Vấn đáp

CÂU HỎI VẤN ĐÁP MÔN QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN

1. Định nghĩa quá trình ngẫu nhiên. Phân loại quá trình ngẫu nhiên. Thế nào là quỹ đạo mẫu (sample path)?

Định nghĩa quá trình ngẫu nhiên: Quá trình ngẫu nhiên là một tập hợp các biến ngẫu nhiên $X(t), t \in T$ được định nghĩa trên cùng một không gian xác suất (Ω, F, P), trong đó T là tập chỉ số (thường đại diện cho thời gian).

Giải thích trực quan: Quá trình ngẫu nhiên là cách mô tả hiện tượng thay đổi ngẫu nhiên theo thời gian. Ví dụ: giá cổ phiếu theo ngày, nhiệt độ theo giờ, hoặc số người đến ngân hàng trong một khoảng thời gian.

Phân loại quá trình ngẫu nhiên:

1. **Theo tập chỉ số T:**

   - **Quá trình rời rạc**: T là tập rời rạc (ví dụ: $T = 0, 1, 2, \ldots$)
   - **Quá trình liên tục**: T là tập liên tục (ví dụ: $T = [0, \infty)$)

   Ví dụ: Số khách đến cửa hàng mỗi giờ (rời rạc) so với nhiệt độ môi trường thay đổi liên tục theo thời gian (liên tục).
2. **Theo không gian trạng thái:**
   - **Quá trình rời rạc**: Không gian trạng thái là tập rời rạc (như số lượng khách hàng)
   - **Quá trình liên tục**: Không gian trạng thái là tập liên tục (như nhiệt độ)
3. **Theo tính chất:**
   - **Quá trình dừng**: Có tính chất thống kê không đổi theo thời gian
   - **Quá trình không dừng**: Tính chất thống kê thay đổi theo thời gian
   - **Quá trình Markov**: Trạng thái tương lai chỉ phụ thuộc vào trạng thái hiện tại
   - **Quá trình có số gia độc lập**: Các số gia trong khoảng thời gian không giao nhau là độc lập
   - **Quá trình có số gia dừng**: Phân phối của số gia chỉ phụ thuộc vào độ dài khoảng thời gian

Quỹ đạo mẫu (sample path): Quỹ đạo mẫu của quá trình ngẫu nhiên $X(t), t \in T$ là một hàm của t: $X(t, \omega)$ với ω cố định thuộc Ω.

Giải thích trực quan: Quỹ đạo mẫu giống như một "lịch sử cụ thể" của quá trình. Ví dụ, trong chuyển động Brown mô tả hạt bụi trong chất lỏng, một quỹ đạo mẫu là đường đi zigzag cụ thể của một hạt bụi trong một lần quan sát.

2. Định nghĩa quá trình dừng ngặt (strict stationary process) và tính chất.

Định nghĩa quá trình dừng ngặt: Một quá trình ngẫu nhiên $X(t), t \in T$ được gọi là dừng ngặt (strict stationary) nếu với mọi $n \in \mathbb{N}$, mọi $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ và mọi h sao cho $t_1 + h, t_2 + h, \ldots, t_n + h \in T$, thì:

Phân phối đồng thời của $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$ giống với phân phối đồng thời của $(X(t_1 + h), X(t_2 + h), \ldots, X(t_n + h))$.

Giải thích trực quan: Quá trình dừng ngặt giống như một bản nhạc không thay đổi "âm sắc" nếu bạn bắt đầu nghe từ bất kỳ vị trí nào. Nhịp tim của người khỏe mạnh khi nghỉ ngơi có thể coi là một quá trình dừng - thống kê về nhịp tim không thay đổi đáng kể dù bạn đo vào sáng, trưa hay tối.

Tính chất của quá trình dừng ngặt:

1. Phân phối xác suất của $X(t)$ không phụ thuộc vào t, nghĩa là $E[X(t)] = \mu$ (hằng số) với mọi $t \in T$.
2. Hàm phân phối xác suất của $X(t)$ không thay đổi khi dịch chuyển thời gian.
3. Hàm tự tương quan $R(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$ chỉ phụ thuộc vào hiệu $t_2 - t_1$, tức là $R(t_1, t_2) = R(t_2 - t_1)$.
4. Hàm tự hiệp phương sai $C(t_1, t_2) = Cov(X(t_1), X(t_2))$ chỉ phụ thuộc vào hiệu $t_2 - t_1$, tức là $C(t_1, t_2) = C(t_2 - t_1)$.
5. Mọi moment và moment đồng thời của quá trình đều bất biến đối với phép dịch thời gian.

Ví dụ: Nhiễu trắng (white noise) là một quá trình dừng ngặt, trong đó các giá trị tại mọi thời điểm đều độc lập và có cùng phân phối xác suất.

3. Định nghĩa quá trình dừng bậc k, quá trình dừng yếu (WSS) và tính chất.

