ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

TÀI LIỆU BÀI GIẢNG

ĐẠI SỐ ĐƯỜNG ĐI LEAVITT

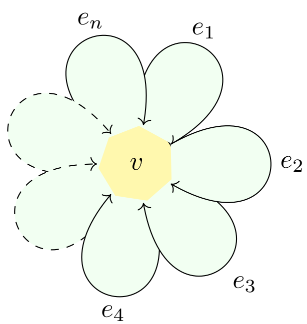
Giảng viên: TS. Trịnh Thanh Đèo
Khoa Toán – Tin học
Trường Đại học Khoa học tự nhiên
Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh

LƯU HÀNH NỘI BỘ

TRỊNH THANH ĐÈO

ĐẠI SỐ ĐƯỜNG ĐI LEAVITT

(Giáo trình Cao học)



BẢN THẢO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN, ĐHQG-HCM
– 2025 –

Lời nói đầu

Đại số đường đi Leavitt (Leavitt path algebras – viết tắt là LPA) là một hướng nghiên cứu hiện đại, giao thoa giữa đại số không giao hoán, lý thuyết mô-đun và lý thuyết đồ thị. Tên gọi xuất phát từ công trình của William G. Leavitt vào thập niên 1960, trong đó ông đã xây dựng các vành không thỏa mãn điều kiện chiều hữu hạn của mô-đun. Cụ thể, William G. Leavitt đã nghiên cứu các vành R thỏa mãn điều kiện tồn tại mô-đun hữu hạn sinh M sao cho $M \cong M^{\oplus n}$ với $n > 1$. Ông xây dựng một lớp vành $L(1, n)$ (gọi là *đại số Leavitt loại* $(1, n)$) có tính chất:

$$L(1,n)^1 \cong L(1,n)^n \quad \text{(đẳng cấu } R\text{-môđun).}$$

Những vành này không thỏa mãn điều kiện chiều hữu hạn, và do đó tạo nên hướng tiếp cận mới trong lý thuyết môđun và đại số không giao hoán. Hơn 40 năm sau, ý tưởng này được tái sinh và mở rộng mạnh mẽ thông qua việc kết hợp với lý thuyết đồ thị, từ đó hình thành nên lĩnh vực đại số đường đi Leavitt như hiện nay.

Đại số đường đi Leavitt không chỉ là đối tượng nghiên cứu thuần túy của đại số mà còn có mối liên hệ sâu sắc với các ngành toán học khác như lý thuyết C^*-đại số (đặc biệt là các C^*-đại số xây dựng từ đồ thị), lý thuyết phân bậc và K-lý thuyết. Điều đáng chú ý là nhiều tính chất đại số quan trọng của một đại số đường đi Leavitt có thể được suy ra trực tiếp từ đặc trưng của đồ thị sinh ra nó, mở ra một cách tiếp cận trực quan và hiệu quả trong nghiên cứu đại số không giao hoán hiện đại.

Tài liệu này được biên soạn nhằm mục đích giới thiệu có hệ thống về đại số đường đi Leavitt cho học viên cao học. Nội dung trải dài từ kiến thức nền tảng đến các chủ đề nâng cao, đi kèm với ví dụ cụ thể, bài tập, và các mối liên hệ với các lĩnh vực liên quan. Mong rằng tài liệu này sẽ truyền cảm hứng cho người học khám phá sâu hơn không chỉ trong lĩnh vực đại số hiện đại mà còn trong toàn bộ cảnh quan phong phú của toán học đương đại.

Mục lục

1

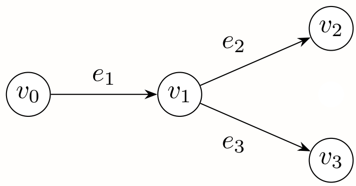
Đại số đường đi Leavitt

1.1 Đồ thị

Định nghĩa 1.1. Một *đồ thị* (có hướng) $E = (E^0, E^1, r, s)$ là một bộ gồm hai tập hợp E^0, E^1 và hai ánh xạ $r, s : E^1 \to E^0$.

- Các phần tử của E^0 gọi là *các đỉnh*;
- Các phần tử của E^1 gọi là *các cạnh*;
- Nếu E^0 là tập hữu hạn thì E gọi là *đồ thị hữu hạn*;
- Với mỗi $e, e' \in E^1$, ta gọi $s(e)$ và $r(e)$ lần lượt là *đỉnh đầu* và *đỉnh cuối* của e;
- Nếu $s(e) = v$ và $r(e) = w$ thì ta nói e *đi từ* v *đến* w và v *phát ra* e, w *nhận* e; nếu $r(e) = s(e')$ thì ta nói e *kề* e'.

Ví dụ 1.1. Xét đồ thị E, với $E^0 = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$, $E^1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ và $s(e_1) = v_0$, $r(e_1) = s(e_2) = s(e_3) = v_1$, $r(e_2) = v_2$, $r(e_3) = v_3$. Ta có thể minh họa E bằng sơ đồ sau:

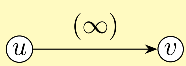


Định nghĩa 1.2. Cho $E = (E^0, E^1, r, s)$ là một đồ thị. Với mỗi $v \in E^0$, ta ký hiệu $s^{-1}(v)$ là tập hợp tất cả các cạnh xuất phát từ v và $r^{-1}(v)$ là tập hợp tất cả các cạnh được nhận bởi v.

- Nếu v không nhận bất kỳ cạnh nào thì ta nói v là *đỉnh nguồn*;
- Nếu v không phát ra bất kỳ cạnh nào, nghĩa là $s^{-1}(v) = \varnothing$, thì ta nói v là *đỉnh chìm (sink)*;
- Nếu $|s^{-1}(v)| = \infty$ thì ta nói v là *vô hạn phát xạ*. Tập hợp tất cả các đỉnh vô hạn phát xạ của E được ký hiệu bởi $\mathrm{Inf}(E)$.
- Nếu E không chứa các vô hạn phát xạ thì ta nói E là *hữu hạn đường* (row-finite);
- Nếu tất cả các vô hạn phát xạ trong E phát ra một số vô hạn đếm được các cạnh thì ta nói E là *đồ thị đếm được*.
- Nếu v là một đỉnh chìm hoặc là một vô hạn phát xạ thì v được gọi là *đỉnh kỳ dị*. Ngược lại, v được gọi là *đỉnh thường*. Nói cách khác, v là đỉnh thường nếu $0 < |s^{-1}(v)| < \infty$. Tập tất cả các đỉnh thường của E được ký hiệu bởi $\mathrm{Reg}(E)$.

!

Một đồ thị có thể là hữu hạn nhưng không phải hữu hạn đường, chẳng hạn đồ thị sau là hữu hạn nhưng không hữu hạn đường. Trong đó, (∞) biểu thị cho vô hạn cạnh đi từ u đến v (u là vô hạn phát xạ).



Định nghĩa 1.3. Một *đường đi* p trong đồ thị E là một dãy liên tiếp các cạnh $p := e_1e_2\dots e_n$ sao cho $r(e_i) = s(e_{i+1})$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n-1$. Một đường đi p gồm n cạnh được gọi là *có độ dài* n, ký hiệu bởi $l(p) = n$. Nếu đường đi p chứa vô hạn cạnh thì ta nói p có chiều dài vô hạn. Đỉnh đầu của p là đỉnh đầu của e_1, ký hiệu bởi $s(p)$; đỉnh cuối của p là đỉnh cuối của e_n, ký hiệu bởi $r(p)$.

! Ta quy ước mỗi đỉnh của đồ thị E là một đường đi độ dài 0 và ký hiệu $\mathrm{Path}(E)$ là tập tất cả các đường đi trong E.

Nếu $p = e_1e_2\dots e_n \in \mathrm{Path}(E)$, thì ta ký hiệu p^0 là tập tất cả các đỉnh đầu và đỉnh cuối của các cạnh có trong p, nghĩa là

$$p^0 = \{s(e_1), r(e_i) : i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Hơn nữa, nếu $q = e_1\dots e_m$ với $m \leq n$ thì ta nói q là đường đi con đầu của p.

Định nghĩa 1.4. Đường đi p (không là đỉnh) được gọi là một *chu trình* nếu $s(p) = r(p)$ và $s(e_i) \neq s(e_j)$ với mọi $i \neq j$. Nói cách khác, chu trình là đường đi bắt đầu và kết thúc tại cùng một đỉnh và không đi qua bất kỳ đỉnh nào quá một lần.

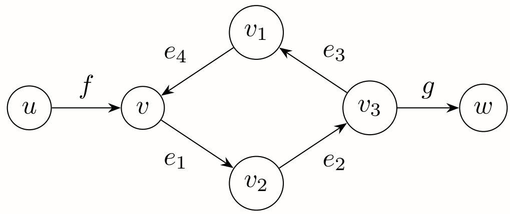
Nếu c là một chu trình với $s(c) = r(c) = v$ thì ta nói c là *chu trình đặt tại* v. Tập tất cả các chu trình trong đồ thị E được ký hiệu bởi $P_c(E)$.

Nếu $P_c(E) = \emptyset$ thì ta nói E là đồ thị *acyclic* (đồ thị *không chu trình*).

Định nghĩa 1.5. Một cạnh $e \in E^1$ được gọi là *lối ra* cho đường đi $p = e_1e_2\dots e_n$ nếu tồn tại $i \in \{1, \dots, n\}$ sao cho $s(e) = s(e_i)$ nhưng $e \neq e_i$.

! Chú ý rằng lối ra cho một đường đi p không nhất thiết nằm ngoài p. Chẳng hạn, nếu p chứa hai cạnh phân biệt e_i, e_j sao cho $s(e_i) = s(e_j)$, thì cả e_i và e_j đều là lối ra cho p.

Ví dụ 1.2. Xét đồ thị E sau:



Khi đó $p = fe_1e_2g$ là một đường đi trong E, có $s(p) = u$, $r(p) = w$ và $l(p) = 4$; $q = fe_1$ là một đường đi con đầu của p; $c = e_1e_2e_3e_4$ là một chu trình đặt tại v, và g là lối ra của c.

Định nghĩa 1.6. Cho $v, w \in E^0$. Ta ký hiệu $v \geq w$ nếu tồn tại đường đi $p \in \mathrm{Path}(E)$ sao cho $s(p) = v$ và $r(p) = w$. Khi đó ta nói v *kết nối* được với w.

Với mỗi đỉnh $v \in E^0$, ta ký hiệu $T(v)$ là tập tất cả các đỉnh trong E^0 được kết nối từ v, nghĩa là

$$T(v) = \{w \in E^0 : v \geq w\}.$$

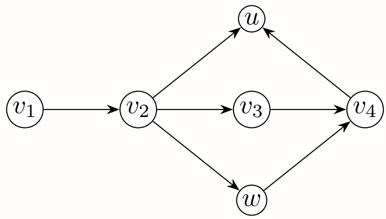
Nếu $X \subseteq E^0$ thì ta ký hiệu

$$T(X) = \bigcup_{v \in X} T(v).$$

Một đỉnh $v \in E^0$ được gọi là *phân nhánh* nếu v phát ra nhiều hơn một cạnh; nghĩa là, $|s^{-1}(v)| > 1$; đỉnh $v \in E^0$ được gọi là một *đỉnh thẳng* nếu mọi đỉnh $w \in T(v)$ đều không phân nhánh và không là điểm đặt của bất cứ chu trình nào. Tập tất cả các đỉnh thẳng trong E được ký hiệu bởi $P_l(E)$.

Nhận xét. Các đỉnh chìm đều là đỉnh thẳng.

Ví dụ 1.3. Xét đồ thị E sau:



Ta có $T(v_1) = E^0$; $T(w) = \{w, v_4, u\}$; v_2 là phân nhánh; $P_l(E) = \{u, w, v_3, v_4\}$.

