|  |
| --- |
| 主専攻実習（定理証明班） |
| 第五回課題レポート |
| 担当：森継 修一 |

|  |
| --- |
| 知識情報システム主専攻 201611502久保川一良  2018年11月12日 |

* 接続環境
  + 自分のローカル環境にReduceをインストールして利用した。
    - 使用したPCのスペックについて： <https://bit.ly/2Cg7hqb>
  + OSやReduceのオプション設定などについては以下の通りである。

username@my\_computer:~ [HH:MM:SS]

$ lsb\_release -a

No LSB modules are available.

Distributor ID: Ubuntu

Description: Ubuntu 16.04.5 LTS

Release: 16.04

Codename: xenial

username@my\_computer:~ [HH:MM:SS]

$ reduce # alias reduce='redcsl -v -w -k 4000 --nogui'

Codemist Standard Lisp revision 4765 for linux-gnu:x86\_64: Sep 19 2018

Created: Wed Sep 19 15:57:15 2018

Reduce (Free CSL version, revision 4765), 19-Sep-18 ...

Memory allocation: 4168 Mbytes

There are 8 processors available

* 入力ファイル

%----------------------------------------------------------------------;

% 〈三角形の内心の証明〉

% A(0, 0) B(u1, 0) C(u2, u3) の三点による三角形ABCを考える

% 内心を作図から求める手順に沿って証明してみる

%----------------------------------------------------------------------;

% ---------------------------------------------------------------------;

% ＜証明＞ -------------------------------------------------------------;

order x7, x6, x5,x4, x3, x2, x1, u8, u7, u6, u5, u4, u3, u2, u1;

factor x7, x6, x5, x4, x3, x2, x1;

% 関数定義読み込み（※ローカル環境へコピーしてきたもの） --------------------------;

in cal\_sys\_relations$

%----------------------------------------------------------------------;

% 仮定 ----------------------------------------------------------------;

% ---------------------------------------------------------------------;

% 直線CA上に、AB=AD となる点Dをとる -----------------------------------------;

% BDの中点をEとすると、△ABDは二等辺三角形だから、AE⊥BDとなる --------------------;

% DはCA上にあるのだから、共線となっている ( C-D-Aと考える ) -----------------------;

% また、EはBD上にあり、共線となっている ( B-E-Dと考える ) -------------------------;

% D(x1, u4) E(x2, u5)

h1:=requal(0, 0, u1, 0, 0, 0, x1, u4);

h2:=midpoint(1, u1, 0, x2, u5, x1, u4);

h3:=midpoint(2, u1, 0, x2, u5, x1, u4);

h4:=vertically(0, 0, x2, u5, u1, 0, x1, u4);

h5:=collinear(u2, u3, x1, u4, 0, 0);

h6:=collinear(u1, 0, x2, u5, x1, u4);

% ---------------------------------------------------------------------;

% 直線BC上に、BA=BF となる点Fをとる -----------------------------------------;

% FAの中点をGとすると、△BFAは二等辺三角形だから、BG⊥FAとなる --------------------;

% FはBC上にあるのだから、共線となっている ( B-F-Cと考える ) -----------------------;

% また、GはFA上にあり、共線となっている ( F-G-Aと考える ) -------------------------;

% F(x3, u6) G(x4, u7)

h7:=requal(u1, 0, 0, 0, u1, 0, x3, u6);

h8:=midpoint(1, x3, u6, x4, u7, 0, 0);

h9:=midpoint(2, x3, u6, x4, u7, 0, 0);

h10:=vertically(u1, 0, x4, u7, x3, u6, 0, 0);

h11:=collinear(u1, 0, x3, u6, u2, u3);

h12:=collinear(x3, u6, x4, u7, 0, 0);

% 点IはAE上にあり、かつBG上にある (AEとBGの交点である) -------------------------;

% つまり、共線となっている ( A-I-E , B-I-G と考える)

% I(x6, u8)

h13:=collinear(0, 0, x6, u8, x3, u6);

h14:=collinear(u1, 0, x6, u8, x4, u7);

%----------------------------------------------------------------------;

% 結論 ----------------------------------------------------------------;

