Metric Spaces

1.1 Không gian Metric

Giới thiệu trực quan

Trong toán học, đặc biệt là giải tích, chúng ta thường làm việc với các số thực trên đường thẳng số (gọi là $\mathbf{R}$). Khi nghiên cứu các hàm số trên $\mathbf{R}$, một khái niệm rất quan trọng là "khoảng cách" giữa hai điểm, ví dụ như khoảng cách từ x đến y được tính bằng $|x-y|$. Khoảng cách này giúp chúng ta hiểu các khái niệm như giới hạn, liên tục, hay hội tụ. Nhưng nếu ta muốn mở rộng ý tưởng này sang những tập hợp trừu tượng hơn, không chỉ là số thực, thì sao? Đây chính là lúc khái niệm "không gian metric" ra đời.

Không gian metric là một cách tổng quát hóa ý tưởng về khoảng cách. Thay vì chỉ làm việc với đường thẳng số $\mathbf{R}$, ta có thể làm việc với bất kỳ tập hợp nào (gọi là X), miễn là ta định nghĩa được một "hàm khoảng cách" (gọi là d) thỏa mãn một số tính chất cơ bản giống khoảng cách thông thường. Những tính chất này được gọi là "các tiên đề" (axioms), và chúng được lấy cảm hứng từ khoảng cách quen thuộc trong cuộc sống.

Định nghĩa 1.1-1: Không gian Metric và Hàm Metric

Một **không gian metric** là một cặp (X, d), trong đó:

- X là một tập hợp bất kỳ (các phần tử của X được gọi là "điểm").
- d là một hàm (gọi là **metric** hoặc hàm khoảng cách) từ $X \times X$ (tức là tất cả các cặp điểm (x, y) trong X) sang các số thực, thỏa mãn 4 tiên đề sau:

1. **(M1) Tính không âm**: $d(x, y)$ là một số thực, hữu hạn và không âm, tức là $d(x, y) \geq 0$.
   - Ý nghĩa: Khoảng cách không bao giờ âm, giống như trong thực tế.
2. **(M2) Tính đồng nhất**: $d(x, y) = 0$ nếu và chỉ nếu $x = y$.
   - Ý nghĩa: Khoảng cách giữa hai điểm bằng 0 chỉ khi chúng là cùng một điểm.
3. **(M3) Tính đối xứng**: $d(x, y) = d(y, x)$.
   - Ý nghĩa: Khoảng cách từ x đến y bằng khoảng cách từ y đến x, giống như khi bạn đi từ nhà đến trường và ngược lại.
4. **(M4) Bất đẳng thức tam giác**: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ với mọi $x, y, z \in X$.
   - Ý nghĩa: Đường đi thẳng từ x đến y luôn ngắn hơn hoặc bằng đường đi qua một điểm trung gian z. Đây là nguyên lý "đường thẳng là ngắn nhất" trong hình học.

Hàm $d(x, y)$ được gọi là **khoảng cách** từ x đến y. Tập X được gọi là **tập cơ sở** của không gian metric (X, d).

Ví dụ minh họa:

- Xét $X = \mathbf{R}$ (tập số thực) và $d(x, y) = |x-y|$:
  - (M1): $|x-y| \geq 0$, luôn đúng.
  - (M2): $|x-y| = 0$ chỉ khi $x = y$, đúng.
  - (M3): $|x-y| = |y-x|$, đúng vì giá trị tuyệt đối không đổi khi đổi thứ tự.
  - (M4): $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$, đây là bất đẳng thức tam giác quen thuộc trong đại số. Ví dụ, nếu $x = 1$, $y = 3$, $z = 2$, thì $|1-3| = 2 \leq |1-2| + |2-3| = 1 + 1 = 2$, thỏa mãn.

Vậy $(\mathbf{R}, d)$ với $d(x, y) = |x-y|$ là một không gian metric.

Không gian con (Subspace)

Nếu ta lấy một tập con $Y \subset X$ và giữ nguyên hàm metric d, nhưng chỉ áp dụng cho các cặp điểm trong Y (gọi là $\tilde{d} = d|_{Y \times Y}$), thì $(Y, \tilde{d})$ là một **không gian con** của (X, d). Metric $\tilde{d}$ được gọi là **metric cảm sinh** từ d.

Ví dụ minh họa:

- Lấy $X = \mathbf{R}$, $d(x, y) = |x-y|$, và $Y = [0, 1]$ (khoảng đóng từ 0 đến 1). Khi đó, $(Y, \tilde{d})$ với $\tilde{d}(x, y) = |x-y|$ cho $x, y \in [0, 1]$ là một không gian con. Ví dụ, khoảng cách từ 0 đến 1 trong Y vẫn là $|0-1| = 1$.

Các ví dụ cụ thể về không gian Metric

Dưới đây là một số không gian metric phổ biến được liệt kê trong tài liệu, kèm giải thích và ví dụ:

1. **1.1-2 Đường thẳng thực $\mathbf{R}$**

- Tập hợp: $X = \mathbf{R}$ (tất cả các số thực).
- Metric: $d(x, y) = |x - y|$.
- Giải thích: Đây là khoảng cách thông thường trên đường thẳng số.
- Ví dụ: $d(2, 5) = |2 - 5| = 3$.