Định nghĩa quá trình dừng bậc k: Một quá trình ngẫu nhiên $X(t), t \in T$ được gọi là dừng bậc k nếu với mọi $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ và h sao cho $t_1 + h, t_2 + h, \ldots, t_n + h \in T$, thì mọi moment đồng thời đến bậc k của các biến $X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)$ bằng với moment tương ứng của $X(t_1 + h), X(t_2 + h), \ldots, X(t_n + h)$.

Giải thích trực quan: Nếu quá trình dừng bậc k, thì các số đặc trưng thống kê (như kỳ vọng, phương sai, moment bậc 3...) đến bậc k không thay đổi theo thời gian.

Định nghĩa quá trình dừng yếu (WSS - Weakly Stationary Process): Một quá trình ngẫu nhiên $X(t), t \in T$ được gọi là dừng yếu (hay dừng bậc 2) nếu:

1. $E[X(t)] = \mu$ (hằng số) với mọi $t \in T$
2. Hàm tự hiệp phương sai $C(t_1, t_2) = Cov(X(t_1), X(t_2))$ chỉ phụ thuộc vào hiệu $t_2 - t_1$

Giải thích trực quan: Quá trình dừng yếu là quá trình mà giá trị trung bình và độ "biến động" không thay đổi theo thời gian, và mối tương quan giữa hai điểm chỉ phụ thuộc vào khoảng cách thời gian giữa chúng, không phụ thuộc vào vị trí tuyệt đối.

Tính chất của quá trình dừng yếu:

1. Giá trị trung bình $E[X(t)] = \mu$ là hằng số với mọi t.
2. Phương sai $Var[X(t)] = \sigma^2$ là hằng số với mọi t.
3. Hàm tự hiệp phương sai $C(t, t+\tau) = C(\tau)$ chỉ phụ thuộc vào τ.
4. Hàm tự tương quan $R(t, t+\tau) = R(\tau)$ chỉ phụ thuộc vào τ.
5. Một quá trình dừng ngặt luôn là quá trình dừng yếu, nhưng ngược lại không đúng.
6. Nếu quá trình có phân phối Gaussian, thì quá trình dừng yếu cũng là quá trình dừng ngặt.

Ví dụ: Tiếng ồn trong kênh truyền thông tin có thể được mô hình hóa như một quá trình dừng yếu, với mức ồn trung bình không đổi và tương quan giữa các thời điểm chỉ phụ thuộc vào khoảng cách thời gian.

4. Định nghĩa quá trình có số gia độc lập (independent increments).

Định nghĩa quá trình có số gia độc lập: Một quá trình ngẫu nhiên $X(t), t \in T$ được gọi là quá trình có số gia độc lập nếu với mọi dãy thời điểm $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ thuộc T, các số gia: $X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ là các biến ngẫu nhiên độc lập với nhau.

Giải thích trực quan: Trong quá trình có số gia độc lập, sự thay đổi trong một khoảng thời gian không liên quan đến sự thay đổi trong khoảng thời gian khác. Giống như việc tung xúc xắc nhiều lần: kết quả lần sau hoàn toàn không phụ thuộc vào kết quả lần trước.

Tính chất của quá trình có số gia độc lập:

1. Sự biến đổi của quá trình trong một khoảng thời gian độc lập với sự biến đổi trong các khoảng thời gian không giao nhau khác.
2. Nếu $X(0) = 0$, thì $X(t)$ là tổng của các số gia độc lập.
3. Các quá trình có số gia độc lập thường có tính Markov.
4. Ví dụ về quá trình có số gia độc lập: chuyển động Brown, quá trình Poisson.

Ví dụ: Số lượng xe qua một trạm thu phí trong các khoảng thời gian khác nhau có thể được mô hình hóa như một quá trình có số gia độc lập, nếu số xe trong khoảng 8-9 giờ không ảnh hưởng đến số xe trong khoảng 9-10 giờ.

5. Định nghĩa quá trình có số gia dừng (stationary increments).

Định nghĩa quá trình có số gia dừng: Một quá trình ngẫu nhiên $X(t), t \in T$ được gọi là quá trình có số gia dừng nếu với mọi $h > 0$ và $s, t \in T$ sao cho $s < t$ và $s + h, t + h \in T$, thì:

Phân phối của $X(t) - X(s)$ giống với phân phối của $X(t+h) - X(s+h)$.

Giải thích trực quan: Trong quá trình có số gia dừng, sự thay đổi (số gia) chỉ phụ thuộc vào độ dài của khoảng thời gian, không phụ thuộc vào thời điểm bắt đầu. Như lượng mưa trong 2 giờ có cùng phân phối xác suất, bất kể đo từ 7-9 giờ hay 14-16 giờ.