1.2 Đại số đường đi Leavitt

Định nghĩa 1.7. Cho K là trường và E là đồ thị. Một K-*đại số đường đi* trên E, ký hiệu $A_K(E)$, là một K-đại số sinh bởi E^0, E^1 và thỏa mãn các hệ thức sau:

(A1) Với mọi $v_i, v_j \in E^0$, $v_i v_j = \delta_{ij} v_i$;

(A2) Với mọi $e \in E^1$, $s(e)e = e = er(e)$.

! Các hệ thức (A1) và (A2) về cơ bản bảo toàn cấu trúc đường đi của E, nên $A_K(E)$ có tên là *"đại số đường đi"*.

Định nghĩa 1.8. Cho đồ thị $E = (E^0, E^1, r, s)$. Ta xây dựng *đồ thị mở rộng* $\widehat{E}$ của E bằng cách đưa vào một tập cạnh mới $(E^1)^*$, là bản sao của E^1 nhưng có hướng ngược lại. Nghĩa là, nếu $e \in E^1$ đi từ u đến v thì $e^* \in (E^1)^*$ đi từ v đến u, nghĩa là

$$\widehat{E} = (E^0, E^1 \cup (E^1)^*, r', s'),$$

trong đó $(E^1)^* = \{e_i^* : e_i \in E^1\}$ và các hàm r', s' được xác định bởi

$$r'(e) = r(e),\ r'(e^*) = s(e),\ s'(e) = s(e),\ s'(e^*) = r(e),\ \text{với mọi } e \in E^1.$$

Để đơn giản, ta cũng dùng ký hiệu r và s thay cho r' và s'. Ta gọi tập E^1

là *tập cạnh thực* (real edges) và $(E^1)^*$ là *tập cạnh ảo* (ghost edges).

Một đường đi được tạo bởi chỉ những cạnh thực gọi là *đường đi thực*, đường đi được tạo bởi cả cạnh thực lẫn ảo gọi là *đường đi ảo*.

Nếu $p = e_1 e_2 \dots e_n$ là đường đi thực thì $p^* := e_n^* e_{n-1}^* \dots e_1^*$ là đường đi ảo.

> **!** Khi nói đến một "đường đi" trong đồ thị E thì ta xem như đó là đường đi thực, trừ khi được quy ước khác (ta cũng dùng ký hiệu $\mathrm{Path}(E)$ để chỉ tập hợp tất cả các đường đi thực trong E).

Định nghĩa 1.9. Cho K là trường và E là đồ thị. Một *K-đại số đường đi Cohn* trên E, ký hiệu $C_K(E)$, là đại số đường đi $A_K(\widehat{E})$ và thỏa mãn hệ thức sau:

(CK1) Với mọi $e, e' \in E^1$, $e^* e' = \delta_{e,e'} r(e)$.

Định nghĩa 1.10. Cho K là trường và E là đồ thị. Một *K-đại số đường đi Leavitt* trên E, ký hiệu $L_K(E)$, là một K-đại số đường đi Cohn và thỏa mãn hệ thức sau:

(CK2) Với mỗi đỉnh thường $v \in \mathrm{Reg}(E)$, $v = \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^*$.

Các hệ thức (CK1) và (CK2) được gọi là *hệ thức Cuntz-Krieger*.

> **!** **Nhận xét.** Do hệ thức (A1), mỗi $v \in E^0$ là một lũy đẳng trong $L_K(E)$ và các phần tử trong E^0 đôi một trực giao trong $L_K(E)$. Như vậy các đỉnh của E tạo thành một tập hợp các lũy đẳng trực giao trong $L_K(E)$.

1.3 Các ví dụ về đại số đường đi Leavitt

Các ví dụ sau đây giúp phác họa mối liên hệ giữa một đồ thị và đại số đường đi Leavitt tương ứng. Việc chứng minh chi tiết cho các kết quả xin dành cho độc giả, khi nền tảng lý thuyết về đại số đường đi Leavitt đã được trang bị đầy đủ.

Ví dụ 1.4. Cho đồ thị E gồm một đỉnh v đơn và không cạnh:

$$\bullet\ v$$

Trong trường hợp này ta có $L_K(E) = Kv \cong K$.

Ví dụ 1.5. Cho đồ thị E gồm hai đỉnh v, w và một cạnh e đi từ v đến w:

$$v \xrightarrow{\ e\ } w$$

Trong trường hợp này $L_K(E)$ sinh bởi các phần tử v, w, e, e^* và thỏa mãn bốn hệ thức đại số đường đi Leavitt. Ta thấy

$$L_K(E) \cong M_2(K),$$

với phép đẳng cấu xác định bởi ánh xạ

$$\phi : L_K(E) \to M_2(K)$$

tác động trên những phần tử sinh của $L_K(E)$ như sau:

$$\phi(v) = e_{11},\ \phi(w) = e_{22},\ \phi(e) = e_{12},\ \phi(e^*) = e_{21},$$

trong đó e_{ij} là ma trận với 1 ở vị trí (i, j) và 0 ở các vị trí còn lại.

Ví dụ 1.6. Cho *đồ thị đường hữu hạn* M_n, với n đỉnh:

$$\begin{tikzcd} v_1 \arrow[r, "e_1"] & v_2 \arrow[r, "e_2"] & v_3 \arrow[r, dashed] & \circ \arrow[r, "e_{n-1}"] & v_n \end{tikzcd}$$

Tương tự trường hợp $n = 2$, ta xét đồng cấu

$$\phi : L_K(M_n) \to M_n(K)$$

thỏa mãn

$$\phi(v_i) = e_{ii},\ \phi(e_i) = e_{i(i+1)},\ \phi(e_i^*) = e_{(i+1)i},\ \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Dễ thấy ϕ bảo toàn các hệ thức đại số đường đi Leavitt. Hơn nữa, với mọi $e_{ij} \in M_n(K)$:

- Nếu $i < j$ thì $e_{ij} = e_{i,i+1}e_{i+1,i+2} \dots e_{j-1,j} = \phi(e_i e_{i+1} \dots e_{j-1})$.
- Nếu $i > j$ thì $e_{ij} = \phi(e^*_{i-1} \dots e^*_{j+1} e^*_j)$.

Do các phần tử trong $M_n(K)$ là K-tổ hợp tuyến tính của các đơn vị ma trận nên ϕ toàn cấu. Dễ thấy ϕ là đơn cấu, do đó

$$L_K(M_n) \cong M_n(K).$$

Ví dụ 1.7. Xét *đồ thị đơn khuyên* R_1:

Xét $K[x, x^{-1}]$ là vành đa thức Laurent với hệ số trong K. Ta định nghĩa ánh xạ

$$\phi : L_K(R_1) \to K[x, x^{-1}]$$

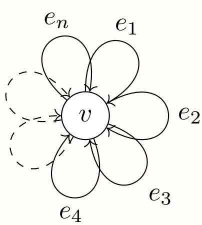
xác định bởi

$$\phi(v) = 1, \;\; \phi(e) = x, \;\; \phi(e^*) = x^{-1}.$$

Dễ thấy ϕ bảo toàn các hệ thức đại số đường đi Leavitt và

$$L_K(R_1) \cong K[x, x^{-1}].$$

Ví dụ 1.8. Xét *đồ thị hoa hồng* R_n, n cạnh:



Ký hiệu $L(1, n)$ là K-đại số có đơn vị sinh bởi tập hợp $\{x_i, y_i : i = 1, \dots, n\}$ và thỏa mãn các hệ thức:

i) $x_i y_j = \delta_{ij}, \; \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$;

ii) $\sum_{i=1}^{n} y_i x_i = 1$.

Xét đồng cấu $\phi : L_K(R_n) \to L(1,n)$, thỏa mãn

$$\phi(v) = 1,\ \phi(e_i) = y_i,\ \phi(e_i^*) = x_i.$$

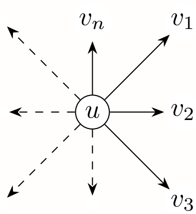
Dễ thấy các hệ thức i), ii) ở trên tương ứng với hệ thức (CK1) và (CK2) của đại số đường đi Leavitt trên $L_K(R_n)$. Hơn nữa, $v^2 = v$ và với mọi $i = 1, \ldots, n$ ta có:

$$ve_i = e_i = e_i v,\ ve_i^* = e_i^* = e_i^* v.$$

Do đó các hệ thức (A1) và (A2) tương ứng với tính đơn vị của 1. Rõ ràng ϕ là đẳng cấu, nghĩa là

$$L_K(R_n) \cong L(1,n).$$

Ví dụ 1.9. Xét *đồ thị đồng hồ hữu hạn* C_n, với u phát ra n cạnh:



Ta chứng minh $L_K(C_n) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} M_2(K)$ bằng cách định nghĩa đồng cấu

$$\varphi : L_K(C_n) \to \bigoplus_{i=1}^{n} M_2(K)$$

dựa theo các phần tử sinh của $L_K(C_n)$ như sau:
Đặt $I_{22} = \prod_{i=1}^{n} E_{22}$ và

$$\varphi(u) = I_{22},\ \varphi(v_i) = (E_{11})_i,\ \varphi(e_i) = (E_{21})_i,\ \varphi(e_i^*) = (E_{12})_i.$$

Trong đó, với mỗi $A \in M_2(K)$, ta ký hiệu $(A)_i \in \bigoplus_{i=1}^{n} M_2(K)$ là phần tử với A ở vị trí thứ i và 0 ở các vị trí còn lại.

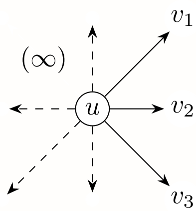
Chú ý rằng cách xác định ánh xạ này tương tự cách xác định ánh xạ

$$\varphi : L_K(M_2) \to M_2(K)$$

trong Ví dụ 1.5. Bằng cách thực hiện tương tự Ví dụ 1.5, ta thấy φ bảo toàn các hệ thức đại số đường đi Leavitt và là một đẳng cấu, nghĩa là

$$L_K(C_n) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} M_2(K).$$

Ví dụ 1.10. Xét *đồ thị đồng hồ vô hạn* C_∞, với u phát ra vô hạn đếm được các cạnh:



Ta chứng minh

$$L_K(C_\infty) \cong \bigoplus_{i=1}^{\infty} M_2(K) \oplus K I_{22},$$

với $\bigoplus_{i=1}^{\infty} M_2(K)$ là tổng trực tiếp của các vành $M_2(K)$ và $I_{22} = \prod_{i=1}^{\infty} E_{22}$. Ta định nghĩa ánh xạ

$$\varphi : L_K(C_\infty) \to \bigoplus_{i=1}^{\infty} M_2(K) \oplus K I_{22}$$

dựa theo các phần tử sinh của $L_K(C_\infty)$ như sau:

$$\varphi(u) = I_{22},\ \varphi(v_i) = (E_{11})_i,\ \varphi(e_i) = (E_{21})_i,\ \varphi(e_i^*) = (E_{12})_i.$$

Trong đó, với mỗi $A \in M_2(K)$, ta ký hiệu $(A)_i \in \bigoplus_{i=1}^{\infty} M_2(K)$ là phần tử với A ở vị trí thứ i và 0 ở các vị trí còn lại.