2. **1.1-3 Mặt phẳng Euclid $\mathbf{R}^2$**
   - Tập hợp: $X = \mathbf{R}^2$ (các cặp số thực (x_1, x_2)).
   - Metric Euclid: $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$, với $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$.
   - Giải thích: Đây là khoảng cách thẳng giữa hai điểm trên mặt phẳng, tính bằng định lý Pythagoras.
   - Ví dụ: $x = (1, 2)$, $y = (4, 6)$, thì $d(x, y) = \sqrt{(1-4)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$.
   - Metric khác (taxicab): $d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$.
   - Giải thích: Đây là khoảng cách "đi theo đường phố" (như taxi ở thành phố có lưới vuông), không phải đường thẳng.
   - Ví dụ: Với $x = (1, 2)$, $y = (4, 6)$, thì $d_1(x, y) = |1 - 4| + |2 - 6| = 3 + 4 = 7$.
3. **1.1-4 Không gian Euclid ba chiều $\mathbf{R}^3$**
   - Tập hợp: $X = \mathbf{R}^3$ (các bộ ba số thực (x_1, x_2, x_3)).
   - Metric: $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$.
   - Ví dụ: $x = (1, 0, 2)$, $y = (2, 1, 3)$, thì $d(x, y) = \sqrt{(1-2)^2 + (0-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$.
4. **1.1-5 Không gian Euclid $\mathbf{R}^n$, Không gian đơn vị $\mathbf{C}^n$, Mặt phẳng phức $\mathbf{C}$**
   - $\mathbf{R}^n$: Tập hợp các bộ n số thực, metric $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$.
   - $\mathbf{C}^n$: Tập hợp các bộ n số phức, metric $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$.
   - $\mathbf{C}$ (khi $n = 1$): Mặt phẳng phức, $d(x, y) = |x - y|$.
   - Ví dụ $\mathbf{R}^n$ ($n = 2$): $x = (1, 2)$, $y = (3, 4)$, $d(x, y) = \sqrt{(1-3)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
5. **1.1-6 Không gian dãy l^∞**
   - Tập hợp: X là tập tất cả các dãy số phức bị chặn $(x_1, x_2, \ldots)$, tức là $|x_i| \leq c$ với c cố định.
   - Metric: $d(x, y) = \sup_i |x_i - y_i|$ (supremum là giá trị lớn nhất).
   - Giải thích: Khoảng cách là giá trị lớn nhất của sự chênh lệch giữa các phần tử tương ứng của hai dãy.
   - Ví dụ: $x = (1, 2, 3, \ldots)$, $y = (1, 1, 1, \ldots)$, thì $d(x, y) = \sup |x_i - y_i| = \sup\{0, 1, 2, \ldots\} = \infty$, nhưng vì x không bị chặn, ta chỉ xét các dãy bị chặn, ví dụ $x = (1, 1/2, 1/3, \ldots)$, $y = (1, 1, 1, \ldots)$, thì $d(x, y) = \sup\{0, 1/2, 2/3, \ldots\} = 1$.
6. **1.1-7 Không gian hàm $C[a, b]$**
   - Tập hợp: X là tập tất cả các hàm thực liên tục trên đoạn $[a, b]$.
   - Metric: $d(x, y) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$.
   - Giải thích: Khoảng cách là độ chênh lệch tối đa giữa hai hàm tại mọi điểm trên $[a, b]$.
   - Ví dụ: Trên $[0, 1]$, $x(t) = t$, $y(t) = t^2$, thì $d(x, y) = \max |t - t^2| = \max_{t \in [0,1]} t(1 - t) = 1/4$ (đạt tại $t = 1/2$).
7. **1.1-8 Không gian metric rời rạc**
   - Tập hợp: X là bất kỳ tập hợp nào.
   - Metric: $d(x, y) = 0$ nếu $x = y$, $d(x, y) = 1$ nếu $x \neq y$.
   - Giải thích: Đây là metric đơn giản nhất, chỉ có hai giá trị: 0 nếu hai điểm trùng nhau, 1 nếu khác nhau.
   - Ví dụ: $X = \{a, b, c\}$, thì $d(a, a) = 0$, $d(a, b) = 1$.

Bất đẳng thức tam giác tổng quát

Từ (M4), ta suy ra bất đẳng thức tam giác tổng quát bằng quy nạp:

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n).$$

- Giải thích: Khoảng cách từ điểm đầu đến điểm cuối không vượt quá tổng các khoảng cách của các đoạn nối tiếp.
- Ví dụ: Trong $\mathbf{R}^2$, $x_1 = (0, 0)$, $x_2 = (1, 0)$, $x_3 = (1, 1)$, thì $d(x_1, x_3) = \sqrt{2} \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) = 1 + 1 = 2$.

Kết luận

Phần 1.1 giới thiệu khái niệm không gian metric như một cách mở rộng ý tưởng khoảng cách từ đường thẳng thực sang các tập hợp tổng quát. Các tiên đề (M1) đến (M4) đảm bảo rằng hàm khoảng cách giữ được các tính chất cơ bản, và qua các ví dụ, ta thấy không gian metric rất đa dạng, từ số thực, mặt phẳng, đến các dãy số hay hàm liên tục. Đây là nền tảng cho các khái niệm tiếp theo như hội tụ, tính đầy đủ trong các phần sau.

1.2 Các ví dụ khác về Không gian Metric

Giới thiệu trực quan

Ở phần 1.1, chúng ta đã làm quen với khái niệm không gian metric qua các ví dụ cơ bản như đường thẳng thực $\mathbf{R}$, mặt phẳng Euclid $\mathbf{R}^2$, hay không gian hàm $C[a,b]$. Phần 1.2 sẽ đưa ra thêm các ví dụ phức tạp hơn để minh họa tính đa dạng của khái niệm này, đồng thời tập trung vào việc kiểm tra các tiên đề metric, đặc biệt là bất đẳng thức tam giác (M4), vốn thường là phần khó nhất để chứng minh. Các không gian này không chỉ mang tính lý thuyết mà còn có ứng dụng thực tế trong nhiều lĩnh vực.

1.2-1 Không gian dãy s

- **Tập hợp**: X là tập hợp tất cả các dãy số phức (có thể bị chặn hoặc không bị chặn), tức là $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ với $x_i \in \mathbf{C}$.
- **Metric**:

$$d(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|}$$

  với $x = (x_j)$, $y = (y_j)$.
- **Giải thích trực quan**:
  - Đây là một cách "nén" khoảng cách giữa các dãy để tổng vô hạn luôn hội tụ. Hệ số $\frac{1}{2^j}$ làm giảm ảnh hưởng của các phần tử ở vị trí sau (càng xa về sau, giá trị càng nhỏ).
  - Phần $\frac{|x_j-y_j|}{1+|x_j-y_j|}$ chuẩn hóa khoảng cách giữa x_j và y_j, luôn nhỏ hơn 1, giúp tổng không vượt quá $\sum \frac{1}{2^j} = 1$.
- **Kiểm tra bất đẳng thức tam giác (M4)**:
  - Xét hàm $f(t) = \frac{t}{1+t}$ (với $t \geq 0$). Hàm này tăng đơn điệu (do $f'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0$), và từ bất đẳng thức $|a+b| \leq |a| + |b|$, ta suy ra:

$$f(|a+b|) \leq f(|a| + |b|).$$

  - Áp dụng với $a = x_j - z_j$, $b = z_j - y_j$, ta có $a + b = x_j - y_j$, và:

$$\frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|} \leq \frac{|x_j - z_j|}{1 + |x_j - z_j|} + \frac{|z_j - y_j|}{1 + |z_j - y_j|}.$$

  - Nhân cả hai vế với $\frac{1}{2^j}$ và lấy tổng từ $j = 1$ đến ∞, ta được:

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$$

  - Vậy s là một không gian metric.
- **Ví dụ minh họa**:
  - Lấy $x = (1, 2, 3, \ldots)$, $y = (1, 1, 1, \ldots)$, $z = (1, 1.5, 2, \ldots)$.
  - Tính $d(x,y)$: $|x_1 - y_1| = 0$, $|x_2 - y_2| = 1$, $|x_3 - y_3| = 2$, ...
  - $d(x,y) = \frac{0}{2} + \frac{1}{2^2(1+1)} + \frac{2}{2^3(1+2)} + \cdots \approx 0.125 + 0.0833 + \cdots < 1.$
  - Kiểm tra $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ bằng cách tính tương tự, ta thấy bất đẳng thức thỏa mãn.