Tính chất của quá trình có số gia dừng:

1. Phân phối của số gia chỉ phụ thuộc vào độ dài khoảng thời gian.
2. Nếu $X(0) = 0$, thì $E[X(t)] = \mu t$, với μ là hằng số (nếu kỳ vọng tồn tại).
3. $Var[X(t) - X(s)] = \sigma^2(t - s)$, với σ^2 là hằng số (nếu phương sai tồn tại).
4. Ví dụ về quá trình có số gia dừng: chuyển động Brown, quá trình Poisson.

Ví dụ: Trong chuyển động Brown, khoảng cách di chuyển của một hạt bụi trong khoảng thời gian có độ dài 5 phút có cùng phân phối xác suất, bất kể bắt đầu đo từ phút thứ 0, phút thứ 10, hay phút thứ 20.

6. Nêu định nghĩa quá trình Poisson. Trình bày tính không nhớ (memoryless).

Định nghĩa quá trình Poisson: Quá trình Poisson $N(t), t \geq 0$ với cường độ $\lambda > 0$ là một quá trình đếm thỏa mãn các điều kiện sau:

1. $N(0) = 0$

2. Quá trình có số gia độc lập
3. Quá trình có số gia dừng
4. Xác suất có đúng một sự kiện trong khoảng thời gian nhỏ Δt là $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$
5. Xác suất có nhiều hơn một sự kiện trong khoảng thời gian nhỏ Δt là $o(\Delta t)$

Với mọi $t \geq 0$, $N(t)$ có phân phối Poisson với tham số λt: $P(N(t) = k) = e^{-\lambda t}(\lambda t)^k/k!$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Giải thích trực quan: Quá trình Poisson mô tả số lần xảy ra của các sự kiện ngẫu nhiên trong thời gian. Ví dụ: số cuộc gọi đến tổng đài, số khách hàng đến cửa hàng, số hạt phân tử phóng xạ phân rã trong một mẫu.

Tính không nhớ (memoryless): Tính không nhớ thể hiện ở hai khía cạnh:

1. **Tính không nhớ của phân phối thời gian giữa các sự kiện:**

   - Thời gian giữa các sự kiện liên tiếp trong quá trình Poisson có phân phối mũ với tham số λ.
   - Phân phối mũ có tính không nhớ: $P(X > s + t | X > s) = P(X > t)$ với mọi $s, t > 0$.

   Giải thích trực quan: Nếu bạn đã đợi xe buýt 10 phút (mà xe chưa đến), xác suất phải đợi thêm 5 phút nữa giống như xác suất đợi 5 phút từ lúc bắt đầu - quá trình "quên" thời gian đã trôi qua.
2. **Tính độc lập của quá khứ và tương lai:**

   - Với mọi $s < t$, số lượng sự kiện trong khoảng $(s, t]$ là $N(t) - N(s)$ độc lập với quá khứ và có phân phối Poisson với tham số $\lambda(t - s)$.

   Giải thích trực quan: Số khách hàng đến trong giờ tới không phụ thuộc vào số khách đã đến trong giờ vừa qua - quá trình "quên" lịch sử của nó.

7. Định nghĩa Xích Markov rời rạc. Có phải các xích Markov đều tồn tại xác suất dừng? Nói rõ điều kiện có xác suất dừng.

Định nghĩa Xích Markov rời rạc: Một quá trình ngẫu nhiên $X_n, n \geq 0$ với không gian trạng thái S được gọi là Xích Markov rời rạc nếu với mọi $n \geq 0$ và mọi $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i, j \in S$:

$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}$

Trong đó p_{ij} là xác suất chuyển từ trạng thái i sang trạng thái j.

Giải thích trực quan: Xích Markov là quá trình mà trạng thái tương lai chỉ phụ thuộc vào trạng thái hiện tại, không phụ thuộc vào cách đến trạng thái hiện tại. Giống như trò chơi cờ: nước đi tiếp theo chỉ phụ thuộc vào vị trí hiện tại, không quan tâm làm thế nào các quân cờ đến được vị trí đó.

Về sự tồn tại xác suất dừng: Không phải tất cả các xích Markov đều tồn tại xác suất dừng. Xác suất dừng (hay phân phối dừng) là một vector $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots)$ thỏa mãn:

1. $\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}$ với mọi $j \in S$ (phương trình cân bằng)
2. $\sum_j \pi_j = 1$ (tổng xác suất bằng 1)
3. $\pi_j \geq 0$ với mọi $j \in S$ (xác suất không âm)

Điều kiện tồn tại xác suất dừng:

1. **Xích không khả quy (irreducible)**: Từ mọi trạng thái có thể đi đến mọi trạng thái khác sau một số bước hữu hạn.
2. **Xích thuận nghịch (positive recurrent)**: Thời gian trung bình để quay trở lại một trạng thái bất kỳ là hữu hạn.
3. **Xích không tuần hoàn (aperiodic)**: Chu kỳ của mọi trạng thái đều bằng 1.