Chú ý rằng cách xác định ánh xạ này tương tự cách xác định ánh xạ

$$\varphi : L_K(M_2) \to M_2(K)$$

trong Ví dụ 1.5. Bằng cách thực hiện tương tự Ví dụ 1.5, ta thấy φ bảo toàn các hệ thức đại số đường đi Leavitt. Cụ thể, với cạnh e_i bất kỳ, ta có:

$$\varphi(ue_i) = \varphi(u)\varphi(e_i) = I_{22}(E_{21})_i = (E_{22})_i(E_{21})_i = (E_{21})_i = \varphi(e_i).$$

Ta không cần kiểm tra hệ thức (CK2), vì không có các đỉnh thường trong C_∞. Dễ dàng kiểm tra φ là đẳng cấu, nghĩa là

$$L_K(C_\infty) \cong \bigoplus_{i=1}^{\infty} M_2(K) \oplus KI_{22}.$$

1.4 Dạng biểu diễn của $L_K(E)$

Bổ đề 1.11. *Cho $p, q \in \mathrm{Path}(E)$. Khi đó, nếu $p^*q \neq 0$ thì $p = q$ hoặc $p = q\alpha$ hoặc $q = p\alpha$, với $\alpha \in \mathrm{Path}(E)$. Hơn nữa:*

i) *Nếu $p = q$ thì $p^*q = r(p)$.*

ii) *Nếu $p = q\alpha$ thì $p^*q = \alpha^*$.*

iii) *Nếu $q = p\alpha$ thì $p^*q = \alpha$.*

Chứng minh.

Giả sử $p = e_1e_2\dots e_m$ và $q = f_1f_2\dots f_n$, với $m > n$. Khi đó

$$p^*q = e_m^* \dots e_2^*(e_1^*f_1)f_2\dots f_n.$$

Do $p^*q \neq 0$ nên $e_1^*f_1 \neq 0$, kéo theo $e_1 = f_1$. Do đó

$$p^*q = e_m^* \dots (e_2^*f_2)\dots f_n.$$

Cứ tiếp tục quá trình trên ta được

$$q = e_1e_2\dots e_n \text{ và } p^*q = e_m^*\dots e_{n+1}^*,$$

nên

$$p = q\alpha \ \text{ và } \ p^*q = \alpha^*, \quad \text{với } \ \alpha = e_{n+1} \dots e_m.$$

Tương tự cho trường hợp $m < n$ và $m = n$. □

Hệ quả 1.12. *Giả sử $p, q \in \mathrm{Path}(E)$ sao cho $p^*q \neq 0$. Khi đó:*

i) *Nếu $l(p) = l(q)$ thì $p^*q = r(p)$.*

ii) *Nếu $l(p) < l(q)$ thì $p^*q \in \mathrm{Path}(E)$.*

iii) *Nếu $l(p) > l(q)$ thì $p^*q \in \mathrm{Path}(E^*)$.*

Hệ quả 1.13. *Mọi đơn thức trong $L_K(E)$ đều có dạng kpq^*, với $k \in K$ và $p, q \in \mathrm{Path}(E)$; mọi phần tử $x \in L_K(E)$ đều có dạng*

$$x = \sum_{i=1}^{n} k_i p_i q_i^*, \ \text{ với } \ k_i \in K \text{ và } p_i, q_i \in \mathrm{Path}(E).$$

! Dựa vào hệ quả trên, ta có thể xem $L_K(E)$ là K-không gian vectơ sinh bởi tập hợp $\{pq^* : p, q \in \mathrm{Path}(E)\}$.

1.5 Đơn vị và đơn vị địa phương

Định nghĩa 1.14. Một vành R được gọi là có *đơn vị địa phương* nếu tồn tại tập E gồm các phần tử lũy đẳng trong R sao cho, với mọi tập hữu hạn $X \subseteq R$, tồn tại $e \in E$ thỏa mãn $ex = xe = x$ với mọi $x \in X$.

Khi đó ta nói e là *đơn vị địa phương* cho tập X.

! Chú ý rằng, nếu R là vành có đơn vị 1 thì $E = \{1\}$ là tập các đơn vị địa phương cho R.

Mệnh đề 1.15. *Cho E là đồ thị. Khi đó:*

i) *Nếu E^0 hữu hạn thì $L_K(E)$ có đơn vị, và đơn vị của $L_K(E)$ là tổng tất cả các đỉnh thuộc E^0.*

ii) *Nếu E^0 vô hạn thì $L_K(E)$ có đơn vị địa phương và E^0 sinh ra tập các đơn vị địa phương cho $L_K(E)$.*

Chứng minh.

i) Giả sử E^0 hữu hạn, xét một đơn thức tùy ý $x = kpq^*$, với $p, q \in \text{Path}(E)$ và $k \in K$. Đặt $\alpha = \sum_{v \in E^0} v$. Khi đó:

$$\alpha x = \Big(\sum_{v \in E^0} v\Big) kpq^* = k\Big(\sum_{v \in E^0} \delta_{v,s(p)} s(p)\Big) pq^* = k.s(p).pq^* = x.$$

Tương tự, $x\alpha = x$.
Do mọi phần tử $y \in L_K(E)$ đều là tổng của các đơn thức dạng trên nên $\alpha y = y\alpha = y$ với mọi $y \in L_K(E)$. Như vậy α là đơn vị của $L_K(E)$.

ii) Giả sử E^0 vô hạn. Xét tập con hữu hạn $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_t\}$ của $L_K(E)$. Ta biểu diễn mỗi x_i dưới dạng

$$x_i = \sum_j k_{ij} p_{ij} q_{ij}^*, \; p_{ij}, q_{ij} \in \text{Path}(E), \; k_{ij} \in K.$$

Đặt

$$V = \bigcup_{i=1}^{t} \{s(p_{ij}), s(q_{ij})\} \text{ và đặt } \beta = \sum_{v \in V} v.$$

Khi đó, β là tổng của hữu hạn phần tử lũy đẳng trực giao, và bằng cách lập luận tương tự như trong (i), dễ thấy $\beta x_i = x_i = x_i \beta$ với mọi $x_i \in X$. Do đó β là đơn vị địa phương cho X. Như vậy E^0 sinh ra tập các đơn vị địa phương cho $L_K(E)$. □

1.6 Vành và ideal phân bậc

Định nghĩa 1.16. Cho R là một vành có đơn vị. Ta nói R là vành $\mathbb{Z}$-phân bậc (hay đơn giản, phân bậc) nếu tồn tại một họ $\{R_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ các nhóm con của $(R, +)$ sao cho:

i) $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$.

ii) $R_m R_n \subseteq R_{m+n}$ với mọi $m, n \in \mathbb{Z}$.

Mỗi nhóm con R_n được gọi là *thành phần bậc* n; mỗi phần tử $0 \neq x \in R_n$ được gọi là phần tử *thuần nhất bậc* n. Nếu $R_n = 0$ với mọi $n < 0$ thì ta nói R có phân bậc *không âm* (hoặc $\mathbb{N}$-phân bậc).

Ví dụ 1.11. Vành đa thức một biến $R = K[x]$ là vành $\mathbb{N}$-phân bậc, với thành phần bậc n là $R_n = K \cdot x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Tương tự, vành đa thức Laurent $R = K[x, x^{-1}]$ là vành $\mathbb{Z}$-phân bậc, với thành phần bậc n là $R_n = K \cdot x^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

! Mọi vành R đều có thể xem là vành phân bậc bằng cách đặt $R_0 = R$ và $R_n = 0$ với mọi $n \neq 0$. Phân bậc này được gọi là *phân bậc tầm thường*.

Mệnh đề 1.17. *Cho $R = \bigoplus R_n$ là một vành $\mathbb{Z}$-phân bậc. Khi đó:*

i) *R_0 là vành con của R;*

ii) *$1 \in R_0$;*

iii) *R_n là R_0-môđun với mọi n.*

Chứng minh.

i) Ta có $R_0 R_0 \subseteq R_0$ nên R_0 đóng dưới phép nhân, suy ra R_0 là vành con của R.

ii) Ta viết $1 = \sum_n x_n$ (tổng hữu hạn), với $x_n \in R_n$. Khi đó

$$x_i = x_i \cdot 1 = \textstyle\sum_n x_i x_n \text{ với mọi } i.$$

Bằng cách so sánh bậc hai vế, suy ra $x_i = x_i x_0$ với mọi i. Do đó

$$x_0 = 1 \cdot x_0 = \sum_n x_n x_0 = \sum_n x_n = 1.$$

Từ đó $1 = x_0 \in R_0$.

iii) Từ $R_0 R_n \subseteq R_n$ với mọi n, nên R_n là R_0-mô đun. $\square$

Định nghĩa 1.18. Cho $R = \bigoplus R_n$ là vành phân bậc, S là vành con của R và I là ideal của R.

i) Ta nói S là *vành con phân bậc* (hay *vành con thuần nhất*) của R nếu $S = \bigoplus (S \cap R_n)$.

ii) Ta nói I là *ideal phân bậc* (hay *ideal thuần nhất*) của R nếu $I = \bigoplus (I \cap R_n)$.

Mệnh đề 1.19. *Cho $R = \bigoplus R_n$ là vành phân bậc và I là một ideal của R. Khi đó I là ideal phân bậc khi và chỉ khi I được sinh ra bởi các phần tử thuần nhất của R.*

Chứng minh.

Chiều thuận là hiển nhiên.

Ngược lại, giả sử I được sinh bởi tập S gồm các phần tử thuần nhất của R. Lấy phần tử tùy ý $x \in I$. Khi đó,

$$x = \sum_j r_j s_j, \ r_j \in R, \ s_j \in S.$$

Bằng cách phân tích r_j thành tổng của các phần tử thuần nhất nếu cần, ta có thể xem các r_j trong biểu diễn trên là các phần tử thuần nhất. Khi đó, gọi x_n là tổng của tất cả các hạng tử cùng bậc n trong dạng biểu diễn trên của x, nghĩa là

$$x_n = \sum_{\deg r_j s_j = n} r_j s_j \text{ và } x = \sum_n x_n.$$

Do S là tập sinh của I nên mỗi x_n đều thuộc I, nghĩa là $x_n \in I \cap R_n$. Vậy

$$I \subseteq \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (I \cap R_n).$$

Bao hàm thức ngược lại là hiển nhiên. $\square$

Từ Mệnh đề trên ta suy ra, nếu I là ideal phân bậc của R và một phần tử $x \in I$ được biểu diễn dưới dạng tổng của các thành phần thuần nhất thì từng thành phần thuần nhất của x đều thuộc I. Do đó ta có các hệ quả sau:

Hệ quả 1.20. *Cho $R = \bigoplus R_n$ là vành phân bậc và I, J là các ideal thuần nhất của R. Khi đó $IJ, I \cap J, I + J$ cũng là các ideal thuần nhất của R.*

Hệ quả 1.21. *Cho $R = \bigoplus R_n$ là vành phân bậc và I là ideal của R. Ký hiệu I^* là ideal sinh bởi tất cả các phần tử thuần nhất chứa trong I. Khi đó I^* là ideal thuần nhất của R và là ideal thuần nhất lớn nhất của R chứa trong I.*

1.7 Tính phân bậc của $L_K(E)$

Bổ đề 1.22. *Cho E là một đồ thị. Khi đó, $L_K(E) = \bigoplus_{v \in E^0} L_K(E)v$.*

Chứng minh.

Cho $x \in L_K(E)$. Ta biểu diễn

$$x = k_1 p_1 q_1^* + \cdots + k_n p_n q_n^*,\ k_i \in K;\ p_i, q_i \in \text{Path}(E).$$

Đặt $v_i = s(q_i)$, suy ra

$$x = k_1 p_1 q_1^* v_1 + \cdots + k_n p_n q_n^* v_n \in \sum_{v \in E^0} L_K(E)v.$$

Do các phần tử $v \in E^0$ là lũy đẳng trực giao nên dễ thấy tổng này là tổng trực tiếp, nghĩa là

$L_K(E) = \bigoplus_{v \in E^0} L_K(E)v.$ □

Mệnh đề 1.23. *Cho E là đồ thị, K là trường. Đặt*

$$L_K(E)_n = \left\{\sum kpq^* : l(p) - l(q) = n;\ k \in K;\ p, q \in Path(E)\right\}.$$

Khi đó $L_K(E) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} L_K(E)_n$ là một K-đại số $\mathbb{Z}$-phân bậc, với phép phân bậc xác định bởi:

$$\deg(v) = 0,\ \deg(e) = 1,\ \deg(e^*) = -1,\ \forall v \in E^0, \forall e \in E^1.$$

Chứng minh.