1.2-2 Không gian hàm bị chặn $B(A)$

- **Tập hợp**: $X = B(A)$ là tập tất cả các hàm $x : A \to \mathbf{R}$ (hoặc $\mathbf{C}$) bị chặn trên tập A bất kỳ (tức là tồn tại M sao cho $|x(t)| \leq M$ với mọi $t \in A$).
- **Metric**:

$$d(x,y) = \sup_{t \in A} |x(t) - y(t)|.$$

- **Giải thích trực quan**:
  - Khoảng cách là giá trị lớn nhất của sự chênh lệch giữa hai hàm tại mọi điểm trong A. Nếu $A = [a,b]$, ta viết $B[a,b]$.
- **Kiểm tra các tiên đề**:
  - (M1): $\sup |x(t) - y(t)| \geq 0$, đúng.
  - (M2): $d(x,y) = 0$ thì $|x(t) - y(t)| = 0$ với mọi t, tức $x = y$, và ngược lại.
  - (M3): $\sup |x(t) - y(t)| = \sup |y(t) - x(t)|$, đúng.
  - (M4): Với mọi t, $|x(t) - y(t)| \leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)|$, lấy $\sup$ hai vế:

$$\sup |x(t) - y(t)| \leq \sup |x(t) - z(t)| + \sup |z(t) - y(t)|,$$

    tức là $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.
- **Ví dụ minh họa**:
  - Trên $A = [0,1]$, $x(t) = t$, $y(t) = t^2$.
  - $d(x,y) = \sup_{t \in [0,1]} |t - t^2| = \sup t(1-t) = 0.25$ (tại $t = 0.5$).
  - Thêm $z(t) = 0.5t$, kiểm tra $d(x,y) = 0.25 \leq d(x,z) + d(z,y) = 0.5 + 0.25 = 0.75$, thỏa mãn.

1.2-3 Không gian l^p, Không gian dãy Hilbert l^2, Bất đẳng thức Hölder và Minkowski

- **Tập hợp**: $X = l^p$ là tập các dãy $x = (x_1, x_2, \dots)$ sao cho $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty$ ($p \geq 1$ cố định).
- **Metric**:

$$d(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j|^p \right)^{1/p}.$$

- **Trường hợp đặc biệt** $p = 2$: l^2 là không gian Hilbert với $d(x, y) = \sqrt{\sum |x_j - y_j|^2}$.
- **Giải thích trực quan**:
  - l^p gồm các dãy mà "năng lượng" (tổng lũy thừa p) là hữu hạn. Với $p = 2$, đây là không gian quen thuộc trong vật lý và giải tích, liên quan đến độ dài vector.
- **Chứng minh l^p là không gian metric**:
  - (M1), (M2), (M3) dễ thấy nếu tổng hội tụ.
  - (M4) cần chứng minh qua các bước:
    - **(a) Bất đẳng thức phụ**: Với $p > 1$, $q = \frac{p}{p-1}$ (số mũ liên hợp), ta có:

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q} \quad (\alpha, \beta > 0).$$

    - **(b) Bất đẳng thức Hölder**:

$$\sum |x_j y_j| \leq \left(\sum |x_j|^p \right)^{1/p} \left(\sum |y_j|^q \right)^{1/q}.$$

      Khi $p = 2$, $q = 2$, ta được bất đẳng thức Cauchy-Schwarz.
    - **(c) Bất đẳng thức Minkowski**:

$$\left(\sum |x_j + y_j|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum |x_j|^p \right)^{1/p} + \left(\sum |y_j|^p \right)^{1/p}.$$

    - **(d) Từ (c)**: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ được suy ra trực tiếp.
- **Ví dụ minh họa (l^2)**:
  - $x = (1, 0, 0, \dots)$, $y = (0, 1, 0, \dots)$, $z = (1, 1, 0, \dots)$.
  - $d(x, y) = \sqrt{|1 - 0|^2 + |0 - 1|^2} = \sqrt{2}$.
  - $d(x, z) = \sqrt{|1 - 1|^2 + |0 - 1|^2} = 1$, $d(z, y) = \sqrt{|1 - 0|^2 + |1 - 1|^2} = 1$.
  - Kiểm tra: $\sqrt{2} \leq 1 + 1 = 2$, thỏa mãn.

Kết luận

Phần 1.2 mở rộng khái niệm không gian metric với các ví dụ từ dãy số (s, l^p) đến hàm bị chặn ($B(A)$), nhấn mạnh cách kiểm tra bất đẳng thức tam giác. Các không gian như l^2 (Hilbert) có vai trò quan trọng trong giải tích hàm và ứng dụng thực tế.

1.3 Tập mở, Tập đóng, Lân cận

Giới thiệu trực quan

Trong phần trước, ta đã hiểu không gian metric là gì và làm quen với một số ví dụ. Bây giờ, ta sẽ khám phá các khái niệm phụ trợ quan trọng trong không gian metric: tập mở (open set), tập đóng (closed set), và lân cận (neighborhood). Những khái niệm này giúp ta phân loại các tập hợp con trong không gian metric, đồng thời liên kết với các ý tưởng quen thuộc trong giải tích như liên tục hay hội tụ. Chúng được lấy cảm hứng từ hình học Euclid (như mặt phẳng hay không gian 3 chiều), nhưng trong không gian metric tổng quát, chúng có thể mang những tính chất bất ngờ.

Hãy tưởng tượng bạn đứng ở một điểm trên mặt phẳng và vẽ một vòng tròn xung quanh. Khu vực bên trong vòng tròn là "mở" vì bạn luôn có thể di chuyển một chút mà không ra ngoài. Khu vực gồm cả vòng tròn là "đóng" vì nó bao gồm ranh giới. Trong không gian metric, ta sẽ định nghĩa các khái niệm này một cách chính xác hơn.

1.3-1 Định nghĩa: Quả cầu và Vành đai

Cho một không gian metric (X, d), điểm $x_0 \in X$, và số thực $r > 0$, ta định nghĩa:

- **Quả cầu mở** (Open ball):

$$B(x_0; r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}.$$

  - Đây là tập hợp tất cả các điểm cách x_0 ít hơn r.

- **Quả cầu đóng** (Closed ball):

$$\tilde{B}(x_0; r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}.$$

  - Bao gồm cả các điểm cách x_0 đúng bằng r.
- **Vành đai** (Sphere):

$$S(x_0; r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) = r\}.$$

  - Chỉ gồm các điểm cách x_0 đúng bằng r.
- x_0 là **tâm**, r là **bán kính**.

Quan hệ: $S(x_0; r) = \tilde{B}(x_0; r) - B(x_0; r)$, tức vành đai là "ranh giới" của quả cầu đóng.