Ví dụ: Mô hình thời tiết 2 trạng thái (nắng, mưa) với xác suất chuyển đổi cố định. Nếu từ "nắng" có thể chuyển sang "mưa" và ngược lại (không khả quy), và không có chu kỳ cố định (không tuần hoàn), thì xích này có phân phối dừng - tỷ lệ ngày nắng/mưa sẽ đạt đến một giá trị ổn định trong dài hạn.

8. Trình bày các trạng thái của xích Markov. Thế nào là xích tối giản (irreducible)?

Các trạng thái của xích Markov:

1. **Trạng thái tức thời (transient state):** Trạng thái i là tức thời nếu có xác suất dương sao cho khi bắt đầu từ i, xích có thể không bao giờ quay lại i, tức là $P(X_n \neq i \text{ với mọi } n > m | X_m = i) > 0$ với một số $m \geq 0$.

   Giải thích trực quan: Giống như ghé thăm một thành phố mà bạn có thể không bao giờ quay lại. Ví dụ, trong trò chơi độc quyền, nhiều ô chỉ được ghé qua tạm thời.

2. **Trạng thái tái diễn (recurrent state):** Trạng thái i là tái diễn nếu khi bắt đầu từ i, xích sẽ quay lại i với xác suất 1, tức là $P(X_n = i$ với một số $n > 0|X_0 = i) = 1$.
   - **Tái diễn thuận nghịch (positive recurrent):** Giá trị kỳ vọng của thời gian quay lại lần đầu tiên là hữu hạn.
   - **Tái diễn không thuận nghịch (null recurrent):** Giá trị kỳ vọng của thời gian quay lại lần đầu tiên là vô hạn.

   Giải thích trực quan: Giống như ngôi nhà của bạn - bạn luôn quay trở về. Trong trò chơi độc quyền, ô "Xuất phát" là một trạng thái tái diễn.
3. **Trạng thái hấp thụ (absorbing state):** Trạng thái i là hấp thụ nếu $p_{ii} = 1$, tức là khi đến trạng thái i, xích sẽ ở lại đó mãi mãi.

   Giải thích trực quan: Giống như "phá sản" trong một trò chơi cờ tài chính - khi bạn đã phá sản, bạn không thể tiếp tục chơi.
4. **Trạng thái tuần hoàn (periodic state):** Trạng thái i có chu kỳ $d > 1$ nếu d là ước số chung lớn nhất của tập $n > 0 : P(X_n = i|X_0 = i) > 0$. Nếu $d = 1$, trạng thái i được gọi là không tuần hoàn (aperiodic).

   Giải thích trực quan: Giống như chuông đồng hồ đánh mỗi 12 giờ - có một chu kỳ cố định để quay lại trạng thái đó.

Xích tối giản (irreducible): Một xích Markov được gọi là tối giản (không khả quy) nếu từ mọi trạng thái i có thể đi đến mọi trạng thái j sau một số bước hữu hạn, tức là với mọi $i, j \in S$, tồn tại $n > 0$ sao cho:

$$P(X_n = j|X_0 = i) > 0$$

Giải thích trực quan: Xích tối giản giống như một mạng lưới giao thông hoàn chỉnh: bạn có thể đi từ bất kỳ địa điểm nào đến bất kỳ địa điểm nào khác sau một số bước di chuyển. Không có "hòn đảo riêng biệt" trong không gian trạng thái.

9. Định nghĩa Xích Markov liên tục. Có phải các xích Markov đều tồn tại xác suất dừng? Nói rõ điều kiện có xác suất dừng.

Định nghĩa Xích Markov liên tục: Một quá trình ngẫu nhiên $X(t), t \geq 0$ với không gian trạng thái S được gọi là Xích Markov liên tục nếu với mọi $s, t \geq 0$ và mọi $i, j \in S$:

$$P(X(t+s) = j|X(s) = i, X(u) = x(u), 0 \leq u < s) = P(X(t+s) = j|X(s) = i) = P_{ij}(t)$$

Giải thích trực quan: Xích Markov liên tục khác với xích rời rạc ở chỗ trạng thái có thể thay đổi tại bất kỳ thời điểm nào, không chỉ tại các bước rời rạc. Ví dụ: phân tử chuyển động giữa các trạng thái năng lượng hoặc hệ thống xếp hàng thay đổi liên tục.

