

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ЛАБОРАТОРИЯ
"ТЕХНИЧЕСКОЕ ЗРЕНИЕ"

ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ
«Преобразование Фурье. Дифракция Фраунгофера и Френеля.
Интерференция (часть 2)

Выполнил:

Горбенко Лев

группа: Q4401

дата выполнения: 26.03.2025

Проверил:

Иванова Т. В.

Подпись:

Санкт-Петербург

2025

1 Задачи

1. Вычислить аналитически и численно распределение интенсивности в картине дифракции в дальней зоне (дифракция Фраунгофера) при помощи двумерного преобразования Фурье.
 - 1.1 Отверстие прямоугольной формы $rect(2x) \cdot rect(y)$ в непрозрачном экране
2. Точечный источник освещает две узкие бесконечно тонкие параллельные щели, расположенные горизонтально на непрозрачном экране (опыт Юнга). Расстояние между щелями 2 мм. Вычислить аналитически и численно распределение интенсивности на плоскости, параллельной экрану и удалённой от него на расстояние 1 м (дифракция Фраунгофера):
 - 2.1 Численные параметры: кол-во элементов $N = 512$, шаг $x = \sqrt{\frac{1}{N}}$, ширина щели $d = x$;
3. Вычислить численно распределение интенсивности в картине дифракции Френеля на круглом экране:
 - 3.1 Численные параметры: кол-во элементов $N = 512$, радиус отверстия $r = 5\text{мм}$, расстояние $z = 10\text{м}$, $= 0.5\text{мкм}$, $n = 1$, размер экрана $x_{max} = 25\text{мм}$, шаг $x = x_{max} \cdot \frac{2}{N}$;
 - 3.2 Вычислить число Френеля (число зон Френеля, попавших в экран);
 - 3.3 Исследовать влияние количества зон Френеля, попавших в отверстие, на распределение интенсивности в картине дифракции Френеля (N_f от 1 до 7)

2 Ход работы

Задание 1. Аналитическое решение

Для вычисления распределения комплексной амплитуды поля в дифракционной картине Фраунгофера воспользуемся выражением:

$$U(x', y', z) = \frac{1}{i\lambda} \cdot \frac{e^{-iknr_0}}{r_0} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, y) \cdot e^{\frac{ikn}{r_0}(xx' + yy')} dx dy$$

Рассмотрим экспоненту, подозревая, что выражение выше похоже на преобразование Фурье:

$$e^{\frac{ikn}{r_0}(xx' + yy')}, \text{ где } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Получим:

$$e^{\frac{ikn}{r_0}(xx' + yy')} = e^{\frac{i2\pi n}{r_0\lambda}(xx' + yy')} = e^{2i\pi(xx' \frac{n}{r_0\lambda} + yy' \frac{n}{r_0\lambda})} \text{ И выполним замену переменных:}$$

$$\nu_x = \frac{n}{r_0\lambda}x', \nu_y = \frac{n}{r_0\lambda}y' \rightarrow e^{2i\pi(x\nu_x + y\nu_y)}$$

Подставим эту экспоненту в первое выражение:

$$U(x', y', z) = \frac{1}{i\lambda} \cdot \frac{e^{-iknr_0}}{r_0} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, y) \cdot e^{i2\pi(x\nu_x + y\nu_y)} dx dy$$

Очевидно, что это выражение совпадает с обратным преобразованием Фурье.

А значит, выражение для дифракции можно записать так:

$$U(x', y', z) = \frac{1}{i\lambda} \cdot \frac{e^{-iknr_0}}{r_0} \cdot F^{-1}[U(x, y)]$$

Поскольку мы определяем характер амплитуды, то это выражение упростим до:

$$U(x', y', z) = F[U(x, y)]$$

Теперь будем описывать комплексную амплитуду заданного отверстия $rect(2x) \cdot rect(y)$:

Фурье преобразования произведения равно произведению Фурье-образов:

$$F[rect(2x) \cdot rect(y)] = F[rect(2x)] \cdot F[rect(y)]$$

$$\text{Учтем, что } F[rect(x)] = sinc(\pi\nu_x)$$

$$\text{Получаем: } U(x', y', z) = sinc(2\pi\nu_x) \cdot sinc(\pi\nu_y)$$

Зная комплексную амплитуду поля, определим интенсивность:

$$I(r) = I_1(r) + I_2(r) = |U_1(r)|^2 + |U_2(r)|^2$$

$$I(x', y') = |U(x', y')|^2 = |sinc(2\pi\nu_x) \cdot sinc(\pi\nu_y)|^2$$

Задание 1. Численное решение

Все численные решение поставленных задач в текущей работе осуществлялись посредством использования языка программирования MATLAB.

