Normed Spaces. Banach Spaces

2.1 Không gian Vectơ

Khái niệm cơ bản: Không gian Vectơ là gì?

Không gian vectơ là một cấu trúc toán học xuất hiện trong nhiều lĩnh vực như vật lý, kỹ thuật và phân tích hàm. Nó là một tập hợp các phần tử (gọi là **vectơ**) mà chúng ta có thể **cộng** với nhau và **nhân** với một số (gọi là **số vô hướng**), sao cho kết quả vẫn nằm trong tập hợp đó. Những phép toán này phải tuân theo một số quy tắc nhất định để đảm bảo tính nhất quán.

Trong phân tích hàm, không gian vectơ thường được xây dựng trên hai trường số: **trường số thực** R (các số thực) hoặc **trường số phức** C (các số phức). Các số trong trường này được gọi là **số vô hướng**.

Định nghĩa 2.1-1: Không gian Vectơ

Một **không gian vectơ** X trên trường K (thường là R hoặc C) là một tập hợp không rỗng các phần tử $x, y, \ldots$ (gọi là vectơ) cùng với hai phép toán:

1. **Phép cộng vectơ**: Với mỗi cặp (x, y), ta có một vectơ mới $x + y$, thỏa mãn:
   - **Tính giao hoán**: $x + y = y + x$,
   - **Tính kết hợp**: $x + (y + z) = (x + y) + z$,
   - Có **vectơ không** 0 sao cho $x + 0 = x$,
   - Mỗi x có **vectơ đối** $-x$ sao cho $x + (-x) = 0$.
2. **Phép nhân với số vô hướng**: Với mỗi vectơ x và số vô hướng $\alpha \in K$, ta có vectơ mới αx, thỏa mãn:
   - **Tính kết hợp**: $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,
   - **Phần tử đơn vị**: $1x = x$,
   - **Tính phân phối**: $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

Ý nghĩa trực quan: Hãy tưởng tượng không gian vectơ như một "hộp cát" nơi bạn có thể chơi với các vectơ. Bạn có thể cộng chúng lại (như xếp hai mũi tên nối tiếp), hoặc kéo dài/thu ngắn chúng bằng cách nhân với một số. Các quy tắc trên đảm bảo mọi thứ đều "hợp lý" và không bị "phá vỡ".

Ví dụ minh họa:

- Tập hợp các mũi tên trong mặt phẳng (vectơ 2 chiều) là một không gian vectơ. Cộng hai mũi tên bằng cách đặt đuôi của mũi tên này vào đầu của mũi tên kia, nhân với một số để thay đổi độ dài.

Các ví dụ về không gian vectơ

1. **Không gian** R^n (2.1-2):
   - Đây là tập hợp các n-tup (dãy n số thực), ví dụ $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.
   - Phép cộng: $x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \ldots, \xi_n + \eta_n)$.
   - Phép nhân: $\alpha x = (\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \ldots, \alpha\xi_n)$.
   - **Ví dụ**: Trong R^2, nếu $x = (1, 2)$ và $y = (3, 4)$, thì $x + y = (4, 6)$, và $2x = (2, 4)$.
2. **Không gian** C^n (2.1-3):
   - Tương tự R^n, nhưng các thành phần là số phức.
   - **Ví dụ**: Trong C^2, nếu $x = (1 + i, 2)$, $y = (i, 3 - i)$, thì $x + y = (1 + 2i, 5 - i)$.
3. **Không gian** $C[a, b]$ (2.1-4):
   - Tập hợp các hàm liên tục từ $[a, b]$ vào R.
   - Phép cộng: $(x + y)(t) = x(t) + y(t)$.
   - Phép nhân: $(\alpha x)(t) = \alpha x(t)$.
   - **Ví dụ**: Trên $[0, 1]$, nếu $x(t) = t$, $y(t) = t^2$, thì $(x + y)(t) = t + t^2$, và $2x(t) = 2t$.
4. **Không gian** l^2 (2.1-5):
   - Tập hợp các dãy số thực $(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ sao cho $\sum |\xi_i|^2 < \infty$.
   - Phép cộng và nhân tương tự như trên.
   - **Ví dụ**: $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots)$, tổng bình phương hội tụ, là một vectơ trong l^2.

Không gian con (Subspace)

Một **không gian con** Y của X là tập con không rỗng sao cho:

- Nếu $y_1, y_2 \in Y$, thì $\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$ với mọi $\alpha, \beta \in K$.

Ví dụ:

- Trong R^3, tập $Y = \{(x, y, 0) \mid x, y \in R\}$ (mặt phẳng $z = 0$) là không gian con.
- Kiểm tra: Nếu $y_1 = (1, 2, 0)$, $y_2 = (3, 4, 0)$, thì $2y_1 + 3y_2 = (2, 4, 0) + (9, 12, 0) = (11, 16, 0) \in Y$.

Tổ hợp tuyến tính và Span

- **Tổ hợp tuyến tính**: Một biểu thức dạng $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m$.
- **Span**: Tập tất cả tổ hợp tuyến tính của một tập M, ký hiệu $\operatorname{span} M$.

Ví dụ:

- Trong R^3, nếu $M = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$, thì $\operatorname{span} M = \{(a, b, 0) \mid a, b \in R\}$, là mặt phẳng $z = 0$.

Độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính (2.1-6)

- Một tập $M = \{x_1, \ldots, x_r\}$ là **độc lập tuyến tính** nếu phương trình $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_r x_r = 0$ chỉ có nghiệm tầm thường ($\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$).
- Nếu không, tập đó là **phụ thuộc tuyến tính**.

Ví dụ:

- Trong R^2, $M = \{(1, 0), (0, 1)\}$: Độc lập tuyến tính, vì $a(1, 0) + b(0, 1) = (a, b) = (0, 0)$ chỉ khi $a = b = 0$.
- $M = \{(1, 2), (2, 4)\}$: Phụ thuộc tuyến tính, vì $2(1, 2) - (2, 4) = (2, 4) - (2, 4) = (0, 0)$.

Không gian hữu hạn chiều và vô hạn chiều (2.1-7)

- X là **hữu hạn chiều** nếu tồn tại n sao cho X có tập n vectơ độc lập tuyến tính, nhưng bất kỳ tập $n + 1$ vectơ nào cũng phụ thuộc. $n = \dim X$.
- Nếu không, X là **vô hạn chiều**.

Ví dụ:

- R^3: $\dim = 3$, cơ sở là $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.
- $C[a, b]$: Vô hạn chiều, vì các hàm $1, t, t^2, \ldots$ độc lập tuyến tính và số lượng không giới hạn.

Định lý 2.1-8: Chiều của không gian con

Định lý: Nếu X là không gian vectơ n-chiều, thì bất kỳ không gian con thực sự Y của X có chiều nhỏ hơn n.

Giải thích trực quan: Trong một "phòng" n chiều, bất kỳ "góc" nào nhỏ hơn toàn bộ phòng đều có ít "hướng" hơn.

Chứng minh:

- Nếu $\dim Y = n$, thì Y có cơ sở n vectơ, cũng là cơ sở của X, nên $Y = X$, mâu thuẫn với Y là không gian con thực sự.
- Do đó, $\dim Y < n$.

Ví dụ minh họa:

- Trong R^3 ($\dim = 3$), không gian con $Y = \{(x, y, 0)\}$ có cơ sở $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$, $\dim Y = 2 < 3$.

Kết luận

Phần 2.1 giới thiệu không gian vectơ như một nền tảng cơ bản, với các khái niệm như phép toán, không gian con, span, độc lập tuyến tính và chiều. Các định lý và ví dụ minh họa giúp ta hình dung cách các vectơ "tương tác" trong không gian toán học.

2.2 Không gian Có Chuẩn và Không gian Banach

Khái niệm cơ bản: Từ Không gian Vectơ đến Không gian Có Chuẩn

Ở phần trước (2.1), chúng ta đã biết không gian vectơ là nơi các vectơ có thể cộng và nhân với số vô hướng. Nhưng nếu chỉ có vậy, ta chưa thể đo "khoảng cách" hay "độ lớn" của vectơ. Để làm được điều đó, ta cần thêm một khái niệm gọi là **chuẩn** (norm), biến không gian vectơ thành **không gian có chuẩn**. Nếu không gian có chuẩn này còn "đầy đủ" (tức là mọi dãy Cauchy đều hội tụ), ta gọi nó là **không gian Banach**.

Ý nghĩa trực quan: Hãy nghĩ chuẩn như một "thước đo" để tính độ dài của vectơ. Không gian có chuẩn giống như một "sân chơi" nơi mọi thứ đều có kích thước, và không gian Banach là sân chơi mà không có "lỗ hổng" – mọi thứ đều "được lấp đầy".

