CHƯƠNG 5

ĐẠO HÀM SỐ VÀ TÍCH PHÂN SỐ

NỘI DUNG

- I. GIỚI THIỆU
- II. ĐẠO HÀM SỐ
  - ĐẠO HÀM BẬC 1
  - ĐẠO HÀM BẬC CAO
- III. TÍCH PHÂN SỐ
  - 1. CÔNG THỨC HÌNH THANG
  - 2. CÔNG THỨC SIMPSON
- IV. CÔNG THỨC TÍCH PHÂN SỐ CHO N KHOẢNG
- V. MỘT SỐ CÔNG THỨC TÍCH PHÂN SỐ KHÁC

I. GIỚI THIỆU

II. ĐẠO HÀM SỐ

❖ **Đạo hàm cấp 1:**

Để xấp xỉ $f'(x_0)$, đầu tiên ta giả sử rằng, $x_0 \in (a;b)$, trong đó $f \in C^2[a;b]$, và $x_1 = x_0 + h$ với $h \neq 0$ đủ nhỏ để cho $x_1 \in [a;b]$.

Áp dụng đa thức nội suy Lagrange bậc 1

$$P_{0,1}(x) = f(x_0)L_{0,0}(x) + f(x_1)L_{0,1}(x) = f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$= f(x_0)\frac{x - x_0 - h}{-h} + f(x_0 + h)\frac{x - x_0}{h}$$

Xấp xỉ hàm f bằng đa thức Lagrange bậc 1 dựa trên x_0 và x_1:

$$f(x) = P_{0,1}(x) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!}f''\big(\theta(x)\big)$$

$$= f(x_0)\frac{x - x_0 - h}{-h} + f(x_0 + h)\frac{x - x_0}{h} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!}f''\big(\theta(x)\big).$$

Đạo hàm ta được

$$f'(x) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + D_x\left[\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2!} f''\big(\theta(x)\big)\right]$$
$$= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{2(x-x_0)-h}{2!} f''\big(\theta(x)\big)$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2!} D_x\big[f''\big(\theta(x)\big)\big].$$

Ta có công thức xấp xỉ đạo hàm

$$f'(x) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Việc đánh giá sai số chặt cụt không thể thực hiện được vì không tính được $D_x[f''(\theta(x))]$. Tuy nhiên, khi $x = x_0$ thì

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2} f''\big(\theta(x)\big).$$

- Công thức xấp xỉ đạo hàm tổng quát:
- Từ định lý 3.3:

Nếu $x_0, x_1, \ldots, x_n$ là các số phân biệt trong đoạn I và $f \in C^{n+1}(I)$. Thì, với mỗi x thuộc I, tồn tại một số $\theta(x)$ ở giữa $x_0, x_1, \ldots, x_n$ với

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k(x) + \frac{f^{(n+1)}(\theta(x))}{(n+1)!}(x - x_0) \ldots (x - x_n),$$

với $L_k(x)$ là đa thức hệ số Lagrange thứ k.

Đạo hàm ta được

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L'_k(x) + D_x\left[\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_n)}{(n+1)!}\right] f^{(n+1)}(\theta(x)) + \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_n)}{(n+1)!} D_x\left[f^{(n+1)}(\theta(x))\right].$$

Tại x_j, hệ số ứng với $D_x\left[f^{(n+1)}\left(\theta(x)\right)\right]$ triệt tiêu, khi đó

$$f'\left(x_j\right) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L'_k(x) + \frac{f^{(n+1)}\left(\theta_j\right)}{(n+1)!}\prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n}\left(x_j - x_k\right),$$

được gọi là công thức $(n+1)$ điểm xấp xỉ $f'\left(x_j\right)$.

- Công thức (2 + 1) điểm xấp xỉ $f'(x_j)$.

$$f'(x_j) = f(x_0)\left[\frac{2x_j-x_1-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\right] + f(x_1)\left[\frac{2x_j-x_0-x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\right] + f(x_2)\left[\frac{2x_j-x_0-x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\right] + \frac{f^{(3)}(\theta_j)}{6}\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{2}(x_j - x_k).$$

Với khoảng chia đều: $x_1 = x_0 + h$ và $x_2 = x_0 + 2h$.