Dễ thấy $L_K(E) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} L_K(E)_n$. Để chứng minh $L_K(E)$ là $\mathbb{Z}$-phân bậc, ta chỉ cần chứng minh

$$L_K(E)_m.L_K(E)_n \subseteq L_K(E)_{m+n}, \text{ với mọi } m, n \in \mathbb{Z}.$$

Thật vậy, xét các đơn thức

$$x = p_1q_1^* \in L_K(E)_m,\ y = p_2q_2^* \in L_K(E)_n,\ p_1, q_1, p_2, q_2 \in \mathrm{Path}(E),$$

với $l(p_1) - l(q_1) = m$, $l(p_2) - l(q_2) = n$.

Nếu $xy = p_1q_1^*p_2q_2^* = 0$, thì hiển nhiên $xy \in L_K(E)_{m+n}$. Giả sử $xy \neq 0$, khi đó có ba trường hợp:

- *Trường hợp 1: $l(q_1) = l(p_2)$*

Khi đó $q_1^*p_2 = r(p_2)$, nên $xy = p_1q_2^*$ và

$$l(p_1) - l(q_2) = [m + l(q_1)] - [l(p_2) - n] = m + n.$$

Suy ra $xy \in L_K(E)_{m+n}$.

- *Trường hợp 2: $l(q_1) > l(p_2)$*

Khi đó $q_1 = p_2q$, với $q \in \mathrm{Path}(E)$, nên $xy = p_1q^*q_2^* = p_1(qq_2)^*$. Do đó

$$l(p_1)-l(q_1) = l(p_1)-(l(q_2)+l(q)) = l(p_1)-(l(q_2)+l(q_1)-l(p_2)) = m+n.$$

Suy ra $xy \in L_K(E)_{m+n}$.

- *Trường hợp 3: $l(q_1) < l(p_2)$*

Tương tự trường hợp 2, ta cũng có $xy \in L_K(E)_{m+n}$.

Kết hợp ba trường hợp trên ta được kết quả. □

1.8 Định lý rút gọn

Cho E là một đồ thị và c là một chu trình trong E đặt tại v. Ta ký hiệu $c^0 = v$, $c^{-1} = c^*$, $c^{-r} = (c^*)^r$, $\forall r \in \mathbb{N}$. Đặt

$$K[c, c^*] = \left\{ \sum_{i=-m}^{n} k_i c^i \mid k_i \in K; m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Bổ đề 1.24. *Nếu c là một chu trình không lối ra của E và v là điểm đặt của c thì*

$$vL_K(E)v = K[c, c^*] \cong K[t, t^{-1}].$$

Chứng minh.

Rõ ràng $K[c, c^*] \subseteq vL_K(E)v$.

Ngược lại, do mỗi phần tử của $vL_K(E)v$ đều là tổ hợp tuyến tính của các đơn thức dạng pq^*, với $p, q \in \mathrm{Path}(E)$ và $s(p) = s(q) = v, r(p) = r(q)$, nên ta chỉ cần chứng minh mỗi đơn thức như vậy đều có dạng c^n, $n \in \mathbb{Z}$. Thật vậy, do c không lối ra nên mọi đường đi $\alpha \in \mathrm{Path}(E)$ với $s(\alpha) = v$ đều có dạng $\alpha = c^n \alpha'$, với α' là đoạn đầu của c. Như vậy $p = c^m p'$, $q = c^n q'$. Do p', q' đều là đoạn đầu của c và $r(p') = r(q')$ nên ta phải có $p' = q'$. Đặt $p' = e_1 \dots e_k$. Do mỗi cạnh e trong c đều không lối ra nên $s^{-1}(s(e)) = \{e\}$. Suy ra $e^* = s(e)$ với mọi e trong c. Do đó $p'(p')^* = s(p') = v$. Như vậy

$$pq^* = c^m (c^*)^n.$$

Lại dùng tính chất c không lối ra ta suy ra $cc^* = v$. Do đó ta có thể đặt $c^{-n} := (c^*)^n$, $c^0 = v$ và ta có

$$c^m (c^*)^n = c^{m-n}.$$

Như vậy

$$vL_K(E)v \subseteq K[c, c^*].$$

Điều còn lại là hiển nhiên, với đẳng cấu sinh bởi $c \mapsto t$, $c^* \mapsto t^{-1}$. $\square$

Ta ký hiệu $P_c(E)$ là tập hợp tất cả các đỉnh thuộc các chu trình không lối ra của E.

Bổ đề 1.25. *Giả sử $v \in E^0$ sao cho $T(v) \cap P_c(E) = \emptyset$ (nghĩa là $T(v)$ không có đỉnh nào thuộc một chu trình không lối ra). Khi đó, với mọi đa thức*

$$x := kv + \sum_{i=1}^{n} k_i p_i, \text{ với } p_i \in CP(v),$$

tồn tại $\alpha \in \mathrm{Path}(v)$ sao cho $\alpha^* x \alpha = k.r(\alpha)$.

Chứng minh.

Ta có thể giả sử $0 < l(p_1) \leq l(p_2) \leq \cdots \leq l(p_n)$. Do $p_1 \in CP(v)$ và $T(v) \cap P_c(E) = \emptyset$ nên tồn tại cạnh e trong p_1 và cạnh $f \neq e$ sao cho $s(f) = s(e) := w$.
Ta phân tích $p_1 = \alpha e \beta$, với $\alpha, \beta \in \mathrm{Path}(E) \cup E^0$. Khi đó

$$(\alpha f)^* x (\alpha f) = k \cdot r(f) + \sum_{i=2}^{n} k_i (\alpha f)^* p_i (\alpha f).$$

Chú ý rằng, do $l(p_1) \leq l(p_i)$ nên $(\alpha f)^* p_i \in \mathrm{Path}(E) \cup E^0 \cup \{0\}$. Do đó các thành phần của tổng bên phải hoặc bằng 0, hoặc là đường đi thực. Tiếp tục thực hiện quá trình trên ta được kết quả của bổ đề. □

Ký hiệu $KE = \left\{ \sum_{i=1}^{n} k_i p_i \,\middle|\, k_i \in K, p_i \in \mathrm{Path}(E) \right\}$.

Bổ đề 1.26. *Nếu $0 \neq x \in L_K(E)$ thì tồn tại $p \in \mathrm{Path}(E)$ sao cho $0 \neq xp \in KE$.*

Chứng minh.

Giả sử $0 \neq x \in L_K(E)$. Chọn đỉnh $v \in E^0$ sao cho $xv \neq 0$ (đỉnh v luôn chọn được, do $L_K(E)$ có đơn vị địa phương là tổng của các đỉnh thuộc E^0).
Ta viết

$$xv = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i^* + \alpha',$$

với $\alpha' \in KE$, $e_i \in E^1$, $e_i \neq e_j$ và giả sử rằng đây là biểu diễn có ít cạnh ảo nhất.

Dễ thấy rằng, tồn tại j sao cho $xve_j \neq 0$. Khi đó

$$0 \neq xve_j = \alpha_j + \alpha' e_j,$$

với $\alpha' e_j \in KE$.
Tiếp tục lặp lại quá trình trên với số cạnh ảo ít hơn, cuối cùng ta được đường đi $p \in \text{Path}(E)$ sao cho $xp \in KE$. □

Định lý 1.27 (Định lý rút gọn). *Với mọi $0 \neq x \in L_K(E)$, tồn tại $\alpha, \beta \in \text{Path}(E)$ sao cho:*

i) $0 \neq \alpha^* x \beta = kv$, *với* $k \in K$, $v \in E^0$, *hoặc*

ii) $0 \neq \alpha^* x \beta = p(c, c^*)$, *với* c *là một chu trình không lối ra và* $p(t, t^{-1})$ *là đa thức khác* 0 *trong* $K[t, t^{-1}]$.

Hơn nữa, hai trường hợp này không loại trừ lẫn nhau.

Chứng minh.

Giả sử $0 \neq x \in L_K(E)$. Theo Bổ đề 1.26, tồn tại $p \in \text{Path}(E)$ sao cho $0 \neq xp \in KE$. Ta viết

$$y := xp = \sum_{i=1}^{s} k_i p_i,$$

với $k_i \in K^*$, $p_i \in \text{Path}(E)$ và $l(p_i) \leq l(p_{i+1})$ với mọi $i = 1, \ldots, n-1$.

Với $s = 1$. Nếu $l(p_1) = 0$ thì ta được kết quả; nếu $l(p_1) \geq 1$ thì $p_1^* xp = k_1 p_1^* p_1 = k \cdot r(p_1) \neq 0$.

Giả sử kết quả đúng với mọi phần tử có dạng tổng của tối đa $s-1$ số hạng và y biểu diễn như trên. Đặt $v = r(p_1)$, ta có

$$0 \neq p_1^* yv = k_1 v + \sum_{i=2}^{s} k_i p_i^* p_i v.$$

Trường hợp 1. Nếu tồn tại $i \in \{2, \ldots, s\}$ sao cho $p_i^* p_i v = 0$ thì bằng quy nạp ta được kết quả.

Trường hợp 2. Nếu $p_i^* p_i v \neq 0$ với mọi i, thì $p_i^* p_i \in CP(v)$ với mọi i.

Trường hợp 2.1. Nếu $T(v) \cap P_c(E) = \emptyset$ thì áp dụng Bổ đề 1.25 ta được kết quả.

Trường hợp 2.2. Nếu $T(v) \cap P_c(E) \neq \emptyset$ thì tồn tại một đường đi q sao cho $s(q) = v$ và $r(q)$ là đỉnh của một chu trình c không lối ra. Hơn nữa, do $q^* p_i^* y q \in w L_K(E) w$, nên theo Bổ đề 1.24 ta được kết quả. □

Nhận xét. Hai trường hợp trên không loại trừ lẫn nhau, chẳng hạn với đồ thị E sau:

Lấy $x = e$, ta có $e^* x = v$ (cho trường hợp i) và $e^* x e = e$ là một chu trình không lối ra (cho trường hợp ii).

Ghi chú.

Với đồ thị E và vành R, ta cũng có thể định nghĩa R-đại số đường đi Leavitt tương tự như trên K-đại số và Định lý 1.27 cũng đúng trên $L_R(E)$.

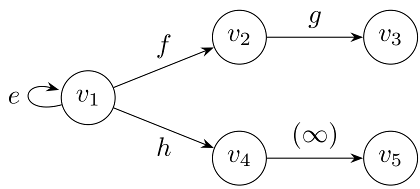
Hệ quả 1.28. *Cho $x \neq 0$ là phần tử thuần nhất trong $L_K(E)$. Khi đó, tồn tại $p, q \in \mathrm{Path}(E)$, $k \in K^*$ và $v \in E^0$ sao cho $0 \neq p^* x q = kv$.*

Chứng minh.

Giả sử $p, q \in \mathrm{Path}(E)$ sao cho $p^* x q \neq 0$ như trong i) hoặc ii) của Định lý 1.27. Nếu trường hợp i) xảy ra thì ta được kết quả; nếu ii) xảy ra thì do tính phân bậc của x suy ra rằng đa thức $p(c, c^*)$ trong ii) phải là đơn thức, nghĩa là $p^* x q = k c^m$, với $k \in K^*$. Nếu $m = 0$ thì xong; nếu $m < 0$ thì nhân phải 2 vế cho c^{-m}; nếu $m > 0$ thì nhân trái hai vế cho c^{-m} ta được kết quả. □

Bài tập

Bài tập 1.1. Cho đồ thị E như hình vẽ.



Xác định các đỉnh nguồn, đỉnh chìm, đỉnh vô hạn phát xạ, đỉnh kỳ dị, đỉnh thường của E.