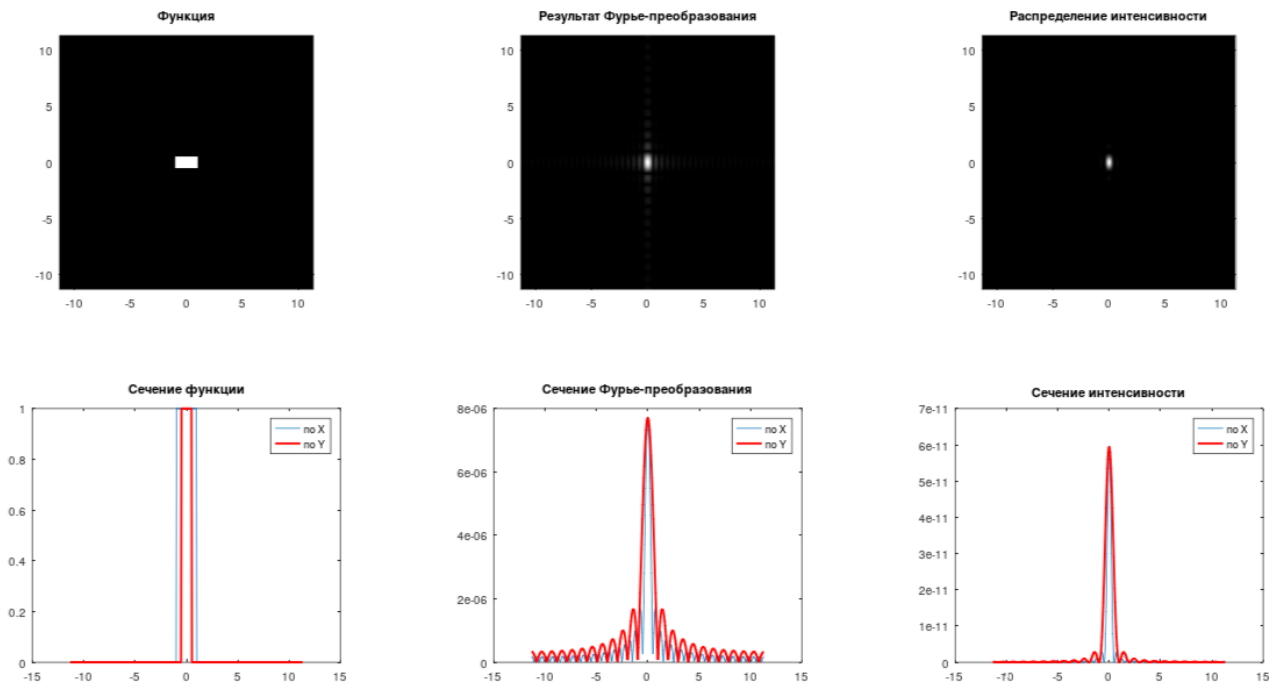


Рис. 1: Распределение интенсивности в дальней зоне на прямоугольном отверстии $rect(2x) \cdot rect(y)$

Задание 2. Решение задачи

Повторяем ранее проделанные шаги в задании 1 до представления комплексной амплитуды. Комплексную амплитуду представим через дельта-функции:

$$U_1 = \delta(x - 1); U_2 = \delta(x + 1)$$

Воспользуемся свойствами преобразования Фурье:

Функция	Фурье-образ
$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0; \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$	1

Таблица Б.4. Некоторые одномерные функции и их фурье-образы

Функция	Фурье-образ
$f(x - a, y - b)$	$\tilde{f}(v_x, v_y) \cdot e^{-2\pi i \cdot (a v_x + b v_y)}$