- Tại $x_j = x_0$

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left[-\frac{3}{2}f(x_0) + 2f(x_1) - \frac{1}{2}f(x_2)\right] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\theta_0).$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left[-\frac{3}{2}f(x_0) + 2f(x_0 + h) - \frac{1}{2}f(x_0 + 2h)\right] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\theta_0).$$

- Tại $x_j = x_1$

$$f'(x_1) = \frac{1}{h}\left[-\frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_2)\right] - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\theta_1).$$

$$f'(x_0 + h) = \frac{1}{h}\left[-\frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_0 + 2h)\right] - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\theta_0).$$

- Tại $x_j = x_2$

$$f'(x_2) = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{2}f(x_0) - 2f(x_1) + \frac{3}{2}f(x_2)\right] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\theta_2).$$

$$f'(x_0 + 2h) = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{2}f(x_0) - 2f(x_0 + h) + \frac{3}{2}f(x_0 + 2h)\right] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\theta_2).$$

- Thay x_0 vào $x_0 + h$ và $x_0 + 2h$ ở công thức thứ 2 và thứ 3, ta được các công thức tính $f'(x_0)$ như sau

$$f'(x_0 + h) = \frac{1}{h}\left[-\frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_0 + 2h)\right] - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\theta_0).$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left[-\frac{1}{2}f(x_0 - h) + \frac{1}{2}f(x_0 + h)\right] - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\theta_0).$$

$$f'(x_0 + 2h) = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{2}f(x_0) - 2f(x_0 + h) + \frac{3}{2}f(x_0 + 2h)\right] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\theta_0).$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0 - 2h) - 4f(x_0 - h) + 3f(x_0)] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\theta_2).$$

- Ba công thức tính xấp xỉ đạo hàm tại x_0.

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\theta_0).$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left[-\frac{1}{2}f(x_0 - h) + \frac{1}{2}f(x_0 + h)\right] - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\theta_0).$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0 - 2h) - 4f(x_0 - h) + 3f(x_0)] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\theta_2).$$

- Nếu thay h bằng –h thì công thức thứ ba sẽ trở thành công thức thứ nhất. Do đó, chỉ có 2 công thức thực sự:
- Công thức 3 điểm – cuối

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\theta_0).$$

- Công thức 3 điểm – cuối

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\theta_0).$$

- Công thức 3 điểm – giữa

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\theta_0).$$

- Tương tự quá trình trên để thiết lập công thức 5 điểm.

Đạo hàm cấp 2

- Để xây dựng công thức tính đạo hàm bậc 2, ta sử dụng đa thức Taylor bậc 3 quanh x_0 và tính giá trị tại $x = x_0 + h$ và $x = x_0 - h$ như sau

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)h^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(\theta_1)h^4.$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 - \frac{1}{6}f'''(x_0)h^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(\theta_{-1})h^4.$$

$$\Rightarrow f(x_0 + h) + f(x_0 - h) = 2f(x_0) + f''(x_0)h^2 + \frac{1}{24}\left[f^{(4)}(\theta_{-1}) + f^{(4)}(\theta_1)\right]h^4.$$

Đạo hàm cấp 2

- Công thức xấp xỉ đạo hàm cấp 2

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}[f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0+h)] - \frac{h^2}{24}\left[f^{(4)}(\theta_{-1}) + f^{(4)}(\theta_1)\right].$$

- Theo định lý giá trị trung gian sẽ tồn tại số θ ở giữa θ_{-1} và θ_1 thỏa

$$f^{(4)}(\theta) = \frac{1}{2}\left(f^{(4)}(\theta_{-1}) + f^{(4)}(\theta_1)\right)$$

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}[f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0+h)] - \frac{h^2}{24}f^{(4)}(\theta).$$

trong đó $x_0 - h < \theta < x_0 + h$.

III. Tích phân số

Cần tính gần đúng tích phân xác định $\int_a^b f(x)\,dx$ bằng tổng $\sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$. Phương pháp xấp xỉ này dựa vào đa thức nội suy.

Với đa thức nội suy Lagrange:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$$

Công thức xấp xỉ tích phân khi đó:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)\,dx + \int_a^b \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\,dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) f^{(n+1)}(\xi(x))\,dx,$$

trong đó $\xi(x)$ nằm trong $[a; b]$ với mỗi x và

$$a_i = \int_a^b L_i(x)\, dx, \qquad i = 1, \dots, n$$

Công thức xấp xỉ tích phân khi đó:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i),$$

Công thức trên còn được gọi là công thức cầu phương. Sai số cho bởi

$$E(f) = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) f^{(n+1)}(\xi(x))\, dx.$$

Bằng cách sử dụng các thức bậc 1 và bậc 2, ta được các công thức Hình thang và Simpson.