Định nghĩa 2.2-1: Không gian Có Chuẩn và Không gian Banach

- **Không gian có chuẩn** X là một không gian vectơ có định nghĩa một **chuẩn** (ký hiệu $\|x\|$), là một hàm từ X vào R (số thực), thỏa mãn 4 tính chất:
  - (N1) $\|x\| \geq 0$ (chuẩn luôn không âm),
  - (N2) $\|x\| = 0$ nếu và chỉ nếu $x = 0$ (vectơ không có chuẩn bằng 0),
  - (N3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ (nhân với số thì chuẩn tỷ lệ với giá trị tuyệt đối của số đó),
  - (N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (bất đẳng thức tam giác – tổng độ dài hai cạnh không vượt quá cạnh còn lại).
- Chuẩn tạo ra một **độ đo** (metric) $d(x, y) = \|x - y\|$, gọi là **độ đo sinh ra từ chuẩn**.
- **Không gian Banach** là không gian có chuẩn mà **đầy đủ** theo độ đo này (tức mọi dãy Cauchy đều hội tụ đến một phần tử trong không gian).

Ý nghĩa trực quan:

- Chuẩn giống như "độ dài" của vectơ trong không gian Euclid quen thuộc (như $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ trong R^2).
- Bất đẳng thức tam giác (N4) giống như trong hình học: đi đường thẳng bao giờ cũng ngắn hơn đi vòng.

Ví dụ minh họa:

- Trong R^2, nếu $x = (3, 4)$, thì chuẩn Euclid là $\|x\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Kiểm tra (N4): Nếu $y = (1, 2)$, thì $\|x + y\| = \|(4, 6)\| = \sqrt{52} \approx 7.21$, và $\|x\| + \|y\| = 5 + \sqrt{5} \approx 7.24$, nên $7.21 < 7.24$, thỏa mãn.

Tính chất quan trọng của chuẩn

Từ (N4), ta suy ra:

$$||\|y\| - \|x\|| \leq \|y - x\|$$

Điều này có nghĩa là hàm chuẩn $x \mapsto \|x\|$ là **liên tục**. Nếu hai vectơ gần nhau (theo độ đo), chuẩn của chúng cũng gần nhau.

Ví dụ: Trong R^2, nếu $x = (1, 0)$, $y = (1.1, 0)$, thì $\|y - x\| = 0.1$, và $||\|y\| - \|x\|| = |1.1 - 1| = 0.1$, đúng bằng $\|y - x\|$.

Các ví dụ về Không gian Có Chuẩn và Không gian Banach

1. **Không gian Euclid R^n và Không gian Unit C^n** (2.2-2):
   - Chuẩn: $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2}$.
   - Đây là không gian Banach vì mọi dãy Cauchy trong R^n hay C^n đều hội tụ (đầy đủ).
   - **Ví dụ**: Trong R^3, $x = (1, 2, 2)$, thì $\|x\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$.
2. **Không gian l^p** (2.2-3):
   - Tập các dãy $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ sao cho $\sum |\xi_i|^p < \infty$, chuẩn: $\|x\| = (\sum_{i=1}^\infty |\xi_i|^p)^{1/p}$.

- Là không gian Banach (đầy đủ).
- **Ví dụ**: Trong l^2, $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots)$, thì $\|x\| = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots} = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1.15$.

3. **Không gian l^∞** (2.2-4):
   - Tập các dãy bị chặn, chuẩn: $\|x\| = \sup_i |\xi_i|$.
   - Là không gian Banach.
   - **Ví dụ**: $x = (1, -1, 0.5, -0.5, \ldots)$, thì $\|x\| = 1$.
4. **Không gian $C[a, b]$** (2.2-5):
   - Tập các hàm liên tục trên $[a, b]$, chuẩn: $\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$.
   - Là không gian Banach.
   - **Ví dụ**: Trên $[0, 1]$, $x(t) = t^2$, thì $\|x\| = \max |t^2| = 1$ (tại $t = 1$).
5. **Không gian có chuẩn không đầy đủ** (2.2-6):
   - Ví dụ: Không gian các hàm liên tục trên $[0, 1]$ với chuẩn $\|x\| = \int_0^1 |x(t)| dt$.
   - Không đầy đủ vì tồn tại dãy Cauchy không hội tụ trong không gian này (xem 1.5-9 trong tài liệu).
   - **Ví dụ**: Xét dãy hàm $x_n(t)$ tăng dần từ 0 đến 1, hội tụ đến hàm gián đoạn, không thuộc không gian các hàm liên tục.
6. **Không gian không đầy đủ và hoàn thành $L^2[a, b]$** (2.2-7):
   - Không gian các hàm liên tục trên $[a, b]$ với chuẩn $\|x\| = (\int_a^b x(t)^2 dt)^{1/2}$ không đầy đủ.
   - Hoàn thành của nó là $L^2[a, b]$, một không gian Banach.
   - **Ví dụ**: Trên $[0, 1]$, $x(t) = t$, thì $\|x\| = (\int_0^1 t^2 dt)^{1/2} = (\frac{1}{3})^{1/2} \approx 0.577$.

Không gian s (2.2-8): Không phải mọi độ đo đều từ chuẩn

Không gian s (tập tất cả các dãy số thực) có độ đo, nhưng không thể sinh ra từ một chuẩn. Điều này cho thấy không phải mọi không gian vectơ với độ đo đều là không gian có chuẩn.

Ví dụ: Độ đo trong s phức tạp hơn chuẩn, không thỏa mãn các tính chất như (N3) hay (N4) theo cách đơn giản.

Kết luận

Phần 2.2 giới thiệu không gian có chuẩn như một bước nâng cấp từ không gian vectơ, thêm khái niệm "độ lớn" qua chuẩn. Không gian Banach là phiên bản "hoàn hảo" của không gian có chuẩn, nơi mọi thứ đều "đầy đủ". Các ví dụ từ R^n, l^p, đến $C[a, b]$ cho thấy sự đa dạng và ứng dụng thực tế của các khái niệm này.

2.3 Hoàn thành Không gian Có Chuẩn

Khái niệm cơ bản: Tại sao cần hoàn thành?

Ở phần 2.2, chúng ta đã thấy không gian có chuẩn là không gian vectơ với "thước đo" (chuẩn), và không gian Banach là không gian có chuẩn "đầy đủ" (mọi dãy Cauchy hội tụ). Nhưng không phải không gian có chuẩn nào cũng đầy đủ. Ví dụ, không gian các hàm liên tục với chuẩn tích phân (như trong 2.2-6) có thể "thiếu" một số phần tử mà các dãy Cauchy "muốn" hội tụ tới. **Hoàn thành** là quá trình "lấp đầy" những lỗ hổng này để biến không gian thành không gian Banach.

Ý nghĩa trực quan: Hãy tưởng tượng bạn có một bức tranh chưa hoàn thiện, thiếu một vài mảnh ghép. Hoàn thành là việc thêm các mảnh ghép đó vào để bức tranh trở nên "trọn vẹn", giống như thêm các giới hạn của dãy Cauchy vào không gian.

Định nghĩa: Hoàn thành Không gian Có Chuẩn

- Một không gian có chuẩn X được **hoàn thành** bằng cách nhúng nó vào một không gian lớn hơn X^* (gọi là **không gian hoàn thành**), sao cho:
  - X là một tập con dày đặc trong X^* (tức là mọi điểm trong X^* đều có thể xấp xỉ bởi các điểm trong X),
  - X^* là không gian Banach (đầy đủ).
- Từ lý thuyết không gian metric (1.6-2), mọi không gian metric đều có thể hoàn thành. Với không gian có chuẩn, ta cần đảm bảo các phép toán vectơ và chuẩn được mở rộng một cách tự nhiên sang không gian hoàn thành.

Định lý 2.3-2: Hoàn thành Không gian Có Chuẩn

Định lý: Mọi không gian có chuẩn X đều có một không gian hoàn thành X^* là không gian Banach, trong đó:

- Các phép toán vectơ (cộng và nhân với số vô hướng) và chuẩn của X được mở rộng sang X^*,
- X là tập con dày đặc trong X^*,
- X^* là duy nhất (đồng đẳng với mọi không gian Banach khác chứa X dày đặc).

Giải thích trực quan: Định lý này nói rằng bất kỳ không gian có chuẩn nào cũng có thể "được vá" thành một không gian Banach. Các quy tắc chơi (cộng, nhân, chuẩn) trong không gian cũ vẫn áp dụng được trong không gian mới, và không gian cũ "gần như lấp đầy" không gian mới.

Chứng minh cơ bản (tóm tắt):

- Từ lý thuyết metric (1.6-2), ta xây dựng X^* từ các lớp tương đương của dãy Cauchy trong X.
- Định nghĩa cộng: $[x_n] + [y_n] = [x_n + y_n]$, nhân: $\alpha[x_n] = [\alpha x_n]$, chuẩn: $\|[x_n]\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|$.
- Kiểm tra X^* đầy đủ và chứa X dày đặc (mỗi $x \in X$ tương ứng với dãy tĩnh $[x, x, \ldots]$).

Ví dụ minh họa:

- Không gian X là các hàm liên tục trên $[0, 1]$ với chuẩn $\|x\| = (\int_0^1 x(t)^2 dt)^{1/2}$ (không đầy đủ, xem 2.2-7).
- Hoàn thành của nó là $L^2[0, 1]$, gồm các hàm bình phương khả tích, là không gian Banach.
- Ví dụ: Dãy $x_n(t)$ (như trong 1.5-9) hội tụ trong $L^2[0, 1]$ đến hàm gián đoạn, không thuộc X, nhưng thuộc X^*.