Xích Markov liên tục thường được mô tả bởi ma trận tốc độ chuyển (generator matrix) $Q = [q_{ij}]$, trong đó:

- $q_{ij} \geq 0$ là tốc độ chuyển từ trạng thái i sang j $(i \neq j)$
- $q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}$ là tốc độ rời khỏi trạng thái i

Về sự tồn tại xác suất dừng: Không phải tất cả các xích Markov liên tục đều tồn tại xác suất dừng. Xác suất dừng (hay phân phối dừng) là một vector $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots)$ thỏa mãn:

1. $\pi Q = 0$ (phương trình cân bằng)
2. $\sum_j \pi_j = 1$ (tổng xác suất bằng 1)
3. $\pi_j \geq 0$ với mọi $j \in S$ (xác suất không âm)

Điều kiện tồn tại xác suất dừng:

1. **Xích không khả quy (irreducible)**: Từ mọi trạng thái có thể đi đến mọi trạng thái khác sau một khoảng thời gian hữu hạn.
2. **Xích dương (positive recurrent)**: Thời gian trung bình để quay trở lại một trạng thái bất kỳ là hữu hạn.

Ví dụ: Hệ thống máy chủ với nhiều máy tính: nếu bất kỳ máy tính nào có thể chuyển từ trạng thái "hoạt động" sang "nghỉ" và ngược lại với tốc độ cố định, hệ thống sẽ đạt đến phân phối dừng - tỷ lệ máy tính trong từng trạng thái sẽ ổn định theo thời gian.

Một điểm đáng chú ý là đối với xích Markov liên tục, không cần điều kiện không tuần hoàn (aperiodic) như trong trường hợp rời rạc, vì các xích Markov liên tục tự nhiên là không tuần hoàn.

10. Định nghĩa quá trình sinh tử. Quá trình Poisson là trường hợp đặc biệt nào của quá trình sinh tử.

Định nghĩa quá trình sinh tử: Quá trình sinh tử là một xích Markov liên tục $X(t), t \geq 0$ với không gian trạng thái là tập các số nguyên không âm $S = 0, 1, 2, \ldots$, trong đó:

1. Quá trình chỉ có thể chuyển đến các trạng thái kề nhau, nghĩa là từ trạng thái n, quá trình chỉ có thể chuyển đến trạng thái $n + 1$ (sinh) hoặc $n - 1$ (tử).
2. Các tốc độ chuyển được định nghĩa bởi:

- $\lambda_n > 0$: tốc độ sinh khi ở trạng thái n, tức là tốc độ chuyển từ n sang $n+1$
- $\mu_n > 0$: tốc độ tử khi ở trạng thái n, tức là tốc độ chuyển từ n sang $n-1$ (với $n > 0$)
- $\mu_0 = 0$: không thể tử khi ở trạng thái 0

Giải thích trực quan: Quá trình sinh tử mô hình hóa sự phát triển của một quần thể, trong đó cá thể có thể sinh sản (tăng số lượng) hoặc chết đi (giảm số lượng). Ví dụ: quần thể vi khuẩn, dân số một loài động vật, số người trong hàng đợi (đến và rời đi).

Quá trình Poisson như một trường hợp đặc biệt của quá trình sinh tử: Quá trình Poisson với cường độ $\lambda > 0$ là một trường hợp đặc biệt của quá trình sinh tử khi:

1. $\lambda_n = \lambda$ (hằng số) với mọi $n \geq 0$: tốc độ sinh không phụ thuộc vào trạng thái hiện tại
2. $\mu_n = 0$ với mọi $n \geq 0$: không có sự kiện tử, chỉ có sự kiện sinh

Giải thích trực quan: Trong quá trình Poisson, chỉ có "sinh" (tăng) mà không có "tử" (giảm), và tốc độ sinh không phụ thuộc vào số lượng hiện tại. Ví dụ: khách hàng đến cửa hàng (chỉ đến, không rời đi trong mô hình), hoặc số lượng sự kiện đã xảy ra (không thể giảm).

11. Cho X(t) là quá trình Yule có tỉ lệ sinh lambda. Bắt đầu từ i phần tử, X(0)= i, sau một khoảng thời gian t, X(t) có phân phối gì?

Quá trình Yule và phân phối của X(t):

Quá trình Yule là một quá trình sinh tử đặc biệt với:

- $\lambda_n = n\lambda$: tốc độ sinh tỷ lệ với số lượng phần tử hiện tại
- $\mu_n = 0$: không có sự kiện tử

Giải thích trực quan: Mỗi phần tử trong quần thể sinh ra các phần tử mới với tốc độ λ, và không có phần tử nào chết đi. Điều này mô hình hóa sự phân chia tế bào hoặc lan truyền thông tin trong mạng xã hội.

Cho X(t) là quá trình Yule với tỉ lệ sinh λ. Bắt đầu từ i phần tử, X(0) = i, sau một khoảng thời gian t, X(t) có phân phối nhị thức âm (negative binomial) với tham số i và $e^{-\lambda t}$, cụ thể:

$P(X(t) = n) = \binom{n-1}{i-1}(e^{-\lambda t})^i(1-e^{-\lambda t})^{n-i}, n \geq i$

Giải thích phân phối: Phân phối nhị thức âm mô tả số lần thử nghiệm cần thiết để đạt được một số lượng cố định thành công. Trong quá trình Yule, điều này tương ứng với tổng số phần tử sau thời gian t.