❖ Quy tắc hình thang

Đa thức Lagrange tuyến tính:

$$P_1(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1).$$

Tích phân gần đúng:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1) \right] dx$$
$$+ \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x - x_0)(x - x_1)\,dx.$$

❖ Quy tắc hình thang

Để tính sai số, ta áp dụng định lý giá trị trung bình có trọng cho tích phân:

$$\int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x-x_0)(x-x_1)\,dx = f''(\xi)\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)(x-x_1)\,dx$$

$$= f''(\xi)\left[\frac{x^3}{3} - \frac{(x_1+x_0)}{2}x^2 + x_0x_1x\right]_{x_0}^{x_1}$$

$$= -\frac{h^3}{6}f''(\xi).$$

Công thức tích phân hình thang với sai số tương ứng:

❖ Quy tắc hình thang

Công thức tích phân hình thang với sai số tương ứng:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\frac{(x-x_1)^2}{2(x_0-x_1)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2(x_1-x_0)} f(x_1)\right]_{x_0}^{x_1} - \frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

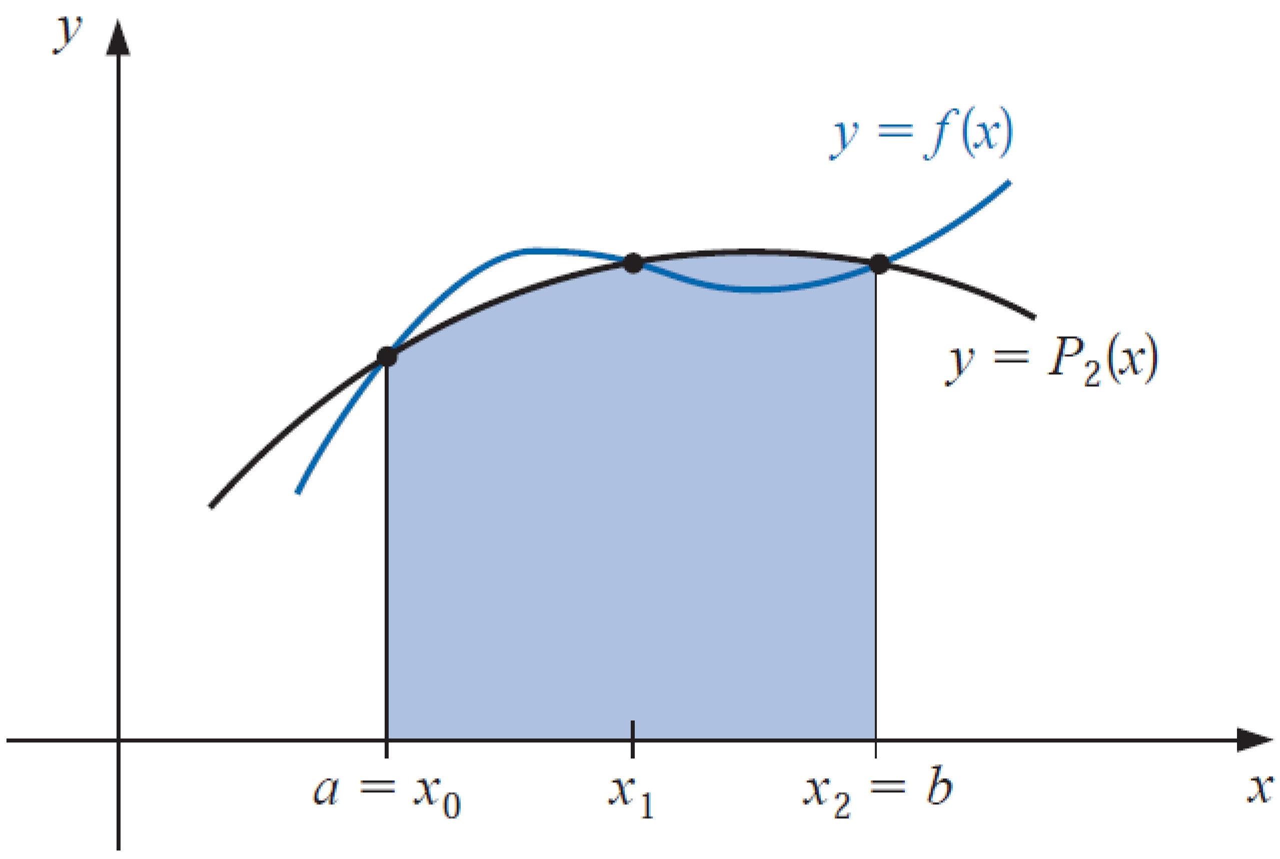
$$= \frac{(x_1-x_0)}{2}[f(x_0)+f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi).$$

Hay với $h = x_1 - x_0$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi).$$

❖ Quy tắc Simpson

Tương tự quy tắc hình thang, quy tắc Simpson sử dụng đa thức bậc 2 với các khoảng chia đều và các nút $x_0 = a$; $x_2 = b$ và $x_1 = a + h$ với $h = (b - a)/2$.