Ví dụ cụ thể: Không gian $L^p[a, b]$

- Không gian X gồm các hàm liên tục trên $[a, b]$ với chuẩn $\|x\|_p = (\int_a^b |x(t)|^p dt)^{1/p}$ $(p \geq 1)$ không đầy đủ.
- Hoàn thành của nó là $L^p[a, b]$, một không gian Banach.
- Nếu dùng tích phân Lebesgue, $L^p[a, b]$ gồm các lớp tương đương của hàm khả tích p-lũy thừa.

Ví dụ:

- Trên $[0, 1]$, $p = 1$, chuẩn $\|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)| dt$. Dãy $x_n(t)$ tăng từ 0 đến 1 không hội tụ trong X, nhưng hội tụ trong $L^1[0, 1]$ đến hàm bậc thang.

Cơ sở Schauder (Schauder Basis)

Một tập $\{e_k\}$ trong không gian có chuẩn X được gọi là **cơ sở Schauder** nếu mỗi $x \in X$ có biểu diễn duy nhất:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$$

với các hệ số $\alpha_k \in K$, và tổng hội tụ theo chuẩn của X.

Ý nghĩa: Cơ sở Schauder giống như "khung xương" của không gian, cho phép biểu diễn mọi vectơ bằng cách "xếp chồng" các vectơ cơ sở.

Ví dụ:

- Trong l^1 (các dãy tổng tuyệt đối hội tụ), cơ sở Schauder là $\{e_k\}$, với $e_k = (0, \ldots, 1, 0, \ldots)$ (1 ở vị trí thứ k).
- Với $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$, ta có $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e_k$, tổng hội tụ vì $\sum \frac{1}{k} |e_k| = \sum \frac{1}{k} < \infty$.

Kết luận

Phần 2.3 giải thích cách "hoàn thiện" một không gian có chuẩn thành không gian Banach, đảm bảo mọi dãy Cauchy đều có giới hạn. Các ví dụ như $L^p[a, b]$ và khái niệm cơ sở Schauder cho thấy sự phong phú của lý thuyết này trong phân tích hàm.

2.4 Không gian Có Chuẩn Hữu Hạn Chiều

Khái niệm cơ bản: Tại sao nghiên cứu không gian hữu hạn chiều?

Trong phần 2.1, chúng ta đã biết không gian vectơ hữu hạn chiều là những không gian có số chiều cố định n, tức là có một tập cơ sở gồm n vectơ độc lập tuyến tính. Khi thêm chuẩn vào (như trong 2.2), không gian có chuẩn hữu hạn chiều trở nên đặc biệt vì chúng đơn giản hơn so với không gian vô hạn chiều, và có nhiều tính chất "đẹp" giúp dễ nghiên cứu, đặc biệt trong đại số tuyến tính và phân tích hàm.

Ý nghĩa trực quan: Hãy nghĩ không gian hữu hạn chiều như một "phòng nhỏ" với số hướng cố định (ví dụ R^3 có 3 hướng: dài, rộng, cao). Khi có chuẩn, ta có thể đo "kích thước" của mọi thứ trong phòng, và vì phòng nhỏ, mọi thứ đều "dễ kiểm soát".

Tính chất quan trọng: Mọi không gian có chuẩn hữu hạn chiều là Banach

Một kết quả cơ bản trong lý thuyết không gian có chuẩn hữu hạn chiều là:

Định lý: Mọi không gian có chuẩn hữu hạn chiều đều là không gian Banach (đầy đủ).

Giải thích trực quan: Trong một không gian nhỏ với số chiều cố định, mọi dãy vectơ "lượn lờ" (dãy Cauchy) cuối cùng phải "đứng yên" ở một điểm trong không gian, vì không có chỗ nào để "trốn" ra ngoài. Điều này khác với không gian vô hạn chiều, nơi các dãy có thể hội tụ đến điểm ngoài không gian ban đầu (như trong 2.2-7).

Chứng minh tóm tắt:

- Giả sử X là không gian có chuẩn hữu hạn chiều, $\dim X = n$, với cơ sở $\{e_1, \ldots, e_n\}$.
- Mỗi $x \in X$ biểu diễn duy nhất là $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$.
- Dãy Cauchy (x_m) trong X, với $x_m = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^{(m)} e_i$, có $\|x_m - x_k\| \to 0$ khi $m, k \to \infty$.
- Vì chuẩn xác định độ đo, các tọa độ $\xi_i^{(m)}$ cũng là dãy Cauchy trong R hoặc C (đầy đủ), nên $\xi_i^{(m)} \to \xi_i$.
- Do đó, $x_m \to x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \in X$, chứng tỏ X đầy đủ.

Ví dụ minh họa:

- Trong R^2 với chuẩn $\|x\| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$, dãy $x_n = (1 + \frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n})$ là Cauchy (khoảng cách giữa các phần tử $\to 0$). Nó hội tụ đến $(1, 2) \in R^2$, nên R^2 đầy đủ.

Tính chất: Mọi chuẩn trên không gian hữu hạn chiều là tương đương

Định lý: Trong một không gian vectơ hữu hạn chiều X, mọi chuẩn đều **tương đương**, nghĩa là với hai chuẩn bất kỳ $\|\cdot\|_1$ và $\|\cdot\|_2$, tồn tại các hằng số $m, M > 0$ sao cho:

$$m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1 \quad \forall x \in X.$$

Giải thích trực quan: Dù bạn dùng "thước đo" nào để tính độ dài vectơ trong một phòng nhỏ, các thước đo này đều "tương tự" nhau – một thước có thể phóng to hoặc thu nhỏ so với thước khác, nhưng thứ tự "lớn nhỏ" không thay đổi.

Ví dụ minh họa:

- Trong R^2:
  - Chuẩn Euclid: $\|x\|_2 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$,
  - Chuẩn tối đa: $\|x\|_\infty = \max(|\xi_1|, |\xi_2|)$.
- Với $x = (1, 2)$:
  - $\|x\|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \approx 2.24$,
  - $\|x\|_\infty = \max(1, 2) = 2$.
- Kiểm tra: $\sqrt{2}\|x\|_\infty \geq \|x\|_2 \geq \|x\|_\infty$ (vì $\sqrt{2} \cdot 2 \approx 2.83 > 2.24 > 2$), phù hợp với định lý.

Hệ quả: Liên tục và Bounded trong không gian hữu hạn chiều

- Trong không gian hữu hạn chiều, mọi ánh xạ tuyến tính đều **liên tục** và **bị chặn** (bounded). Điều này sẽ được làm rõ hơn ở Section 2.7, nhưng ở đây ta có thể hiểu đơn giản:
  - Một ánh xạ tuyến tính $T : X \to Y$ (với X, Y hữu hạn chiều) không thể "phóng đại" vectơ quá mức mà không có giới hạn, nhờ kích thước hữu hạn của không gian.

Ví dụ:

- Trong R^2, ánh xạ $T(x_1, x_2) = (2x_1, 3x_2)$:
  - Với chuẩn Euclid, $\|T(x)\|_2 = \sqrt{(2x_1)^2 + (3x_2)^2} \leq 3\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 3\|x\|_2$, nên T bị chặn (hằng số $M = 3$).

So sánh với không gian vô hạn chiều

Không gian hữu hạn chiều đơn giản hơn vô hạn chiều vì:

- Chúng luôn đầy đủ (Banach),
- Mọi chuẩn tương đương,
- Các tính chất như liên tục dễ kiểm soát hơn.

Ví dụ, trong $C[0, 1]$ (vô hạn chiều), chuẩn $\|x\| = \int_0^1 |x(t)|dt$ không đầy đủ, nhưng trong R^n, mọi chuẩn đều dẫn đến không gian đầy đủ.

Kết luận

Phần 2.4 nhấn mạnh rằng không gian có chuẩn hữu hạn chiều có những tính chất "đẹp" như đầy đủ và tương đương giữa các chuẩn, làm nền tảng cho việc nghiên cứu sâu hơn về ánh xạ tuyến tính (sẽ được đề cập ở các phần sau). Các ví dụ trong R^2 minh họa rõ ràng cách các khái niệm này hoạt động trong thực tế.

2.5 Không gian định chuẩn hữu hạn chiều (Finite Dimensional Normed Spaces)

Tổng quan trực quan

Không gian định chuẩn hữu hạn chiều là những không gian vectơ mà số chiều của nó là một số hữu hạn (ví dụ: 1 chiều, 2 chiều, 3 chiều, v.v.). Trong các không gian này, chúng ta có thể "đo" độ dài của các vectơ bằng một hàm gọi là **chuẩn (norm)**, và điều thú vị là mọi không gian định chuẩn hữu hạn chiều đều là **hoàn chỉnh (complete)**, tức là mọi dãy Cauchy trong không gian đó đều hội tụ về một điểm trong chính không gian đó. Điều này làm cho các không gian hữu hạn chiều trở nên "đơn giản hơn" so với không gian vô hạn chiều (chẳng hạn không gian hàm số).

