CHƯƠNG 4

NỘI SUY VÀ ĐA THỨC XẤP XỈ

NỘI DUNG

- I. GIỚI THIỆU
- II. ĐA THỨC NỘI SUY LAGRANGE
- III. ĐA THỨC NỘI SUY NEWTON
- IV. ĐA THỨC NỘI SUY HERMITE
- V. ĐA THỨC NỘI SUY SPLINE

I. GIỚI THIỆU

II. ĐA THỨC NỘI SUY LAGRANGE

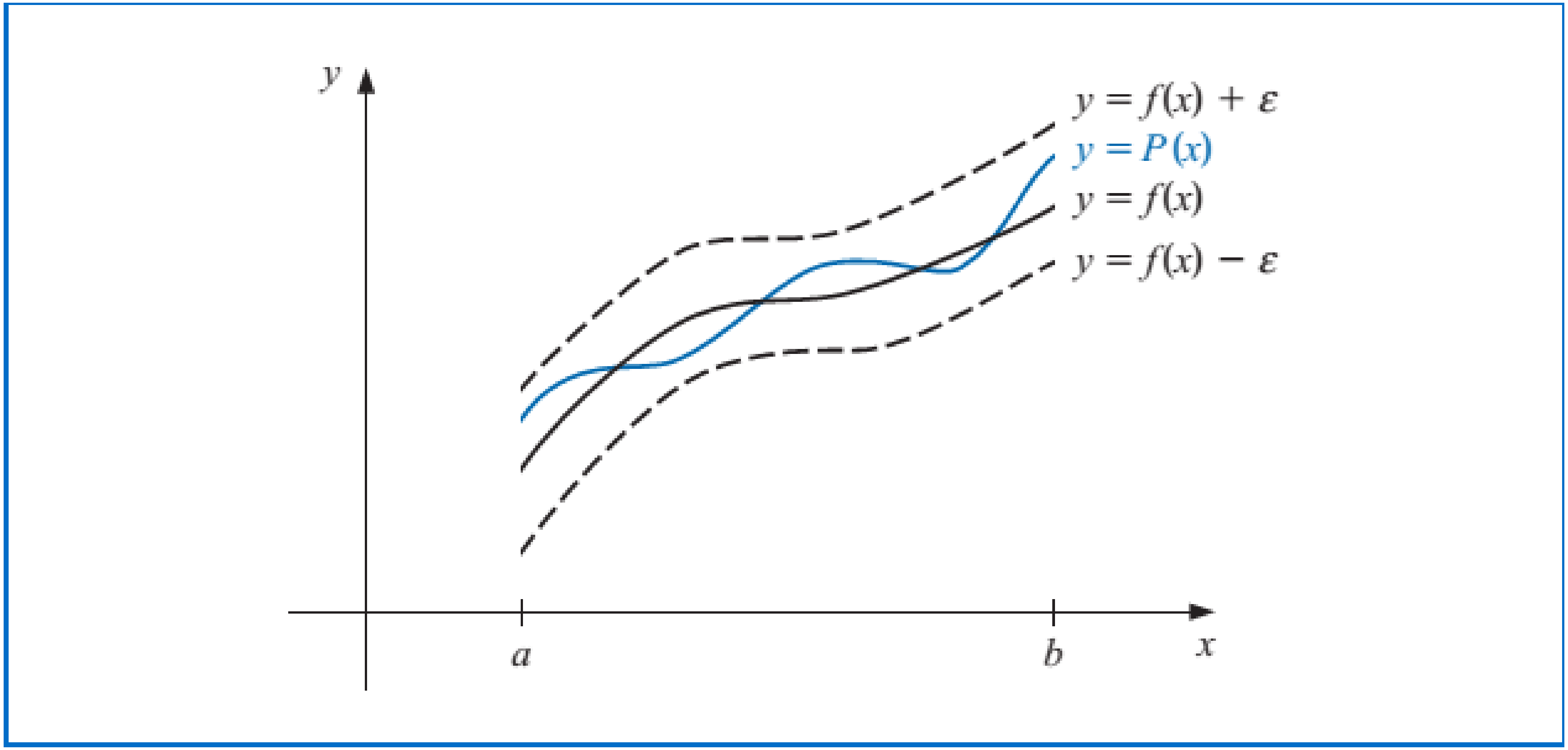
Đa thức bậc nhỏ hơn bằng n:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

