CHƯƠNG 3

HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

NỘI DUNG

- I. GIỚI THIỆU
- II. CÁC PHƯƠNG PHÁP TRỰC TIẾP
  - 1. Phương pháp khử Gauss
  - 2. Phương pháp khử Gauss với kỹ thuật xoay trục (Pivoting Strategies)
  - 3. Phương pháp phân tích ma trận
- III. PHƯƠNG PHÁP LẶP
  - 1. Chuẩn của các vector và ma trận
  - 2. Trị riêng và vector riêng
  - 3. Phương pháp lặp Jacobi và Gauss-Siedel

I. GIỚI THIỆU

II. CÁC PHƯƠNG PHÁP TRỰC TIẾP

1. Phương pháp khử Gauss
2. Phương pháp khử Gauss với kỹ thuật xoay trục (Pivoting Strategies)
3. Phương pháp phân tích ma trận

1. Phương pháp khử Gauss

- Cho hệ phương trình đại số tuyến tính gồm n phương trình và n ẩn số (gọi tắt là hệ $n \times n$) có dạng ma trận

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

trong đó,

$$A = \left[a_{ij}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{ và } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Ma trận (cấp $n \times (n + 1)$) hệ số mở rộng [A,**b**] thường được dùng để đại diện cho hệ phương trình này.

$$[A, \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & \vdots & b_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \vdots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & \vdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \vdots & a_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

1. Phương pháp khử Gauss

- Phương pháp khử Gauss có thể tóm tắt thành 2 quá trình như sau:
  - Quá trình 1: Đưa ma trận hệ số mở rộng $[A, \mathbf{b}]$ và dạng ma trận tam giác trên.
  - Quá trình 2: Giải ngược.

$$\tilde{\tilde{A}} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= a_{1,n+1}, \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= a_{2,n+1}, \\ \ddots \qquad \vdots \quad &\qquad \vdots \\ a_{nn}x_n &= a_{n,n+1}, \end{aligned}$$

$$x_i = \frac{a_{i,n+1} - a_{i,n}x_n - a_{i,n-1}x_{n-1} - \cdots - a_{i,i+1}x_{i+1}}{a_{ii}} = \frac{a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}},$$

- Yêu cầu:
- Đọc hiểu thuật toán khử Gauss.

- Độ phức tạp của thuật toán:

Khi n lớn, tổng số phép toán cộng/trừ và nhân chia *của thuật toán khử Gauss xấp xỉ* $n^3/3$.

Xem minh họa thêm trong bảng 6.1/368.

2. Phương pháp khử Gauss với kỹ thuật xoay trục (Pivoting Strategies)

- Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 0.003000x_1 + 59.14x_2 = 59.17 \\ \quad 5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên bằng phương pháp khử Gauss làm tròn đến 4 chữ số. So với nghiệm chính xác $x_1 = 10.00$ và $x_2 = 1.000$.

- Giải lại hệ phương trình

$$\begin{cases} 0.003000x_1 + 59.14x_2 = 59.17 \\ \quad 5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78 \end{cases}$$

Bằng cách hoán đổi phương trình 1 và 2 trước. So với nghiệm chính xác $x_1 = 10.00$ và $x_2 = 1.000$.

- Phương pháp phần tử trội tương đối (partial Pivoting): lựa chọn phần tử cùng cột và bên dưới đường chéo có trị tuyệt đối lớn nhất; cụ thể, ta chọn giá trị nhỏ nhất $p \geq k$ sao cho

$$\left|a_{pk}^{(k)}\right| = \max_{k \leq i \leq n} \left|a_{ik}^{(k)}\right|$$

và hoán vị 2 dòng p và k $(E_k) \leftrightarrow \left(E_p\right)$. (k) ám chỉ bước tính thứ k.

- Giải lại hệ phương trình bằng cách hoán vị 2 phương trình

$$\begin{cases} 30.00x_1 + 591400x_2 = 591700 \\ 5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78 \end{cases}$$

So với nghiệm chính xác $x_1 = 10.00$ và $x_2 = 1.000$.