Таблица Б.1. Некоторые свойства фурье-образов произвольной функции

В результате получим итоговые выражения для комплексной амплитуды:

$$U_1(x', y', z') = F^1[U_1(x, y)] = F^1[\delta(x - 1)] = e^{2\pi i V_x}$$

$$U_2(x', y', z') = F^1[U_2(x, y)] = F^1[\delta(x + 1)] = e^{-2\pi i V_x}$$

Зная комплексную амплитуду поля, найдем интенсивность:

$$I(r) = I_1(r) + I_2(r) = |U_1(r)|^2 + |U_2(r)|^2$$

$$I(r) = |U_1(r)|^2 + |U_2(r)|^2 = 4 \cdot \cos^2(2\pi V_x)$$

2. Решение задачи. Численное решение

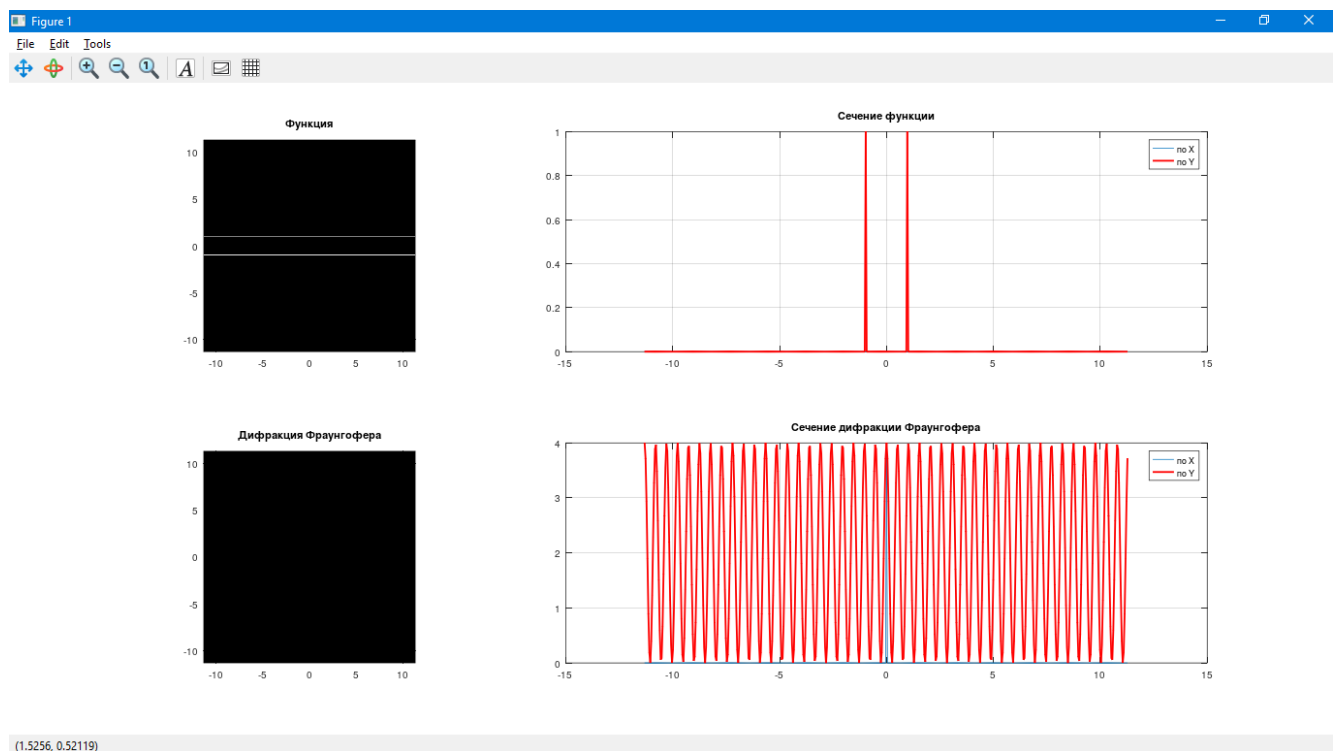


Рис. 2: Распределение интенсивности на плоскости в опыте Юнга

Задание 3. Распределение интенсивности в картине дифракции Френеля на круглом экране