Hãy tưởng tượng không gian hữu hạn chiều như một tờ giấy phẳng (2 chiều) hoặc một khối hộp (3 chiều): bạn luôn có thể vẽ một đường hoặc đặt một điểm bất kỳ trong không gian đó mà không cần lo lắng về việc "thoát ra ngoài" hay "không tìm được đích đến". Đây chính là đặc điểm "hoàn chỉnh" mà chúng ta sẽ khám phá.

Các khái niệm chính

1. **Không gian định chuẩn (Normed Space):** Là một không gian vectơ mà trên đó có định nghĩa một chuẩn (norm), tức là một cách đo "độ dài" của vectơ. Chuẩn phải thỏa mãn các tính chất như không âm ($\|x\| \geq 0$), chỉ bằng 0 khi vectơ là vectơ 0 ($\|x\| = 0 \iff x = 0$), nhân với số thì chuẩn tỷ lệ với giá trị tuyệt đối của số đó ($\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$), và bất đẳng thức tam giác ($\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$).
2. **Không gian Banach (Banach Space):** Là không gian định chuẩn mà "hoàn chỉnh" theo nghĩa mọi dãy Cauchy (dãy mà các phần tử càng ngày càng gần nhau) đều hội tụ về một điểm trong không gian.
3. **Hữu hạn chiều:** Số chiều là một số hữu hạn, nghĩa là bạn có thể biểu diễn mọi vectơ trong không gian bằng một tập hợp cơ sở (basis) có số phần tử hữu hạn.

Định lý 2.5-1: Mọi không gian định chuẩn hữu hạn chiều đều là không gian Banach

Phát biểu: Nếu X là một không gian định chuẩn hữu hạn chiều, thì X là một không gian Banach (tức là hoàn chỉnh).

Giải thích trực quan:

- Trong không gian hữu hạn chiều, bạn có một số lượng cố định các "hướng" (chiều) để di chuyển. Điều này giống như bạn đang chơi trong một sân bóng nhỏ: dù bạn chạy theo bất kỳ cách nào, bạn luôn ở trong sân.
- Một dãy Cauchy là một dãy mà các điểm trong dãy càng ngày càng gần nhau (khoảng cách $\|x_m - x_n\| \to 0$ khi $m, n \to \infty$). Trong không gian hữu hạn chiều, vì "không gian bị giới hạn" bởi số chiều cố định, dãy này không thể "trốn thoát" ra ngoài mà phải hội tụ về một điểm trong không gian.

- Điều này khác với không gian vô hạn chiều (như không gian hàm số), nơi một dãy có thể "gần nhau" nhưng lại hội tụ về một điểm không thuộc không gian ban đầu.

Chứng minh (tóm tắt):

- Chọn một cơ sở $ {e_1, e_2, \ldots, e_n} $ cho X (với n hữu hạn).
- Mọi vectơ $x \in X$ có thể viết dưới dạng $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n$, trong đó ξ_j là các số vô hướng (scalar).
- Lấy một dãy Cauchy (x_m) trong X, với $x_m = \sum_{j=1}^n \xi_{mj} e_j$. Vì (x_m) là dãy Cauchy, khoảng cách $\|x_m - x_k\|$ nhỏ dần khi $m, k \to \infty$.
- Chuẩn được định nghĩa sao cho:

$$\|x_m - x_k\| = \left\| \sum_{j=1}^n (\xi_{mj} - \xi_{kj}) e_j \right\|$$

  liên quan đến các tọa độ $\xi_{mj} - \xi_{kj}$. Trong không gian hữu hạn chiều, các tọa độ ξ_{mj} cũng tạo thành dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$ (là các không gian hoàn chỉnh), nên $\xi_{mj} \to \xi_j$.
- Đặt $x = \sum_{j=1}^n \xi_j e_j$. Vì X đóng dưới phép cộng vectơ và nhân vô hướng, $x \in X$, và $x_m \to x$ (tức $\|x_m - x\| \to 0$). Vậy X hoàn chỉnh.

Ví dụ minh họa:

- Xét không gian $\mathbb{R}^2$ (mặt phẳng 2 chiều) với chuẩn Euclid: $\|x\| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$, trong đó $x = (\xi_1, \xi_2)$.
- Lấy dãy $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n^2}\right)$. Khi n tăng, các điểm này gần nhau hơn:
  - $x_1 = (2, 1)$, $x_2 = (1.5, 0.75)$, $x_3 = (1.33, 0.89)$, v.v.
  - Khoảng cách:

$$\|x_n - x_m\| = \sqrt{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right)^2 + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)^2} \to 0 \text{ khi } n, m \to \infty$$

- Dãy này hội tụ về $x = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$. Vì $\mathbb{R}^2$ hữu hạn chiều (2 chiều), mọi dãy Cauchy như vậy đều hội tụ trong $\mathbb{R}^2$, nên $\mathbb{R}^2$ là không gian Banach.

Định lý 2.5-2: Chuẩn tương đương trong không gian hữu hạn chiều

Phát biểu: Trong một không gian vectơ hữu hạn chiều X, mọi chuẩn đều tương đương, tức là nếu $\|\cdot\|_1$ và $\|\cdot\|_2$ là hai chuẩn trên X, thì tồn tại các hằng số $m, M > 0$ sao cho:

$$m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1$$

với mọi $x \in X$.

Giải thích trực quan:

- Trong không gian hữu hạn chiều, cách bạn "đo độ dài" (chuẩn) không thay đổi bản chất của không gian. Dù bạn dùng thước thẳng, thước dây hay thước kẹp, bạn vẫn đo được cùng một vật thể, chỉ khác tỷ lệ.
- "Tương đương" nghĩa là hai chuẩn có thể so sánh được: một chuẩn không bao giờ lớn hơn hoặc nhỏ hơn chuẩn kia quá nhiều (giới hạn bởi m và M)). Ví dụ, nếu một chuẩn đo vectơ dài gấp đôi chuẩn kia, chúng vẫn tương đương vì tỷ lệ cố định.

Chứng minh (tóm tắt):

- Lấy cơ sở $ {e_1, \ldots, e_n} $ cho X. Với $x = \sum \xi_j e_j$, chuẩn $\|x\|_2$ được so sánh với $\|x\|_1$.
- Chuẩn là hàm liên tục, và trên tập đơn vị (unit sphere) $\{x : \|x\|_1 = 1\}$ (là tập compact trong hữu hạn chiều), $\|x\|_2$ đạt giá trị min m và max M.
- Do đó:

$$m \leq \frac{\|x\|_2}{\|x\|_1} \leq M$$

  hay:

$$m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1$$

Ví dụ minh họa:

- Xét $\mathbb{R}^2$ với hai chuẩn:
  - Chuẩn Euclid: $\|x\|_2 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$.
  - Chuẩn tối đa: $\|x\|_\infty = \max(|\xi_1|, |\xi_2|)$.

- Với $x = (1, 2)$:
  - $\|x\|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \approx 2.24$.
  - $\|x\|_\infty = \max(1, 2) = 2$.
- Ta có:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{2}\|x\|_\infty$$

(vì $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \leq \sqrt{2}\max(|\xi_1|, |\xi_2|)$). Ở đây, $m = 1$, $M = \sqrt{2}$. Hai chuẩn này tương đương.

Kết luận

Không gian định chuẩn hữu hạn chiều có hai đặc điểm quan trọng: (1) chúng luôn hoàn chỉnh (Banach), và (2) mọi chuẩn đều tương đương. Điều này làm cho chúng dễ nghiên cứu hơn so với không gian vô hạn chiều, nơi các tính chất này không luôn đúng.

2.6 Các ánh xạ tuyến tính (Linear Operators)

Tổng quan trực quan

Trong mục này, chúng ta sẽ tìm hiểu về **các ánh xạ tuyến tính (linear operators)** – những "hàm" đặc biệt chuyển các vectơ từ một không gian định chuẩn này sang một không gian định chuẩn khác, nhưng giữ nguyên cấu trúc tuyến tính (tức là phép cộng và nhân vô hướng). Hãy tưởng tượng một ánh xạ tuyến tính như một "máy biến hình": bạn đưa vào một vectơ, nó biến đổi vectơ đó thành một vectơ khác theo một quy tắc cố định, nhưng vẫn giữ được "hình dáng tuyến tính" của không gian.

Chúng ta sẽ khám phá cách định nghĩa các ánh xạ này, tính chất của chúng (như liên tục, bị chặn), và vai trò quan trọng của chúng trong việc kết nối các không gian vectơ. Đặc biệt, trong không gian hữu hạn chiều, các ánh xạ tuyến tính có những đặc điểm rất thú vị mà chúng ta sẽ thấy qua các định lý.

Các khái niệm chính

1. **Ánh xạ tuyến tính (Linear Operator):** Là một hàm $T : X \to Y$ giữa hai không gian vectơ X và Y, thỏa mãn:
   - $T(x + y) = Tx + Ty$ (bảo toàn phép cộng).
   - $T(\alpha x) = \alpha Tx$ (bảo toàn nhân vô hướng), với α là số vô hướng.
2. **Không gian định chuẩn:** X và Y thường được trang bị chuẩn ($\|\cdot\|_X$ và $\|\cdot\|_Y$), cho phép đo khoảng cách và độ dài vectơ.
3. **Liên tục (Continuity):** Ánh xạ T liên tục nếu $x_n \to x$ trong X thì $Tx_n \to Tx$ trong Y (khoảng cách $\|Tx_n - Tx\|_Y \to 0$).
4. **Bị chặn (Boundedness):** T bị chặn nếu tồn tại hằng số M sao cho $\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X$ với mọi $x \in X$.

