8 PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THƯỜNG

Giới thiệu nội dung

8.1 Kiến thức hỗ trợ - liên quan

8.1.1 Kiến thức hỗ trợ - liên quan 1

8.1.2 Kiến thức hỗ trợ - liên quan 2

Khai triển Taylor hàm một biến.

Định lý 8.1: : Định lý Taylor

Cho hàm số $f(\mathbf{x})$ có đạo hàm đến cấp thứ $(n+1)$ trên $[a,b]$. Với mỗi $x \in [a,b]$, tồn tại $\xi(x)$ ở giữa x_0 và x sao cho

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x);$$

trong đó

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \tfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots \\ &\quad + \tfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \tfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \end{aligned}$$

và

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}$$

$P_n(x)$ được gọi là đa thức Taylor bậc n của hàm f quanh x_0 và $R_n(x)$ được gọi là phần dư (hay sai số chặt cụt).

Khai triển Taylor hàm hai biến

Định lý 8.2: : Định lý

Giả sử hàm số $f(t,y)$ và các đạo hàm riêng cấp nhỏ hơn hoặc bằng $(n+1)$ liên tục trên $D = \{(t,y)|a \leq t \leq b, c \leq y \leq d\}$, và cho $(t_0, y_0) \in D$. Với mỗi $(t,y) \in D$, tồn tại ξ ở giữa t_0 và t và μ ở giữa y và y_0 sao cho

$$f(t,y) = P_n(t,y) + R_n(t,n);$$

trong đó

$$P_n(t,y) = f(t_0,y_0) + \left[(t-t_0)\frac{\partial f}{\partial t}(t_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(t_0,y_0)\right] +$$
$$+\left[\frac{(t-t_0)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_0,y_0) + (t-t_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0,y_0) + \frac{(y-y_0)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0,y_0)\right]+\cdots$$
$$+\left[\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(t-t_0)^{n-j}(y-y_0)^j\frac{\partial^n f}{\partial t^{n-j}\partial y^j}(t_0,y_0)\right] \quad (8.1)$$

và

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}(t-t_0)^{n+1-j}(y-y_0)^j\frac{\partial^{n+1} f}{\partial t^{n+1-j}\partial y^j}(\xi,\mu)$$

8.2 Phương pháp Euler

Xét phương trình vi phân điều kiện đầu

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = y_0; \quad (8.2)$$

Để tìm nghiệm xấp xỉ của phương trình trên 8.2, đoạn $[a,b]$ được phân hoạch thành N đoạn con bằng nhau. Các điểm biên, hay thường được gọi là điểm lưới, trên đoạn được xác định bởi $t_i = a + ih, i = 0, 1, 2, ..., N$; với $h = (b-a)/N$ thường được gọi là bước lưới.
Để lập công thức cho phương pháp Euler, ta áp dụng phép khai triển Taylor như sau

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + y'(t_i)(t_{i+1}-t_i) + y''(\xi_i)\frac{(t_{i+1}-t_i)^2}{2}; \quad (8.3)$$

với ξ_i là một số nào đó thuộc (t_{i+1}, t_i). Vì $h = t_{i+1} - t_i$ nên

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + y'(t_i)h + y''(\xi_i)\frac{(h)^2}{2};$$

Do $y(t)$ thỏa phương trình (7.1) nên

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + f(t_i, y(t_i))h + y''(\xi_i)\frac{(h)^2}{2}.$$

Bằng cách bỏ đi phần dư đạo hàm cấp 2, phương pháp Euler xây dựng một dãy nghiệm xấp xỉ $y_i \approx y(t_i)$ như sau

$$\begin{aligned} &y_0 = y(a); \\ &y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i); i = 0, 1, ..., N-1 \end{aligned}$$

Thuật giải phương pháp Euler có thể được tóm tắt như sau.

Thuật Toán 8.1: Phương pháp Euler

Giải xấp xỉ bài toán giá trị đầu

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = y_0;$$

tại $(N+1)$ điểm lưới trong đoạn $[a, b]$ với khoảng chia bằng nhau.

Đầu vào: các điểm biên a, b; số khoảng chia N, và giá trị của điều kiện đầu y_0.

Đầu ra: Dãy nghiệm xấp xỉ tại $(N+1)$ giá trị của t.