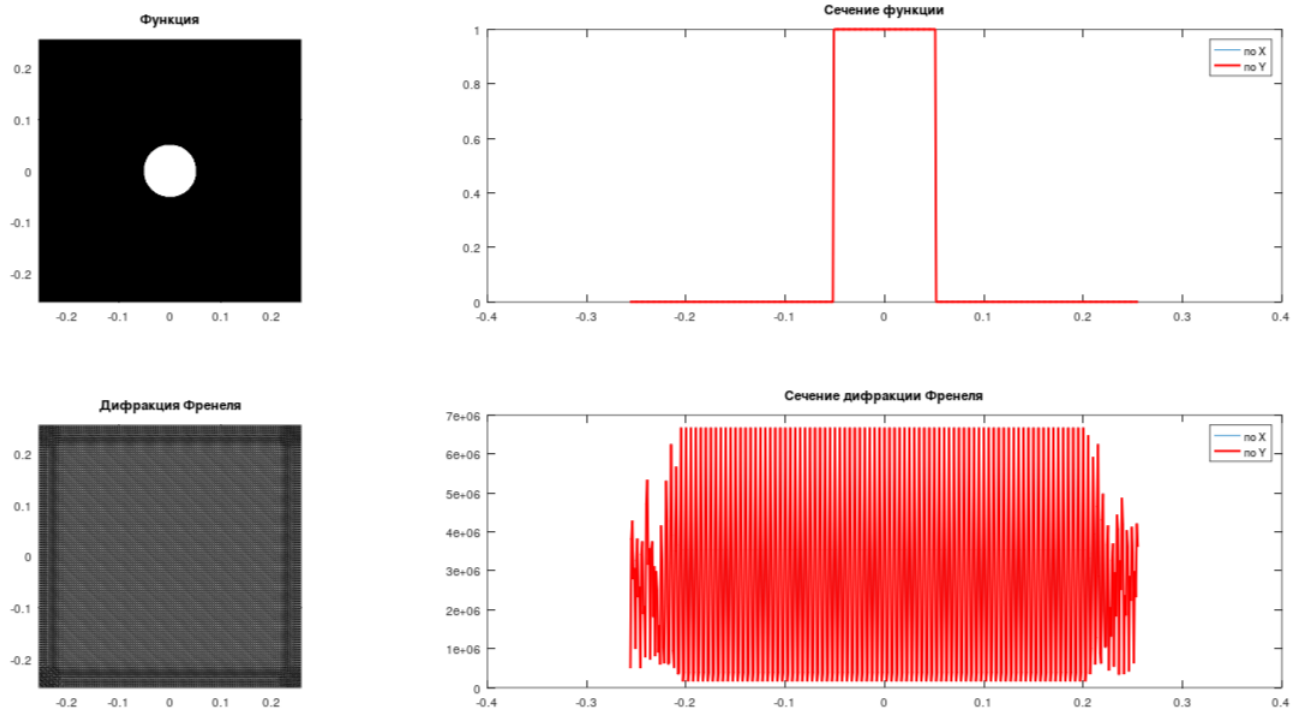


Рис. 3: Распределение интенсивности в картине дифракции Френеля на круглом экране

Число Френеля – 520.2

Задание 4.

