CHƯƠNG 2

PHƯƠNG TRÌNH PHI TUYẾN

NỘI DUNG

- I. GIỚI THIỆU
- II. PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐÔI
- III. PHƯƠNG PHÁP ĐIỂM BẤT ĐỘNG
- IV. PHƯƠNG PHÁP NEWTON-RAPHSON
- V. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP MỞ RỘNG CỦA PHƯƠNG PHÁP NEWTON RAPHSON
- VI. PHÂN TÍCH SAI SỐ CỦA CÁC PHƯƠNG PHÁP LẶP

I. GIỚI THIỆU

II. PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐÔI

- Nội dung này sẽ được nhóm HV tìm hiểu và báo cáo.

III. PHƯƠNG PHÁP ĐIỂM BẤT ĐỘNG

- Định nghĩa:

Số p được gọi là điểm bất động của hàm g nếu $g(p) = p$.

- Bài toán tìm nghiệm của phương trình và bài toán tìm điểm bất động tương đương nhau theo nghĩa:

- Cho phương trình $f(p) = 0$, ta có thể xác định hàm g với điểm bất động p như sau:

$$g(x) = x - f(x)$$

- Ngược lại, nếu hàm g có một điểm bất động p, thì hàm

$$f(x) = x - g(x)$$

bằng 0 tại p.

- Định lý 2.3: Điều kiện tồn tại và duy nhất

i) Nếu $g \in C[a,b]$ *và* $g(x) \in [a,b], \forall x \in [a,b]$ *thì* g *có ít nhất một điểm bất động trong [a,b].*

ii) Hơn nữa, nếu $g'(x)$ *tồn tại trên (a,b) và có một số dương* $k < 1$ *sao cho* $|g'(x)| \leq k, \forall x \in (a,b)$ *thì tồn tại duy nhất một điểm bất động thuộc* $[a,b]$.

- Chứng minh:

i)

Đặt $h(x) = g(x) - x$.

Ta có: $g(x) \in [a; b] \Leftrightarrow a \leq g(x) \leq b, \forall x \in [a; b]$. Suy ra, $h(a) = g(a) - a \geq 0$ và $h(b) = g(b) - b \leq 0$.

Xét các trường hợp:

- Nếu $a = g(a)$ hoặc $b = g(b)$ thì tồn tại điểm bất động là a hoặc b.
- Nếu $h(a) > 0$ và $h(b) < 0$ thì do hàm $h(x)$ liên tục trên $[a; b]$ nên theo định lý giá trị trung gian sẽ tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $h(c) = 0$ hay $g(c) = c$. (ĐPCM)

- Chứng minh:

ii) Giả sử tồn tại 2 điểm bất động $p \neq q$ và $|g'(x)| \leq k < 1, \forall x \in (a, b)$.

Theo định lý giá trị trung bình Lagrange: tồn tại số $\theta \in (p; q)$ sao cho

$$\frac{g(q) - g(p)}{q - p} = g'(\theta).$$

Vì

$$\begin{cases} |g(q) - g(p)| = |q - p| \\ |g(q) - g(p)| = |g'(\theta)(q - p)| \end{cases}$$

Mà $|g'(x)| \leq k < 1$ nên$|g'(\theta)(q - p)| < |q - p|$.

Nên $|q - p| < |q - p|$ suy ra điều vô lý.

Vậy $q = p$ hay tồn tại duy nhất 1 điểm bất động trong [a;b].

- Ví dụ 1: cho hàm số $g(x) = \frac{x^2-1}{3}$

1) Chứng minh $g(x)$ có duy nhất một điểm bất động trong $[-1; 1]$.

2) Giải tìm các điểm bất động của $g(x)$.

3) Các điểm bất động tìm được ở câu 2) có thỏa điều kiện đủ ii) ở định lý trên không? Tại sao?

- Ví dụ 2: cho hàm số $g(x) = 3^{-x}$

1) Kiểm định lý 2.3 trên đoạn [0;1].

2) Hàm $g(x)$ có tồn tại duy nhất điểm bất động không? Giải thích?

3) Kết quả ở câu 2) có mâu thuẫn với định lý 2.3 không? Giải thích?