Bước 1: Gán $h = (b-a)/N$; $t = a$; $y = y0$

Bước 2: For $i = 1$ to N gán

$y = y + hf(t, y)$; (Tính y_i)

$t = a + ih$; (Cập nhật t_i)

Bước 3: Xuất (t, y)

Bước 4: Dừng.

Ví dụ 8.1. Giải số bài toán điều kiện đầu

$$\frac{dy}{dt} = y - t^2, 0 \le t \le 1, y(0) = 2$$

với bước lưới $h = 0.25$.

Giải:

Đặt $f(t, y) = y - t^2$; dãy nghiệm xấp xỉ cho bởi phương pháp Euler với

$h = 0.25$ như sau

$$\begin{aligned}
&y_0 = y(0) = 2; t_i = 0.25i;\\
&y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = 2 + 0.25(2 - 0) = 2.5;\\
&y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1) = 2.5 + 0.25(2.5 - 0.25^2 \times 1) = 3.109;\\
&y_3 = y_2 + hf(t_2, y_2) = 3.1093 + 0.25(3.1093 - 0.25^2 \times 2^2) = 3.824;\\
&y_4 = y_3 + hf(t_3, y_3) = 3.824218 + 0.25(3.824218 - 0.25^2 \times 3^2) = 4.639.
\end{aligned}$$

So sánh với nghiệm chính xác

$$y(t) = t^2 + 2t + 2$$

tại các giá trị

$$\begin{aligned}
&y(0) = 2;\\
&y(0.25) = 2.5625;\\
&y(0.5)) = 3.25;\\
&y(0.75) = 4.0625;\\
&y(1) = 5.
\end{aligned}$$

Cho thấy sai số lớn nhất tại $t = 1$ với sai số tương đối là 7.2070% và sai số nhỏ nhất tại $t = 0.25$ với sai số là 2.4390%.

8.3 Các phương pháp Runge-Kutta

8.3.1 Phương pháp Runge-Kutta bậc 2

Phương pháp Runge-Kutta xuất phát từ việc xác định các giá trị a_1, α_1, và β_1 sao cho $a_1(t + \alpha_1, y + \beta_1)$ xấp xỉ

$$T^{(2)}(t, y) = f(t, y) + \frac{h}{2} f'(t, y)$$

với sai số không quá $O(h^2)$.
Phương pháp trung điểm
Bằng cách chọn

$$a_1 = 1, \quad \alpha_1 = \frac{h}{2}, \quad \text{và} \quad \beta_1 = \frac{h}{2} f(t, y)$$

ta được công thức trung điểm của phương pháp Runge-Kutta bậc 2 như sau:

$$
\begin{aligned}
&y_0 = y(a);\\
&k_1 = hf(t_i, y_i);\\
&k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1\right);\\
&y_{i+1} = y_i + k_2; \quad i = 0, 1, ..., N-1
\end{aligned}
$$

Theo một hướng tiếp cận khác, với cùng sai số như phương pháp trung điểm, phương pháp Runge-Kutta bậc 2 khác được gọi là phương pháp Euler cải tiến

$$
\begin{aligned}
&y_0 = y(a);\\
&k_1 = hf(t_i, y_i);\\
&k_2 = hf(t_i + h, y_i + k_1);\\
&y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2); \quad i = 0, 1, ..., N-1.
\end{aligned}
$$

Ví dụ 8.2. Giải số bài toán điều kiện đầu lần lượt bằng các phương pháp Runge-Kutta trung điểm và Euler cải tiến

$$\frac{dy}{dt} = y - t^2, 0 \leq t \leq 1, y(0) = 2$$

với bước lưới $h = 0.25$.
Giải:
Đặt $f(t, y) = y - t^2$; dãy nghiệm xấp xỉ cho bởi phương pháp trung điểm và phương pháp Euler cải tiến với $h = 0.25$ như sau

$$y_0 = y(0) = 2; \quad t_i = 0.25i$$

Phương pháp trung điểm

$$
\begin{aligned}
&k_1 = hf(t_i, y_i) = h(y_i - t_i^2);\\
&k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1\right) = h\left\{\left[y_i + \frac{h}{2}\left(y_i - t_i^2\right)\right] - \left(t_i + \frac{h}{2}\right)^2\right\}\\
&y_{i+1} = y_i + k_2 = y_i + h\left\{\left[y_i + \frac{h}{2}\left(y_i - t_i^2\right)\right] - \left(t_i + \frac{h}{2}\right)^2\right\}.\\
&y_{i+1} = 1.28125y_i - 0.28125t_i^2 - 0.0625t - 0.00391
\end{aligned}
$$

với $i = 1, ..., 4$. Hai giá trị đầu tiên của phương pháp trung điểm lần lượt là

$$\begin{aligned} y_1 &= 1.28125(2) - 0.28125(0^2) - 0.0625(0) - 0.00391 \\ &= 2.55859; \\ y_2 &= 1.28125(2.55859) - 0.28125(0.25^2) - 0.0625(0.25) - 0.0039 \\ &= 3.24109. \end{aligned}$$

