每個形式如 (x)F(x) （F 遞迴）之問題可化約成受限函數運算公式滿足問題。（即對每個遞迴 F 可給定一個受限函數運算之公式，其可滿足性等價於 (x)F(x) 之正確性）。

Zum engeren Funktionenkalkül (e.F.) rechnen wir diejenigen Formeln, welche sich aus den Grundzeichen: -,V, (x), =; x,y...(Individuenvariable) F(x), G(x y), H(x, y, z)... (Eigenschafts- und Relationsvariable) aufbauen 56), wobei (x) und = sich nur auf Individuen beziehen dürfen.

受限函數計算（以下稱為 e.F.）包含這些公式，其由下述基本符號建構 56)： -,∨,(x),=; x,y...（個體變數） F(x), G(x y), H(x, y, z)...（屬性變數及關係變數） 其中 (x) 及 = 僅能參照於個體。

Eine Formel, die außer den zuerst angeführten Zeichen des e. F. noch Variable dritter Art (φ(x), ψ(x y)... etc.) enthält, soll eine Formel im weiteren Sinne (i. w. S.) heißen 58). Die Begriffe "erfüllbar" , "allgemeingültig" übertragen sich ohneweiters auf Formeln i.w.S. und es gilt der Satz, daß man zu jeder Formel i.w.S. A eine gewöhnliche Formel des e.F. B angeben kann, so daß die Erfüllbarkeit von A mit der von B äquivalent ist. Wir fügen zu diesen Zeichen noch eine dritte Art von Variablen φ(x), ψ(x y), χ(x y z) etc. hinzu, die Gegenstandsfunktionen vertreten (d. h. φ(x), ψ(x y) etc. bezeichnen eindeutige Funktionen, deren Argumente und Werte Individuen sind 57).

對這些符號增加第三種變數形式 φ(x), ψ(x y), χ(x y z) 等等，表示物件函數（即 φ(x), ψ(x y) 等等用來表示參數與值為個體之單射函數。57) 除了一開始引入的受限函數計算之符號還包含第三種變數（φ(x), ψ(x y)...等） 之公式稱為較廣義公式（簡寫 i. w. S.） 58)。 「可滿足性」、「普遍有效性」等觀念是直接傳給較廣義公式且對以下命題成立，對每個較廣義公式 A 而言，可給定一個較受限函數計算之正常公式，使得 A 的可滿足性與 B 等價。

譯註：哥德爾上面定義了三種變數形式：

1. 個體變數 x,y,z
2. 屬性或關係變數 F(x), G(x y), H(x,y,z)，注意到其值為邏輯值， 關於此種變數的問題是其是否為真（或可被滿足）。
3. 物件函數φ(x), ψ(x y), χ(x y z)，其值為個體，且為單射函數， 即函數對所有參數都會回傳一個個體。

B erhält man aus A, indem man die in A vorkommenden Variablen dritter Art φ(x), ψ(x y).. durch Ausdrücke der Form: (ɿ z)F(z x),(ɿ z)G(z,xy)... ersetzt, die "beschreibenden" Funktionen im Sinne der PM I\*14 auflöst und die so erhaltene Formel mit einem Ausdruck logisch multipliziert 59), der besagt, daß sämtliche an Stelle der φ, ψ..

B 衍生自 A 如下，將 A 中出現的第三種變數 φ(x), ψ(x y).. 以形式如 (ɿ z)F(z x), (ɿ z)G(z,xy)... 等表示式來取代。以 PM I\*14 之方式消去「描述」函數且將如此具有表示式之公式作邏輯相乘 59)，也就是說將 φ, ψ.. 全部的參數相對於 F, G.. 之第一個空參數一一配置其餘參數。

譯註：ɿ 是倒過來的希臘字母ι，用來表示存在個體 z 滿足 F(z x)，羅素 PM 的符號。

56) D. Hilbert und W.Ackermann rechnen in dem eben zitierten Buch das Zeichen = nicht zum engeren Funktionenkalkül. Es gibt aber zu jeder Formel, in der das Zeichen = vorkommt, eine solche ohne dieses Zeichen, die mit der ursprünglichen gleichzeitig erfüllbar ist (vgl. die in Fußnote 55) zitierte Arbeit).

56) 在正引述的書中，希爾伯特及阿克曼並未將符號 = 計入受限函數運算。 對每個出現符號 = 之公式，卻存在一個沒有此符號公式，初始時便能同時被滿足 （參閱腳註 55 引述之成果）。

57) Und zwar soll der Definitionsbereich immer der ganze individuenbereich sein.

57) 且事實上定義域總是整個個體域。

58) Variable dritter Art dürfen dabei an allen Leerstellen für Individuenvariable stehen, z.B.: y=φ(x), F(x,φ(y)),G[ψ(x,ψ(y)),x] usw.