% 二角の二等分線が交わる点IはCH上にあり、共線となっている ( C-I-Hと考える ) --------;

i\_conclusion:=collinear(u2, u3, x6, u8, x5, 0);

showtime;

%----------------------------------------------------------------------;

% Groebner Basis: 結果が1となったら、仮定が誤っている可能性が高い ---------------;

%%% 変数を定義し、lex形式で並べる ------------------------------------------;

torder({x7, x6, x5, x4, x3, x2, x1}, lex)$

%%% 仮定において定義した式からGroebner Basisを求める -------------------------;

gb:=groebner{h1, h2, h3, h4, h5, h6, h7, h8, h9, h10, h11, h12, h13, h14};

%---------------------------------------------------------;

% 「glterms」が出力するのは、グレブナー基底の計算過程で〈ゼロにはならない〉

% と仮定された式のリストである。

%---------------------------------------------------------;

%%% u に関する制約条件 --------------------------------------------------;

glterms;

%%% gbを法としてgを簡約 --------------------------------------------------;

preduce(i\_conclusion, gb);

% ==> 0 になっていれば、定理は成立 ------------------------------------------;

%-------------------------------------------------------------;

% first(list), second(list)はそれぞれリスト内の1つ目、2つ目の要素を返す

% solve(f, v) は, 関数f の変数をv の方程式としてみて解く

%-------------------------------------------------------------;

% X座標も求めてみる ------------------------------------------------------;

%solve(first(gb), x8);

%solve(second(gb), x7);

%----------------------------------------------------------------------;

showtime;

;end;

* 出力ファイル

%----------------------------------------------------------------------;

% 〈三角形の内心の証明〉

% A(0, 0) B(u1, 0) C(u2, u3) の三点による三角形ABCを考える

% 内心を作図から求める手順に沿って証明してみる

%----------------------------------------------------------------------;

% ---------------------------------------------------------------------;

% ＜証明＞ -------------------------------------------------------------;

order x7, x6, x5,x4, x3, x2, x1, u8, u7, u6, u5, u4, u3, u2, u1;

factor x7, x6, x5, x4, x3, x2, x1;

% 関数定義読み込み（※ローカル環境へコピーしてきたもの） --------------------------;

in cal\_sys\_relations$

%----------------------------------------------------------------------;

% 仮定 ----------------------------------------------------------------;

% ---------------------------------------------------------------------;

% 直線CA上に、AB=AD となる点Dをとる -----------------------------------------;

% BDの中点をEとすると、△ABDは二等辺三角形だから、AE⊥BDとなる --------------------;

% DはCA上にあるのだから、共線となっている ( C-D-Aと考える ) -----------------------;

% また、EはBD上にあり、共線となっている ( B-E-Dと考える ) -------------------------;

% D(x1, u4) E(x2, u5)

h1:=requal(0, 0, u1, 0, 0, 0, x1, u4);

2 2 2

h1 := - x1 - u4 + u1

h2:=midpoint(1, u1, 0, x2, u5, x1, u4);

h2 := 2\*x2 - x1 - u1

h3:=midpoint(2, u1, 0, x2, u5, x1, u4);

h3 := 2\*u5 - u4

h4:=vertically(0, 0, x2, u5, u1, 0, x1, u4);

h4 := x2\*x1 - x2\*u1 + u5\*u4

h5:=collinear(u2, u3, x1, u4, 0, 0);

h5 := - x1\*u3 + u4\*u2

h6:=collinear(u1, 0, x2, u5, x1, u4);

h6 := x2\*u4 - x1\*u5 + u5\*u1 - u4\*u1

% ---------------------------------------------------------------------;

% 直線BC上に、BA=BF となる点Fをとる -----------------------------------------;

% FAの中点をGとすると、△BFAは二等辺三角形だから、BG⊥FAとなる --------------------;

% FはBC上にあるのだから、共線となっている ( B-F-Cと考える ) -----------------------;

% また、GはFA上にあり、共線となっている ( F-G-Aと考える ) -------------------------;

% F(x3, u6) G(x4, u7)

h7:=requal(u1, 0, 0, 0, u1, 0, x3, u6);