Bài tập 1.2. Cho đồ thị E có $E^0 = \{u, v, w\}$, $E^1 = \{f, g, h\}$, $s(f) = u$, $r(f) = v$, $s(g) = v$, $r(g) = w$, $s(h) = w$, $r(h) = v$.

a) Viết ra tất cả các đường đi có độ dài không quá 3 bắt đầu từ u.

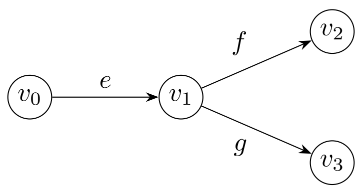
b) Cho $p = fgh$, xác định $s(p),\ r(p),\ l(p),\ p^0$.

c) Đường đi gh có là chu trình không?

d) Có chu trình nào đặt tại w không?

Bài tập 1.3. Cho E là một đồ thị và c là một chu trình của E. Chứng minh rằng c không có lối ra khi và chỉ khi $cc^* = s(c)$.

Bài tập 1.4. Cho đồ thị E như hình vẽ.



Xác định tất cả các đơn thức trong $L_K(E)$.

Bài tập 1.5. Chứng minh rằng, nếu E^0 vô hạn thì $L_K(E)$ không có đơn vị.

Bài tập 1.6. Cho E là một đồ thị không có chu trình và x là một đơn thức khác 0 trong $L_K(E)$. Chứng minh rằng x là phần tử lũy đẳng khi và chỉ khi tồn tại $v \in E^0$ sao cho $x = v$.

Bài tập 1.7. Cho I là ideal của $L_K(E)$ và e là một cạnh của E. Chứng minh rằng nếu e là cạnh với $s(e) \in I$, thì $r(e) \in I$.

Bài tập 1.8 (Định lý về sự duy nhất)**.** Cho K là một trường và E là một đồ thị. Chứng minh rằng, nếu A là một đại số $\mathbb{Z}$-phân bậc và $\pi : L_K(E) \to A$ là một đồng cấu vành phân bậc sao cho $\pi(v) \neq 0$ với mọi đỉnh $v \in E^0$ thì π là đơn cấu.

Bài tập 1.9. Chứng minh rằng, mọi ideal phân bậc khác không của $L_K(E)$ đều chứa ít nhất một đỉnh.

Bài tập 1.10. Ta nói đồ thị E thỏa mãn *Điều kiện* (L) nếu mọi chu trình trong E đều có lối ra. Chứng minh rằng, nếu đồ thị E thỏa mãn điều kiện (L) thì mọi ideal khác không của $L_K(E)$ đều chứa ít nhất một đỉnh.

Bài tập 1.11 (Định lý về sự duy nhất Cuntz–Krieger)**.** Cho K là một trường và E là đồ thị thỏa mãn điều kiện (L). Chứng minh rằng, nếu $\pi : L_K(E) \to A$ là một đồng cấu vành sao cho $\pi(v) \neq 0$ với mọi đỉnh $v \in E^0$ thì π là đơn cấu.

2

Các tính chất đại số của đại số đường đi Leavitt

2.1 Tính nửa nguyên tố của $L_K(E)$

Định nghĩa 2.1. Cho R là một vành.

i) Ta nói R là vành *nửa nguyên tố* nếu với mọi ideal I của R, $I^2 = 0$ kéo theo $I = 0$.

ii) Ta nói R là vành *không suy biến* nếu với mọi $a \in R$, $aRa = 0$ kéo theo $a = 0$.

Mệnh đề 2.2. *Cho R là vành. Khi đó R là nửa nguyên tố khi và chỉ khi R không suy biến.*

Chứng minh.

Giả sử R không suy biến. Gọi I là ideal hai phía lũy linh khác 0 của R. Bằng cách thay I bởi I^2 (nếu cần thiết), ta có thể giả sử $I \neq 0$ và

$I^2 = 0$. Lấy $0 \neq a \in I$. Khi đó $Ra \subseteq I$, nên $aRa \subseteq I^2 = 0$. Từ R không suy biến, kéo theo $a = 0$, mâu thuẫn. Vậy R nửa nguyên tố.

Ngược lại, giả sử R nửa nguyên tố và tồn tại $a \in R$ sao cho $aRa = 0$. Ta có RaR là ideal hai phía của R và

$$(RaR)^2 = (RaR)(RaR) \subseteq R(aRa)R = 0,$$

nên từ R nửa nguyên tố ta được $RaR = 0$. Đặt J là ideal hai phía sinh bởi a. Khi đó $J^3 \subseteq RaR$, nên $J^3 = 0$. Từ R nửa nguyên tố, ta được $J = 0$, nên $a = 0$. Như vậy R không suy biến. □

Hệ quả 2.3. *Nếu R là vành nửa nguyên tố và $0 \neq x \in R$ thì $xRx \neq 0$.*

Mệnh đề 2.4. *Cho R là vành. Khi đó, R nửa nguyên tố khi và chỉ khi R không chứa các ideal trái (phải) lũy linh khác 0.*

Chứng minh.

Chiều đảo là hiển nhiên nên ta chỉ cần chứng minh chiều thuận.

Giả sử R nửa nguyên tố và I là ideal trái lũy linh khác 0 của R. Bằng cách thay I bởi I^2, nếu cần thiết, ta có thể giả sử $I \neq 0$ và $I^2 = 0$. Lấy $0 \neq x \in I$ và J là ideal hai phía sinh bởi x. Từ $J^3 \subseteq RxR$ và $Rx \subseteq I$, ta được

$$J^6 \subseteq (RxR)(RxR) \subseteq RxRxR \subseteq I^2R = 0.$$

Mà R nửa nguyên tố nên $J = 0$, do đó $x = 0$, mâu thuẫn với giả thiết $x \neq 0$. Vậy I không thể tồn tại, nghĩa là R không chứa ideal trái lũy linh khác 0.

Lập luận tương tự cho trường hợp ideal phải và ideal hai phía. □

Mệnh đề 2.5. *Cho R là vành và I là ideal trái tối tiểu của R. Khi đó, hoặc $I^2 = 0$ hoặc tồn tại phần tử lũy đẳng e thuộc I sao cho*

$$I = Re = \{re \mid r \in R\}.$$

Chứng minh.

Giả sử $I^2 \neq 0$. Khi đó tồn tại $b \in I$ sao cho $Ib \neq 0$. Vì $Ib \subseteq I$ và I là ideal trái tối tiểu, ta có $Ib = I$. Xét tập

$$J = \{r \in R \mid rb = 0\},$$

tức J là linh hóa trái của b trong R. Khi đó J là một ideal trái của R. Do $Ib \neq 0$ nên tồn tại $x \in I$ sao cho $xb \neq 0$, tức $x \notin J$, suy ra $J \cap I \neq I$. Vì I tối tiểu nên $J \cap I = 0$. Từ $Ib = I$, tồn tại $e \in I$ sao cho $eb = b$. Khi đó:

$$b = eb = e^2 b,$$

nghĩa là

$$(e^2 - e)b = 0.$$

Suy ra

$$e^2 - e \in J \cap I = 0.$$

Do đó $e^2 = e$, tức e là phần tử lũy đẳng.
Vì $b \neq 0$ nên $e \neq 0$, và do đó Re là ideal trái khác 0 chứa trong I. Như vậy $Re = I$. Cuối cùng, do e lũy đẳng nên $Re = \{re \mid r \in R\}$. $\square$

Từ Mệnh đề 2.5 ta có ngay hệ quả sau:

Hệ quả 2.6. *Mọi ideal trái tối tiểu của vành R nửa nguyên tố đều có dạng Re, với e là một lũy đẳng của R.*

Chứng minh tương tự ta cũng được, nếu vành R nửa nguyên tố thì mọi ideal phải tối tiểu của R đều có dạng eR, với e là một lũy đẳng của R.

Chú ý rằng chiều đảo của Hệ quả 2.6 không đúng. Tuy nhiên, Mệnh đề 2.8 dưới đây chứng tỏ rằng, nếu một trong hai ideal eR và Re là tối tiểu thì ideal còn lại cũng tối tiểu. Trước hết, ta cần bổ đề sau:

Bổ đề 2.7. *Cho R là vành và $0 \neq x \in R$. Khi đó, nếu $x \in Ra$ với mọi $0 \neq a \in Rx$ thì Rx là ideal trái tối tiểu.*

Chứng minh.

Giả sử Rx chứa ideal trái $I \neq 0$. Lấy phần tử bất kỳ $0 \neq a \in I$, khi đó

$$Ra \subseteq RI \subseteq I \subseteq Rx.$$

Do $x \in Ra$ nên $Rx \subseteq Ra$, do đó $Rx = Ra$. Mà $Ra \subseteq I$, nên $I = Rx$, như vậy Rx tối tiểu. □

Mệnh đề 2.8. *Cho R là vành nửa nguyên tố và e là phần tử lũy đẳng của R. Khi đó Re là ideal trái tối tiểu của R khi và chỉ khi eR là ideal phải tối tiểu của R.*

Chứng minh.

Giả sử Re là ideal trái tối tiểu của R. Khi đó, với mọi $0 \neq a \in eR$, tồn tại $t \in R$ sao cho

$$a = et = e^2t = ea,$$

nên $aR = eaR$. Từ R nửa nguyên tố ta được R không suy biến, mà $ea = a \neq 0$, kéo theo $eaRea \neq 0$. Như vậy tồn tại $s \in R$ sao cho $easea \neq 0$.

Đặt $\phi : Re \to Re$ là R-đồng cấu xác định bởi $\phi(x) = xase$. Ta có $e = e^2 \in Re$, nên $\phi(e) = ease \neq 0$, do đó $\mathrm{Im}(\phi) \neq 0$. Từ Re là ideal trái tối tiểu, ta được $\mathrm{Im}(\phi) = Re$.

Tương tự, từ $\phi(e) \neq 0$ kéo theo $\ker(\phi) \neq Re$ và do đó $\ker(\phi) = 0$. Như vậy ϕ là đẳng cấu R-môđun. Do đó

$$e = \phi^{-1}(\phi(e)) = \phi^{-1}(ease) = ea\phi^{-1}(se) \in eaR = aR,$$

nên từ Bổ đề 2.7 ta được eR là ideal phải tối tiểu của R.

Chiều ngược lại được chứng minh tương tự. □

Mệnh đề 2.9. *Cho E là đồ thị và K là trường. Khi đó $L_K(E)$ là nửa nguyên tố.*

Chứng minh.

Giả sử I là ideal khác 0 của $L_K(E)$ và chọn $0 \neq x \in I$. Do Định lý 1.27, tồn tại $p, q \in \mathrm{Path}(E)$ sao cho

$$0 \neq p^*xq = kv \quad \text{hoặc} \quad 0 \neq p^*xq = p(c, c^*) \in wL_K(E)w,$$

với $k \in K^*$, $v, w \in E^0$, $c \in P_c(E)$ và $w \in c^0$. Khi đó

$$kv \in I \text{ hoặc } \alpha := p(c, c^*) \in I.$$

- Nếu $kv \in I$ thì do $(kv)^2 = k^2 v \neq 0$ nên $I^2 \neq 0$.
- Nếu $\alpha \in I$ thì do Bổ đề 1.24, $wL_K(E)w$ không có ước khác 0 của không, nên $\alpha^2 \neq 0$, kéo theo $I^2 \neq 0$.

Như vậy, cả hai trường hợp trên đều dẫn đến $I^2 \neq 0$. Do đó $L_K(E)$ là nửa nguyên tố. □

2.2 Tính nửa nguyên thủy của $L_K(E)$

Định nghĩa 2.10. Cho R là vành. Khi đó, giao của tất cả các ideal trái tối đại của R là ideal hai phía của R, gọi là *căn Jacobson* của R, ký hiệu bởi $J(R)$.

Nếu $J(R) = 0$ thì ta nói R là vành *nửa nguyên thủy* (hoặc *nửa đơn Jacobson*, hoặc *J-nửa đơn*).