58) 第三種變數於此可配置於所有個體變數空位上， 如： y=φ(x), F(x,φ(y)),G[ψ(x,ψ(y)),x] 等等。

譯註：因為第三種變數其值為個體，所以可以視為個體變數。

59) D. h. die Konjunktion bildet.

59) 即建構成合取式。

Wir zeigen nun, daß es zu jedem Problem der Form (x)F(x) (F rekursiv) ein äquivalentes betreffend die Erfüllbarkeit einer Formel i.w.S. gibt, woraus nach der eben gemachten Bemerkung Satz X folgt.

現在指出對每個形式 (x)F(x) （F 遞迴）之問題，存在一個問題等價於較廣義公式可滿足性，依據前述可推得命題 X。

Da F rekursiv ist, gibt es eine rekursive Funktion Φ(x), so daß F(x)~[Φ(x)=0], und für Φ gibt es eine Reihe von Funktionen Φ1 Φ2...Φn so daß: Φn=Φ, Φ1(x)=x+1 und für jedes Φk(1<k≦ n) entweder:

若 F 是遞迴的，則存在一個遞迴函數 Φ(x)，使得 F(x)~[Φ(x)=0]， 又對 Φ 而言存在函數序列 Φ1 Φ2...Φn，其中 Φn=Φ, Φ1(x)=x+1， 且對每個 Φk(1<k≦n) 不是：

1.(x2...xm)[Φk(0,x2...xm)=Φp(x2...xm)]

(x,x2...xm){Φk[Φ1(x),x2...xm)=Φq(x,Φk(x,x2...xm),x2...xm]} (18)

p,q<k

譯註：表達遞迴定義。

/195/

oder:

就是：

2.(x1...xm)[Φk(x1...xm)=Φr(Φi1(ξ1)...Φis(ξs))] 60) (19)

r<k,iv<k(für v= 1,2...s)

譯註：表達遞迴合成。

60) ξi(i=1..s) vertreten irgend welche Komplexe der Variablen x1,x2..xm, z. B.: x1 x3 x2.

60) ξi(i=1..s) 代表任意變數 x1,x2..xm 之複數，例如： x1 x3 x2

oder:

或是：

3.(x1,x2..xm)[Φk(x1,x2..xm)=Φ1(Φ1...Φ1(0))] (20)

譯註：表達常數函數。

Ferner bilden wir die Sätze:

再來建構以下命題：

(x)Φ1(x)=0 & (xy)[Φ1(x)=Φ1(y)→x=y] (21)

譯註：定義後繼函數Φ1。

(x)[Φn(x)=0] (22)

譯註：定義 F 的遞迴特徵函數Φn。

Wir ersetzen nun in allen Formeln (18), (19), (20) (für k=2,3...n) und in (21)(22) die Funktionen Φi durch Funktionsvariable φi, die Zahl 0 durch eine sonst nicht vorkommende Individuenvariable x0 und bilden die Konjunktion C sämtlicher so erhaltener Formeln.

我們現在將公式 (18),(19),(20) (對 k=2,3...n), (21) 及 (22) 中的函數 Φi 以函數變數 φi 取代， 數字 0 以未於其它地方出現之個體變數 x0 取代， 並將所有得到的公式形成建構成合取式 C。

譯註：C 是一個較廣義公式。

Die Formel (Ex0)C hat dann die verlangte Eigensehaft, d. h.  
1.Wenn (x)[Φ(x)=0] gilt, ist (Ex0)C erfüllbar, denn die Funktionen Φ1,Φ2...Φn ergeben dann offenbar in (Ex0)C für φ1,φ2...φn eingesetzt einen richtigen Satz.  
2.Wenn (Ex0)C erfüllbar ist, gilt (x)[Φ(x)=0].

公式 (Ex0)C 具有必要特質，即：  
1.若 (x)[Φ(x)=0] 成立，則 (Ex0)C 是可滿足的，因為函數 Φ1,Φ2...Φn 明顯可插入至 (Ex0)C 中的 φ1,φ2...φn 以形成正確的命題。  
2.若 (Ex0)C 可滿足，則 (x)[Φ(x)=0] 成立。

Beweis: Seien Ψ1,Ψ2...Ψn die nach Voraussetzung existierenden Funktionen, welche in (Ex0)C für φ1,φ2...φn eingesetzt einen richtigen Satz liefern. Ihr Individuenbereich sei 𝕴. Wegen der Richtigkeit von (Ex0)C für die Funktionen Φi gibt es ein Individuum a (aus 𝕴), so daß sämtliche Formeln (18) bis (22) bei Ersetzung der Φi durch Ψi und von 0 durch a in richtige Sätze (18') bis (22') übergehen.