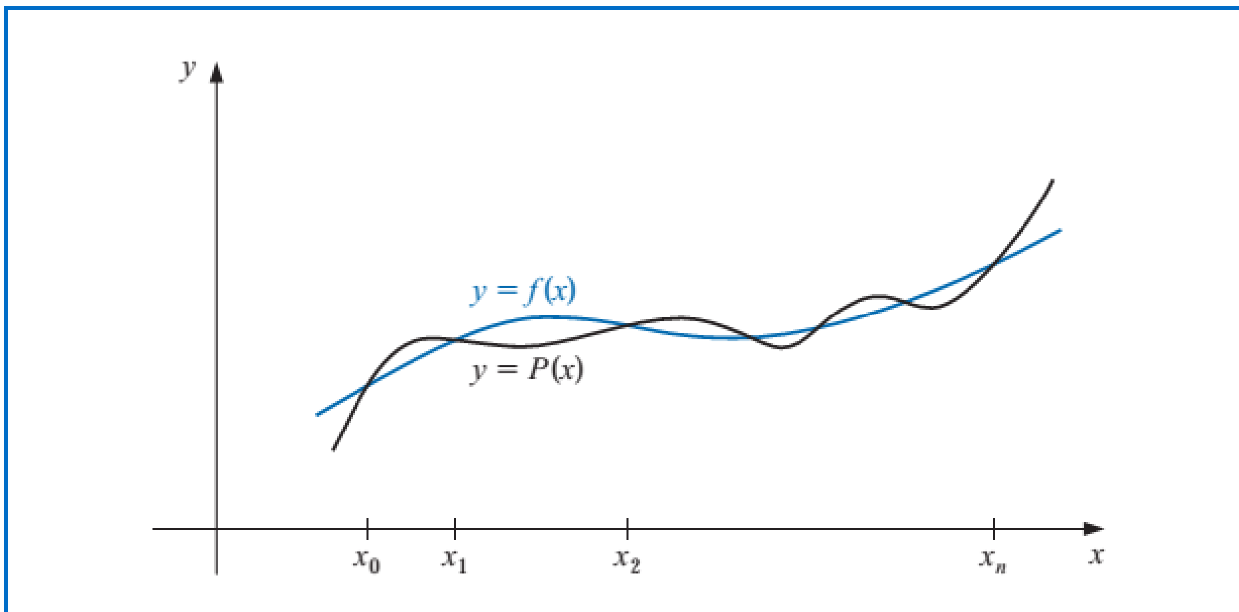
Định lý 3.1: (Xấp xỉ Weierstrass)

Giả sử f là một hàm liên tục trên $[a; b]$. Với mỗi số $\epsilon > 0$, tồn tại một đa thức $P(x)$ sao cho

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon, \forall x \in [a; b].$$


y
y = f(x) + ε
y = P(x)
y = f(x)
y = f(x) − ε
a
b
x

- Nội suy đa thức:
  - Bài toán xác định đa thức bậc 1 đi qua các điểm phân biệt (x_0, y_0) và (x_1, y_1) cũng giống như việc xấp xỉ một hàm f, có $f(x_0) = y_0$ và $f(x_1) = y_1$, bằng đa thức nội suy bậc một đi qua các giá trị tại các điểm đã cho. Sử dụng đa thức này để xấp xỉ trong khoảng được cho bởi các điểm đã cho được gọi là nội suy đa thức.