2 2

h7 := - x3 + 2\*x3\*u1 - u6

h8:=midpoint(1, x3, u6, x4, u7, 0, 0);

h8 := 2\*x4 - x3

h9:=midpoint(2, x3, u6, x4, u7, 0, 0);

h9 := 2\*u7 - u6

h10:=vertically(u1, 0, x4, u7, x3, u6, 0, 0);

h10 := - x4\*x3 + x3\*u1 - u7\*u6

h11:=collinear(u1, 0, x3, u6, u2, u3);

h11 := x3\*u3 - u6\*u2 + u6\*u1 - u3\*u1

h12:=collinear(x3, u6, x4, u7, 0, 0);

h12 := - x4\*u6 + x3\*u7

% 点IはAE上にあり、かつBG上にある (AEとBGの交点である) -------------------------;

% つまり、共線となっている ( A-I-E , B-I-G と考える)

% I(x6, u8)

h13:=collinear(0, 0, x6, u8, x3, u6);

h13 := x6\*u6 - x3\*u8

h14:=collinear(u1, 0, x6, u8, x4, u7);

h14 := x6\*u7 - x4\*u8 + u8\*u1 - u7\*u1

%----------------------------------------------------------------------;

% 結論 ----------------------------------------------------------------;

% 二角の二等分線が交わる点IはCH上にあり、共線となっている ( C-I-Hと考える ) --------;

i\_conclusion:=collinear(u2, u3, x6, u8, x5, 0);

i\_conclusion := - x6\*u3 + x5\*( - u8 + u3) + u8\*u2

showtime;

Time: 0 ms plus GC time: 20 ms

%----------------------------------------------------------------------;

% Groebner Basis: 結果が1となったら、仮定が誤っている可能性が高い ---------------;

%%% 変数を定義し、lex形式で並べる ------------------------------------------;

torder({x7, x6, x5, x4, x3, x2, x1}, lex)$

%%% 仮定において定義した式からGroebner Basisを求める -------------------------;

gb:=groebner{h1, h2, h3, h4, h5, h6, h7, h8, h9, h10, h11, h12, h13, h14};

gb := {1}

%---------------------------------------------------------;

% 「glterms」が出力するのは、グレブナー基底の計算過程で〈ゼロにはならない〉

% と仮定された式のリストである。

%---------------------------------------------------------;

%%% u に関する制約条件 --------------------------------------------------;

glterms;

{ - 2\*u5 + u4,

u3,

u4,

- 2\*u7 + u6,

u6,

u7,

u2,

- u6\*u2 + u6\*u1 + u3\*u1}

%%% gbを法としてgを簡約 --------------------------------------------------;

preduce(i\_conclusion, gb);

0

% ==> 0 になっていれば、定理は成立 ------------------------------------------;

%-------------------------------------------------------------;

% first(list), second(list)はそれぞれリスト内の1つ目、2つ目の要素を返す

% solve(f, v) は, 関数f の変数をv の方程式としてみて解く

%-------------------------------------------------------------;

% X座標も求めてみる ------------------------------------------------------;

%solve(first(gb), x8);

%solve(second(gb), x7);

%----------------------------------------------------------------------;

showtime;

Time: 0 ms plus GC time: 9 ms

;

end;

* 入力ファイル

% [定理 １３] ----------------------------------------------------------;

% 〈メネラウス(Menelaus)の定理の証明〉

% △ABCの3辺BC, CA, ABまたはその延長が頂点を通らない１直線と交わる点をそれぞれ

% P, Q, R とする。 ※１直線P-Q-R が x軸と一致するように座標を取った

% A(u1, u2) B(u3, u4) C(u5, u6)

% P(x1, 0) Q(x2, 0) R(x3, 0)

%----------------------------------------------------------------------;

% ---------------------------------------------------------------------;

% ＜証明＞ -------------------------------------------------------------;

order x3, x2, x1, u6, u5, u4, u3, u2, u1;

factor x3, x2, x1;

% 関数定義読み込み（※ローカル環境へコピーしてきたもの） --------------------------;

in cal\_sys\_relations$

%----------------------------------------------------------------------;

% 仮定 ----------------------------------------------------------------;

% P, Q, Rは共線となっている -----------------------------------------------;

h1:=collinear(x1, 0, x2, 0, x3, 0);