Ví dụ minh họa:

- Trong $\mathbf{R}$ với $d(x, y) = |x - y|$:
  - $B(0; 1) = (-1, 1)$ (khoảng mở từ -1 đến 1).
  - $\tilde{B}(0; 1) = [-1, 1]$ (khoảng đóng).
  - $S(0; 1) = \{-1, 1\}$ (hai điểm biên).
- Trong metric rời rạc (1.1-8), $X = \{a, b, c\}$, $d(x, y) = 1$ nếu $x \neq y$, $d(x, x) = 0$:
  - $B(a; 1) = \{a\}$ (chỉ có a vì $d(a, b) = 1 \not< 1$).
  - $S(a; 1) = \{b, c\}$ (các điểm cách a đúng 1).
  - $S(a; 0.5) = \emptyset$ (không điểm nào cách a đúng 0.5).

Lưu ý: Trong không gian metric tổng quát, vành đai có thể rỗng, không giống hình học Euclid.

1.3-2 Định nghĩa: Tập mở và Tập đóng

- **Tập mở**: Một tập $M \subset X$ là **mở** nếu quanh mỗi điểm của M có một quả cầu mở hoàn toàn nằm trong M.
  - Ý nghĩa: Không điểm nào của M nằm "sát biên", bạn luôn có không gian để "di chuyển" trong M.
- **Tập đóng**: Một tập $K \subset X$ là **đóng** nếu phần bù của nó ($X - K$) là mở.
  - Ý nghĩa: K chứa toàn bộ "ranh giới" của nó.

Hệ quả trực tiếp:

- Quả cầu mở $B(x_0; r)$ là tập mở (vì quanh mỗi điểm trong $B(x_0; r)$ có thể lấy một quả cầu nhỏ hơn nằm trong nó).
- Quả cầu đóng $\tilde{B}(x_0; r)$ là tập đóng (phần bù của nó là mở).

Ví dụ minh họa:

- Trong $\mathbf{R}$:
  - $(0, 1)$ là mở vì quanh mỗi $x \in (0, 1)$, ta lấy $r = \min(x, 1 - x)$, thì $B(x; r) \subset (0, 1)$.
  - $[0, 1]$ là đóng vì phần bù $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ là mở.
- Trong metric rời rạc $X = \{a, b\}$:
  - $\{a\}$ là mở vì $B(a; 0.5) = \{a\} \subset \{a\}$.
  - $\{a\}$ cũng là đóng vì phần bù $\{b\}$ là mở.

Lân cận (Neighborhood)

- **Quả cầu ε-lân cận**: $B(x_0; \varepsilon)$ với $\varepsilon > 0$.
- **Lân cận của x_0**: Bất kỳ tập nào chứa một ε-lân cận của x_0.
- **Điểm trong (Interior point)**: x_0 là điểm trong của M nếu M là lân cận của x_0.
- **Phần trong (Interior)**: Tập hợp tất cả điểm trong của M, ký hiệu M^0 hoặc $\operatorname{Int}(M)$, là tập mở lớn nhất chứa trong M.

Ví dụ minh họa:

- Trong $\mathbf{R}$, $M = [0, 1)$:
  - $x = 0.5$ là điểm trong vì $B(0.5; 0.4) = (0.1, 0.9) \subset [0, 1)$.
  - $x = 0$ không là điểm trong vì mọi $B(0; \varepsilon)$ chứa số âm, không nằm trong $[0, 1)$.
  - $\operatorname{Int}([0, 1)) = (0, 1)$.

Tính chất của tập mở

Tập hợp tất cả tập mở trong X (gọi là $\mathscr{T}$) có các tính chất:

- **(T1)**: $\emptyset$ và X là mở.
- **(T2)**: Hợp của bất kỳ số tập mở nào cũng là mở.
- **(T3)**: Giao của hữu hạn tập mở là mở.

Ví dụ minh họa:

- Trong $\mathbf{R}$:
  - $\emptyset$ không có điểm nên là mở, $X = \mathbf{R}$ chứa mọi quả cầu.
  - $(0,1) \cup (2,3)$ là mở.
  - $(0,1) \cap (0.5,2) = (0.5,1)$ là mở.

1.3-3 Định nghĩa: Ánh xạ liên tục

Cho (X,d) và $(Y,\bar{d})$ là hai không gian metric, ánh xạ $T : X \to Y$ là **liên tục tại** $x_0 \in X$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho:

$$d(x,x_0) < \delta \implies \bar{d}(Tx,Tx_0) < \varepsilon.$$

T liên tục nếu nó liên tục tại mọi điểm.

Ví dụ minh họa:

- $X = Y = \mathbf{R}$, $T(x) = x^2$. Tại $x_0 = 1$, chọn $\varepsilon = 0.1$, ta cần $|x^2-1| < 0.1$ khi $|x-1| < \delta$. Giải $|x^2-1| = |x-1||x+1| < 0.1$, gần $x = 1$, $|x+1| \approx 2$, chọn $\delta = 0.05$, thì $|x-1| < 0.05 \implies |x^2-1| < 0.05 \cdot 2 = 0.1$, thỏa mãn.

1.3-4 Định lý: Ánh xạ liên tục

$T : X \to Y$ liên tục khi và chỉ khi ảnh ngược của mọi tập mở trong Y là tập mở trong X.

Chứng minh trực quan:

- Nếu T liên tục và $S \subset Y$ mở, quanh $Tx_0 \in S$ có quả cầu ε, T ánh xạ quả cầu δ quanh x_0 vào trong S, nên ảnh ngược S mở.
- Ngược lại, nếu ảnh ngược mở, quả cầu ε quanh Tx_0 có ảnh ngược chứa quả cầu δ quanh x_0, thỏa mãn định nghĩa liên tục.

Ví dụ minh họa:

- $T : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $T(x) = x^2$. Tập mở $(0,1) \subset Y$, ảnh ngược là $(-1,0) \cup (0,1)$, là mở trong X, nên T liên tục.

Điểm tụ (Accumulation point) và Bao đóng (Closure)

- **Điểm tụ**: x_0 là điểm tụ của M nếu mọi lân cận của x_0 chứa ít nhất một điểm $y \in M$ khác x_0.
- **Bao đóng**: $\bar{M}$ là tập gồm M và tất cả điểm tụ của M, là tập đóng nhỏ nhất chứa M.

Ví dụ minh họa:

- Trong $\mathbf{R}$, $M = (0,1)$:
  - $x = 0$ là điểm tụ vì mọi $B(0;\varepsilon)$ chứa điểm trong $(0,1)$.
  - $\bar{M} = [0,1]$.

1.3-5 Định nghĩa: Tập dày đặc và Không gian phân cách

- **Tập dày đặc**: M dày đặc trong X nếu $\bar{M} = X$.
  - Ý nghĩa: Mọi điểm trong X có thể "tiếp cận" bởi các điểm trong M.
- **Không gian phân cách**: X phân cách nếu có tập con đếm được dày đặc trong X.

Ví dụ minh họa:

- **1.3-6 Đường thẳng thực $\mathbf{R}$**: $\mathbf{Q}$ (số hữu tỷ) là đếm được và dày đặc (mọi số thực đều gần số hữu tỷ), nên $\mathbf{R}$ phân cách.
- **1.3-9 Không gian l^∞**: Không phân cách, vì tập các dãy chỉ gồm 0 và 1 là không đếm được, các quả cầu nhỏ quanh chúng không giao nhau, không thể có tập đếm được dày đặc.