- Phương pháp phần tử trội tương đối tỷ lệ (Scaled Partial Pivoting): Ở bước đầu tiên, lựa chọn hệ số tỷ lệ s_i cho mỗi dòng

$$s_i = \max_{1 \le j \le n} |a_{ij}|.$$

và hoán vị 2 dòng p và k $(E_k) \leftrightarrow (E_p)$ với p thỏa

$$\frac{|a_{p1}|}{s_p} = \max_{1 \le k \le n} \frac{|a_{k1}|}{s_k}.$$

- Tương tự, trước khi khử các biến x_i bằng thủ tục

$$E_k - m_{ki}E_i, \qquad k = i+1, \dots, n.$$

Ta chọn p thỏa

$$\frac{|a_{p1}|}{s_p} = \max_{1 \le k \le n} \frac{|a_{k1}|}{s_k}$$

và thực hiện thủ tục hoán vị dòng $(E_i) \leftrightarrow (E_p)$, nếu $i \neq p$. Các hệ số tỷ lệ chỉ cần tính một lần tại lúc bắt đầu.

- Phương pháp phần tử trội toàn cục (Complete Pivoting): Tại bước thứ k, ta duyệt tất cả phần tử a_{ij}, với $i = k, k+1, \dots, n$ và $j = k, k+1, \dots, n$ và tìm phần tử có giá trị lớn nhất. Thực hiện hoán vị dòng và cột để đưa phần tử này vào vị trí phần tử trục.

3. Phương pháp phân tích ma trận

- Nhóm tìm hiểu và báo cáo.

II. CÁC PHƯƠNG PHÁP LẶP

- 1. Chuẩn của các vector và ma trận
- 2. Trị riêng và vector riêng
- 3. Phương pháp lặp Jacobi và Gauss-Siedel

1. Chuẩn của các vector và ma trận

- Định nghĩa 7.1: Chuẩn vector

Chuẩn vector trong $\mathbb{R}^n$ là một hàm, ký hiệu $\|\cdot\|$, từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}$ thỏa các tính chất sau:

i) $\|\mathbf{x}\| \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

ii) $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$,

iii) $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

iv) $\|\mathbf{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

- Định nghĩa 7.2: Một số chuẩn vector

Các chuẩn l_2 và l_∞ của vector $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^t$ trong $\mathbb{R}^n$ được định nghĩa như sau:

i) $\|\mathbf{x}\|_2 = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\}^{1/2}$, chuẩn Eulide;

ii) $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$.

- Định nghĩa 7.4: Khoảng cách vector

Nếu vector $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^t$ và $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^t$ trong $\mathbb{R}^n$ thì khoảng cách giữa $\mathbf{x}$ và $\mathbf{y}$ theo chuẩn l_2 và l_∞ được định nghĩa như sau:

i) $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 = \{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\}^{1/2}$, chuẩn Eulide;

ii) $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|$.

- Định nghĩa 7.5: Sự hội tụ

Dãy $(\mathbf{x}^{(k)})$ các vector trong $\mathbb{R}^n$ được nói là hội tụ về $\mathbf{x}$ theo chuẩn $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ nếu với mọi số cho trước $\varepsilon > 0$, tồn tại số tự nhiên $N(\varepsilon)$ sao cho

$$\left\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}\right\| < \varepsilon, \forall k \geq N(\varepsilon).$$

- Định nghĩa 7.8: Chuẩn ma trận

Chuẩn ma trận trên tập hợp các $n \times n$ ma trận là một hàm giá trị thực, ký hiệu $\|\cdot\|$, xác định trên tập này thỏa:

i) $\|A\| \geq 0$;

ii) $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ (ma trận 0);

iii) $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$;

iv) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;

v) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

- Định lý 7.11: Nếu $A = (a_{ij})$ là một ma trận $n \times n$ thì

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

- Ví dụ: Xác định chuẩn $\|A\|_\infty$ của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Trị riêng và vector riêng

- Ôn tập lại trong ĐS TT

3. Phương pháp lặp Jacobi và Gauss-Siedel

- Phương pháp Jacobi

- Phương pháp Jacobi giải phương trình thứ i của hệ Ax=b cho xi bằng

$$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(-\frac{a_{ij}x_j}{a_{ii}} \right) + \frac{b_i}{a_{ii}}, i = 1, \dots, n.$$

Với mỗi $k \geq 1$, thành phần $x_i^{(k)}$ của $\mathbf{x}^{(k)}$ được tính từ các thành phần của $\mathbf{x}^{(k-1)}$ bằng

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(-a_{ij}x_j^{(k-1)} \right) + b_i \right], i = 1, \dots, n. \quad (7.5)$$

3. Phương pháp lặp Jacobi và Gauss-Siedel

- Phương pháp Jacobi

- Hệ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ được viết lại dưới dạng $\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}$ với các ma trận được cố định T và vec-tơ $\mathbf{c}$. Với nghiệm ban đầu $\mathbf{x}^{(0)}$ được lựa chọn, các nghiệm lặp tiếp theo được tính theo công thức dãy lặp

$$\mathbf{x}^{(k)} = T\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c},$$

với $k = 1,2, \ldots.$

- Ma trận A có thể được phân tích thành các ma trận đường chéo và các ma trận tam giác: $A = D - L - U$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= D - L - U.$$