Quy tắc Simpson

Công thức xấp xỉ tích phân bằng đa thức Lagrange bậc 2:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) \right.$$

$$\left. + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) \right] dx$$

$$+ \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{6} f^{(3)}(\xi(x))\,dx.$$

Tuy nhiên, có thể tiếp cận bằng cách sử dụng đa thức Taylor bậc 3 quanh x_1 .

❖ Quy tắc Simpson

Công thức xấp xỉ tích phân bằng đa thức Taylor bậc 3:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \left[f(x_1)(x-x_1) + \frac{f'(x_1)}{2}(x-x_1)^2 + \frac{f''(x_1)}{6}(x-x_1)^3 + \frac{f'''(x_1)}{24}(x-x_1)^4 \right]_{x_0}^{x_2} + \frac{1}{24}\int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi(x))(x-x_1)^4\,dx.$$

Đối với phần sai số, áp dụng định lý giá trị trung gian có trọng cho tích phân:

$$\frac{1}{24}\int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi(x))(x-x_1)^4\,dx = \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{24}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_1)^4\,dx = \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{120}(x-x_1)^5\Big]_{x_0}^{x_2}$$

❖ Quy tắc Simpson

Tính tích phân các số hạng trong công thức trên ta được công thức Simpson như sau (lưu ý khoảng chia đều, $h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0$):

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3}f''(x_1) + \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{60}h^5$$

Sử dụng công thức xấp xỉ đạo hàm bậc 2 ở phần trước ta được

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3}\left\{\frac{1}{h^2}[f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi_2)\right\} + \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{60}h^5$$

$$= \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{12}\left[\frac{1}{3}f^{(4)}(\xi_2) - \frac{1}{5}f^{(4)}(\xi_1)\right].$$

❖ Quy tắc Simpson

Sai số ở hai phép xấp xỉ đạo hàm cấp hai và tích phân có thể thay bằng 1 sai số duy nhất. Khi đó công thức Simpson sẽ trở thành

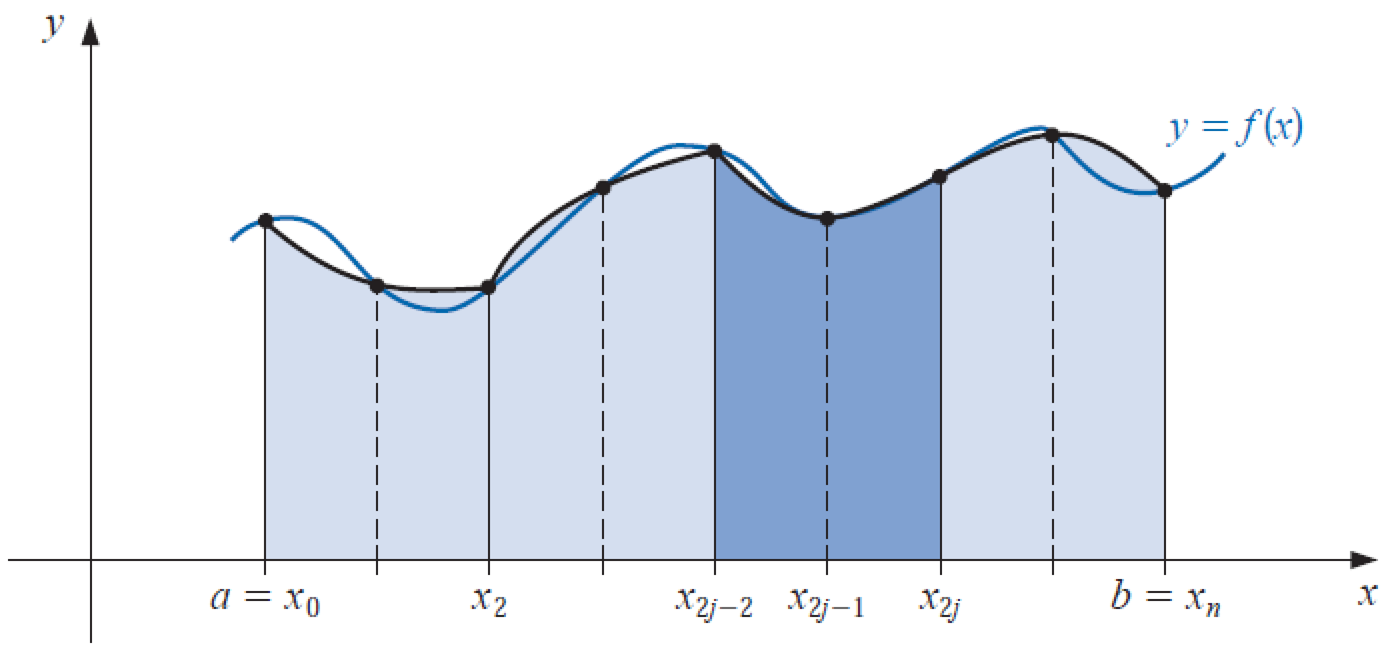
$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi).$$