Định lý 2.6-1: Tính liên tục của ánh xạ tuyến tính trong không gian hữu hạn chiều

Phát biểu: Nếu X là một không gian định chuẩn hữu hạn chiều và Y là một không gian định chuẩn bất kỳ, thì mọi ánh xạ tuyến tính $T : X \to Y$ đều liên tục.

Giải thích trực quan:

- Trong không gian hữu hạn chiều, mọi thứ đều "gọn gàng" vì số chiều cố định. Nếu bạn di chuyển một chút trong X (vectơ x thay đổi nhỏ), thì hình ảnh của nó qua T trong Y cũng chỉ thay đổi một chút. Điều này giống như khi bạn kéo một sợi dây ngắn: đầu kia không thể chạy xa được.
- Tính liên tục nghĩa là không có "đứt gãy" – không có trường hợp vectơ thay đổi tí xíu mà hình ảnh của nó nhảy vọt đi đâu đó xa xôi.

Chứng minh (tóm tắt):

- Vì X hữu hạn chiều, chọn cơ sở $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Mọi $x \in X$ viết được là $x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$.
- Chuẩn của x là $\|x\|_X$, và vì mọi chuẩn trong hữu hạn chiều đều tương đương (Định lý 2.5-2), ta có thể dùng chuẩn $\sum |\xi_j|$ để đơn giản hóa.
- Với T tuyến tính, ta có:

$$Tx = T\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j T e_j$$

- Chuẩn của Tx trong Y là:

$$\|Tx\|_Y = \left\|\sum_{j=1}^{n} \xi_j T e_j\right\|_Y \leq \sum_{j=1}^{n} |\xi_j| \|Te_j\|_Y$$

- Đặt $M = \max_j \|Te_j\|_Y$ (tối đa trên tập hữu hạn $\{Te_1, \ldots, Te_n\}$), ta được:

$$\|Tx\|_Y \leq M \sum_{j=1}^{n} |\xi_j| \leq M' \|x\|_X$$

  (M' là hằng số phụ thuộc chuẩn tương đương). Vậy T bị chặn, và ánh xạ tuyến tính bị chặn thì liên tục (sẽ chứng minh sau ở 2.7).

Ví dụ minh họa:

- Xét $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$ (hữu hạn chiều), với chuẩn Euclid trên $\mathbb{R}^2$: $\|x\|_X = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ và chuẩn tuyệt đối trên $\mathbb{R}$: $\|y\|_Y = |y|$.
- Định nghĩa $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bằng $T(x) = \xi_1 + 2\xi_2$, với $x = (\xi_1, \xi_2)$.
- Kiểm tra liên tục:
  - Lấy dãy $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}, 2\right) \to x = (1, 2)$ khi $n \to \infty$ (vì $\|x_n - x\|_X = \frac{1}{n} \to 0$).
  - $T(x_n) = (1 + \frac{1}{n}) + 2 \cdot 2 = 5 + \frac{1}{n}$, $T(x) = 1 + 2 \cdot 2 = 5$.
  - Khoảng cách: $|T(x_n) - T(x)| = \left|5 + \frac{1}{n} - 5\right| = \frac{1}{n} \to 0$.
- Vậy T liên tục, đúng như định lý dự đoán.

Định lý 2.6-10: Tính đơn ánh của ánh xạ tuyến tính (không chính thức trong 2.6, nhưng liên quan)

Phát biểu (dự kiến từ ngữ cảnh): Nếu $T : X \to Y$ là ánh xạ tuyến tính và $Tx = 0$ chỉ khi $x = 0$, thì T là đơn ánh (injective), và nếu X hữu hạn chiều, $\dim X = \dim \mathscr{R}(T)$ (với $\mathscr{R}(T)$ là range của T).

Giải thích trực quan:

- Nếu $Tx = 0$ chỉ khi $x = 0$, thì không có hai vectơ khác nhau trong X bị ánh xạ về cùng một điểm trong Y (trừ 0). Điều này giống như một máy photocopy không làm nhòe: mỗi bản gốc cho một bản sao duy nhất.
- Trong hữu hạn chiều, số chiều của không gian đầu ra (range) sẽ khớp với số chiều của X nếu T đơn ánh.

Chứng minh (tóm tắt):

- Nếu $Tx_1 = Tx_2$, thì $T(x_1 - x_2) = 0$, và vì $Tx = 0 \implies x = 0$, ta có $x_1 - x_2 = 0$, tức $x_1 = x_2$. Vậy T đơn ánh.
- Với X hữu hạn chiều, $\dim X = n$, và $\dim \mathcal{N}(T) = 0$ (vì $Tx = 0$ chỉ khi $x = 0$). Theo định lý rank-nullity: $\dim X = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathscr{R}(T)$, nên $\dim \mathscr{R}(T) = n$.

Ví dụ minh họa:

- Xét $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1, \xi_1 + \xi_2)$.
- Kiểm tra đơn ánh:
  - Nếu $Tx = 0$, tức $(\xi_1, \xi_1 + \xi_2) = (0, 0)$, thì $\xi_1 = 0$, $\xi_1 + \xi_2 = 0 \implies \xi_2 = 0$. Vậy $x = (0, 0)$.
- T đơn ánh. Range $\mathscr{R}(T)$ là toàn $\mathbb{R}^2$ (vì mọi (y_1, y_2) có thể đạt được bằng cách chọn $\xi_1 = y_1$, $\xi_2 = y_2 - y_1$), và $\dim \mathscr{R}(T) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$.

Một số ghi chú từ 2.6

- **Không gian ảnh và không gian hạch (Range and Null Space):**
  - Không gian hạch $\mathcal{N}(T) = \{x \in X : Tx = 0\}$ là không gian con của X.
  - Không gian ảnh $\mathscr{R}(T) = \{Tx : x \in X\}$ là không gian con của Y.
- **Ví dụ cơ bản:**
  - $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_1, \xi_2)$:
    - $\mathcal{N}(T) = \{(0, 0, \xi_3)\}$ (1 chiều).
    - $\mathscr{R}(T) = \mathbb{R}^2$ (2 chiều).

Kết luận

Mục 2.6 giới thiệu ánh xạ tuyến tính như cầu nối giữa các không gian định chuẩn, với tính chất nổi bật là liên tục trong hữu hạn chiều. Đây là nền tảng để nghiên cứu các toán tử bị chặn (bounded operators) ở mục tiếp theo (2.7).

2.7 Toán tử tuyến tính bị chặn (Bounded Linear Operators)

Tổng quan trực quan

Mục 2.7 tập trung vào **toán tử tuyến tính bị chặn (bounded linear operators)** – một loại đặc biệt của ánh xạ tuyến tính mà "kích thước" của hình ảnh qua toán tử không tăng quá nhanh so với vectơ đầu vào. Hãy hình dung toán tử này như một chiếc máy nén: dù bạn đưa vào một vectơ lớn hay nhỏ, nó sẽ "nén" hoặc "phóng đại" vectơ đó theo một tỷ lệ cố định, không bao giờ để kết quả "nổ tung" ngoài tầm kiểm soát.

Chúng ta sẽ khám phá định nghĩa "bị chặn", mối liên hệ giữa tính bị chặn và tính liên tục, và một số ví dụ thực tế để thấy chúng hoạt động như thế nào trong các không gian định chuẩn.

Các khái niệm chính

1. **Toán tử tuyến tính (Linear Operator):** Như ở 2.6, $T : X \to Y$ là tuyến tính nếu $T(x+y) = Tx + Ty$ và $T(\alpha x) = \alpha Tx$, với X, Y là không gian định chuẩn.
2. **Bị chặn (Boundedness):** T bị chặn nếu tồn tại hằng số $M \geq 0$ sao cho:

$$\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X$$

   với mọi $x \in X$. Hằng số M nhỏ nhất thỏa mãn điều này được gọi là **chuẩn của** T, ký hiệu $\|T\|$.
3. **Chuẩn của toán tử:**

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X = 1}} \|Tx\|_Y$$

   Đây là "độ phóng đại tối đa" mà T có thể tạo ra.
4. **Liên tục (Continuity):** T liên tục nếu $x_n \to x$ thì $Tx_n \to Tx$.

Định lý 2.7-1: Tính bị chặn của toán tử tuyến tính

Phát biểu: Một toán tử tuyến tính $T : X \to Y$ giữa hai không gian định chuẩn X và Y là bị chặn nếu tồn tại $M \geq 0$ sao cho:

$$\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X$$

với mọi $x \in X$.

Giải thích trực quan:

- "Bị chặn" nghĩa là T không làm vectơ "phình to" quá mức. Nếu bạn đưa vào một vectơ có độ dài 1, thì độ dài của hình ảnh qua T sẽ không vượt quá một giới hạn cố định M. Điều này giống như một chiếc máy ảnh có zoom cố định: dù bạn chụp gần hay xa, kích thước ảnh luôn nằm trong tầm kiểm soát.
- Chuẩn $\|T\|$ chính là "độ zoom tối đa" của máy ảnh đó.