- Định lý 3.2:

Nếu $x_0, x_1, \dots, x_n$ là $n+1$ điểm phân biệt và f là một hàm có giá trị được cho tại các điểm này thì tồn tại duy nhất một đa thức $P(x)$ bậc n thỏa

$$f(x_k) = P(x_k), k = 0,1, \dots, n.$$

Đa thức này có dạng

$$\begin{aligned} P(x) &= f(x_0)L_{n,0}(x) + f(x_1)L_{n,1}(x) + \cdots + f(x_n)L_{n,n}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_{n,k}(x), \end{aligned}$$

trong đó, với mỗi $k = 0,1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} L_{n,k}(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)} \\ &= \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}. \end{aligned}$$

$L_{n,k}(x)$ có thể ký hiệu đơn giản thành $L_k(x)$.

- Ví dụ:

- Cho hàm $f(x) = 1/x$. Tìm đa thức thức nội suy Lagrange cấp 2 với các nút $x_0 = 2, x_1 = 2.75, x_2 = 4$.
- Dùng đa thức này để tính xấp xỉ $f(3) = 1/3$.
- Dùng phần mềm vẽ đồ thị minh họa.

- Định lý 3.3: (chặn sai số của hàm xấp xỉ bởi đa thức nội suy)

Nếu $x_0, x_1, \ldots, x_n$ là các điểm phân biệt trong đoạn $[a;b]$ và $f \in C^{n+1}[a;b]$. Thì, với mỗi x thuộc $[a;b]$, tồn tại một số $\theta(x)$ ở giữa $x_0, x_1, \ldots, x_n$ với

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}\big(\theta(x)\big)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n),$$

với $P(x)$ là đa thức nội suy Lagrange bậc n.

- Ví dụ:
- Xác định công thức sai số và sai số lớn nhất của phép xấp xỉ ở ví dụ trước trong đoạn [2; 4].

III. Nội suy Newton

Tỷ sai phân:

- Bậc 0 của hàm f theo x_i

$$f[x_i] = f(x_i);$$

- Bậc 1 của hàm f theo x_i và x_{i+1}

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i};$$

- Bậc 2 của hàm f theo x_i, x_{i+1} và x_{i+2}

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i};$$

- Bậc k của hàm f theo x_i, x_{i+1}, …, x_{i+k}

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i};$$

Tỷ sai phân:

- Bậc n

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}.$$

Đa thức nội suy Newton:

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0) \dots (x - x_{k-1}).$$

x	$f(x)$	First divided differences	Second divided differences	Third divided differences
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$	
		$f[x_1, x_2] = \dfrac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$	
		$f[x_2, x_3] = \dfrac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \dfrac{f[x_2, x_3, x_4] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_1}$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4] = \dfrac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2}$	
		$f[x_3, x_4] = \dfrac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3}$		$f[x_2, x_3, x_4, x_5] = \dfrac{f[x_3, x_4, x_5] - f[x_2, x_3, x_4]}{x_5 - x_2}$
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3, x_4, x_5] = \dfrac{f[x_4, x_5] - f[x_3, x_4]}{x_5 - x_3}$	
		$f[x_4, x_5] = \dfrac{f[x_5] - f[x_4]}{x_5 - x_4}$		
x_5	$f[x_5]$			

- Xem ví dụ trang 127.

Công thức sai phân với khoảng chia đều: ký hiệu $h = x_{i+1} - x_i$ với mọi $i = 0,1,\dots,n$ và cho $x = x_0 + sh$. Thì $x - x_i = x_0 + sh - x_0 - ih = h(s - i)$.

Đa thức nội suy Newton trở thành:

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= P_n(x_0 + sh) \\
&= f[x_0] + shf[x_0, x_1] + s(s-1)h^2 f[x_0, x_1, x_2] + \cdots \\
&\quad + s(s-1)\dots(s-n+1)h^n f[x_0, \dots, x_n]
\end{aligned}
$$

$$= f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} s(s-1)\dots(s-k+1)h^k f[x_0, x_1, \dots, x_k].$$

Bằng ký hiệu hệ số của nhị thức

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\dots(s-k+1)}{k!}$$

$$P_n(x) = P_n(x_0 + sh) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} \binom{s}{k} k!\, h^k f[x_0, x_1, \dots, x_k].$$

Sai phân tiến:

- Bậc 1

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{1}{h}\big(f(x_1) - f(x_0)\big) = \frac{1}{h}\Delta f(x_0);$$