Kết quả tính toán được biểu diễn trong Bảng 8.1

i	t_i	y_i	k_1	k_2	y_{i+1}
0	0	2	0.5	0.55859	2.55859
1	0.25	2.55859	0.62402	0.68250	3.24109
2	0.5	3.24109	0.74777	0.80609	4.04718
3	0.75	4.04718	0.87117	0.92928	4.97646
4	1	4.97646	0.99412	1.05197	

Bảng 8.1: Bảng tính các giá trị y_i của phương pháp trung điểm.

Phương pháp Euler cải tiến

$$k_1 = hf(t_i, y_i) = h(y_i - t_i^2);$$
$$k_2 = hf(t_i + h, y_i + k_1) = h\left\{\left[y_i + h\left(y_i - t_i^2\right)\right] - (t_i + h)^2\right\}$$

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{k_1 + k_2}{2} \\ &= y_i + \frac{h}{2}\left\{\left(y_i - t_i^2\right) + y_i + h\left(y_i - t_i^2\right) - (t_i + h)^2\right\}; \\ y_{i+1} &= 1.28125y_i - 0.28125t_i^2 - 0.0625t - 0.00781; \end{aligned}$$

với $i = 1, ..., 4$. Hai giá trị đầu tiên của phương pháp Euler cải tiến lần lượt là

$$\begin{aligned} y_1 &= 1.28125(2) - 0.28125(0^2) - 0.0625(0) - 0.00781 \\ &= 2.55469; \\ y_2 &= 1.28125(2.55469) - 0.28125(0.25^2) - 0.0625(0.25) - 0.00781 \\ &= 3.23218. \end{aligned}$$

Kết quả tính toán được biểu diễn trong Bảng 8.2

i	t_i	y_i	k_1	k_2	y_{i+1}
0	0	2	0.5	0.60938	2.55469
1	0.25	2.55859	0.62402	0.73193	3.23218
2	0.5	3.23218	0.74777	0.85381	4.03185
3	0.75	4.03185	0.87117	0.97480	4.95292
4	1	4.95292	0.99412	1.09466	

Bảng 8.2: Bảng tính các giá trị y_i của phương pháp Euler cải tiến.

Sai số của hai phương pháp so với nghiệm chính xác $y(t) = t^2 + 2t + 2$ được cho trong Bảng 8.3. Kết quả cho thấy sai số của hai phương pháp là tương đương nhau, sai số lớn nhất đều không vượt quá h^2. Dù vậy, phương pháp trung điểm cho sai số bé hơn phương pháp còn lại ở ví dụ này.

t_i	$y(t)$	Trung điểm	Sai số	Euler cải tiến	Sai số
0	2	2	0	2	0
0.25	2.5625	2.55859	0.003906	2.55469	0.007813
0.5	3.25	3.24109	0.008911	3.23218	0.017822
0.75	4.0625	4.04718	0.015324	4.03185	0.030647
1	5	4.97646	0.02354	4.95292	0.047079

Bảng 8.3: Sai số của hai phương pháp trung điểm và Euler cải tiến với nghiệm chính xác.

Với sai số lần lượt không vượt quá $O(h^3)$ và $O(h^4)$, các phương pháp Runge-Kutta bậc 3 và bậc 4 được thiết lập theo các bước tương tự.

8.3.2 Phương pháp Runge-Kutta bậc 3

$$
\begin{aligned}
&y_0 = y(a);\\
&k_1 = hf(t_i, y_i);\\
&k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{k_1}{3}\right);\\
&k_3 = hf\left(t_i + \frac{2h}{3}, y_i + \frac{2k_2}{3}\right);\\
&y_{i+1} = y_i + \frac{1}{4}(k_1 + 3k_3); \quad i = 0, 1, ..., N-1
\end{aligned}
$$

Phương pháp Runge-Kutta bậc 3 không thường được sử dụng, thay vào đó, phương pháp Runge-Kutta bậc 4 được sử dụng nhiều hơn cả. Dưới đây là thuật toán của phương pháp Runge-Kutta bậc 3.