Phương pháp lặp điểm bất động

- Để xấp xỉ điểm bất động của hàm $g(x)$, ta chọn giá trị xấp xỉ ban đầu p_0 và tạo dãy (p_n) bằng cách cho $p_n = g(p_{n-1})$. Nếu p_n hội tụ và p và g liên tục thì

$$p = \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} g(p_{n-1}) = g(\lim_{n\to\infty} p_{n-1}) = g(p).$$

Và nghiệm phương trình $g(x) = x$ được giải. Xem minh họa hình 2.7/60.

- Yêu cầu:

- Đọc hiểu thuật toán điểm bất động và vẽ sơ đồ khối.
- Lập trình thuật toán điểm bất động bằng phần mềm PYTHON.
- Giải phương trình $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ tìm nghiệm trên đoạn $[1; 2]$. Dùng code PYTHON để kiểm tra kết quả.

- Định lý 2.4: Định lý điểm bất động

Cho $g \in C[a,b]$ *và* $g(x) \in [a,b], \forall x \in [a,b]$. *Hơn nữa, nếu* $g'(x)$ *tồn tại trên (a,b) và có một số dương* $k < 1$ *sao cho* $|g'(x)| \leq k, \forall x \in (a,b)$. *Thì; với một số* p_0 *bất kỳ trong* $[a,b]$, *dãy*

$$p_n = g(p_{n-1}), \forall n \geq 1,$$

hội tụ về một điểm bất động duy nhất p thuộc $[a,b]$.

- Chứng minh: Định lý 2.4

Các giả thiết định lý 2.4 thỏa điều kiện 2.3 nên tồn tại duy nhất điểm bất động p trong $[a;b]$ thỏa $p = g(p)$. Áp dụng định lý giá trị trung bình Lagrange cho dãy lặp $(p_n) = g(p_{n-1})$, với mỗi n,

$|p_n - p| = |g(p_{n-1}) - g(p)| = |g'(\theta)(p_{n-1} - p)| \leq k|p_{n-1} - p|,$

trong đó $\theta \in [a;b]$. Áp dụng bất đẳng thức liên tục ta được

$$|p_n - p| \leq k|p_{n-1} - p| \leq \ k^2|p_{n-2} - p| \leq \cdots \leq k^n|p_0 - p|.$$

Vì $0 < k < 1$ nên (p_n) hội tụ về p.

- Hệ quả 2.5:

Nếu hàm g thỏa các điều kiện của định lý 2.4, thì sai số của phép xấp xỉ p của dãy lặp p_n bị chặn bởi

$$|p_n - p| \leq k^n \max\{p_0 - a, b - p_0\},$$

và

$$|p_n - p| \leq \frac{k^n}{1-k}|p_1 - p_0|, \forall n \geq 1.$$

- Chứng minh: đọc thêm trong giáo trình, trang 63.

- Hệ quả cho thấy: Việc biến đổi bài toán tìm nghiệm thành bài toán điểm bất động thỏa mãn các điều kiện của Định lý điểm bất động 2.4 và có đạo hàm nhỏ nhất có thể gần điểm bất động.

IV. PHƯƠNG PHÁP NEWTON-RAPHSON

- Xây dựng phương pháp: Sử dụng đa thức Taylor.
- Giả sử $f \in C^2[a;b]$. Cho $p_0 \in [a;b]$ là một nghiệm xấp xỉ của p sao cho $f'(p_0) \neq 0$ và $|p - p_0|$ đủ bé. Xét khai triển Taylor cấp 1 của hàm $f(x)$ quanh điểm p_0

$$f(x) = f(p_0) + (x - p_0)f'(p_0) + \frac{1}{2}(x - p_0)^2 f"(\theta(x)),$$

tại $x = p$

$$f(p) = f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0) + \frac{1}{2}(p - p_0)^2 f"(\theta(p)),$$

trong đó, $\theta(p)$ là một số giữa p và p_0. Vì $f(p) = 0$ nên

$$f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0) + \frac{1}{2}(p - p_0)^2 f"(\theta(p)) = 0.$$

Phương pháp lặp Newton có được bằng cách giả thiết $|p - p_0|$ đủ bé

$$f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0) \approx 0.$$

Giải p ta được

$$p \approx p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)} \equiv p_1.$$

Từ đây ta xây dựng được dãy lặp (p_n) của phương pháp Newton với giá trị đầu là p_0

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}, n \geq 1.$$

Xem minh họa phương pháp Newton ở hình vẽ 2.8/68.