Kết luận

Phần 1.3 giới thiệu các khái niệm cơ bản như tập mở, tập đóng, lân cận, liên tục, và tính phân cách, giúp phân tích cấu trúc của không gian metric. Các ví dụ minh họa sự khác biệt giữa không gian quen thuộc (như $\mathbf{R}$) và không gian tổng quát (như l^∞).

1.4 Hội tụ, Dãy Cauchy, Tính đầy đủ

Giới thiệu trực quan

Trong giải tích, khái niệm "hội tụ" (convergence) rất quen thuộc: một dãy số tiến gần đến một giá trị cố định khi chỉ số tăng vô hạn. Nhưng trong không gian metric tổng quát, điều gì xảy ra nếu dãy "muốn" hội tụ nhưng điểm đích lại không thuộc không gian? Để hiểu rõ điều này, ta cần xem xét "dãy Cauchy" (những dãy mà các phần tử cuối cùng rất gần nhau) và "tính đầy đủ" (completeness) – một tính chất đảm bảo mọi dãy Cauchy đều hội tụ trong không gian. Phần này sẽ làm rõ các khái niệm này và cho thấy chúng quan trọng như thế nào trong giải tích hàm.

Hãy tưởng tượng bạn đi trên một con đường: nếu các bước cuối cùng của bạn rất nhỏ và gần nhau (dãy Cauchy), bạn mong muốn đến được một điểm dừng (hội tụ). Tính đầy đủ là điều kiện để con đường đó "đủ dài" chứa điểm dừng ấy.

1.4-1 Định nghĩa: Hội tụ của dãy

Một dãy (x_n) trong không gian metric (X, d) **hội tụ** đến $x \in X$ (ký hiệu $x_n \to x$) nếu:
[
\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0.
]

- **Ý nghĩa**: Khoảng cách từ x_n đến x nhỏ dần về 0 khi n tăng.

Ví dụ minh họa:

- Trong $\mathbf{R}$ với $d(x, y) = |x - y|$, dãy $x_n = \frac{1}{n}$:
  - $d(x_n, 0) = |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \to 0$, nên $x_n \to 0$.

1.4-2 Định lý: Tính duy nhất của giới hạn

(a) Trong một không gian metric, giới hạn của dãy hội tụ là duy nhất.
(b) Nếu $x_n \to x$ và $y_n \to y$, thì $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$.

Chứng minh trực quan:

- (a) Nếu $x_n \to x$ và $x_n \to z$ với $x \neq z$, thì $d(x, z) > 0$. Nhưng $d(x, z) \leq d(x, x_n) + d(x_n, z) \to 0 + 0 = 0$, mâu thuẫn, nên $x = z$.
- (b) Khoảng cách $d(x_n, y_n)$ gần $d(x, y)$ vì bất đẳng thức tam giác: $|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y) \to 0$.

Ví dụ minh họa:

- (a) Trong $\mathbf{R}$, $x_n = \frac{1}{n} \to 0$. Không thể có giới hạn khác, ví dụ 1, vì $d(x_n, 1) = |\frac{1}{n} - 1| \not\to 0$.
- (b) $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{2}{n}$, $x_n \to 0$, $y_n \to 0$, thì $d(x_n, y_n) = |\frac{1}{n} - \frac{2}{n}| = \frac{1}{n} \to 0 = d(0, 0)$.

1.4-3 Định nghĩa: Dãy Cauchy và Tính đầy đủ

- **Dãy Cauchy**: Dãy (x_n) trong (X, d) là Cauchy nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại N sao cho:
  [
  d(x_m, x_n) < \varepsilon \quad \text{với mọi } m, n > N.
  ]
  - Ý nghĩa: Các phần tử cuối của dãy rất gần nhau.
- **Tính đầy đủ**: Không gian X là **đầy đủ** nếu mọi dãy Cauchy trong X đều hội tụ đến một điểm trong X.

Ví dụ minh họa:

- Trong $\mathbf{R}$, $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ không là Cauchy vì $d(x_m, x_n) = |\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k}|$ không nhỏ khi m, n lớn (tổng điều hòa phát tán).
- Trong $(0, 1]$ với $d(x, y) = |x - y|$, $x_n = \frac{1}{n}$ là Cauchy ($d(x_m, x_n) = |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}| \to 0$), nhưng không hội tụ trong $(0, 1]$ vì giới hạn 0 không thuộc $(0, 1]$.

1.4-4 Định lý: Đường thẳng thực và Mặt phẳng phức

Đường thẳng thực $\mathbf{R}$ và mặt phẳng phức $\mathbf{C}$ là không gian metric đầy đủ.

Giải thích: Trong $\mathbf{R}$ hoặc $\mathbf{C}$, tiêu chuẩn Cauchy (mọi dãy Cauchy hội tụ) là đúng nhờ tính chất của số thực và số phức.

Ví dụ minh họa:

- Trong $\mathbf{R}$, $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ là Cauchy ($d(x_m, x_n) = |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| \to 0$), hội tụ đến 1.

1.4-5 Định lý: Dãy hội tụ là dãy Cauchy

Mọi dãy hội tụ trong không gian metric là dãy Cauchy.

Chứng minh trực quan: Nếu $x_n \to x$, với $\varepsilon > 0$, chọn N sao cho $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ khi $n > N$. Thì:
[
d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (m, n > N).
]

Ví dụ minh họa:

- Trong $\mathbf{R}$, $x_n = \frac{1}{n} \to 0$, kiểm tra: $d(x_m, x_n) = |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}|$, khi m, n lớn, ví dụ $m, n > 100$ với $\varepsilon = 0.01$, thì $d(x_m, x_n) < \frac{1}{100} < 0.01$, là Cauchy.

1.4-6 Định lý: Bao đóng và Tập đóng

Cho $M \subset X$ không rỗng, $\bar{M}$ là bao đóng của M, thì:
(a) $x \in \bar{M}$ khi và chỉ khi tồn tại dãy (x_n) trong M sao cho $x_n \to x$.
(b) M đóng khi và chỉ khi $x_n \in M$, $x_n \to x$ thì $x \in M$.

Chứng minh trực quan:

- (a) Nếu $x \in \bar{M}$, hoặc $x \in M$ (dãy cố định $x_n = x$), hoặc x là điểm tụ (lấy $x_n \in B(x; \frac{1}{n}) \cap M$). Ngược lại, nếu $x_n \to x$, x là điểm tụ hoặc thuộc M, nên $x \in \bar{M}$.
- (b) $M = \bar{M}$ (đóng) nghĩa là mọi giới hạn của dãy trong M thuộc M.