Thuật Toán 8.2: Phương pháp Runge-Kutta (bậc 3)

Giải xấp xỉ bài toán giá trị đầu

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = y_0;$$

tại $(N+1)$ điểm lưới trong đoạn $[a,b]$ với khoảng chia bằng nhau.

Đầu vào: các điểm biên a, b; số khoảng chia N, và giá trị của điều kiện đầu y_0.

Đầu ra: Dãy nghiệm xấp xỉ tại $(N+1)$ giá trị của t.

Bước 1: Gán $h = (b-a)/N$; $t = a$; $y = y0$

Bước 2: For $i = 1$ to N do

$k1 = hf(t,y)$; (Tính w_i)

$k2 = hf(t + \frac{h}{3}, y + \frac{k1}{3})$;

$k3 = hf(t + \frac{2h}{3}, y + \frac{2k2}{3})$;

$y = y + \frac{1}{4}(k1 + 3k3)$; (Tính y_i)

$t = a + ih$; (Cập nhật t_i)

Bước 3: Xuất (t,y)

Bước 4: Dừng.

Ví dụ 8.3. Giải số bài toán điều kiện đầu bằng phương pháp Runge-Kutta bậc 3

$$\frac{dy}{dt} = y - t^2, 0 \le t \le 1, y(0) = 2$$

với bước lưới $h = 0.25$.

Giải:

Đặt $f(t,y) = y - t^2$; dãy nghiệm xấp xỉ cho bởi phương pháp Runge-Kutta bậc 3 với $h = 0.25$ như sau

$$\begin{aligned}
&y_0 = y(0) = 2; t_i = 0.25i;\\
&k_1 = hf(t_i, y_i);\\
&k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{k_1}{3}\right);\\
&k_3 = hf\left(t_i + \frac{2h}{3}, y_i + \frac{2k_2}{3}\right);\\
&y_{i+1} = y_i + \frac{1}{4}(k_1 + 3k_3); \quad i = 0, 1, ..., N-1
\end{aligned}$$

t	y_1	u
0	2	2
0.25	2.557	2.5625
0.5	3.244	3.25
0.75	4.073	4.0625
1	5.061	5

Bảng 8.4: Bảng tính các giá trị y_i của phương pháp Runge-Kutta bậc 3.

Với $t_0 = 0$, $j = 0$ và $y_0 = 2$ bước tính thứ nhất được thực hiện như sau.

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(t_0, y_0);\\
&= 0.25(2 - 0^2) = 0.5;\\
k_2 &= hf\left(t_0 + \frac{h}{3}, y_0 + \frac{k_1}{3}\right)\\
&= h\left[y_0 + \frac{k_1}{3} - \left(t_0 + \frac{h}{3}\right)^2\right] = 0.25\left[2 + \frac{0.5}{3} - \left(0 + \frac{0.25}{3}\right)^2\right] = 0.5399;\\
k_3 &= hf\left(t_0 + \frac{2h}{3}, y_0 + \frac{2k_2}{3}\right);\\
&= h\left[y_0 + \frac{2k_2}{3} - \left(t_0 + \frac{2h}{3}\right)^2\right] = 0.25\left[2 + \frac{2}{3}0.5586 - \left(0 + \frac{2}{3}0.25\right)^2\right] = 0.5764;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + \frac{1}{4}(k_1 + 3k_3)\\
&= y_0 + \frac{1}{4}(0.5 + 3 \times 0.5764) = 2.557.
\end{aligned}$$

Tương tự với bước ứng với $t = 0.25; 0.5; 0.75$ và $t = 1$ được cho trong Bảng 8.4.

8.3.3 Phương pháp Runge-Kutta bậc 4

$$
\begin{aligned}
&y_0 = y(a);\\
&k_1 = hf(t_i, y_i);\\
&k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right);\\
&k_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right);\\
&k_4 = hf(t_i + h, y_i + k_3);\\
&y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4); \quad i = 0, 1, ..., N-1
\end{aligned}
$$

Thuật Toán 8.3: Phương pháp Runge-Kutta (bậc 4)

Giải xấp xỉ bài toán giá trị đầu

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = y_0;$$

tại $(N+1)$ điểm lưới trong đoạn $[a, b]$ với khoảng chia bằng nhau.