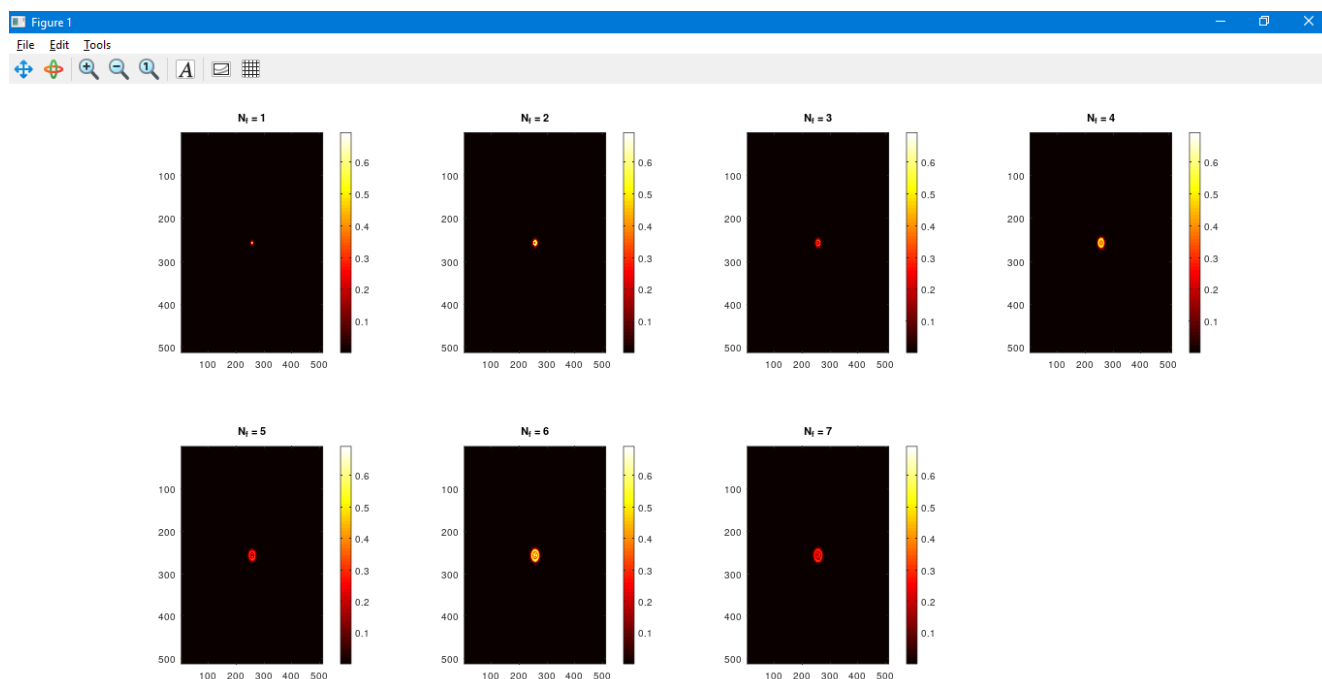


Рис. 4: Зоны Френеля

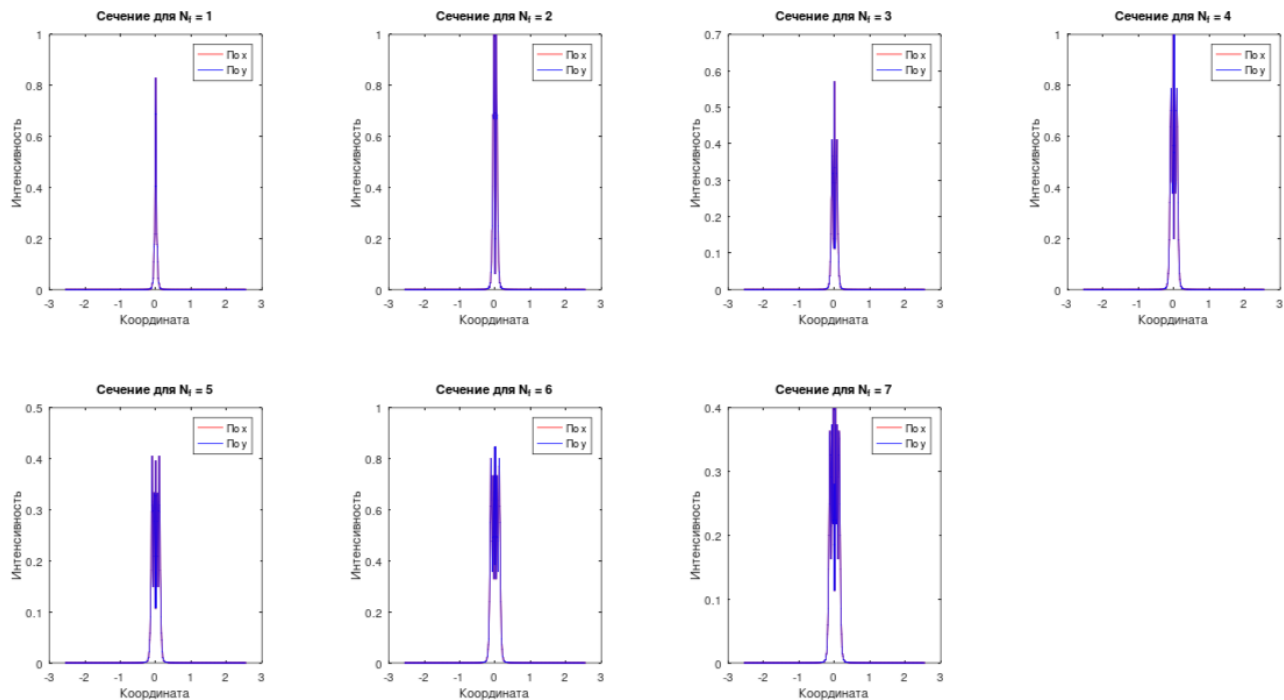


Рис. 5: Срезы

Выводы

В заданиях 1-2 численные решения имеют характер аналитических решений. В задании 3 построено распределение интенсивности в картине дифракции Френеля на круглом экране

В задании 4 форма дифракционной картины изменяется в зависимости от числа зон Френеля. При малом количестве зон ($N_f = 1 - 2$) дифракционная картина характеризуется крупными зонами с плавным распределением интенсивности. С увеличением числа зон ($N_f > 3$) наблюдается более сложная структура с возрастающим числом колец и осцилляций. Также интенсивность центрального максимума уменьшается с увеличением числа зон, так как энергия распределяется между большим количеством зон дифракции.

Приложение А

Код задания 1

```
clc;
clear all;
N = 512;
step = sqrt(1/N);
x_max = step*(N/2);
func = zeros(N,N);

[x,y] = meshgrid(-x_max:step:x_max-step, -x_max:step:x_max-step);

% Задаем прямоугольное отверстие rect(2x) * rect(y)
for i = 1:N
    for j = 1:N
        if (abs(x(i, j)) <= 1) && (abs(y(i, j)) <= 0.5)
            func(i, j) = 1;
        end
    end