- Phương pháp Jacobi

- Hệ $A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow (D - L - U)\mathbf{x} = \mathbf{b}$ biến đổi thành

$$D\mathbf{x} = (L + U)\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

$$\text{hay } \mathbf{x} = D^{-1}(L + U)\mathbf{x} + D^{-1}\mathbf{b}.$$

- Dãy lặp Jacobi tương ứng

$$\mathbf{x}^{(k)} = D^{-1}(L + U)\mathbf{x}^{(k-1)} + D^{-1}\mathbf{b}, k = 1,2 \dots.$$

Đặt: $T_j = D^{-1}(L + U)$ và $\mathbf{c}_j = D^{-1}\mathbf{b}$.

- Dãy lặp Jacobi trở thành

$$\mathbf{x}^{(k)} = T_j\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}_j. \quad (7.7)$$

Công thức (7.5) thường được dùng để tính toán, ngược lại công thức (7.7) thường dùng với mục đích chứng minh lý thuyết.

- Đọc hiểu thuật toán 7.1, trang 453.
- Làm bài tập 1b, trang 459, bằng phương pháp Jacobi.

- Phương pháp Gauss-Seidel
- Để cải thiện thuật tuấn 7.1; các thành phần của nghiệm $\mathbf{x}^{(k)}$ được tính trực tiếp qua thành phần của nghiệm $\mathbf{x}^{(k-1)}$. Tuy nhiên, với $j > 1$, các thành phần $x_1^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}$ của $\mathbf{x}^{(k)}$ đã được tính và nó các nghiệm xấp xỉ tốt hơn so với các thành phần $x_1^{(k-1)}, \dots, x_{i-1}^{(k-1)}$. Do đó, có thể tính $x_i^{(k)}$ bằng cách sử dụng các thành phần mới nhất của $\mathbf{x}^{(k)}$. Khi đó, công thức lặp (có cập nhật nghiệm mới) được cho như sau

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[-\sum_{j=1}^{i-1}\left(a_{ij}x_j^{(k)}\right) - \sum_{j=i+1}^{n}\left(a_{ij}x_j^{(k-1)}\right) + b_i\right],$$

Với $i = 1,2,\dots,n$. Hiệu chỉnh này được gọi là phương pháp lặp *Gauss-Seidel*.

- Đọc hiểu thuật toán 7.2, trang 456.
- Làm lại bài tập 1b, trang 459, bằng phương pháp Gauss-Seidel.

- Hệ quả 7.20:

Nếu $\|T\| < 1$ cho một chuẩn ma trận bất kỳ và $\mathbf{c}$ là một vec-tơ cho trước, thì dãy lặp $\left\{\mathbf{x}^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ xác định bởi $\mathbf{x}^{(k)} = T\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}$ hội tụ, với bất kỳ $\mathbf{x}^{(0)}$, về $\mathbf{x}$ thỏa $\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}$ và có sai số bị chặn:

(i) $\left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\right\| \leq \|T\|^k \left\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\right\|$;

(ii) $\left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\right\| \leq \frac{\|T\|^k}{1-\|T\|} \left\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\right\|$;

- Định lý 7.21: (Điều kiện đủ để phương pháp lặp hội tụ)

Nếu A là ma trận đường chéo trội ngặt thì với bất kỳ nghiệm ban đầu $\mathbf{x}^{(0)}$, phương pháp lặp Jacobi và Gauss-Seidel đều cho dãy lặp $\left\{\mathbf{x}^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ hội tụ về nghiệm duy nhất của hệ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

- Định nghĩa 6.20:

Cho ma trận A cấp $n \times n$ là một **ma trận đường chéo trội** khi

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

Đúng với mọi $i = 1,2, \dots, n$.

A được nói là **ma trận đường chéo trội ngặt** khi bất đẳng thức là ngặt,

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

Đúng với mọi $i = 1,2, \dots, n$.

- Định lý 6.21:

Một ma trận đường chéo trội ngặt thì **không suy biến**. Hơn nữa, phương pháp khử Gauss có thể giải nghiệm duy nhất của hệ Ax=b mà không cần thực hiện hoán vị dòng hay cột và quá trình tính toán sẽ ổn định dù có sai số làm tròn tích lũy.