- Bậc 2

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{1}{2h}\left[\frac{\Delta f(x_1) - \Delta f(x_0)}{h}\right] = \frac{1}{2h^2}\Delta^2 f(x_0);$$

- Bậc k tổng quát

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{1}{k!\, h^k}\Delta^k f(x_0).$$

Đa thức nội suy Newton tiến với khoảng chia đều ($f[x_0] = f(x_0)$):

$$\boxed{P_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k f(x_0).}$$

Sai phân lùi:

- Định nghĩa 3.7:

Cho dãy $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, một sai phân lùi ∇p_n được định nghĩa như sau:

$$\nabla p_n = p_n - p_{n-1}, \forall n \geq 1.$$

Sai phân lùi bậc cao được định nghĩa đệ quy như sau

$$\nabla^k p_n = \nabla\left(\nabla^{k-1} p_n\right), \forall k \geq 2.$$

Tỷ sai phân lùi:

$$f[x_n, x_{n-1}] = \frac{1}{h}\nabla f(x_n), f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] = \frac{1}{2h^2}\nabla^2 f(x_n),$$

Tổng quát

$$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}] = \frac{1}{k!\,h^k}\nabla^k f(x_n)$$

Sai phân lùi:

- Nếu các nút nội suy có thứ tự từ số cuối đến số đầu tiên, $x_n, x_{n-1}, \dots, x_0$ thì công thức nội suy sẽ có dạng

$$P_n(x) = f[x_n] + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n) + f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}](x - x_n)(x - x_{n-1}) + \cdots + f[x_n, \dots, x_0](x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1).$$

- Với số khoảng chia đều

$$P_n(x) = f[x_n] + s\nabla f(x_n) + \frac{s(s+1)}{2}\nabla^2 f(x_n) + \cdots + \frac{s(s+1)\dots(s+n-1)}{n!}\nabla^n f(x_n).$$

Sai phân lùi:

- Ký hiệu (hệ số nhị thức thực s)

$$\binom{-s}{k} = \frac{-s(-s-1)\ldots(-s-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{s(s+1)\ldots(s+k-1)}{k!};$$

Đa thức nội suy khi đó:

$$P_n(x) = f[x_n] + (-1)^1 \binom{-s}{1} \nabla f(x_n) + (-1)^2 \binom{-s}{2} \nabla^2 f(x_n) + \cdots + (-1)^n \binom{-s}{n} \nabla^n f(x_n).$$

Công thức nội suy Newton lùi với khoảng chia đều:

$$\boxed{P_n(x) = f[x_n] + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f(x_n).}$$

- Xem ví dụ trang 127 và bảng tính sai phân tiến và lùi 3.12.

Sai phân trung tâm: (đọc thêm)

IV. Nội suy Hermite

- Định lý 3.9:

Nếu $f \in C^1[a;b]$ và $x_0, \dots, x_n \in [a;b]$ phân biệt thì tồn tại duy nhất đa thức có bậc tối thiểu trùng với giá trị của f và f' tại $x_0, \dots, x_n$ được gọi là đa thức Hermite có bậc đến $2n + 1$ cho bởi

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) H_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j) \widehat{H}_{n,j}(x),$$

trong đó, với ký hiệu $L_{n,j}(x)$ là đa thức hệ số Lagrange thứ j, ta có

$$H_{n,j}(x) = \left[1 - 2(x - x_j) L'_{n,j}(x_j)\right] L^2_{n,j}(x)$$

và

$$\widehat{H}_{n,j}(x) = (x - x_j) L^2_{n,j}(x).$$

Hơn nữa, nếu $f \in C^{2n+2}[a;b]$ thì

$$f(x) = H_{2n+1}(x) + \frac{(x - x_0)^2 \dots (x - x_n)^2}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\theta(x)),$$

với $\theta(x)$ một số trong khoảng $(a;b)$.

- Xem ví dụ trang 138.

IV. Nội suy Spline bậc 3

- Nhóm tìm hiểu và thuyết trình.