- Yêu cầu:

- Đọc hiểu thuật toán Newton và vẽ sơ đồ khối.
- Lập trình thuật toán Newton bằng phần mềm PYTHON.
- Giải phương trình $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ tìm nghiệm trên đoạn $[1; 2]$. Dùng code PYTHON để kiểm tra kết quả.

- Lưu ý:

- Do phương pháp Newton được đánh giá dựa trên khai triển Taylor quanh giá trị đầu p_0 nên việc chọn p_0 đóng vai trò quan trọng trong phương pháp này.

- Định lý 2.6:

Cho $f \in C^2[a;b]$. *Nếu* $p \in (a;b)$ *thỏa* $f(p) = 0$ *và* $f'(p) \neq 0$, *thì tồn tại số* $\delta > 0$, *để phương pháp Newton tạo ra một dãy* (p_n) *hội tụ về* p *với giá trị đầu bất kỳ* $p_0 \in [p - \delta; p + \delta]$.

- Định lý 2.6 chỉ ra sự tồn tại số δ để khi chọn giá trị ban đầu $p_0 \in [p - \delta; p + \delta]$ đảm bảo sự hội tụ của phương pháp. Tuy nhiên, không có phương pháp để tìm số δ.

V. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP MỞ RỘNG CỦA PHƯƠNG PHÁP NEWTON RAPHSON

- Học viên tự tìm hiểu và trình bày trong báo cáo giữa kỳ các phương pháp: Dây cung (Secant method) và False position.

VI. PHÂN TÍCH SAI SỐ CỦA CÁC PHƯƠNG PHÁP LẶP

- Bậc hội tụ
- Định nghĩa 2.7:

Giả sử dãy (p_n) *hội tụ về p, với* $p_n \neq p, \forall n$. *Nếu tồn tại các hằng số dương* λ *và* α *sao cho*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1}-p|}{|p_n-p|^{\alpha}} = \lambda$$

thì ta nói (p_n) *hội tụ bậc* α *về p, với sai số tiệm cận hằng* λ.

- Phương pháp lặp có dạng $p_n = \mathrm{g}(p_{n-1})$ có bậc α nếu dãy (p_n) *hội tụ bậc* α về nghiệm $p = g(p)$.

i) Nếu $\alpha = 1$ (và $\lambda < 1$) thì dãy hội tụ tuyến tính.

ii) Nếu $\alpha = 2$ thì dãy hội tụ bậc hai.

- Bậc hội tụ
- Xem thêm phần minh họa bậc hôi tụ trang 79.

- Bậc hội tụ
- Định lý 2.8:

Cho $g \in C[a;b]$ *và* $g(x) \in [a;b], \forall x \in [a;b]$. *Hơn nữa, nếu* $g'(x)$ *liên tục trên (a,b) và có một số dương* $k < 1$ *sao cho*

$$|g'(x)| \leq k, \forall x \in (a,b).$$

Nếu $g'(p) \neq 0$ *thì với số* $p_0 \neq p$ *thuộc* $[a;b]$, *dãy*

$$p_n = g(p_{n-1}), \forall n \geq 1,$$

hội tụ tuyến tính về điểm bất động duy nhất p thuộc $[a,b]$.

- Xem chứng minh trang 80.
- Định lý cũng ám chỉ, sự hội tụ bậc cao cho phương pháp điểm bất động có dạng $g(p) = p$ chỉ có thể xảy ra khi $g'(p) = 0$.