Ví dụ minh họa:

- Xét $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $T(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 + \xi_2$, với chuẩn Euclid trên $\mathbb{R}^2$: $\|x\|_X = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ và chuẩn tuyệt đối trên $\mathbb{R}$: $\|y\|_Y = |y|$.
- Kiểm tra bị chặn:
  - Với $x = (\xi_1, \xi_2)$, ta có:

$$\|Tx\|_Y = |\xi_1 + \xi_2| \leq |\xi_1| + |\xi_2|$$

  - Dùng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz: $|\xi_1 + \xi_2| \leq \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}\|x\|_X$.
  - Vậy $\|Tx\|_Y \leq \sqrt{2}\|x\|_X$, với $M = \sqrt{2}$. T bị chặn.
- Chuẩn của T:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X=1} |\xi_1 + \xi_2|$$

Đặt $x = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, thì $\|x\|_X = 1$ và $|Tx| = \left|\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{2}$, đạt tối đa. Vậy $\|T\| = \sqrt{2}$.

Định lý 2.7-9: Liên tục tương đương với bị chặn

Phát biểu: Một toán tử tuyến tính $T : X \to Y$ giữa hai không gian định chuẩn là liên tục nếu và chỉ nếu T bị chặn.

Giải thích trực quan:

- Nếu T bị chặn, nghĩa là nó không "phóng đại" quá mức, thì khi bạn di chuyển x một chút, Tx cũng chỉ thay đổi một chút – điều này chính là liên tục.
- Ngược lại, nếu T liên tục, nó không thể "nhảy vọt" quá xa khi x thay đổi nhỏ, nên phải có một giới hạn cho độ lớn của Tx. Hai tính chất này như hai mặt của một đồng xu.

Chứng minh (tóm tắt):

- (T bị chặn $\implies$ liên tục): Nếu $\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X$, thì với $x_n \to x$:

$$\|Tx_n - Tx\|_Y = \|T(x_n - x)\|_Y \leq M\|x_n - x\|_X \to 0$$

  Vậy T liên tục.
- (T liên tục $\implies$ bị chặn): Giả sử T không bị chặn, tức $\frac{\|Tx_n\|_Y}{\|x_n\|_X} \to \infty$ với một dãy $x_n \neq 0$. Đặt $z_n = \frac{x_n}{\|x_n\|_X}$, thì $\|z_n\|_X = 1$. Nếu T liên tục tại 0, thì $T(0) = 0$, và $z_n \to 0$ (giả sử X hữu hạn chiều) phải kéo theo $Tz_n \to 0$, nhưng $\|Tz_n\|_Y = \frac{\|Tx_n\|_Y}{\|x_n\|_X} \to \infty$, mâu thuẫn. Vậy T phải bị chặn.

Ví dụ minh họa:

- Tiếp tục với $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $T(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 + \xi_2$.
- Đã chứng minh T bị chặn với $\|T\| = \sqrt{2}$. Kiểm tra liên tục:
  - Lấy $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}, 1\right) \to x = (1, 1)$.
  - $Tx_n = (1 + \frac{1}{n}) + 1 = 2 + \frac{1}{n}$, $Tx = 1 + 1 = 2$.
  - $|Tx_n - Tx| = \left|2 + \frac{1}{n} - 2\right| = \frac{1}{n} \to 0$.
- T liên tục, khớp với việc T bị chặn.

Một số ví dụ bổ sung từ 2.7

1. **Toán tử nhân (Multiplication Operator):**
   - $X = C[a, b]$ (không gian các hàm liên tục trên $[a, b]$), chuẩn $\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|$.
   - $Tx(t) = m(t)x(t)$, với $m(t)$ liên tục trên $[a, b]$.
   - $\|Tx\| = \max |m(t)x(t)| \leq \max |m(t)| \cdot \max |x(t)| = \|m\|_\infty \|x\|$.
   - T bị chặn với $\|T\| = \|m\|_\infty$.
2. **Toán tử vi phân (Differential Operator):**
   - $X = C^1[a, b]$ (hàm khả vi liên tục), chuẩn $\|x\| = \max |x(t)| + \max |x'(t)|$.
   - $Tx = x'$. Với $x_n(t) = \frac{1}{n}\sin(n^2 t)$, thì $\|x_n\| \to 0$ nhưng $\|Tx_n\| = \max |n \cos(n^2 t)| = n \to \infty$. T không bị chặn.

Kết luận

Mục 2.7 nhấn mạnh rằng toán tử tuyến tính bị chặn là công cụ quan trọng trong phân tích hàm, với tính bị chặn và liên tục là hai đặc trưng gắn bó chặt chẽ. Trong hữu hạn chiều, mọi toán tử tuyến tính đều bị chặn (từ 2.6), nhưng trong vô hạn chiều, điều này không luôn đúng (như toán tử vi phân).

2.8 Không gian đối ngẫu (Dual Spaces)

Tổng quan trực quan

Mục 2.8 giới thiệu **không gian đối ngẫu (dual space)** – một khái niệm trừu tượng nhưng rất mạnh mẽ trong phân tích hàm. Hãy tưởng tượng không gian đối ngẫu như một "gương chiếu" của không gian ban đầu: nó chứa tất cả các cách bạn có thể "đo" hoặc "đánh giá" các vectơ trong không gian đó thông qua các hàm tuyến tính liên tục. Nếu không gian gốc là một căn phòng, thì không gian đối ngẫu là tập hợp tất cả các "thước đo" bạn dùng để đo chiều dài, chiều rộng, hay chiều cao của nó.

Chúng ta sẽ tìm hiểu cách định nghĩa không gian đối ngẫu, chuẩn của nó, và cách nó liên kết với không gian ban đầu, đặc biệt trong bối cảnh không gian định chuẩn.

Các khái niệm chính

1. **Không gian đối ngẫu (X^*):** Với X là một không gian định chuẩn, không gian đối ngẫu X^* là tập hợp tất cả các ánh xạ tuyến tính liên tục (còn gọi là **phiếm hàm tuyến tính - linear functionals**) từ X vào trường vô hướng $\mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$ (tùy X thực hay phức).
2. **Phiếm hàm tuyến tính:** Một hàm $f : X \to \mathbb{R}$ (hoặc $\mathbb{C}$) là tuyến tính nếu:
   - $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
   - $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, với α là số vô hướng.
3. **Chuẩn của phiếm hàm:** Với $f \in X^*$, chuẩn được định nghĩa là:

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X = 1}} |f(x)|$$

   Đây là "độ lớn tối đa" mà f có thể đạt được khi áp dụng lên các vectơ đơn vị.
4. **Liên tục và bị chặn:** Từ Định lý 2.7-9, f liên tục nếu và chỉ nếu f bị chặn, tức $|f(x)| \le M\|x\|_X$ với một hằng số M, và $\|f\|$ chính là M nhỏ nhất.

Định lý 2.8-1: Không gian đối ngẫu là không gian Banach

Phát biểu: Nếu X là một không gian định chuẩn (không nhất thiết hoàn chỉnh), thì không gian đối ngẫu X^* với chuẩn $\|f\| = \sup_{\|x\|_X=1} |f(x)|$ là một không gian Banach (tức là hoàn chỉnh).

Giải thích trực quan:

- X^* chứa tất cả các phiếm hàm tuyến tính liên tục, và dù X có thể không hoàn chỉnh (như không gian hàm chưa đóng), thì X^* luôn "ổn định" và "đầy đủ". Điều này giống như dù căn phòng của bạn lộn xộn (không hoàn chỉnh), các thước đo bạn dùng để đo nó vẫn tạo thành một bộ công cụ hoàn hảo.
- Hoàn chỉnh nghĩa là mọi dãy Cauchy trong X^* (các phiếm hàm "gần nhau") đều hội tụ về một phiếm hàm trong X^*.

Chứng minh (tóm tắt):

- Xét dãy Cauchy (f_n) trong X^*, tức $\|f_n - f_m\| \to 0$ khi $n, m \to \infty$.
- Với mỗi $x \in X$, $|f_n(x) - f_m(x)| = |(f_n - f_m)(x)| \le \|f_n - f_m\|\|x\|_X \to 0$, nên $(f_n(x))$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$ (là hoàn chỉnh). Do đó, $f_n(x) \to f(x)$ cho một hàm f.
- Kiểm tra f tuyến tính:
  - $f(x + y) = \lim f_n(x + y) = \lim[f_n(x) + f_n(y)] = f(x) + f(y)$.
  - $f(\alpha x) = \lim f_n(\alpha x) = \lim \alpha f_n(x) = \alpha f(x)$.
- Kiểm tra bị chặn: Vì (f_n) bị chặn (dãy Cauchy trong không gian chuẩn luôn bị chặn), tồn tại M sao cho $\|f_n\| \le M$, và $|f(x)| = \lim |f_n(x)| \le M\|x\|_X$, nên $f \in X^*$.
- $\|f_n - f\| \to 0$, vậy X^* hoàn chỉnh.

