插值法

- 拉格朗日插值
- 牛顿插值

拉格朗日插值

拉格朗日基函数:

$$l_i(x) = \prod_{j\neq i}^{1\leq j\leq n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

拉格朗日插值函数:

$$f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i * l_i(x)$$

例题:

求经过$A(0,1)$,$B(1,2)$,$C(2,3)$三个插值点的插值多项式.

解析:

一、先求出x_i和y_i

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, y_0 = 1 \\ x_1 &= 1, y_1 = 2 \\ x_2 &= 2, y_2 = 3 \end{aligned}$$

二、再求拉格朗日基函数，已知三个点，需要三个点的基函数:

$$l_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$l_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$l_2 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

三、最后带入拉格朗日基函数

$$f_3(x) = y_0 * l_0 + y_1 * l_1 + y_2 * l_2$$

计算得：$f_3(x) = x + 1$

牛顿插值

前置概念：差商

一阶差商：

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

二阶差商：

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$

n阶差商：

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{f[x_0, x_1, ..., x_{n-1}] - f[x_1, x_2, ..., x_n]}{x_0 - x_n}$$

插 商 表

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	…	n 阶差商
x_0	$f(x_0)$					
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$				
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$			
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
x_n	$f(x_n)$	$f[x_{n-1},x_n]$	$f[x_{n-2},x_{n-1},x_n]$	$f[x_{n-3},x_{n-2},x_{n-1},x_n]$	…	$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]$

牛顿插值公式：

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$
$$+...+f[x_0, x_1, ..., x_n - 1, x_n]\prod_{j=0}^{n-1}(x - x_j)$$

例题：

已知**x=1,4,9**的平方根为**1,2,3**，利用牛顿基本差商公式求$\sqrt{7}$的近似值。

一、先确定$x_i, y_i, f(x)$.

$$
\begin{gathered}
x_0 = 1, y_0 = 1 \\
x_1 = 4, y_1 = 2 \\
x_2 = 9, y_2 = 3 \\
f(x) = \sqrt{x}
\end{gathered}
$$

二、再求差商表

x_i	$\sqrt{x_i}$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
1	1	$\frac{2-1}{4-1}=0.33333$	$\frac{0.2-0.33333}{9-1}=-0.01667$
4	2	$\frac{3-2}{9-4}=0.2$	
9	3		

三、最后得到牛顿插值多项式

$$
\begin{aligned}
N_2(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
&= 1 + 0.33333 * (x - 1) - 0.01667(x - 1)(x - 4)
\end{aligned}
$$

带入$x = 7$，得:

$$N_2(7) = 2.69992$$