Ví dụ minh họa:

- Trong $\mathbf{R}$, $M = (0, 1)$:
  - (a) $x = 1 \in \bar{M} = [0, 1]$, lấy $x_n = 1 - \frac{1}{n} \in (0, 1)$, $x_n \to 1$.
  - (b) M không đóng vì $x_n \to 1 \notin M$, nhưng $[0, 1]$ đóng vì mọi dãy trong đó hội tụ vẫn nằm trong $[0, 1]$.

1.4-7 Định lý: Không gian con đầy đủ

Không gian con M của không gian đầy đủ X là đầy đủ khi và chỉ khi M đóng trong X.

Chứng minh trực quan:

- Nếu M đầy đủ, dãy Cauchy trong M hội tụ trong M, nên $\bar{M} = M$ (đóng).
- Nếu M đóng, dãy Cauchy trong M hội tụ trong X (vì X đầy đủ), và giới hạn thuộc M (vì M đóng), nên M đầy đủ.

Ví dụ minh họa:

- Trong $\mathbf{R}$ (đầy đủ), $M = [0, 1]$ đóng, dãy $x_n = \frac{1}{n} \in [0, 1]$ hội tụ đến 0 trong M, nên M đầy đủ.
- $M = (0, 1)$ không đóng, $x_n = \frac{1}{n}$ không hội tụ trong M, nên không đầy đủ.

1.4-8 Định lý: Ánh xạ liên tục

Ánh xạ $T : X \to Y$ liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $x_n \to x_0$ thì $Tx_n \to Tx_0$.

Chứng minh trực quan:

- Nếu T liên tục, x_n gần x_0 thì Tx_n gần Tx_0 (theo định nghĩa liên tục).
- Ngược lại, nếu không liên tục, tồn tại ε mà Tx_n không gần Tx_0 dù $x_n \to x_0$, mâu thuẫn với giả thiết.

Ví dụ minh họa:

- $T : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $T(x) = x^2$, $x_n = 1 + \frac{1}{n} \to 1$, thì $Tx_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \to 1^2 = 1$, thỏa mãn.

Kết luận

Phần 1.4 giới thiệu hội tụ, dãy Cauchy, và tính đầy đủ – những khái niệm cốt lõi để phân biệt không gian "đẹp" (đầy đủ) và "thiếu" (không đầy đủ). Các định lý liên kết chúng với bao đóng và ánh xạ liên tục, đặt nền tảng cho các phần sau.

1.5 Tính compact

Giới thiệu trực quan

Tính compact (tính chặt) là một khái niệm quan trọng trong giải tích và tô-pô, mô tả một tập hợp có "kích thước giới hạn" và "khép kín" theo một cách đặc biệt. Trong không gian metric, tập compact thường là tập đóng và bị chặn (bounded), nhưng điều ngược lại không phải luôn đúng. Tính chất này rất hữu ích khi nghiên cứu hội tụ của dãy, tính liên tục của hàm, hay các bài toán tối ưu hóa. Hãy tưởng tượng một căn phòng nhỏ: mọi thứ trong đó đều "gần nhau" và không thể "trốn ra ngoài" – đó là ý tưởng của tính compact.

Phần này sẽ định nghĩa tính compact qua hai cách tương đương (phủ mở và hội tụ dãy), đồng thời khám phá các tính chất liên quan.

1.5-1 Định nghĩa: Tập bị chặn

Tập $M \subset X$ trong không gian metric (X, d) là **bị chặn** nếu tồn tại $x_0 \in X$ và $R < \infty$ sao cho:
[
M \subset B(x_0; R),
]
tức là $d(x, x_0) < R$ với mọi $x \in M$.

Ví dụ minh họa:

- Trong $\mathbf{R}$, $M = [0, 1]$ bị chặn vì $M \subset B(0.5; 1)$ (quả cầu mở tâm 0.5, bán kính 1).
- $M = \mathbf{R}$ không bị chặn vì không tồn tại quả cầu hữu hạn chứa toàn bộ $\mathbf{R}$.

1.5-2 Định nghĩa: Tính compact qua phủ mở

Tập $M \subset X$ là **compact** nếu mọi tập hợp các tập mở $\{G_\alpha\}$ (phủ mở) chứa M (tức $M \subset \bigcup G_\alpha$) đều có một phủ con hữu hạn $\{G_{\alpha_1}, \ldots, G_{\alpha_n}\}$ sao cho $M \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$.

Giải thích trực quan:

- Phủ mở là cách "bao phủ" M bằng các tập mở (như những vòng tròn nhỏ). Nếu M compact, bạn luôn tìm được một số hữu hạn vòng tròn đủ để phủ M, dù ban đầu có thể có vô số vòng tròn.

Ví dụ minh họa:

- Trong $\mathbf{R}$, $M = [0, 1]$:
  - Lấy phủ mở $\{G_n = (-1/n, 1 + 1/n), n = 1, 2, \ldots\}$, $M \subset \bigcup G_n$.
  - Chọn hữu hạn, ví dụ $\{G_1 = (-1, 2)\}$, đủ phủ $[0, 1]$, nên $[0, 1]$ compact.
- $M = (0, 1)$:
  - Phủ $\{G_n = (1/n, 1 - 1/n), n = 2, 3, \ldots\}$ là phủ mở.
  - Không tồn tại phủ hữu hạn vì các khoảng nhỏ dần, không thể phủ hết $(0, 1)$ bằng số hữu hạn tập, nên $(0, 1)$ không compact.

1.5-3 Định nghĩa: Tính compact qua hội tụ dãy

Tập $M \subset X$ là **compact tuần tự** (sequentially compact) nếu mọi dãy (x_n) trong M có một dãy con (x_{n_k}) hội tụ đến một điểm trong M.

Giải thích trực quan:

- Nếu M compact tuần tự, bạn không thể chọn một dãy nào trong M mà không có một phần của nó "tụ lại" ở một điểm trong M.

Ví dụ minh họa:

- $M = [0, 1]$ trong $\mathbf{R}$:
  - Dãy $x_n = \sin(n)$ có giá trị trong $[0, 1]$. Vì $[0, 1]$ compact, tồn tại dãy con hội tụ, ví dụ chọn các n_k sao cho $\sin(n_k)$ gần một giá trị (do tính dày đặc của $\{\sin(n)\}$).
- $M = (0, \infty)$:
  - Dãy $x_n = n$ không có dãy con hội tụ trong $(0, \infty)$, nên không compact tuần tự.

1.5-4 Định lý: Tính tương đương của compact

Trong không gian metric (X, d), tập M compact (qua phủ mở) khi và chỉ khi M compact tuần tự (qua hội tụ dãy).

Chứng minh trực quan:

- Nếu M không compact tuần tự, tồn tại dãy (x_n) không có dãy con hội tụ trong M. Các điểm x_n phải phân tán, tạo phủ mở không có phủ con hữu hạn, mâu thuẫn với compact.
- Ngược lại, nếu M compact, mọi dãy có điểm tụ (do phủ mở hữu hạn), và trong không gian metric, điểm tụ dẫn đến dãy con hội tụ.