Ví dụ minh họa:

- Xét $X = \mathbb{R}^2$ với chuẩn Euclid $\|x\|_X = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$. X^* là tập các phiếm hàm $f(x) = a\xi_1 + b\xi_2$.
- Lấy dãy $f_n(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\xi_1 + 2\xi_2$.
- Chuẩn: $\|f_n\| = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + 2^2} \to \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$.
- $f_n \to f$, với $f(x) = \xi_1 + 2\xi_2$. Dãy (f_n) hội tụ trong X^* về f, khớp với tính hoàn chỉnh.

Định lý 2.8-3: Biểu diễn phiếm hàm trong không gian hữu hạn chiều

Phát biểu: Nếu X là không gian định chuẩn hữu hạn chiều với cơ sở $\{e_1, \ldots, e_n\}$, thì mọi $f \in X^*$ có dạng:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j f(e_j)$$

với $x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$, và f được xác định duy nhất bởi các giá trị $f(e_j)$.

Giải thích trực quan:

- Trong hữu hạn chiều, mỗi phiếm hàm f giống như một "máy tính" chỉ cần biết giá trị tại các vectơ cơ sở để "tính" giá trị tại mọi điểm khác. Điều này giống như bạn chỉ cần đo chiều dài và chiều rộng của một tờ giấy (cơ sở) để biết diện tích của nó.
- Các $f(e_j)$ là "hệ số" cố định, từ đó f được xây dựng tuyến tính.

Chứng minh (tóm tắt):

- Với $x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$, vì f tuyến tính:

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j f(e_j)$$

- Tính duy nhất: Nếu $f(e_j) = g(e_j)$ với mọi j, thì $f(x) = g(x)$ với mọi x, do đó $f = g$.

Ví dụ minh họa:

- $X = \mathbb{R}^2$, cơ sở $\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$.
- Phiếm hàm $f(x) = 2\xi_1 + 3\xi_2$.
- $f(e_1) = 2$, $f(e_2) = 3$. Với $x = (4,5) = 4e_1 + 5e_2$:

$$f(x) = 4f(e_1) + 5f(e_2) = 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 8 + 15 = 23$$

- Chuẩn: $\|f\| = \sup_{\|x\|_X=1} |2\xi_1 + 3\xi_2| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

Một số ghi chú từ 2.8

- **Đối ngẫu của đối ngẫu ($X^{}) : * * X^{**} là không gian đối ngdual của X^*. Với X hữu hạn chiều, X^{**} đẳng cấu với X (tức có "bản sao" hoàn hảo của X trong X^{**}).
- **Ví dụ không gian vô hạn chiều:** Với $X = c_0$ (dãy số hội tụ về 0), $X^* \cong l^1$ (dãy khả tích), nhưng $X^{**} \cong l^\infty$ (dãy bị chặn), lớn hơn X.

Kết luận

Không gian đối ngẫu X^* là công cụ mạnh mẽ để nghiên cứu X, luôn hoàn chỉnh dù X không hoàn chỉnh, và trong hữu hạn chiều, nó có cấu trúc đơn giản, dễ biểu diễn. Đây là bước đệm để hiểu các khái niệm sâu hơn như định lý Hahn-Banach (thường ở mục sau).

2.9 Định lý Hahn-Banach (The Hahn-Banach Theorem)

Tổng quan trực quan

Mục 2.9 giới thiệu **Định lý Hahn-Banach**, một trong những kết quả nền tảng và mạnh mẽ nhất trong phân tích hàm. Hãy tưởng tượng định lý này như một "cây đũa thần": nó cho phép bạn "kéo dài" một phiếm hàm tuyến tính từ một không gian con nhỏ bé lên toàn bộ không gian lớn hơn, mà vẫn giữ được tính chất "đẹp đẽ" của nó (như bị chặn hoặc giá trị cố định). Điều này giống như bạn chỉ cần đo một góc nhỏ của căn phòng, rồi từ đó suy ra cách đo toàn bộ căn phòng mà không làm sai lệch kết quả.

Chúng ta sẽ tìm hiểu định lý này trong hai phiên bản: cho không gian thực và không gian phức, cùng với các ứng dụng thực tế.

Các khái niệm chính

1. **Phiếm hàm tuyến tính:** Như ở 2.8, $f : X \to \mathbb{R}$ (hoặc $\mathbb{C}$) là tuyến tính nếu $f(x+y) = f(x) + f(y)$ và $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.
2. **Bị chặn:** f bị chặn nếu $|f(x)| \le M\|x\|_X$ với mọi $x \in X$, và chuẩn là $\|f\| = \sup_{\|x\|_X=1} |f(x)|$.
3. **Mở rộng (Extension):** Tìm một phiếm hàm F trên toàn X sao cho F đồng ý với f trên một không gian con $M \subset X$ (tức $F|_M = f$).
4. **Không gian định chuẩn:** X là không gian định chuẩn với chuẩn $\|\cdot\|_X$.

Định lý 2.9-1: Hahn-Banach cho không gian thực

Phát biểu: Cho X là một không gian định chuẩn thực, M là một không gian con tuyến tính của X, và $f : M \to \mathbb{R}$ là một phiếm hàm tuyến tính bị chặn với $|f(x)| \le p\|x\|_X$ cho mọi $x \in M$ (với p là hằng số). Khi đó, tồn tại một phiếm hàm tuyến tính $F : X \to \mathbb{R}$ sao cho:

- $F|_M = f$ (mở rộng của f).
- $\|F\| = \|f\|$ (giữ nguyên chuẩn).

Giải thích trực quan:

- Nếu bạn có một "thước đo" f hoạt động tốt trên một phần nhỏ M của X, định lý này nói rằng bạn có thể chế tạo một "thước đo lớn hơn" F đo được cả X, mà vẫn giữ nguyên cách đo trên M và không làm "phóng đại" quá mức (chuẩn không tăng).
- Điều này giống như bạn chỉ cần biết cách đo chiều dài một đoạn tường, rồi suy ra cách đo toàn bộ căn phòng mà không làm sai lệch tỷ lệ.

Chứng minh (tóm tắt):

- Trường hợp đơn giản (M nhỏ hơn X một chiều): Giả sử $X = M + \mathrm{span}\{z\}$ với $z \notin M$. Định nghĩa $F(x) = f(m) + c\xi$ cho $x = m + \xi z$.
- Để F bị chặn: $|F(x)| = |f(m) + c\xi| \le p\|m + \xi z\|_X$. Chọn c sao cho:

$$-p\|m - z\|_X \le f(m) - c \le p\|m + z\|_X$$

  Điều này luôn khả thi vì tập hợp các giá trị khả dĩ cho c là một khoảng không rỗng (do bất đẳng thức tam giác).
- Lặp lại quá trình này (dùng Tiên đề chọn - Axiom of Choice) để mở rộng F lên toàn X. Chuẩn $\|F\| = \|f\|$ được bảo toàn.

Ví dụ minh họa:

- $X = \mathbb{R}^2$, chuẩn $\|x\|_X = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$, $M = \{(t, 0) : t \in \mathbb{R}\}$ (trục hoành).
- $f : M \to \mathbb{R}$, $f(t, 0) = t$, với $\|f\| = 1$ (vì $|f(t, 0)| = |t| = \|(t, 0)\|_X$).
- Mở rộng $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Đặt $F(\xi_1, \xi_2) = \xi_1$ (chiếu lên trục hoành).
- Kiểm tra:
  - $F|_M = f$: $F(t, 0) = t = f(t, 0)$.
  - $\|F\| = \sup_{\|x\|_X = 1} |\xi_1| = 1$ (đạt tại $(1, 0)$). Vậy F là mở rộng hợp lệ.

Định lý 2.9-2: Hahn-Banach cho không gian phức

Phát biểu: Cho X là một không gian định chuẩn phức, M là không gian con tuyến tính, và $f : M \to \mathbb{C}$ là phiếm hàm tuyến tính với $|f(x)| \le p\|x\|_X$. Khi đó, tồn tại $F : X \to \mathbb{C}$ sao cho:

- $F|_M = f$.
- $\|F\| = \|f\|$.

Giải thích trực quan:

- Với không gian phức, mọi thứ phức tạp hơn vì giá trị của f là số phức, nhưng ý tưởng vẫn giống: bạn có thể "kéo dài" f lên toàn X mà không làm tăng chuẩn. Sự khác biệt nằm ở cách xử lý phần thực và phần ảo của phiếm hàm.

Chứng minh (tóm tắt):

- Gọi $f = u + iv$ với u, v là phần thực và ảo (đều là phiếm hàm thực). Với f tuyến tính phức:
  - $u(ix) = -v(x)$, $v(ix) = u(x)$ (từ $f(ix) = if(x)$).
- Áp dụng Hahn-Banach thực cho u, mở rộng thành $U : X \to \mathbb{R}$.
- Định nghĩa $F(x) = U(x) - iU(ix)$. Kiểm tra:
  - F tuyến tính phức: $F(ix) = U(ix) - iU(-x) = iF(x)$.
  - $F|_M = f$ và $|F(x)| \le \|f\|\|x\|_X$ (dùng bất đẳng thức và tính chất số phức).
- Chuẩn $\|F\| = \|f\|$ được bảo toàn.