Mệnh đề 2.11. *Cho R là vành có đơn vị 1 và $x \in R$. Khi đó các điều sau tương đương:*

i) $x \in J(R)$.

ii) *Với mọi $r \in R$, $1 + rx$ có nghịch đảo trái, nghĩa là tồn tại $s \in R$ sao cho $s(1 + rx) = 1$.*

iii) *Với mọi $r \in R$, $1 + rx$ khả nghịch.*

Chứng minh.

i) $\Rightarrow$ ii). Ta có $J(R)$ là ideal trái của R. Nếu $(1 + rx)$ không khả nghịch trái thì $1 \notin R(1 + rx)$ nên $R(1 + rx)$ là ideal trái thực sự của R. Do đó tồn tại ideal trái tối đại $\mathfrak{m}$ sao cho $R(1 + rx) \subseteq \mathfrak{m}$. Suy ra $1 + rx \in \mathfrak{m}$. Mà $x \in \mathfrak{m}$ nên $1 \in \mathfrak{m}$, mâu thuẫn.

ii) $\Rightarrow$ iii). Giả sử s là nghịch đảo trái của $1 + rx$, nghĩa là $s(1 + rx) = 1$.

Khi đó từ i) ta cũng có $s = 1 - srx$ cũng có nghịch đảo trái, gọi là t, nghĩa là $ts = 1$. Nhưng s vừa có nghịch đảo trái là t và nghịch đảo phải là $1 + rx$, nên $t = 1 + rx$ và s là nghịch đảo hai phía của $1 + rx$.

iii) $\Rightarrow$ i). Giả sử $1 + rx$ khả nghịch với mọi $r \in R$ và gọi $\mathfrak{m}$ là một ideal trái tối đại của R. Nếu $x \notin \mathfrak{m}$ thì $Rx + \mathfrak{m}R$, nên tồn tại $r \in R$ và $y \in \mathfrak{m}$ sao cho $rx + y = 1$. Khi đó $y = 1 - rx$ khả nghịch (do giả thiết). Vậy $1 \in Ry$, và do đó $R = Ry \subseteq \mathfrak{m}$, mâu thuẫn. $\square$

Định nghĩa 2.12. Cho R là một vành. Một phần tử $x \in R$ được gọi là *tựa chính quy phải* (right quasi-regular) nếu tồn tại $y \in R$ sao cho $x + y + xy = 0$. Khi đó y được gọi là *tựa nghịch đảo phải* của x.

! Khái niệm tựa chính quy trái và tựa nghịch đảo trái được định nghĩa tương tự.

Mệnh đề 2.13. *Cho R là vành. Khi đó mọi phần tử $x \in J(R)$ đều tựa chính quy.*

Chứng minh.

- Nếu R có đơn vị thì do $x \in J(R)$ nên theo Mệnh đề 2.11, $1 + x$ có nghịch đảo, gọi là $1 + y$, suy ra

$$(1 + x)(1 + y) = (1 + y)(1 + x) = 1.$$

Do đó $x + y = -xy = -yx$, nghĩa là x tựa chính quy.

- Nếu R không có đơn vị thì ta có thể nhúng R vào vành có đơn vị $R_1 = \mathbb{Z} \oplus R$ với phép cộng thông thường và phép nhân xác định bởi:

$$(m, x)(n, y) = (mn, nx + my + xy).$$

Đơn vị của R_1 là $(1, 0)$. Nếu $(m, x) \in J(R_1)$ thì $(1, 0) + (m, x)$ có nghịch đảo phải, gọi là (n, y), nghĩa là

$$(1, 0) = (m + 1, x)(n, y) = ((m + 1)n, nx + (m + 1)y + xy),$$

nên $(m+1)n = 1$. Mà $m, n \in \mathbb{Z}$ nên $m+1 = 1$ hoặc $m+1 = -1$. Nhưng $(1, 0) + (-m, -x)$ cũng có nghịch đảo phải, nên tương tự ta cũng được $1 - m = 1$ hoặc $1 - m = -1$. Điều này chỉ xảy ra khi $m = 0$ và $n = 1$.

Khi đó $(1,0) = (1, x+y+xy)$ nên $x \in J(R)$. Như vậy, mọi phần tử trong $J(R_1)$ phải có dạng $(0,x)$, với x tựa chính quy. □

Bổ đề 2.14. *Cho R là một vành. Khi đó $J(R)$ không chứa các phần tử lũy đẳng khác* 0.

Chứng minh.

Giả sử tồn tại $0 \neq e \in J(R)$ là phần tử lũy đẳng. Khi đó $-e \in J(R)$, nên tồn tại $y \in R$ sao cho $y - e = ey$. Nhân trái hai vế cho $-e$ ta được $-ey + e = -ey$, và như vậy $e = 0$. □

Bổ đề 2.15. *Cho R là vành $\mathbb{Z}$-phân bậc chứa tập các đơn vị địa phương gồm các phần tử thuần nhất. Khi đó $J(R)$ là ideal phân bậc của R.*

Chứng minh.

Cho $x \in J(R)$, ta biểu diễn x dưới dạng tổng của các thành phần thuần nhất:

$$x = x_{-n} + \cdots + x_{-1} + x_0 + x_1 + \cdots + x_n,$$

với $n \in \mathbb{N}$ và các x_i có thể bằng 0. Gọi u là đơn vị địa phương cho x, nghĩa là $x = uxu$. Do u là lũy đẳng nên u phải là phần tử thuần nhất bậc không và

$$x = uxu = ux_{-n}u + \cdots + ux_{-1}u + ux_0u + ux_1u + \cdots + ux_nu \qquad (*)$$

cũng là một sự phân tích x thành tổng của các thành phần thuần nhất trong vành đơn nguyên uRu, ở đây $x_i = ux_iu$ với mọi i. Áp dụng tính chất vành góc uRu cũng là vành $\mathbb{Z}$-phân bậc và

$$J(uRu) = uJ(R)u,$$

ta được $(*)$ là sự phân tích thành tổng các thành phần thuần nhất của phần tử x trong căn Jacobson của vành đơn nguyên uRu. Theo [7, Hệ quả 2], $J(uRu)$ là ideal phân bậc của uRu. Do đó $x_i \in J(uRu)$ với mọi i, và do đó $x_i \in J(R)$. □

Mệnh đề 2.16. *Cho E là đồ thị, K là trường. Khi đó $L_K(E)$ là nửa nguyên thủy.*

Chứng minh.

Đặt $J = J(L_K(E))$. Giả sử tồn tại $0 \neq x \in J$. Do Định lý rút gọn (Định lý 1.27), tồn tại $p, q \in \text{Path}(E)$ sao cho

- $0 \neq p^*xq = kv$, với $k \in K^*$ và $v \in E^0$), hoặc
- $0 \neq p^*xq = p(c, c^*)$, với c là một chu trình không lối ra và $p(t, t^{-1}) \in K[t, t^{-1}]$.

- Trong trường hợp thứ nhất, ta được $v \in J$, nhưng điều này không xảy ra, vì căn Jacobson không chứa phần tử lũy đẳng khác 0.

- Trong trường hợp thứ hai, ký hiệu $s(c) = w$. Khi đó p^*xq là phần tử khác không trong $J \cap wL_K(E)w$, trùng với căn Jacobson của $wL_K(E)w$. Nhưng do Bổ đề 1.24,

$$wL_K(E)w \cong K[t, t^{-1}],$$

và vành này có căn Jacobson bằng 0. Cả hai trường hợp đều dẫn đến mâu thuẫn, từ đó $J = 0$. $\square$

2.3 Tính không kỳ dị của $L_K(E)$

Định nghĩa 2.17. Cho R là một vành. Phần tử $a \in R$ được gọi là phần tử *chính quy von Neumann* nếu tồn tại $b \in R$ sao cho $a = aba$; vành R được gọi là *vành chính quy von Neumann* nếu mọi phần tử của nó đều là phần tử chính quy von Neumann.

Định nghĩa 2.18. Cho R là một vành và I là ideal trái của R. Ta nói I là *ideal trái cốt yếu* của R nếu với mọi ideal trái $J \neq 0$ của R, ta có $I \cap J \neq 0$.

Định nghĩa 2.19. Cho R là một vành và $x \in R$. Đặt

$$\operatorname{lan}_R(x) := \{r \in R : rx = 0\}$$

Khi đó $\operatorname{lan}_R(x)$ là ideal trái của R, gọi là *linh hóa tử trái* của x trong R (nếu R được ngầm hiểu thì ta ký hiệu $\operatorname{lan}(x)$ thay cho $\operatorname{lan}_R(x)$).

Đặt $Z_l(R)$ là tập tất cả các phần tử $x \in R$ sao cho $\operatorname{lan}(x)$ là ideal trái cốt yếu của R:

$$Z_l(R) := \left\{x \in R \mid \operatorname{lan}(x) \text{ là ideal trái cốt yếu của } R\right\}.$$

Khi đó ta có mệnh đề sau:

Định lý 2.20. *Cho R là vành. Khi đó $Z_l(R)$ là ideal của R, gọi là* ideal kỳ dị trái *của R.*

Chứng minh.

Với mọi $x \in Z_l(R)$, với mọi $r \in R$ sao cho $Rr \neq 0$, thì tồn tại

$$0 \neq x_0 \in \operatorname{lan}(x) \cap Rr,$$

nghĩa là $xx_0 = 0$ và tồn tại $0 \neq k \in R$ sao cho $x_0 = kr$. Suy ra $krx = 0$. Do đó $k \in \operatorname{lan}(rx)$. Vậy $\operatorname{lan}(rx) \neq 0$.

Giả sử tồn tại $I \neq 0$ sao cho $I \cap \operatorname{lan}(rx) = 0$, suy ra $yrx \neq 0$ với mọi $0 \neq y \in I$. Chọn $0 \neq y_0 \in I$, suy ra $y_0rx \neq 0$. Đặt I' là ideal trái sinh bởi y_0r, suy ra $\operatorname{lan}(x) \cap I' \neq 0$, nên tồn tại $0 \neq t \in \operatorname{lan}(x) \cap I'$, suy ra

$$t = ky_0r + ny_0r \text{ và } tx = 0 \; (k \in R, n \in \mathbb{Z}).$$

Do đó

$$(ky_0 + ny_0)rx = 0,$$

nghĩa là

$$(ky_0 + ny_0) \in \operatorname{lan}(rx) \cap I = 0,$$

kéo theo $t = 0$, đây là điều vô lý. Do đó $rx \in Z_l(R)$.

Vậy $Z_l(R)$ là ideal trái của R. Rõ ràng $\operatorname{lan}(x) \subseteq \operatorname{lan}(xr)$ với mọi $r \in R$, nên $Z_l(R)$ cũng là ideal phải của R. $\square$

Định nghĩa 2.21. Vành R được gọi là *không kỳ dị trái* nếu $Z_l(R) = 0$.

Vành *không kỳ dị phải* được định nghĩa tương tự.

Vành *không kỳ dị* được hiểu là không kỳ dị trái và không kỳ dị phải.

Ví dụ 2.1. Nếu K là trường thì vành $R = K[t, t^{-1}]$ không kỳ dị.

Thật vậy, nếu tồn tại $0 \neq x \in Z_l(R)$ thì do $\mathrm{lan}(x)$ là ideal trái cốt yếu của R nên tồn tại $0 \neq y \in R$ sao cho $xy = 0$. Nhưng dễ thấy R là miền nguyên nên điều này không thể xảy ra, nghĩa là vành $R = K[t, t^{-1}]$ không kỳ dị.

Bổ đề 2.22. *Cho R là một vành. Khi đó, ideal kỳ dị trái $Z_l(R)$ của R không chứa các phần tử chính quy von Neumann khác không. Nói riêng, $Z_l(R)$ không chứa các phần tử lũy đẳng khác không.*

Chứng minh.