end

Y=fftshift(func)/N;
Y=ifft2(Y);
Y=fftshift(Y);
Y=Y;
intens=abs(Y).*abs(Y);
intens=Y.*conj(Y);
subplot(2,3,1);
pcolor(x,y, func); % отрисовка 3D-карты уровней
colormap(gray); % черно-белая палитра
axis equal; % одинаковый масштаб по осям
axis([-x_max x_max -x_max x_max]); % диапазон значений по осям
shading interp; % раскраска с использование интерполяции
title("Функция");
subplot(2,3,4);
plot(x(N/2+1,:),func(N/2+1,:), y(:,N/2+1),func(:,N/2+1),'r', 'LineWidth',2);
title("Сечение функции");
legend("по X", "по Y");
subplot(2,3,2);
pcolor(x,y, abs(Y));
```

```

colormap(gray);
axis equal;
axis([-x_max x_max -x_max x_max]);
shading interp;
title("Результат Фурье-преобразования");
subplot(2,3,3);
pcolor(x,y, abs(intens));
colormap(gray);
axis equal;
axis([-x_max x_max -x_max x_max]);
shading interp;
title("Распределение интенсивности");
subplot(2,3,5);
plot(x(N/2+1,:),abs(Y(N/2+1,:)), y(:,N/2+1),abs(Y(:,N/2+1)),'r','LineWidth
title("Сечение Фурье-преобразования");
legend("по X", "по Y");
subplot(2,3,6);
plot(x(N/2+1,:),abs(intens(N/2+1,:)), y(:,N/2+1),abs(intens(:,N/2+1)),'r
title("Сечение интенсивности");
legend("по X", "по Y");