Ví dụ minh họa:

- $X = \mathbb{C}^2$, chuẩn $\|x\|_X = \sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2}$, $M = \{(z, 0) : z \in \mathbb{C}\}$.
- $f(z, 0) = z$, với $\|f\| = 1$.
- Mở rộng $F(\xi_1, \xi_2) = \xi_1$.
- Kiểm tra:
  - $F(z, 0) = z = f(z, 0)$.

- $\|F\| = \sup_{\|x\|_X=1} |\xi_1| = 1$. F là mở rộng hợp lệ.

Ứng dụng của Hahn-Banach

1. **Tồn tại phiếm hàm không tầm thường:** Với $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$, tồn tại $f \in X^*$ sao cho $f(x_0) \neq 0$ và $\|f\| = 1$.
   - Ví dụ: $X = \mathbb{R}^2$, $x_0 = (1, 0)$, $f(x) = \xi_1$ thỏa $f(x_0) = 1$.
2. **Phân cách không gian con:** Nếu M là không gian con đóng và $x_0 \notin M$, tồn tại $f \in X^*$ sao cho $f(x_0) \neq 0$ và $f(m) = 0$ với mọi $m \in M$.

Kết luận

Định lý Hahn-Banach là công cụ mạnh mẽ để mở rộng các phiếm hàm tuyến tính, đảm bảo tính liên tục và bị chặn, cả trong không gian thực lẫn phức. Nó là nền tảng cho nhiều kết quả khác trong phân tích hàm, như định lý không gian đóng (closed range theorem).

2.10 Nguyên lý tập mở và ứng dụng (The Open Mapping Theorem and Applications)

Tổng quan trực quan

Mục 2.10 giới thiệu **Nguyên lý tập mở (Open Mapping Theorem)** – một kết quả quan trọng trong phân tích hàm, cho thấy cách các toán tử tuyến tính liên tục "bảo toàn" cấu trúc không gian. Hãy tưởng tượng nguyên lý này như một "bản đồ": nếu bạn có một bản đồ tốt (toán tử liên tục) từ một thành phố lớn (không gian Banach) sang một thành phố khác (cũng là không gian Banach), thì các khu vực "mở" (như công viên, quảng trường) trong thành phố đầu tiên sẽ vẫn "mở" trong thành phố thứ hai. Điều này đảm bảo rằng toán tử không "ép" hay "dán" các vùng mở thành những điểm nhỏ bé.

Chúng ta sẽ tìm hiểu định lý này, chứng minh ý nghĩa của nó, và khám phá các ứng dụng như định lý đồ thị đóng (Closed Graph Theorem).

Các khái niệm chính

1. **Toán tử tuyến tính liên tục:** $T : X \to Y$ là tuyến tính và liên tục, với X, Y là không gian định chuẩn.
2. **Tập mở (Open Set):** Một tập $U \subset X$ là mở nếu với mỗi $x \in U$, tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho $B(x, \epsilon) = \{z : \|z - x\|_X < \epsilon\} \subset U$.
3. **Không gian Banach:** Không gian định chuẩn hoàn chỉnh (mọi dãy Cauchy hội tụ).
4. **Toán tử toàn ánh (Surjective):** $T(X) = Y$, tức T phủ toàn bộ Y.

Định lý 2.10-1: Nguyên lý tập mở (Open Mapping Theorem)

Phát biểu: Nếu X và Y là hai không gian Banach, và $T : X \to Y$ là một toán tử tuyến tính liên tục toàn ánh, thì T là một ánh xạ mở, tức là với mọi tập mở $U \subset X$, tập $T(U)$ là mở trong Y.

Giải thích trực quan:

- Nếu T "phủ" hết Y (toàn ánh) và X, Y đều "đầy đủ" (Banach), thì T không thể "nén" các tập mở thành các tập không mở (như một điểm hoặc một đường). Nó giống như một máy chiếu phim: nếu bạn chiếu toàn bộ màn hình (toàn ánh), thì các hình tròn trên phim sẽ vẫn là hình tròn trên màn, không bị bẹp thành một chấm.
- Điều này đảm bảo T "bảo toàn" tính chất mở, làm cho nó "đẹp đẽ" hơn trong phân tích.

Chứng minh (tóm tắt):

- Bước 1: Chứng minh $T(B_X(0,1))$ chứa một bóng mở trong Y. Vì $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_X(0, n)$ và T toàn ánh, $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_X(0, n))$. Dùng tính chất Baire (trong không gian Banach), tồn tại n sao cho $\overline{T(B_X(0, n))}$ có nội thất không rỗng. Điều chỉnh tỷ lệ, $T(B_X(0, 1))$ chứa bóng $B_Y(0, \delta)$.
- Bước 2: Với U mở, lấy $x \in U$, tồn tại r sao cho $B_X(x, r) \subset U$. Thì $T(B_X(x, r)) = Tx + T(B_X(0, r))$ chứa $B_Y(Tx, \delta r)$, nên $T(U)$ mở.

Ví dụ minh họa:

- $X = Y = \mathbb{R}^2$, chuẩn Euclid $\|x\|_X = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$, $T(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ (ánh xạ đồng nhất).

- T toàn ánh, liên tục (vì $\|Tx\|_Y = \|x\|_X$, nên $\|T\| = 1$).
- Lấy $U = B_X(0,1)$ (bóng đơn vị mở), thì $T(U) = B_Y(0,1)$, là tập mở trong Y. Nguyên lý tập mở được thỏa mãn.

Hệ quả: Định lý ánh xạ ngược (Inverse Mapping Theorem)

Phát biểu: Nếu $T : X \to Y$ là toán tử tuyến tính liên tục, song ánh (bijective) giữa hai không gian Banach X và Y, thì $T^{-1} : Y \to X$ cũng liên tục.

Giải thích trực quan:

- Nếu T vừa "một-một" vừa "phủ" (song ánh), thì nó như một "cầu nối hoàn hảo" giữa X và Y. Nguyên lý tập mở đảm bảo T^{-1} không làm "đứt gãy" cấu trúc, tức là liên tục. Điều này giống như một chiếc cầu chắc chắn: bạn có thể đi qua và quay lại mà không gặp vấn đề.

Ví dụ minh họa:

- $X = Y = \mathbb{R}$, $Tx = 2x$. T song ánh, liên tục ($\frac{|Tx|}{|x|} = 2$, $\|T\| = 2$).
- $T^{-1}(y) = \frac{y}{2}$, liên tục vì $|T^{-1}(y)| = \frac{|y|}{2}$, $\|T^{-1}\| = \frac{1}{2}$.

Định lý 2.10-9: Định lý đồ thị đóng (Closed Graph Theorem)

Phát biểu: Cho X, Y là hai không gian Banach, $T : X \to Y$ là toán tử tuyến tính. Nếu đồ thị của T, $\Gamma(T) = \{(x, Tx) : x \in X\} \subset X \times Y$, là tập đóng trong $X \times Y$ với chuẩn tích $\|(x,y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$, thì T liên tục.

Giải thích trực quan:

- Đồ thị $\Gamma(T)$ là tập hợp tất cả các cặp (x, Tx). Nếu nó "đóng" (không có các điểm "lơ lửng" ngoài giới hạn), thì T không thể "nhảy vọt" bất thường – nó phải liên tục. Điều này giống như một đường kẻ liền mạch trên giấy: nếu không có lỗ hổng, đường đó phải trơn tru.

Chứng minh (tóm tắt):

- $X \times Y$ với chuẩn tích là không gian Banach. $\Gamma(T)$ đóng, nên là không gian Banach con.
- Ánh xạ $\pi : \Gamma(T) \to X$, $\pi(x, Tx) = x$ là song ánh, liên tục. Theo Inverse Mapping Theorem, π^{-1} liên tục.
- $T = p_2 \circ \pi^{-1}$ (với $p_2(x,y) = y$) cũng liên tục, vì p_2 liên tục.

Ví dụ minh họa:

- $X = Y = \mathbb{R}$, $Tx = x$. Đồ thị $\Gamma(T) = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$ là đường chéo, đóng trong $\mathbb{R}^2$.
- T liên tục (vì $|Tx| = |x|$, $\|T\| = 1$).
- Phản ví dụ (không gian không Banach): $X = c_{00}$ (dãy hữu hạn), $Y = l^2$, $T(x_n) = (nx_n)$. Đồ thị đóng, nhưng T không liên tục (vì $\|Te_n\|_2 = n \to \infty$).

Ứng dụng

1. **Kiểm tra tính liên tục:** Nếu T có đồ thị đóng và X, Y Banach, ta kết luận T liên tục mà không cần kiểm tra trực tiếp.
2. **Giải phương trình:** Nguyên lý tập mở giúp chứng minh tồn tại nghiệm trong các bài toán tuyến tính.

Kết luận

Nguyên lý tập mở và các hệ quả (như định lý đồ thị đóng) là những công cụ mạnh mẽ trong phân tích hàm, đặc biệt trong không gian Banach, đảm bảo các toán tử "tốt" giữ được tính chất mở và liên tục.