% 各頂点からPQRに下ろした垂線の足をそれぞれD, E, Fとする

% D(u1, 0) E(u3, 0) F(u5, 0)

% つまり、PQ⊥BE, QR⊥CF, RP⊥ADとなる

h2:=vertically(x1, 0, x2, 0, u3, u4, u3, 0);

h3:=vertically(x2, 0, x3, 0, u5, u6, u5, 0);

h4:=vertically(x3, 0, x1, 0, u1, u2, u1, 0);

% A-B-P, B-Q-C, C-R-Aはそれぞれ共線となっている -----------------------------;

h5:=collinear(u1, u2, u3, u4, x1, 0);

h6:=collinear(u3, u4, x2, 0, u5, u6);

h7:=collinear(u5, u6, x3, 0, u1, u2);

%----------------------------------------------------------------------;

% 結論 ----------------------------------------------------------------;

% (BP\*CQ\*AR)^2 = (PC\*QA\*RB)^2 が導ければよい

% ※各辺の長さは負の数を取りえないので, 負の場合を考える必要はない

bp2:=(x1-u3)^2+(0-u4)^2;

cq2:=(x2-u5)^2+(0-u6)^2;

ar2:=(x3-u1)^2+(0-u2)^2;

pc2:=(u5-x1)^2+(u6-0)^2;

qa2:=(u1-x2)^2+(u2-0)^2;

rb2:=(u3-x3)^2+(u4-0)^2;

conclusion:=(bp2\*cq2\*ar2)-(pc2\*qa2\*rb2);

showtime;

%----------------------------------------------------------------------;

% Groebner Basis: 結果が1となったら、仮定が誤っている可能性が高い ---------------;

%%% 変数を定義し、lex形式で並べる ------------------------------------------;

torder({x3, x2, x1}, lex)$

%%% 仮定において定義した式からGroebner Basisを求める -------------------------;

gb:=groebner{h1, h2, h3, h4, h5, h6, h7};

%---------------------------------------------------------;

% 「glterms」が出力するのは、グレブナー基底の計算過程で〈ゼロにはならない〉

% と仮定された式のリストである。

%---------------------------------------------------------;

%%% u に関する制約条件 --------------------------------------------------;

glterms;

%%% gbを法としてgを簡約 --------------------------------------------------;

preduce(conclusion, gb);

% ==> 0 になっていれば、定理は成立 ------------------------------------------;

showtime;

;end;

* 出力ファイル

% [定理 １３] ----------------------------------------------------------;

% 〈メネラウス(Menelaus)の定理の証明〉

% △ABCの3辺BC, CA, ABまたはその延長が頂点を通らない１直線と交わる点をそれぞれ

% P, Q, R とする。 ※１直線P-Q-R が x軸と一致するように座標を取った

% A(u1, u2) B(u3, u4) C(u5, u6)

% P(x1, 0) Q(x2, 0) R(x3, 0)

%----------------------------------------------------------------------;

% ---------------------------------------------------------------------;

% ＜証明＞ -------------------------------------------------------------;

order x3, x2, x1, u6, u5, u4, u3, u2, u1;

factor x3, x2, x1;

% 関数定義読み込み（※ローカル環境へコピーしてきたもの） --------------------------;

in cal\_sys\_relations$

%----------------------------------------------------------------------;

% 仮定 ----------------------------------------------------------------;

% P, Q, Rは共線となっている -----------------------------------------------;

h1:=collinear(x1, 0, x2, 0, x3, 0);

h1 := 0

% 各頂点からPQRに下ろした垂線の足をそれぞれD, E, Fとする

% D(u1, 0) E(u3, 0) F(u5, 0)

% つまり、PQ⊥BE, QR⊥CF, RP⊥ADとなる

h2:=vertically(x1, 0, x2, 0, u3, u4, u3, 0);

h2 := 0

h3:=vertically(x2, 0, x3, 0, u5, u6, u5, 0);

h3 := 0

h4:=vertically(x3, 0, x1, 0, u1, u2, u1, 0);

h4 := 0

% A-B-P, B-Q-C, C-R-Aはそれぞれ共線となっている -----------------------------;

h5:=collinear(u1, u2, u3, u4, x1, 0);

h5 := x1\*( - u4 + u2) + u4\*u1 - u3\*u2

h6:=collinear(u3, u4, x2, 0, u5, u6);

h6 := x2\*(u6 - u4) - u6\*u3 + u5\*u4

h7:=collinear(u5, u6, x3, 0, u1, u2);

h7 := x3\*( - u6 + u2) + u6\*u1 - u5\*u2

%----------------------------------------------------------------------;