Các đặc trưng của phân phối này:

- $E[X(t)] = i \cdot e^{\lambda t}$: giá trị kỳ vọng của số phần tử tại thời điểm t tăng theo hàm mũ
- $Var[X(t)] = i \cdot e^{\lambda t} \cdot (e^{\lambda t} - 1)$: phương sai cũng tăng theo hàm mũ

Ví dụ: Nếu bắt đầu với 1 tế bào có tốc độ phân chia $\lambda = 0.1$ (mỗi tế bào phân chia trung bình 0.1 lần/đơn vị thời gian), sau 10 đơn vị thời gian, số lượng tế bào kỳ vọng là $E[X(10)] = 1 \cdot e^{0.1 \cdot 10} \approx 2.72$ tế bào.

12. Định nghĩa chuyển động Brown và Brown tiêu chuẩn. Nêu các tính chất của chuyển động Brown.

Định nghĩa chuyển động Brown: Chuyển động Brown là một quá trình ngẫu nhiên $B(t), t \geq 0$ thỏa mãn các điều kiện sau:

1. $B(0) = 0$.
2. Quá trình có số gia độc lập.
3. Quá trình có số gia dừng.
4. Với mọi s, t sao cho $0 \leq s < t$, số gia $B(t) - B(s)$ có phân phối chuẩn với kỳ vọng 0 và phương sai $\sigma^2(t-s)$.

Định nghĩa chuyển động Brown tiêu chuẩn: Chuyển động Brown tiêu chuẩn (hay quá trình Wiener) là một chuyển động Brown đặc biệt với $\sigma^2 = 1$, tức là số gia $B(t) - B(s)$ có phân phối chuẩn với kỳ vọng 0 và phương sai $(t-s)$.

Giải thích trực quan: Chuyển động Brown mô tả chuyển động ngẫu nhiên của hạt bụi trong chất lỏng do sự va chạm với các phân tử của chất lỏng. Nó được sử dụng rộng rãi trong tài chính để mô hình hóa giá cổ phiếu và trong vật lý để mô tả khuếch tán nhiệt.

Các tính chất của chuyển động Brown:

1. **Tính liên tục:** Các quỹ đạo mẫu của chuyển động Brown là liên tục gần như chắc chắn, nhưng không khả vi tại mọi điểm.
2. **Tính Markov:** Chuyển động Brown có tính Markov, nghĩa là tương lai chỉ phụ thuộc vào hiện tại, không phụ thuộc vào quá khứ.
3. **Tính scaling:** Nếu $B(t), t \geq 0$ là chuyển động Brown tiêu chuẩn, thì $cB(t/c^2), t \geq 0$ cũng là chuyển động Brown tiêu chuẩn với mọi $c > 0$.

4. **Biến thiên bình phương:** Trên khoảng $[0, t]$, tổng biến thiên bình phương của chuyển động Brown tiêu chuẩn bằng t gần như chắc chắn.
5. **Tính tự tương tự:** Với mọi $a > 0$, quá trình $B(at)/\sqrt{a}, t \geq 0$ có cùng phân phối với $B(t), t \geq 0$.
6. **Đối xứng thời gian:** Quá trình $B(t), t \geq 0$ và $-B(t), t \geq 0$ có cùng phân phối.
7. **Tính chất martingale:** Đối với chuyển động Brown tiêu chuẩn, $B(t), t \geq 0$ là một martingale.
8. **Tính chất phương sai:** $Var[B(t)] = \sigma^2 t$, phương sai tăng tuyến tính theo thời gian.
9. **Quá trình Gaussian:** Mọi vector hữu hạn $(B(t_1), B(t_2), \ldots, B(t_n))$ có phân phối chuẩn đa biến.

Ví dụ ứng dụng: Trong tài chính, mô hình Black-Scholes sử dụng chuyển động Brown để mô hình hóa biến động giá cổ phiếu. Nếu $S(t)$ là giá cổ phiếu tại thời điểm t, mô hình giả định $\ln(S(t))$ tuân theo chuyển động Brown với thêm xu hướng (drift).

13. Những quá trình đặc biệt nào em biết có tính Markov?

Có nhiều quá trình ngẫu nhiên có tính Markov. Dưới đây là những quá trình đặc biệt có tính Markov:

1. **Xích Markov rời rạc và liên tục:** Đây là ví dụ cơ bản nhất về quá trình Markov.

   Ví dụ: Mô hình thời tiết (nắng, mây, mưa), trong đó thời tiết ngày mai chỉ phụ thuộc vào thời tiết hôm nay.
2. **Chuyển động Brown:** Chuyển động Brown và các biến thể của nó (như chuyển động Brown hình học) đều có tính Markov. Vị trí tương lai của hạt chỉ phụ thuộc vào vị trí hiện tại.