Giả sử $0 \neq a \in Z_l(R)$ là phần tử chính quy von Neumann. Suy ra, tồn tại $b \in R$ sao cho $a = aba$. Do đó

$$0 \neq a = ababa \in Rab = (Rab)a,$$

nên Rab là ideal trái khác 0 của R. Mặt khác, $a \in Z_l(R)$, nên tồn tại $r \in R$ sao cho

$$0 \neq rab \in Rab \cap \mathrm{lan}_R(a).$$

Do $rab \in \mathrm{lan}_R(a)$ nên $(rab)a = 0$, suy ra

$$0 = (rab)ab = r(aba)b = rab,$$

đây là điều mâu thuẫn. Do đó ta được kết quả cần chứng minh. □

Định nghĩa 2.23. Cho R là một vành, và $a \in R$. Khi đó $R_a := aRa$ và một vành với phép cộng kế thừa từ R và phép nhân được cho bởi $axa \cdot aya = axaya$. Vành này được gọi là *vành địa phương của R tại a*.

Chú ý rằng, nếu e là phần tử lũy đẳng của R thì vành địa phương của R tại e chính là vành góc eRe.

Bổ đề 2.24. *Cho R là vành nửa nguyên tố. Khi đó:*

i) *Nếu $a \in Z_l(R)$ thì $Z_l(R_a) = R_a$.*

ii) *$Z_l(R_a) \subseteq Z_l(R)$.*

iii) *R không kỳ dị trái khi và chỉ khi R_a không kỳ dị trái với mọi $a \in R$.*

Chứng minh.

i) Nếu $a = 0$ thì rõ ràng $R_a = Z_l(R_a) = 0$.

Giả sử $0 \neq a \in Z_l(R)$. Với mọi $x \in R$, ta có $axa \in R_a$. Đặt $\mathcal{J}$ là ideal trái khác không của R_a. Ta chứng minh $\mathrm{lan}_{R_a}(axa) \cap \mathcal{J} \neq 0$.

- Nếu $\mathcal{J} \cdot axa = 0$ thì $\mathcal{J} \subseteq \mathrm{lan}_{R_a}(axa)$.

- Nếu $\mathcal{J} \cdot axa \neq 0$ thì ta chọn $aya \in \mathcal{J}$ sao cho

$$aya \cdot axa = ayaxa \neq 0.$$

Do R là vành nửa nguyên tố, ta được $Rayaxa \neq 0$ (nếu $Rx = 0$ thì $xRx = 0$ nên $x = 0$); nói riêng, $Rayaxa \neq 0$.

Do $0 \neq a \in Z_l(R)$ nên tồn tại b sao cho

$$0 \neq bayaxa \in Rayaxa \cap \mathrm{lan}_R(a),$$

nghĩa là $bayaxa = 0$. Từ tính nửa nguyên tố của R ta suy ra $aRbay \neq 0$ (Hệ quả 2.3). Thực hiện tương tự như trên, ta được

$$0 \neq aRbaya = aRba \cdot aya \in \mathcal{J}, \text{ với } aRbaya \subseteq \mathrm{lan}_{R_a}(axa).$$

Điều này chứng tỏ rằng $\mathrm{lan}_{R_a}(axa)$ là ideal trái cốt yếu của R_a, và do đó $axa \in Z_l(R_a)$. Vậy $R_a \subseteq Z_l(R_a)$. Bao hàm thức ngược lại là hiển nhiên, nghĩa là ta có $Z_l(R_a) = R_a$.

ii) Giả sử $axa \in Z_l(R_a)$. Gọi I là ideal trái khác không của R. Nếu $Ia = 0$ thì $I \subseteq \mathrm{lan}_R(axa)$, do đó $\mathrm{lan}_R(axa) \cap I \neq 0$. Ngược lại, do tính nửa nguyên tố của R, nên áp dụng Hệ quả 2.3 với $0 \neq x = ra \in Ia$ ta được $aRIa \neq 0$. Nói riêng, aIa là ideal trái khác không của aRa. Do đó tồn tại y sao cho

$$0 \neq aya \subseteq aIa \cap \operatorname{lan}_{R_a}(axa),$$

nghĩa là

$$aya \cdot axa = ayaxa = 0.$$

Suy ra $0 \neq ay \in \operatorname{lan}_R(axa)$, và từ đó $\operatorname{lan}_R(axa)$ là ideal trái cốt yếu của R. Điều này dẫn đến $axa \in Z_l(R)$.

iii) Nếu R không kỳ dị trái thì, do ii), với mọi $a \in R$, vành địa phương của R tại a cũng không kỳ dị trái. Ngược lại, giả sử $x \in Z_l(R)$. Do tính chất không kỳ dị trái của R_x ta được

$$Z_l(R_x) = R_x = Z_l(R_x),$$

nên

$$xRx = Rx = 0.$$

Từ tính nửa nguyên tố của R ta được $x = 0$. □

Định lý 2.25. *Cho E là một đồ thị và K là trường. Khi đó, đại số đường đi Leavitt $L_K(E)$ là không kỳ dị.*

Chứng minh.

Giả sử tồn tại $0 \neq x \in Z_l(L_K(E))$. Do Định lý rút gọn, tồn tại $p, q \in \operatorname{Path}(E)$ sao cho

- $0 \neq p^*xq \in Kv$ với v là một đỉnh thuộc E^0, hoặc
- $0 \neq p^*xq \in wL_K(E)w \cong K[t, t^{-1}]$, với w là điểm đặt của một chu trình không lối ra.

Do Bổ đề 2.22, $Z_l(R)$ không chứa các lũy đẳng khác 0 nên trường hợp thứ nhất không xảy ra. Với trường hợp thứ hai, đặt

$$0 \neq y := p^*xq \in Z_l(L_K(E)) \quad \text{và} \quad L := L_K(E).$$

Khi đó, từ Bổ đề 2.24i), ta được $Z_l(L_y) = L_y$. Dễ thấy $L_y = (L_w)_y$, và do đó $Z_l((L_w)_y) = (L_w)_y$. Chú ý rằng $L_w \cong K[t, t^{-1}]$ là vành không kỳ dị (xem Ví dụ 2.1). Kết hợp với Bổ đề 2.24iii), ta suy ra rằng mọi đại số địa phương L_w đều không kỳ dị trái. Nói riêng, $Ly = Z_l(L_y) = 0$. Từ tính nửa nguyên tố của L ta được $y = 0$, đây là điều mâu thuẫn. Tính không kỳ dị phải của $L_K(E)$ được chứng minh tương tự. $\square$

2.4 Tính di truyền và tính bão hòa của đồ thị

Định nghĩa 2.26. Cho $E = (E^0, E^1, r, s)$ là một đồ thị và $H \subseteq E^0$. Ta nói:

i) H *di truyền* nếu với mọi $v \in H$ ta có $T(v) \subseteq H$.

ii) H *bão hòa* nếu $\forall v \in \mathrm{Reg}(E)$, $\{r(e) : s(e) = v\} \subseteq H \Rightarrow v \in H$.

Nói cách khác:

- tập con H là di truyền nếu với mỗi $v \in H$ thì các đỉnh kết nối từ nó cũng thuộc H;
- tập con H là bão hòa nếu mỗi đỉnh thường đi vào H (và chỉ đi vào H) thì thuộc H.

Định nghĩa 2.27. Cho $E = (E^0, E^1, r, s)$ là một đồ thị và $X \subseteq E^0$. Tập con di truyền bão hòa nhỏ nhất (của E^0) chứa X được gọi là *bao đóng di truyền bão hòa* của X, ký hiệu bởi $\overline{X}$.

Ví dụ 2.2. Xét đồ thị E như sau:

$$\begin{tikzcd} & & u & \\ v_1 \arrow[r] & v_2 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & v_3 \arrow[r] & v_4 \arrow[ul] \\ & & w \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Ta thấy $S := \{v_1, v_2\}$ là tập con bão hòa (nhưng không di truyền) của E^0 và $H := \{u, w, v_3, v_4\}$ là tập con di truyền (nhưng không bão hòa) của E^0. Ta có $\overline{S} = \overline{H} = E^0$.

Mệnh đề 2.28. *Cho E là một đồ thị và X là tập con của E^0. Đặt $G_0(X) = T(X)$, và với mỗi $n \geq 1$, đặt*

$$G_n(X) = G_{n-1}(X) \cup \Big\{ v \in \operatorname{Reg}(E) \mid r(s^{-1}(v)) \subseteq G_{n-1}(X) \Big\},$$

và

$$G(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} G_n(X).$$

Khi đó, $\overline{X} = G(X)$.

Chứng minh.

Dễ thấy $X \subseteq G(X)$ và $G_m(X) \subseteq G_n(X)$ với mọi $m \leq n$.

** Chứng minh $G(X)$ di truyền.*

Giả sử $v \in G(X)$ và $w \in T(v)$. Gọi $p = e_1 \dots e_l$ là một đường đi từ v đến w và gọi n là số nguyên nhỏ nhất sao cho $v \in G_n(X)$.

- Nếu $n = 0$ thì $v \in T(X)$, và do đó $w \in T(X) \subseteq G(X)$.

- Nếu $n > 0$, thì theo định nghĩa ta có

$$v \in \operatorname{Reg}(E) \quad \text{và} \quad r(s^{-1}(v)) \subseteq G_{n-1}(X).$$

Nói riêng, $r(e_1) \in G_{n-1}(X)$.

Gọi m là số nguyên nhỏ nhất sao cho $r(e_1) \in G_m(X)$ (lưu ý rằng $m \leq n-1$). Nếu $m = 0$, thì ta lại có

$$w \in T(X) \subseteq G(X).$$

Ngược lại, ta có

$$r(e_2) \in G_{m-1}(X).$$

Do đó, lặp lại chứng minh trên, ta được

$$w \in T(X) \quad \text{hoặc} \quad r(e_1) = w \in G_p(X), \text{ với } p < n.$$

Cả hai trường hợp ta đều có $w \in G(X)$, nên $G(X)$ là di truyền.

** Chứng minh $G(X)$ bão hòa.*

Giả sử tồn tại $v \in \operatorname{Reg}(E)$ sao cho $r(s^{-1}(v)) \subseteq G(X)$. Gọi n là số nguyên nhỏ nhất sao cho

$$r(s^{-1}(v)) \subseteq G_n(X).$$

Khi đó, theo định nghĩa,

$$v \in G_{n+1}(X) \subseteq G(X)$$

và như vậy $G(X)$ bão hòa.

** Chứng minh $\overline{X} = G(X)$.*

Cuối cùng, giả sử H là tập con di truyền bão hòa bất kỳ chứa X. Vì H là di truyền, nên nó chứa $T(X)$, do đó

$$T(X) = G_0(X) \subseteq H.$$

Hơn nữa, vì H bão hòa, nên H phải chứa

$$S_1 = \{v \in \text{Reg}(E) \mid r(s^{-1}(v)) \subseteq T(X)\},$$

và như vậy

$$G_1(X) = S_1 \cup T(X) \subseteq H.$$

Tiếp tục lập luận như trên ta được $G_n(X) \subseteq H$ với mọi số nguyên $n \geq 0$. Như vậy $G(X) \subseteq H$. Do đó $G(X) = \overline{X}$. □

2.5 Tính đơn của $L_K(E)$

Bổ đề 2.29. *Cho đồ thị E và trường K. Khi đó, nếu I là một ideal của $L_K(E)$ thì $I \cap E^0$ là tập con di truyền bão hòa của E^0.*

Chứng minh.