Đầu vào: các điểm biên a, b; số khoảng chia N, và giá trị của điều kiện đầu y_0.

Đầu ra: Dãy nghiệm xấp xỉ tại $(N+1)$ giá trị của t.

Bước 1: Gán $h = (b-a)/N$; $t = a$; $y = y0$

Bước 2: For $i = 1$ to N do

$k1 = hf(t, y)$; (Tính w_i)

$k2 = hf(t + \frac{h}{2}, y + \frac{k1}{2})$;

$k3 = hf(t + \frac{h}{2}, y + \frac{k2}{2})$;

$k4 = hf(t + h, y + k3)$;

$y = y + \frac{1}{6}(k1 + 2k2 + 2k3 + k4)$; (Tính y_i)

$t = a + ih$; (Cập nhật t_i)

Bước 3: Xuất (t, y)

Bước 4: Dừng.

Ví dụ 8.4. Giải số bài toán điều kiện đầu bằng phương pháp Runge-Kutta bậc 3

$$\frac{dy}{dt} = y - t^2, 0 \le t \le 1, y(0) = 2$$

với bước lưới $h = 0.25$.

Giải:
Đặt $f(t,y) = y - t^2$; dãy nghiệm xấp xỉ cho bởi phương pháp Runge-Kutta bậc 3 với $h = 0.25$ như sau

$$\begin{aligned}
&y_0 = y(0) = 2; t_i = 0.25i;\\
&k_1 = hf(t_i, y_i);\\
&k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right);\\
&k_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right);\\
&k_4 = hf(t_i + h, y_i + k_3);\\
&y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).
\end{aligned}$$

Với $t_0 = 0$, $j = 0$ và $y_0 = 2$.

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(t_0, y_0);\\
&= 0.25(2 - 0^2) = 0.5;\\
k_2 &= hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right)\\
&= h\left[y_0 + \frac{k_1}{2} - \left(t_0 + \frac{h}{2}\right)^2\right] = 0.25\left[2 + \frac{0.5}{2} - \left(0 + \frac{0.25}{2}\right)^2\right] = 0.5586;\\
k_3 &= hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right);\\
&= h\left[y_0 + \frac{k_2}{2} - \left(t_0 + \frac{h}{2}\right)^2\right] = 0.25\left[2 + \frac{0.5586}{2} - \left(0 + \frac{0.25}{2}\right)^2\right] = 0.5659;\\
k_4 &= hf(t_0 + h, y_0 + k_3);\\
&= h\left[y_0 + k_3 - (t_0 + h)^2\right] = 0.25\left[2 + \frac{0.5659}{2} - \left(0 + \frac{0.25}{2}\right)^2\right] = 0.6259;\\
y_1 &= y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\\
&= y_0 + \frac{1}{6}(0.5 + 2 \times 0.5586 + 2 \times 0.5659 + 0.6259) = 2.562.
\end{aligned}$$

Tương tự với bước ứng với $t = 0.25; 0.5; 0.75$ và $t = 1$ được cho trong Bảng 8.5.

t	y_1	u
0	2	2
0.25	2.5625	2.5625
0.5	3.25	3.25
0.75	4.0624	4.0625
1	4.9999	5

Bảng 8.5: Bảng tính các giá trị y_i của phương pháp Runge-Kutta bậc 4.

Tổng kết, bình luận

8.4 Bài tập

Bài tập 1: Cho phương trình vi phân cấp 1

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{ty}, 1 \leq t \leq 2, y(1) = 2.$$

Hãy giải số phương trình trên với $h = 0.25$ lần lượt bằng các phương pháp
a) Phương pháp Euler;
b) Phương pháp Euler cải tiến;
c) Phương pháp Runge-Kutta bậc 2 (trung điểm).
d) Tính sai số tương đối bằng cách so sánh với nghiệm chính xác $y(t) = \left(\frac{1}{3}t^{\frac{2}{3}} - \sqrt{2} + \frac{1}{3}\right)^2$.

Bài tập 2: Cho phương trình vi phân cấp 1

$$\frac{dy}{dt} = y^2 \ln t, 1 \leq t \leq 2, y(1) = -1.$$

Hãy giải số phương trình trên với $h = 0.25$ lần lượt bằng các phương pháp
a) Phương pháp Runge-Kutta bậc 3;
b) Phương pháp Runge-Kutta bậc 4;
c) Tính sai số tương đối bằng cách so sánh với nghiệm chính xác $y(t) = (y \ln t - y + 2)^{-1}$.