Ví dụ minh họa:

- $M = [0, 1]$ thỏa mãn cả hai: phủ mở có phủ con hữu hạn, và mọi dãy có dãy con hội tụ trong $[0, 1]$.

1.5-5 Định lý: Tập compact là đóng và bị chặn

Nếu $M \subset X$ compact trong không gian metric, thì M là tập đóng và bị chặn.

Chứng minh trực quan:

- **Đóng**: Nếu $x_n \in M$, $x_n \to x$, dãy con của (x_n) hội tụ trong M (do compact), và giới hạn duy nhất là x, nên $x \in M$.
- **Bị chặn**: Nếu không bị chặn, tồn tại $x_n \in M$ với $d(x_n, x_0) \to \infty$, không thể có dãy con hội tụ, mâu thuẫn với compact.

Ví dụ minh họa:

- $M = [0, 1]$: đóng (chứa biên 0 và 1), bị chặn (nằm trong $B(0; 2)$).
- $M = \mathbf{R}$ không compact vì không bị chặn.

1.5-6 Định lý: Đóng và bị chặn trong $\mathbf{R}^n$

Trong $\mathbf{R}^n$ với metric Euclid, tập M compact khi và chỉ khi M đóng và bị chặn.

Chứng minh trực quan:

- Đóng và bị chặn $\implies$ compact: Dùng định lý Bolzano-Weierstrass (mọi dãy trong tập đóng, bị chặn có dãy con hội tụ).
- Ngược lại: Từ 1.5-5.

Ví dụ minh họa:

- $M = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbf{R}^2$ (hình vuông): đóng, bị chặn, nên compact.
- $M = (0, 1) \times (0, 1)$: bị chặn nhưng không đóng, không compact.

1.5-7 Định lý: Tính đầy đủ và Compact

Nếu M compact trong không gian metric X, thì M là không gian đầy đủ (với metric cảm sinh).

Chứng minh trực quan:

- Dãy Cauchy (x_n) trong M có dãy con hội tụ trong M (do compact). Trong không gian metric, dãy Cauchy hội tụ nếu có dãy con hội tụ, nên (x_n) hội tụ trong M.

Ví dụ minh họa:

- $M = [0, 1]$, dãy $x_n = \frac{1}{n}$ là Cauchy, hội tụ đến 0 trong M, nên M đầy đủ.

1.5-8 Định lý: Ánh xạ liên tục trên tập compact

Nếu $T : X \to Y$ liên tục và $M \subset X$ compact, thì $T(M)$ compact trong Y.

Chứng minh trực quan:

- Lấy dãy $(y_n) \in T(M)$, $y_n = T(x_n)$, $x_n \in M$. Vì M compact, (x_n) có dãy con $x_{n_k} \to x \in M$. T liên tục nên $y_{n_k} = T(x_{n_k}) \to T(x) \in T(M)$, do đó $T(M)$ compact tuần tự.

Ví dụ minh họa:

- $T : [0, 1] \to \mathbf{R}$, $T(x) = x^2$. $M = [0, 1]$ compact, $T(M) = [0, 1]$ cũng compact.

1.5-9 Định lý: Hàm thực liên tục đạt cực trị

Nếu $f : X \to \mathbf{R}$ liên tục và $M \subset X$ compact, thì f bị chặn trên M và đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên M.

Chứng minh trực quan:

- $f(M)$ compact (do 1.5-8), nên đóng và bị chặn trong $\mathbf{R}$. Tập đóng, bị chặn trong $\mathbf{R}$ chứa sup và inf.

Ví dụ minh họa:

- $f(x) = x^2$ trên $[0, 1]$: $f(M) = [0, 1]$, min = 0 tại $x = 0$, max = 1 tại $x = 1$.

1.5-10 Định lý: Liên tục đều

Nếu $T : X \to Y$ liên tục trên M compact trong X, thì T liên tục đều trên M, tức với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $d(x, y) < \delta$ thì $d(Tx, Ty) < \varepsilon$ với mọi $x, y \in M$.

Chứng minh trực quan:

- Nếu không liên tục đều, tồn tại ε mà khoảng cách $d(Tx_n, Ty_n) \geq \varepsilon$ dù $d(x_n, y_n) \to 0$. M compact nên (x_n) có dãy con hội tụ, dẫn đến mâu thuẫn với tính liên tục.

Ví dụ minh họa:

- $T(x) = x^2$ trên $[0, 1]$: Với $\varepsilon = 0.1$, $|x^2 - y^2| = |x - y||x + y| < 2|x - y|$ (vì $|x + y| < 2$), chọn $\delta = \varepsilon/2$, thỏa mãn.

Kết luận

Phần 1.5 định nghĩa tính compact qua phủ mở và hội tụ dãy, chứng minh chúng tương đương trong không gian metric, và khám phá các tính chất như đóng, bị chặn, đầy đủ, cùng ứng dụng với ánh xạ liên tục. Đây là bước cuối của chương 1, chuẩn bị cho các khái niệm nâng cao hơn.

1.6 Hoàn thiện không gian metric

Giới thiệu trực quan

Trong giải tích, ta biết rằng tập hợp số hữu tỉ $\mathbf{Q}$ không đầy đủ (incomplete) – tức là có những dãy Cauchy không hội tụ trong $\mathbf{Q}$, như dãy $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ "muốn" hội tụ tới một số thực nhưng không thể vì giới hạn đó không thuộc $\mathbf{Q}$. Tuy nhiên, ta có thể "mở rộng" $\mathbf{Q}$ thành đường thẳng thực $\mathbf{R}$, một không gian đầy đủ (complete), trong đó $\mathbf{Q}$ là tập dày đặc (dense). Ý tưởng này không chỉ áp dụng cho $\mathbf{Q}$ mà còn cho mọi không gian metric không đầy đủ. Phần 1.6 sẽ chứng minh rằng bất kỳ không gian metric nào cũng có thể được "hoàn thiện" thành một không gian đầy đủ, chứa một bản sao của nó dưới dạng tập dày đặc. Hãy tưởng tượng bạn đang xây một ngôi nhà chưa xong (không gian không đầy đủ), và phần này sẽ hướng dẫn cách hoàn thiện nó thành một ngôi nhà khang trang (không gian đầy đủ).

1.6-1 Định nghĩa: Ánh xạ đẳng cự và Không gian đẳng cự

- **Ánh xạ đẳng cự (Isometry)**: Cho hai không gian metric $X = (X, d)$ và $\bar{X} = (\bar{X}, \bar{d})$, một ánh xạ $T : X \to \bar{X}$ được gọi là **đẳng cự** nếu nó bảo toàn khoảng cách, tức là với mọi $x, y \in X$:

$$\bar{d}(Tx, Ty) = d(x, y).$$

- **Không gian đẳng cự**: X và $\bar{X}$ được gọi là **đẳng cự** nếu tồn tại một ánh xạ đẳng cự song ánh (bijective) từ X lên $\bar{X}$. Khi đó, hai không gian này chỉ khác nhau về bản chất của các điểm, nhưng về mặt metric thì giống hệt nhau – như hai bản sao của cùng một cấu trúc.