% 結論 ----------------------------------------------------------------;

% (BP\*CQ\*AR)^2 = (PC\*QA\*RB)^2 が導ければよい

% ※各辺の長さは負の数を取りえないので, 負の場合を考える必要はない

bp2:=(x1-u3)^2+(0-u4)^2;

2 2 2

bp2 := x1 - 2\*x1\*u3 + u4 + u3

cq2:=(x2-u5)^2+(0-u6)^2;

2 2 2

cq2 := x2 - 2\*x2\*u5 + u6 + u5

ar2:=(x3-u1)^2+(0-u2)^2;

2 2 2

ar2 := x3 - 2\*x3\*u1 + u2 + u1

pc2:=(u5-x1)^2+(u6-0)^2;

2 2 2

pc2 := x1 - 2\*x1\*u5 + u6 + u5

qa2:=(u1-x2)^2+(u2-0)^2;

2 2 2

qa2 := x2 - 2\*x2\*u1 + u2 + u1

rb2:=(u3-x3)^2+(u4-0)^2;

2 2 2

rb2 := x3 - 2\*x3\*u3 + u4 + u3

conclusion:=(bp2\*cq2\*ar2)-(pc2\*qa2\*rb2);

2 2 2 2 2 2 2 2

conclusion := x3 \*x2 \*x1\*(2\*u5 - 2\*u3) + x3 \*x2 \*( - u6 - u5 + u4 + u3 )

2 2 2

+ x3 \*x2\*x1 \*( - 2\*u5 + 2\*u1) + x3 \*x2\*x1\*(4\*u5\*u3 - 4\*u5\*u1)

2 2 2 2 2

+ x3 \*x2\*(2\*u6 \*u1 + 2\*u5 \*u1 - 2\*u5\*u4 - 2\*u5\*u3 )

2 2 2 2 2 2

+ x3 \*x1 \*(u6 + u5 - u2 - u1 )

2 2 2 2 2 2

+ x3 \*x1\*( - 2\*u6 \*u3 - 2\*u5 \*u3 + 2\*u5\*u2 + 2\*u5\*u1 ) + x3 \*(

2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2

u6 \*u4 + u6 \*u3 - u6 \*u2 - u6 \*u1 + u5 \*u4 + u5 \*u3

2 2 2 2 2 2

- u5 \*u2 - u5 \*u1 ) + x3\*x2 \*x1 \*(2\*u3 - 2\*u1)

2

+ x3\*x2 \*x1\*( - 4\*u5\*u3 + 4\*u3\*u1)

2 2 2 2 2

+ x3\*x2 \*(2\*u6 \*u3 + 2\*u5 \*u3 - 2\*u4 \*u1 - 2\*u3 \*u1)

2

+ x3\*x2\*x1 \*(4\*u5\*u1 - 4\*u3\*u1) + x3\*x2

2 2 2 2

\*( - 4\*u6 \*u3\*u1 - 4\*u5 \*u3\*u1 + 4\*u5\*u4 \*u1 + 4\*u5\*u3 \*u1)

2 2 2 2 2

+ x3\*x1 \*( - 2\*u6 \*u1 - 2\*u5 \*u1 + 2\*u3\*u2 + 2\*u3\*u1 )

2 2 2 2

+ x3\*x1\*(4\*u6 \*u3\*u1 + 4\*u5 \*u3\*u1 - 4\*u5\*u3\*u2 - 4\*u5\*u3\*u1 ) +

2 2 2 2 2 2 2 2

x3\*( - 2\*u6 \*u4 \*u1 - 2\*u6 \*u3 \*u1 + 2\*u6 \*u3\*u2 + 2\*u6 \*u3\*u1

2 2 2 2 2 2 2 2

- 2\*u5 \*u4 \*u1 - 2\*u5 \*u3 \*u1 + 2\*u5 \*u3\*u2 + 2\*u5 \*u3\*u1 )