   Ví dụ: Giá cổ phiếu trong mô hình Black-Scholes, nơi giá tương lai chỉ phụ thuộc vào giá hiện tại.
3. **Quá trình Poisson:** Quá trình Poisson có tính Markov vì xác suất có thêm sự kiện xảy ra trong khoảng thời gian tương lai chỉ phụ thuộc vào số sự kiện đã xảy ra tại thời điểm hiện tại.

   Ví dụ: Số cuộc gọi đến tổng đài, nơi xác suất nhận thêm cuộc gọi không phụ thuộc vào lịch sử cuộc gọi.
4. **Quá trình sinh tử:** Bao gồm cả quá trình Yule, quá trình sinh tử đơn giản, và các mô hình tăng trưởng quần thể khác.

   Ví dụ: Số người trong hàng đợi, nơi tốc độ đến và rời đi chỉ phụ thuộc vào số người hiện tại.
5. **Quá trình Wiener:** Là một dạng đặc biệt của chuyển động Brown tiêu chuẩn.

   Ví dụ: Mô hình biến động nhiệt độ trong một hệ thống vật lý.
6. **Quá trình nhảy Markov:** Là quá trình mà trạng thái của hệ thống thay đổi đột ngột tại các thời điểm ngẫu nhiên.

   Ví dụ: Mô hình hỏng hóc thiết bị, nơi thiết bị có thể đột ngột chuyển từ trạng thái hoạt động sang trạng thái hỏng.
7. **Quá trình khuếch tán:** Bao gồm quá trình Ornstein-Uhlenbeck, là mô hình chuyển động Brown với xu hướng quay về giá trị trung bình.

   Ví dụ: Mô hình lãi suất Vasicek trong tài chính, nơi lãi suất có xu hướng quay về mức cân bằng dài hạn.
8. **Quá trình quyết định Markov:** Là mở rộng của xích Markov, trong đó có thêm các quyết định tác động vào hệ thống và phần thưởng.

   Ví dụ: Các thuật toán học tăng cường (reinforcement learning) trong AI, nơi tác nhân đưa ra quyết định dựa trên trạng thái hiện tại.

Ý nghĩa thực tiễn: Tính Markov cho phép chúng ta đơn giản hóa việc phân tích các hệ thống phức tạp. Thay vì phải theo dõi toàn bộ lịch sử hệ thống, chúng ta chỉ cần biết trạng thái hiện tại để dự đoán tương lai. Điều này làm giảm đáng kể khối lượng tính toán và lưu trữ, đồng thời giúp xây dựng các mô hình toán học hữu ích trong nhiều lĩnh vực từ vật lý, sinh học đến kinh tế học và khoa học máy tính.

Các Phân Phối Xác Suất Quan Trọng Trong Quá Trình Ngẫu Nhiên

1. Phân Phối Nhị Thức (Binomial Distribution)

Bài toán đặc trưng: Thực hiện n thử nghiệm Bernoulli độc lập, mỗi thử nghiệm có xác suất thành công là p. Biến ngẫu nhiên X đếm tổng số lần thành công trong n lần thử.

Tham số: n (số lần thử), p (xác suất thành công)

PMF: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ với $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

Kỳ vọng: $E[X] = np$

Phương sai: $Var(X) = np(1-p)$

2. Phân Phối Poisson (Poisson Distribution)

Bài toán đặc trưng: Đếm số sự kiện xảy ra trong một khoảng thời gian hoặc không gian cố định, khi các sự kiện xảy ra độc lập với tốc độ trung bình λ. Trong quá trình Poisson, số sự kiện X trong khoảng thời gian t có phân phối Poisson với tham số λt.

Tham số: λ (số sự kiện trung bình trên đơn vị thời gian/không gian)

PMF: $P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ với $k=0,1,2,\dots$

Kỳ vọng: $E[X]=\lambda$

Phương sai: $Var(X)=\lambda$

Liên hệ với quá trình ngẫu nhiên: Quá trình Poisson $N(t), t\geq 0$ có số gia độc lập và dừng. Trong khoảng thời gian $(t,t+h]$, xác suất có đúng 1 sự kiện là $\lambda h+o(h)$, và xác suất có nhiều hơn 1 sự kiện là $o(h)$.

3. Phân Phối Mũ (Exponential Distribution)

Bài toán đặc trưng: Mô tả thời gian chờ X đến khi sự kiện đầu tiên xảy ra trong một quá trình Poisson có cường độ λ, hoặc khoảng thời gian giữa hai sự kiện liên tiếp (interarrival time).

Tham số: λ (tốc độ xảy ra sự kiện)

PDF: $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ với $x\geq 0$

CDF: $F(x)=1-e^{-\lambda x}$ với $x\geq 0$

Kỳ vọng: $E[X]=\frac{1}{\lambda}$

Phương sai: $Var(X)=\frac{1}{\lambda^2}$

Tính chất không nhớ: $P(X>s+t|X>s)=P(X>t)$ với mọi $s,t\geq 0$

Liên hệ với quá trình ngẫu nhiên: Trong quá trình Poisson, khoảng thời gian giữa các sự kiện liên tiếp có phân phối mũ. Tính chất không nhớ của phân phối mũ dẫn đến tính chất Markov của quá trình Poisson.