Bài tập 3: Giải số các phương trình vi phân cấp 1 sau bằng phương pháp Euler với $h = 0.25$.

$a)\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{y^2 + ty^2}, 0 \leq t \leq 1, y(0) = 1.$

Nghiệm chính xác: $y = \sqrt[3]{3\ln(t+1) + 1}.$

$b)\dfrac{dy}{dt} = (t + t^3)(1 + y^2), 0 \leq t \leq 1, y(0) = 1.$

Nghiệm chính xác: $y = \tan\left(\dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^4}{4} + \dfrac{\pi}{4}\right).$

$c)\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\ln t}{ty}, 1 \leq t \leq 2, y > 0, y(1) = 2.$

Nghiệm chính xác: $y = \sqrt{(\ln t)^2 + 4}.$

$d)\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{t} + \ln t, 1 \leq t \leq 2, y(1) = 2.$

Nghiệm chính xác: $y = \dfrac{1}{2}x(\ln x)^2 + 2x.$

Bài tập 4: Giải số các phương trình vi phân cấp 1 sau bằng phương pháp Euler cải tiến với $h = 0.25$.

$a)\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{y^2 + ty^2}, 0 \leq t \leq 1, y(0) = 1.$

Nghiệm chính xác: $y = \sqrt[3]{3\ln(t+1) + 1}.$

$b)\dfrac{dy}{dt} = (t + t^3)(1 + y^2), 0 \leq t \leq 1, y(0) = 1.$

Nghiệm chính xác: $y = \tan\left(\dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^4}{4} + \dfrac{\pi}{4}\right).$

$c)\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\ln t}{ty}, 1 \leq t \leq 2, y > 0, y(1) = 2.$

Nghiệm chính xác: $y = \sqrt{(\ln t)^2 + 4}.$

$d)\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{t} + \ln t, 1 \leq t \leq 2, y(1) = 2.$

Nghiệm chính xác: $y = \dfrac{1}{2}x(\ln x)^2 + 2x.$

Bài tập 5: Giải số các phương trình vi phân cấp 1 sau bằng phương pháp Runge-Kutta bậc 3 với $h = 0.25$.

$a)\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{y^2 + ty^2}, 0 \le t \le 1, y(0) = 1.$

Nghiệm chính xác: $y = \sqrt[3]{3\ln(t+1)+1}.$

$b)\dfrac{dy}{dt} = (t + t^3)(1 + y^2), 0 \le t \le 1, y(0) = 1.$

Nghiệm chính xác: $y = \tan\left(\dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^4}{4} + \dfrac{\pi}{4}\right).$

$c)\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\ln t}{ty}, 1 \le t \le 2, y > 0, y(1) = 2.$

Nghiệm chính xác: $y = \sqrt{(\ln t)^2 + 4}.$

$d)\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{t} + \ln t, 1 \le t \le 2, y(1) = 2.$

Nghiệm chính xác: $y = \dfrac{1}{2}x(\ln x)^2 + 2x.$

Bài tập 6: Giải số các phương trình vi phân cấp 1 sau bằng phương pháp Runge-Kutta bậc 4 với $h = 0.25$.

$a)\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{y^2 + ty^2}, 0 \le t \le 1, y(0) = 1.$

Nghiệm chính xác: $y = \sqrt[3]{3\ln(t+1)+1}.$

$b)\dfrac{dy}{dt} = (t + t^3)(1 + y^2), 0 \le t \le 1, y(0) = 1.$

Nghiệm chính xác: $y = \tan\left(\dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^4}{4} + \dfrac{\pi}{4}\right).$

$c)\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\ln t}{ty}, 1 \le t \le 2, y > 0, y(1) = 2.$

Nghiệm chính xác: $y = \sqrt{(\ln t)^2 + 4}.$

$d)\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{t} + \ln t, 1 \le t \le 2, y(1) = 2.$

Nghiệm chính xác: $y = \dfrac{1}{2}x(\ln x)^2 + 2x.$

8.5 Bài tập thực hành

8.6 Bài tập mở rộng

Tài liệu tham khảo

[1] The MathWorks, Inc. *MATLAB Getting Started Guide*. 2011.