Quy tắc hình thang và Simpson là 2 ví dụ trong lớp các phương pháp được gọi là Newton-Cotes.

HV tìm hiểu về phương pháp Newton-Cotes.

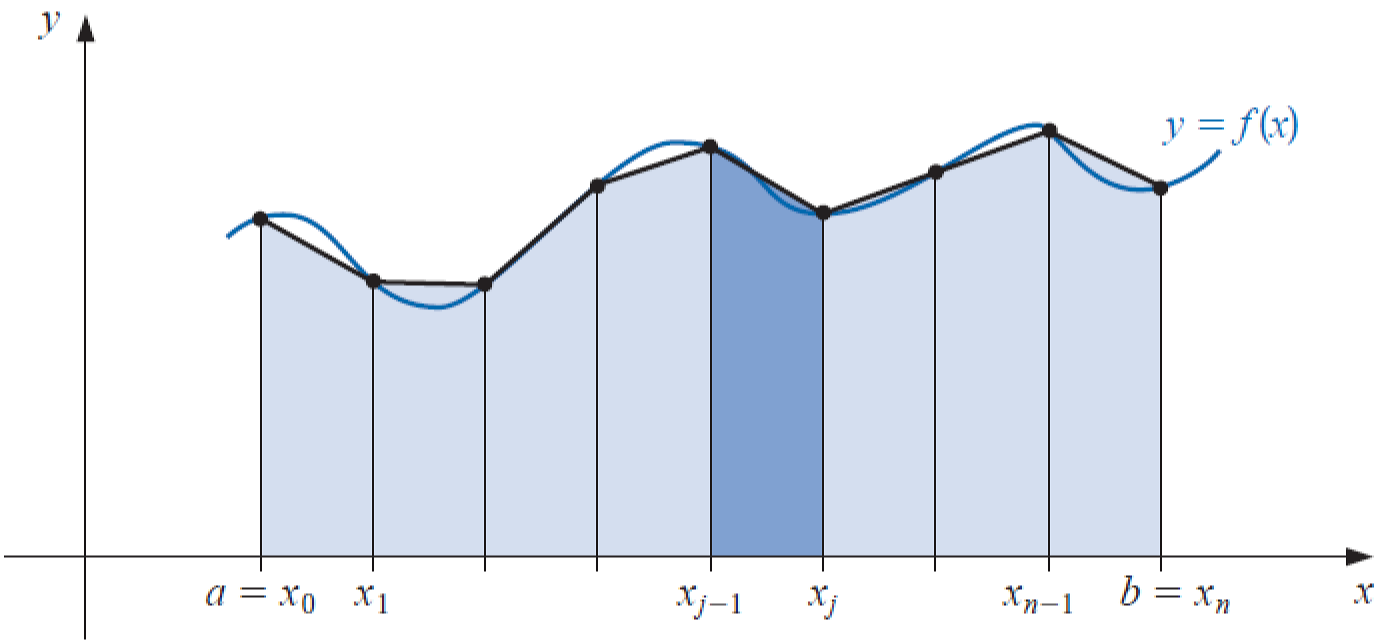
III. CÔNG THỨC TÍCH PHÂN SỐ CHO N KHOẢNG

Để tăng độ chính xác của xấp xỉ tích phân, miền lấy tích phân có thể được phân hoạch thành các khoảng đều nhau trước khi áp dụng các công thức xấp xỉ như Hình thang hay Simpson.



Công thức hình thang:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)\right] - \frac{b-a}{12}h^2 f''(\mu).$$



Công thức Simpson:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{(n/2)-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(b)\right] - \frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(\mu).$$