- Bậc hội tụ
- Định lý 2.9:

Cho p là nghiệm của phương trình $x = g(x)$. Giả sử $g'(p) = 0$ và g'' liên tục với $|g''(x)| < M$ trên khoảng mở I chứa p. Thì tồn tại $\delta > 0$ để cho, với $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$ dãy $p_n = g(p_{n-1})$ hội tụ ít nhất đến bậc hai về p. Hơn nữa, với số n đủ lớn

$$|p_{n+1} - p| < \frac{M}{2}|p_n - p|^2.$$

- Chứng minh: Định lý 2.9

Chọn $k \in (0;1)$ và $\delta > 0$ sao cho trong khoảng mở I chứa $[p - \delta; p + \delta]$, ta có $|g'(x)| \leq k$ và g'' liên tục. Vì $|g'(x)| \leq k < 1$, theo lập luận ở định lý 2.6 ta chứng minh được rằng các số hạng của dãy (p_n) chứa trong $[p - \delta; p + \delta]$. Khai triển Taylor bậc 1 tại p của hàm $g(x)$

$$g(x) = g(p) + (x - p)g'(p) + \frac{1}{2}(x - p)^2 g"(\theta),$$

trong đó θ ở giữa x và p. Do giả thiết $g(p) = p$ và $g'(p) = 0$

$$g(x) = p + \frac{1}{2}(x - p)^2 g"(\theta).$$

với $x = p_n$

$$p_{n+1} = g(p_n) = p + \frac{1}{2}(p_n - p)^2 g"(\theta_n),$$

Trong đó θ_n ở giữa p_n và p.

- Chứng minh: Định lý 2.9 tiếp theo

Do đó,

$$p_{n+1} - p = \frac{1}{2}(p_n - p)^2 g"(\theta_n).$$

Vì $|g'(x)| \leq k < 1$ trên $[p - \delta; p + \delta]$ và $g(x) \in [p - \delta; p + \delta]$, theo định lý điểm bất động thì dãy (p_n) hội tụ về p. Hơn nữa, do θ_n ở giữa p_n và p với mỗi n nên dãy (θ_n) cũng hội tụ về p, và

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^2} = \frac{|g''(p)|}{2}.$$

Suy ra, dãy (p_n) hội tụ bậc 2 về p nếu $g''(p) \neq 0$ và bậc cao hơn nếu $g''(p) = 0$.

Do g'' liên tục và bị chặn (ngặt) bởi M trên $[p - \delta; p + \delta]$, nên với n đủ lớn thì

$$|p_{n+1} - p| < \frac{M}{2}|p_n - p|^2.$$

- Định lý 2.8 và định lý 2.9 chỉ ra rằng: để tìm các phương pháp điểm bất động hội tụ bậc 2 thì cần tìm các hàm có đạo hàm bằng không tại điểm bất động. Cụ thể:
  - Đối với một phương pháp điểm bất động hội tụ bậc hai chúng ta cần $g(p) = p$ và $g'(p) = 0$.

- Thủ tục đơn giản nhất để xây dựng bài toán điểm bất động từ bài toán tìm nghiệm phương trình $f(x) = 0$: cộng hoặc trừ x với bội của $f(x)$.
- Xét dãy có $p_n = g(p_{n-1})$, cho hàm $g(x)$ có dạng

$$g(x) = x - \phi(x)f(x),$$

trong đó ϕ là hàm khả vi được chọn sau. Để hội tụ bậc 2, ta cần $g'(p) = 0$ khi $f(p) = 0$. Vì

$$g'(x) = 1 - \phi'(x)f(x) - \phi(x)f'(x),$$

và $f(p) = 0$, ta có

$$g'(p) = 1 - \phi'(p)f(p) - \phi(p)f'(p) = 1 - \phi(p)f'(p),$$

và $g'(p) = 0$ khi và chỉ khi $\phi(p) = \frac{1}{f'(p)}$.

Nếu ta chọn $\phi(x) = \frac{1}{f'(x)}$ thì sẽ luôn đảm bảo $\phi(p) = \frac{1}{f'(p)}$ và sinh ra dãy lập hội tụ bậc hai

$$p_n = g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}.$$

- Nếu $f(p) = 0$ và $f'(p) \neq 0$, thì với giá trị đầu p_0 đủ gần p thì phương pháp Newton sẽ hội tụ ít nhất là bậc 2.