2 2 2 2 2 2

+ x2 \*x1 \*( - u4 - u3 + u2 + u1 )

2 2 2 2 2 2

+ x2 \*x1\*(2\*u5\*u4 + 2\*u5\*u3 - 2\*u3\*u2 - 2\*u3\*u1 ) + x2 \*(

2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2

- u6 \*u4 - u6 \*u3 - u5 \*u4 - u5 \*u3 + u4 \*u2 + u4 \*u1

2 2 2 2

+ u3 \*u2 + u3 \*u1 )

2 2 2 2 2

+ x2\*x1 \*( - 2\*u5\*u2 - 2\*u5\*u1 + 2\*u4 \*u1 + 2\*u3 \*u1) + x2\*x1

2 2 2 2

\*( - 4\*u5\*u4 \*u1 - 4\*u5\*u3 \*u1 + 4\*u5\*u3\*u2 + 4\*u5\*u3\*u1 ) + x2\*(

2 2 2 2 2 2 2 2

2\*u6 \*u4 \*u1 + 2\*u6 \*u3 \*u1 + 2\*u5 \*u4 \*u1 + 2\*u5 \*u3 \*u1

2 2 2 2 2 2 2 2

- 2\*u5\*u4 \*u2 - 2\*u5\*u4 \*u1 - 2\*u5\*u3 \*u2 - 2\*u5\*u3 \*u1 ) +

2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2

x1 \*(u6 \*u2 + u6 \*u1 + u5 \*u2 + u5 \*u1 - u4 \*u2 - u4 \*u1

2 2 2 2 2 2 2 2

- u3 \*u2 - u3 \*u1 ) + x1\*( - 2\*u6 \*u3\*u2 - 2\*u6 \*u3\*u1

2 2 2 2 2 2 2 2

- 2\*u5 \*u3\*u2 - 2\*u5 \*u3\*u1 + 2\*u5\*u4 \*u2 + 2\*u5\*u4 \*u1

2 2 2 2

+ 2\*u5\*u3 \*u2 + 2\*u5\*u3 \*u1 )

showtime;

Time: 0 ms plus GC time: 20 ms

%----------------------------------------------------------------------;

% Groebner Basis: 結果が1となったら、仮定が誤っている可能性が高い ---------------;

%%% 変数を定義し、lex形式で並べる ------------------------------------------;

torder({x3, x2, x1}, lex)$

%%% 仮定において定義した式からGroebner Basisを求める -------------------------;

gb:=groebner{h1, h2, h3, h4, h5, h6, h7};

gb := {(u2 - u6)\*x3 + (u1\*u6 - u2\*u5),

- (u4 - u6)\*x2 - (u3\*u6 - u4\*u5),

(u2 - u4)\*x1 + (u1\*u4 - u2\*u3)}

%---------------------------------------------------------;

% 「glterms」が出力するのは、グレブナー基底の計算過程で〈ゼロにはならない〉

% と仮定された式のリストである。

%---------------------------------------------------------;

%%% u に関する制約条件 --------------------------------------------------;

glterms;

{ - u4 + u2, - u6 + u4, - u6 + u2}

%%% gbを法としてgを簡約 --------------------------------------------------;

preduce(conclusion, gb);

6 4 2 6 3 3 6 2 4 5 4

- (u1 \*u4 \*u6 - 2\*u1 \*u4 \*u6 + u1 \*u4 \*u6 + 2\*u1 \*u2\*u3\*u4 \*u6

（中略）

2 2 2 2 3 2 4 4 3 2

- 6\*u2 \*u4 \*u6 + 2\*u2 \*u4\*u6 + u2 \*u6 - 2\*u2\*u4 \*u6 + 2\*u2\*u4 \*u6

2 3 4 4 2 3 3 2 4

+ 2\*u2\*u4 \*u6 - 2\*u2\*u4\*u6 + u4 \*u6 - 2\*u4 \*u6 + u4 \*u6 )

% ==> 0 になっていれば、定理は成立 ------------------------------------------;

showtime;

Time: 40 ms plus GC time: 30 ms

;

end;