Giải thích trực quan:

- Hãy nghĩ về một bản đồ: nếu bạn vẽ lại một thành phố (không gian X) thành một mô hình (không gian $\bar{X}$) mà giữ nguyên mọi khoảng cách giữa các địa điểm, thì đó là ánh xạ đẳng cự. Hai không gian đẳng cự giống như hai phiên bản của cùng một thành phố, chỉ khác tên đường hoặc màu sắc, nhưng khoảng cách giữa các điểm thì không thay đổi.

Ví dụ minh họa:

- Lấy $X = \mathbf{R}$ với $d(x, y) = |x - y|$ và $\bar{X} = \mathbf{R}$ với $\bar{d}(x, y) = |x - y|$. Ánh xạ $T : X \to \bar{X}$ định nghĩa bởi $T(x) = x + 1$ là đẳng cự vì:

$$\bar{d}(Tx, Ty) = |(x + 1) - (y + 1)| = |x - y| = d(x, y).$$

- T song ánh (mỗi $y \in \bar{X}$ có $x = y - 1 \in X$), nên X và $\bar{X}$ đẳng cự.

1.6-2 Định lý: Hoàn thiện không gian metric

Nội dung định lý: Với mọi không gian metric $X = (X, d)$, tồn tại một không gian metric đầy đủ $\hat{X} = (\hat{X}, \hat{d})$ chứa một không gian con $W \subset \hat{X}$ sao cho:

- W đẳng cự với X (tức là X có một "bản sao" trong $\hat{X}$).
- W dày đặc trong $\hat{X}$ (mọi điểm trong $\hat{X}$ đều có thể được "tiếp cận" bởi các điểm trong W).
- $\hat{X}$ là duy nhất trừ đẳng cự, nghĩa là nếu $\bar{X}$ cũng là một không gian đầy đủ chứa một không gian con dày đặc đẳng cự với X, thì $\hat{X}$ và $\bar{X}$ đẳng cự.

Giải thích trực quan:

- Hãy tưởng tượng X là một bức tranh chưa hoàn thiện với nhiều khoảng trống (không đầy đủ). Định lý này nói rằng ta có thể tạo ra một bức tranh hoàn chỉnh $\hat{X}$ (đầy đủ), trong đó X được nhúng vào như một phần (qua W), và phần còn lại của $\hat{X}$ được "điền" vào sao cho mọi khoảng trống đều được lấp đầy. W dày đặc nghĩa là các chi tiết của X có mặt khắp nơi trong $\hat{X}$, và tính duy nhất (trừ đẳng cự) giống như việc bức tranh hoàn thiện này chỉ có một cách vẽ cơ bản, dù có thể sơn màu khác nhau.

Chứng minh trực quan (tóm tắt qua 4 bước):

1. **Xây dựng $\hat{X}$**:
   - Lấy tất cả các dãy Cauchy trong X. Hai dãy (x_n) và (x'_n) được gọi là tương đương nếu $d(x_n, x'_n) \to 0$ khi $n \to \infty$.
   - $\hat{X}$ là tập các lớp tương đương $\hat{x}, \hat{y}, \ldots$ của các dãy Cauchy này.
   - Định nghĩa metric $\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$, với $(x_n) \in \hat{x}$, $(y_n) \in \hat{y}$. Giới hạn này tồn tại vì (x_n) và (y_n) là Cauchy, và $\mathbf{R}$ đầy đủ.
   - Kiểm tra $\hat{d}$ là metric (M1-M4): rõ ràng từ định nghĩa và tính chất giới hạn.
2. **Xây dựng ánh xạ đẳng cự $T : X \to W \subset \hat{X}$**:
   - Với mỗi $b \in X$, gán $\hat{b} \in \hat{X}$ là lớp của dãy hằng $(b, b, \ldots)$.
   - $W = T(X)$ là tập các lớp này. T đẳng cự vì $\hat{d}(\hat{b}, \hat{c}) = d(b, c)$.
   - W dày đặc trong $\hat{X}$: với mọi $\hat{x} \in \hat{X}$ (lớp của (x_n)), ta có thể lấy $\hat{x}_N$ (lớp của $(x_N, x_N, \ldots)$) trong W, và $\hat{d}(\hat{x}, \hat{x}_N) \to 0$ khi N đủ lớn.
3. **Chứng minh $\hat{X}$ đầy đủ**:
   - Lấy dãy Cauchy $(\hat{x}_n)$ trong $\hat{X}$. Vì W dày đặc, chọn $(\hat{z}_n) \in W$ sao cho $\hat{d}(\hat{x}_n, \hat{z}_n) < 1/n$. $(\hat{z}_n)$ cũng là Cauchy.
   - Dùng T^{-1}, ta có dãy (z_n) Cauchy trong X, thuộc lớp $\hat{x} \in \hat{X}$. Chứng minh $\hat{x}_n \to \hat{x}$ bằng bất đẳng thức tam giác.
4. **Tính duy nhất trừ đẳng cự**:
   - Nếu $\bar{X}$ là không gian đầy đủ khác chứa $\bar{W}$ đẳng cự với X và dày đặc trong $\bar{X}$, thì khoảng cách trong $\hat{X}$ và $\bar{X}$ phải giống nhau (do giới hạn của các dãy trong W và $\bar{W}$), nên $\hat{X}$ và $\bar{X}$ đẳng cự.

Ví dụ minh họa:

- **Hoàn thiện $\mathbf{Q}$**: Lấy $X = \mathbf{Q}$ với $d(x, y) = |x - y|$ (không đầy đủ, như 1.5-7). $\hat{X}$ là tập các lớp tương đương của dãy Cauchy trong $\mathbf{Q}$. Ví dụ, dãy $(x_n) = (1, 1.4, 1.41, 1.414, \ldots)$ (gần $\sqrt{2}$) thuộc một lớp $\hat{x}$. $\hat{X}$ chính là $\mathbf{R}$, $W = T(\mathbf{Q})$ là $\mathbf{Q}$ (dày đặc trong $\mathbf{R}$), và $\mathbf{R}$ đầy đủ (1.4-4).
- **Không gian rời rạc**: Nếu X là tập hữu hạn với metric rời rạc $d(x, y) = 1$ nếu $x \neq y$, thì $\hat{X} = X$ vì X đã đầy đủ (mọi dãy Cauchy là dãy hằng).

Kết luận

Phần 1.6 cung cấp một công cụ mạnh mẽ: bất kỳ không gian metric nào cũng có thể được "hoàn thiện" thành một không gian đầy đủ, trong đó không gian gốc được bảo toàn dưới dạng một tập dày đặc. Đây là nền tảng cho nhiều ứng dụng trong giải tích hàm, như không gian Banach hay Hilbert ở các chương sau.