證明：假設存在 Ψ1,Ψ2...Ψn 函數被指定給 (Ex0)C 中 φ1,φ2..φn 可形成一個正確命題。其個體域為 𝕴。依據 (Ex0)C 之正確性，對函數 Ψi 存在一個個體 a（屬於 𝕴），對所有 (18) 至 (22) 之公式中的 Φi 以 Ψi 取代，其中的 0 以 a 取代轉換成正確命題 (18') 至 (22')。

譯註：𝕴 是德文字型的 I，表示個體的範圍。

Wir bilden nun die kleinste Teilklasse von 𝕴, welche a enthält und gegen die Operation Ψ1(x) abgeschlossen ist. Diese Teilklasse (𝕴') hat die Eigensehaft, daß jede der Funktionen Ψi auf Elemente aus 𝕴' angewendet wieder Elemente aus 𝕴' ergibt. Denn für Ψi gilt dies nach Definition von 𝕴' und wegen (18'), (19'), (20') überträgt sich diese Eigensehaft von Ψi mit niedrigerem Index auf solche mit höherem. Die Funktionen, welche aus Ψi durch Beschränkung auf den Individuenbereich 𝕴' entstehen, nennen wir Ψi'. Auch für diese Funktion gelten sämtliche Formeln (18) bis (22) (bei der Ersetzung von 0 durch a und Φi durch Ψi).

現在建構一個 𝕴 的最小子類別，其包含 a 且封閉於操作 Ψ1(x) 下。 此子類別 (𝕴') 具如下特性， 每個函數 Ψi 應用 𝕴' 之元素將會產出 𝕴' 之元素。 因為這依據 𝕴' 之定義對 Ψi 而言是成立的，且依據 (18'),(19'),(20') 這些特質從較小下標傳遞至較高下標之 Ψi。 我們將限制 Ψi 個體域為 𝕴' 所衍生之函數稱為 Ψi'。 且對這些函數 (18) 至 (22) 之全部公式均成立 （藉由將 0 以 a 取代及 Φi 以 Ψi 取代）。

Wegen der Riehtigkeit von (21) für Ψi' und a kann man die Individuen aus I' eineindeutig auf die natürlichen Zahlen abbilden u.zw. so, daß a in 0 und die Funktion Ψ1' in die Nachfolgerfunktion Φ1 übergeht. Durch diese Abbildung gehen aber sämtliche Funktionen Ψi' in die Funktionen Φi über und wegen der Richtigkeit von (22) für Ψn' und a gilt (x)[Φn(x)=0] oder (x)[Φ(x)=0], was zu beweisen war 61).

依據 (21) 之正確性，對 Ψi' 及 a 可將 𝕴' 之個體與自然數間作 1 對 1 對映，實務上將 a 轉成 0 且函數 Ψ1' 轉成後繼函數 Φ1。 藉由此對映，所有 Ψi' 函數轉換成函數 Φi 且依據 (22) 對 Ψn' 及 a 之正確性， (x)[Φn(x)=0] 或 (x)[Φ(x)=0] 可被證明成立 61)。

61) Aus Satz X folgt z. B., daß das Fermatsche und das Goldbachsche Problem lösbar wären, wenn man das Entscheidungsproblem des e. F. gelöst hätte.

61) 從命題 X 導出， 例如若已解出受限函數計算決定問題，則費馬及哥德巴赫問題可解。

/196/

Da man die Überlegungen, welche zu Satz X führen, (für jedes spezielle F) auch innerhalb des Systems P durchführen kann, so ist die Äquivalenz zwischen einem Satz der Form (x)F(x)(F rekursiv) und der Erfüllbarkeit der entsprechenden Formel des e. F. in P beweisbar und daher folgt aus der Unentscheidbarkeit des einen die des anderen, womit Satz IX bewiesen ist. 62)

因為導出命題 X 之脈絡（對每個特例 F）也能於 P 系統重新實現， 所以形式如 (x)F(x)（F 遞迴） 之命題與所對應受限函數計算公式之可滿足性之間的等價性是 P 可證的，且於此推論出對立面之不可決定性，故證明命題 IX。62)

62) Satz IX gilt natürlich auch für das Axiomensystem der Mengenlehre und dessen Erweiterungen durch rekursiv definierbare ω-widerspruchsfreie Klassen von Axiomen, da es ja auch in diesen Systemen unentscheidbare Sätze der Form (x)F(x) (F rekursiv) gibt.

62) 命題 IX 自然也對集合公理系統及其經由公理之遞迴可定義 ω-一致性類別之擴充有效， 這是因為這些系統也確實存在形式如(x)F(x)（F 遞迴）之不可決定命題。