```

Код задания 2

```
N = 512;
step = sqrt(1/N);
x_max = step*(N/2);
[x,y] = meshgrid(-x_max:step:x_max-step, -x_max:step:x_max-step);
func = zeros(N,N);
func(257+22,:) = 1;
func(257-22,:) = 1;
Y=fftshift(func);
Y=ifft2(Y);
Y=fftshift(Y);
Y=Y*N;
Y = abs(Y).^2;
subplot(2,3,1);
pcolor(x,y, func);
colormap(gray);
axis equal;
axis([-x_max x_max -x_max x_max]);
shading interp;
title("Функция");
subplot(2,3,2:3);
plot(x(N/2+1,:),func(N/2+1,:), y(:,N/2+1),func(:,N/2+1),'r','LineWidth',
grid on
legend("по X", "по Y")
title("Сечение функции");
subplot(2,3,4);
pcolor(x,y, abs(Y));
colormap(gray);
axis equal;
axis([-x_max x_max -x_max x_max]);
shading interp;
title("Дифракция Фраунгофера");
subplot(2,3,5:6);
plot(x(N/2+1,:),abs(Y(N/2+1,:)), y(:,N/2+1),abs(Y(:,N/2+1)),'r', 'LineWi
legend("по X", "по Y")
grid on
title("Сечение дифракции Фраунгофера");
```

Код задания 3

```
N = 512;
r=0.051;
x_max=0.256;
step = x_max*2/N;
lambda=0.5e-6;
z=10;
n=1;
func = zeros(N,N);
[x,y] = meshgrid(-x_max:step:x_max-step, -x_max:step:x_max-step);
k=2*pi/lambda;
for i=1:1:N
    for j=1:1:N
        if (power(x(i,j),2) + power(y(i,j),2)) < power(r, 2);
            func(i,j) = 1;
        end
    end
end
h = zeros(N, N);
for i=1:1:N
    for j=1:1:N
        h(i,j) = 1/(z*lambda*1i) * exp(1i*k*n*z) * exp(1i*k*n/(2*z)*(x(i,j)^2 + y(i,j)^2));
    end
end
sv = conv2(func, h);
sv = abs(sv(257:768, 257:768));
subplot(2,3,1);
pcolor(x,y, func);
colormap(gray);
axis equal;
axis([-x_max x_max -x_max x_max]);
shading interp;
title("Функция");
subplot(2,3,2:3);
plot(x(N/2+1,:),func(N/2+1,:), y(:,N/2+1),func(:,N/2+1),'r', 'LineWidth', 2);
title("Сечение функции");
legend("по X", "по Y");
subplot(2,3,4);
pcolor(x,y, abs(sv));
colormap(gray);
```

```

axis equal;
axis([-x_max x_max -x_max x_max]);
shading interp;
title("Дифракция Френеля");
subplot(2,3,5:6);
plot(x(N/2+1,:),abs(sv(N/2+1,:)), y(:,N/2+1),abs(sv(:,N/2+1)),'r','LineW
title("Сечение дифракции Френеля");
legend("по X", "по Y");
fresnel_number = (r^2)/(lambda*z);
disp(['Fresnel number: ' num2str(fresnel_number)]);

```

Код задания 4

```
clc;
clear;
close all;

N = 512; % Размер сетки
step = 0.01; % Шаг сетки
x_max = step * (N / 2);
[x, y] = meshgrid(-x_max:step:x_max-step, -x_max:step:x_max-step);

Nf_values = 1:7; % Количество зон Френеля
lambda = 0.5; % Длина волны (умов.)
z = 1; % Расстояние до экрана наблюдения (умов.)

figure;
for k = 1:length(Nf_values)
    Nf = Nf_values(k);
    R = sqrt(Nf * lambda * z); % Радиус зоны Френеля

    % Создаем отверстие с Nf зонами Френеля
    aperture = double(x.^2 + y.^2 <= R^2);

    % Вычисляем дифракционную картину Френеля
    fresnel_factor = exp(1i * pi * (x.^2 + y.^2) / (lambda * z));
    U = aperture .* fresnel_factor;
    I = abs(fftshift(fft2(U))).^2;
    I = I / max(I(:));

    % Отображаем результат
    subplot(2, 4, k);
    imagesc(log(1 + I));
    colormap hot;
    colorbar;
    title(['N_f = ', num2str(Nf)]);

    % Добавляем сечения
    mid = floor(N/2);
    figure(2);
    subplot(2, 4, k);
    plot(x(mid, :), I(mid, :), 'r');
```

```

    hold on;
    plot(y(:, mid), I(:, mid), 'b');
    hold off;
    xlabel('Координата');
    ylabel('Интенсивность');
    title(['Сечение для N_f = ', num2str(Nf)]);
    legend('По x', 'По y');
end

sgtitle('Влияние количества зон Френеля на дифракционную картину');

```