4. Phân Phối Chuẩn (Gaussian/Normal Distribution)

Bài toán đặc trưng: Mô tả các biến ngẫu nhiên chịu ảnh hưởng của nhiều yếu tố ngẫu nhiên nhỏ, độc lập; xuất hiện trong định lý giới hạn trung tâm. Trong quá trình Wiener (chuyển động Brown chuẩn), số gia $W(t+h)-W(t)$ có phân phối chuẩn với trung bình 0 và phương sai h.

Tham số: μ (kỳ vọng), σ^2 (phương sai)

PDF: $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ với $x\in\mathbb{R}$

Kỳ vọng: $E[X]=\mu$

Phương sai: $Var(X)=\sigma^2$

Liên hệ với quá trình ngẫu nhiên: Quá trình Wiener $W(t), t\geq 0$ là quá trình Gaussian, trong đó $W(t)\sim N(0,t)$ và số gia $W(t+h)-W(t)\sim N(0,h)$ độc lập với $W(s)$ với $s\leq t$.

5. Phân Phối Gamma (Gamma Distribution)

Bài toán đặc trưng: Mô tả tổng thời gian chờ đợi X để có α sự kiện xảy ra trong một quá trình Poisson có cường độ λ. Ví dụ: nếu thời gian giữa các sự kiện là biến ngẫu nhiên mũ với tham số λ, thì tổng thời gian đến sự kiện thứ α có phân phối Gamma.

Tham số: α (tham số hình dạng), λ (tham số tốc độ)

PDF: $f(x)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}$ với $x>0$

Kỳ vọng: $E[X]=\frac{\alpha}{\lambda}$

Phương sai: $Var(X)=\frac{\alpha}{\lambda^2}$

Liên hệ với quá trình ngẫu nhiên: Trong quá trình Poisson, thời gian chờ đợi đến sự kiện thứ n có phân phối Gamma với tham số $\alpha=n$ và λ là cường độ của quá trình.

6. Phân Phối Hình Học (Geometric Distribution)

Bài toán đặc trưng: Tính số lần thử nghiệm X cần thiết để đạt được lần thành công đầu tiên trong một chuỗi các thử nghiệm Bernoulli độc lập, mỗi thử nghiệm có xác suất thành công p.

Tham số: p (xác suất thành công trong mỗi lần thử)

PMF: $P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$ với $k=1,2,3,\dots$

Kỳ vọng: $E[X] = \frac{1}{p}$

Phương sai: $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Tính chất không nhớ: $P(X > n + m|X > n) = P(X > m)$ với mọi $n, m \geq 0$

Liên hệ với quá trình ngẫu nhiên: Phân phối hình học xuất hiện trong xích Markov để mô tả số bước cần thiết để đi từ một trạng thái đến một trạng thái đích. Tính chất không nhớ của phân phối hình học tương tự như tính chất không nhớ của phân phối mũ.

7. Phân Phối Chi-Square (Chi-Squared Distribution)

Bài toán đặc trưng: Mô tả tổng bình phương của k biến ngẫu nhiên chuẩn chuẩn độc lập: $X = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_k^2$ với $Z_i \sim N(0, 1)$.

Tham số: k (bậc tự do)

PDF: $f(x) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} x^{k/2-1} e^{-x/2}$ với $x > 0$

Kỳ vọng: $E[X] = k$

Phương sai: $Var(X) = 2k$

Liên hệ với quá trình ngẫu nhiên: Trong quá trình Wiener, tổng bình phương của k quá trình Wiener độc lập có liên quan đến phân phối Chi-Square. Phân phối này thường xuất hiện trong kiểm định giả thuyết về quá trình ngẫu nhiên.

8. Phân Phối Đều (Uniform Distribution)

Bài toán đặc trưng: Mô tả các biến ngẫu nhiên X có xác suất đều trên một khoảng $[a, b]$.

Tham số: a (giá trị nhỏ nhất), b (giá trị lớn nhất)

PDF: $f(x) = \frac{1}{b-a}$ với $a \leq x \leq b$

Kỳ vọng: $E[X] = \frac{a+b}{2}$

Phương sai: $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Liên hệ với quá trình ngẫu nhiên: Phân phối đều xuất hiện trong mô hình hóa thời điểm xuất hiện của sự kiện trong quá trình Poisson trên một khoảng thời gian cố định. Điều kiện có n sự kiện trong khoảng $[0, t]$, thời điểm xuất hiện của các sự kiện này có phân phối như n biến ngẫu nhiên đều độc lập trên $[0, t]$ được sắp xếp theo thứ tự.