Giả sử $u \in I \cap E^0$ và $e \in s^{-1}(u)$. Khi đó $r(e) = e^*e = e^*ue \in I$, nên $I \cap E^0$ là tập di truyền. Giả sử $v \in \text{Reg}(E)$ sao cho $r(e) \in I$ với mọi $e \in s^{-1}(v)$. Khi đó

$$v = \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^* = \sum_{e \in s^{-1}(v)} er(e)e^* \in I,$$

nên $I \cap E^0$ là tập con bão hòa của E^0. □

Định lý 2.30. *Cho E là một đồ thị và K là một trường. Khi đó, $L_K(E)$ là đơn khi và chỉ khi các điều kiện sau được thỏa mãn:*

i) *E^0 chỉ có các tập con di truyền bão hòa là $\emptyset$ và E^0.*

ii) *Mỗi chu trình trong E đều có lối ra.*

Chứng minh.

Chiều đảo: Giả sử $J \neq 0$ là một ideal của $L_K(E)$. Do E không chứa các chu trình không lối ra nên J chứa ít nhất một đỉnh. Theo Bổ đề 2.29, $J \cap E^0$ là tập con di truyền bão hòa khác rỗng của E^0 nên $J \cap E^0 = E^0$, kéo theo J là ideal sinh bởi E^0. Do đó $J = L_K(E)$. Vậy $L_K(E)$ đơn.

Chiều thuận: i) Giả sử tồn tại tập con H di truyền bão hòa của E^0 và $\emptyset \subsetneq H \subsetneq E^0$. Ta xây dựng đồ thị $F = (F^0, F^1, s_F, r_F)$ bằng cách đặt:

$$F^0 = E^0 \setminus H, \quad F^1 = r^{-1}(F^0), \quad r_F = r|_{F^0}, \quad s_F = s|_{F^0}.$$

Rõ ràng $r_F(F^1) \subseteq F^0$. Giả sử tồn tại $e \in F^1$ với $s(e) \in H$. Khi đó, do H di truyền nên $r(e) \in H$, điều này mâu thuẫn với định nghĩa của F^1. Do đó $s(e) \in F^0$, và như vậy đồ thị $F = (F^0, F^1, s_F, r_F)$ được định nghĩa tốt. Ta định nghĩa ánh xạ

$$\varphi : L_K(E) \to L_K(F)$$

trên tập các phần tử sinh của $L_K(E)$ như sau:

- Với mỗi $v \in E^0$,

$$\varphi(v) = \begin{cases} v, & \text{nếu } v \in F^0, \\ 0, & \text{nếu } v \notin F^0. \end{cases}$$

- Với mỗi $e \in E^1$,

$$\varphi(e) = \begin{cases} e, & \text{nếu } e \in F^1, \\ 0, & \text{nếu } e \notin F^1 \end{cases} \quad \text{và} \quad \varphi(e^*) = \begin{cases} e^*, & \text{nếu } e \in F^1, \\ 0, & \text{nếu } e \notin F^1. \end{cases}$$

Bằng cách mở rộng một cách tuyến tính và nhân tính trên $L_K(E)$, ta được φ là đồng cấu K-đại số.

Tiếp theo, ta chứng tỏ φ bảo toàn cấu trúc của đại số đường đi, nghĩa là φ bảo toàn các hệ thức (A1), (A2), (CK1), (CK2).

Hệ thức (A1): Với mọi $v_i, v_j \in E^0$ ta có:

- Nếu $v_i \in F^0, v_j \in F^0$ thì

$$\varphi(v_i)\varphi(v_j) = \delta_{ij}v_i = \delta_{ij}\varphi(v_i).$$

- Nếu $v_i \notin F^0$ hoặc $v_j \notin F^0$ thì

$$\varphi(v_i)\varphi(v_j) = 0 = \delta_{ij}\varphi(v_i).$$

Như vậy mọi trường hợp đều có

$$\varphi(v_i)\varphi(v_j) = \delta_{ij}\varphi(v_i), \forall v_i, v_j \in E^0.$$

Hệ thức (A2): Với mọi $e \in E^1$, ta có:

- Nếu $e \in F^1$ thì $r(e) \notin H$, nên $s(e) \notin H$. Do đó

$$\varphi(s(e))\varphi(e) = s(e)e = e = \varphi(e)$$

và

$$\varphi(e)\varphi(r(e)) = er(e) = e = \varphi(e).$$

- Nếu $e \notin F^1$ thì

$$\varphi(e) = 0 = \varphi(s(e))\varphi(e) = \varphi(e)\varphi(r(e)).$$

Tương tự cho e^*.

Hệ thức (CK1): Với $v_i, v_j \in E^0$, và $e_i, e_j \in E^1$, ta có:

- Nếu $r(e_i), r(e_j) \notin H$ thì

$$\varphi(e_i^*)\varphi(e_j) = e_i^*e_j = \delta_{ij}r(e_i) = \delta_{ij}\varphi(r(e_i)).$$

- Nếu $r(e_i) \in H$ hoặc $e_i \notin F^1$ thì $\varphi(e_i^*) = 0$, suy ra

$$\varphi(e_i^*)\varphi(e_j) = 0 = \delta_{ij}\varphi(r(e_i)).$$

Hệ thức (CK2): Với $v \in \mathrm{Reg}(E)$, ta có $v = \sum\limits_{e \in s^{-1}(v)} ee^*$.

- Nếu $v \in H$ thì do tính di truyền của H, ta có $r(e) \in H, \forall e \in s^{-1}(v)$. Do đó:

$$\varphi\Big(v - \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^*\Big) = \varphi(v) - \sum \varphi(e)\varphi(e^*) = 0.$$

- Nếu $v \notin H$ thì do bão hòa nên tồn tại $e \in E^1$ sao cho $s(e) = v$ và $r(e) \in H$. Khi đó $\varphi(e)\varphi(e^*) = ee^*$, nên:

$$\varphi\Big(v - \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^*\Big) = v - \sum_{e \in s_F^{-1}(v)} ee^* = 0.$$

Như vậy φ bảo toàn các hệ thức (A1), (A2), (CK1), (CK2) và là một đồng cấu đại số đường đi Leavitt.

Do $H \neq \emptyset$ nên tồn tại $v \in H$, suy ra $\varphi(v) = 0$, nghĩa là $\ker(\varphi) \neq \{0\}$. Hơn nữa $w \in E^0 \setminus H$, nên $\varphi(w) = w \neq 0$, kéo theo $w \notin \ker(\varphi)$. Do đó $\ker(\varphi)$ là ideal thực sự không tầm thường, nên $L_K(E)$ không đơn.

ii) Giả sử E chứa chu trình c không lối ra đặt tại $v \in E^0$. Ta có $c^*c = v$, và $cc^* = v$ nên $c \in CSP(v)$. Xét ideal $I = \langle v + c \rangle$.

- Nếu $v \notin I$ thì I là ideal con thực sự, mâu thuẫn.

- Nếu $v \in I$, thì tồn tại các đơn thức α_t, β_t sao cho:

$$v = \sum_{t=1}^{n} k_t \alpha_t (v + c) \beta_t,$$

và các α_t, β_t có dạng c^m, $m \in \mathbb{Z}$, nên

$$v = (v + c) p(c, c^*),$$

với $p(c, c^*)$ là đa thức theo c và c^*. Điều này vô lý, vì c không lối ra. □

Ví dụ 2.3. Xét đồ thị đường hữu hạn $E = M_n$ với $n \in \mathbb{N}$. Đồ thị M_n không có chu trình nên điều kiện (ii) được thỏa mãn. Hơn nữa, nếu H là tập con di truyền bão hòa khác rỗng thì do tính di truyền, $H = E^0$. Do đó $L_K(M_n) \cong M_n(K)$ là đơn.

Ví dụ 2.4. Xét đồ thị đơn khuyên R_1. Có c là chu trình không lối ra tại v, nên điều kiện (ii) không thỏa mãn. Do đó $L_K(R_1) \cong K[t, t^{-1}]$ không đơn.

Ví dụ 2.5. Xét E là đồ thị hoa hồng n cánh R_n. Mỗi cạnh $e_i \in E^1$ là một chu trình, và nếu $n \geq 2$ thì có e_i có lối ra, vì bất kỳ cạnh nào khác cũng là lối ra, nghĩa là điều kiện (ii) thỏa mãn. Hơn nữa, điều kiện (i) là thỏa mãn vì R_n chỉ có một đỉnh, nên tập con khác rỗng duy nhất của $(R_n)^0$ là chính nó. Như vậy $L_K(R_n) \cong L(1, n)$ là đơn với mọi $n \geq 2$.

Ví dụ 2.6. Xét E là đồ thị đồng hồ vô hạn C_∞. Khi đó, với mọi đỉnh $v_i \neq v$, ta có v_i là tập hợp con di truyền bão hòa khác E^0, và như vậy $L_K(C_\infty) \cong \bigoplus_{i=1}^{\infty} M_2(K) \oplus KI_{22}$ không đơn.

2.6 Tính đơn của $L_K(E)$ và đồ thị đối kết

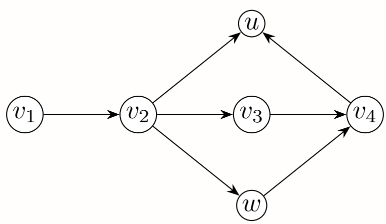
Định nghĩa 2.31. Cho $E = (E^0, E^1, r, s)$ là một đồ thị. Ký hiệu:

- E^∞ là tập tất cả các đường đi có chiều dài vô hạn trong E;
- $E^{\leq\infty}$ gồm E^∞ và tập tất cả các đường đi hữu hạn trong E mà có đỉnh cuối là một đỉnh chìm.

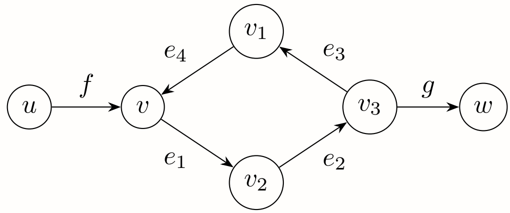
Đỉnh $v \in E^0$ được gọi là *đối kết* (cofinal) nếu với mọi đường đi $p \in E^{\leq\infty}$, tồn tại đỉnh w trong p sao cho $v \geq w$.

Nếu mọi đỉnh của đồ thị E đều là đối kết thì ta nói E là *đồ thị đối kết*.

Ví dụ 2.7. Đồ thị sau là đồ thị đối kết:



Ví dụ 2.8. Đồ thị sau là đồ thị không đối kết:



Mệnh đề 2.32. *Cho E là một đồ thị. Khi đó, E^0 chỉ có hai tập con di truyền bão hòa là $\emptyset$ và E^0 khi và chỉ khi các điều sau được thỏa mãn:*

i) *E là đồ thị đối kết;*

ii) *Với mọi đỉnh kỳ dị $u \in E^0$, ta có $v \geq u$ với mọi $v \in E^0$.*

Chứng minh.

Chiều thuận. Giả sử E^0 chỉ có các tập con di truyền bão hòa là $\emptyset$ và E^0. Ta cần chứng minh hai điều kiện i) và ii) được thỏa mãn.

Gọi $v \in E^0$ và $p \in E^{\leq\infty}$. Ta chứng minh E là đồ thị đối kết, tức là tồn tại đỉnh w thuộc p sao cho $w \in T(v)$. Đặt $X = \{v\}$. Khi đó, bao đóng di truyền bão hòa $\overline{X} \neq \emptyset$, nên $\overline{X} = E^0$. Tức là $G(X) = E^0$.

Gọi m là số nguyên nhỏ nhất sao cho

$$G_m(v) \cap p^0 \neq \emptyset \text{ và } w \in G_m(v) \cap p^0.$$

Nếu $m > 0$ thì do tính nhỏ nhất của m, ta có $w \notin G_{m-1}(v)$, do đó w là một đỉnh thường và $r(s^{-1}(w)) \subseteq G_{m-1}(v)$. Tuy nhiên, vì $w \in p^0$ và không phải là đỉnh chìm nên tồn tại cạnh e trong p sao cho $s(e) = w$. Do đó

$$r(e) \in r(s^{-1}(w)) \subseteq G_{m-1}(v).$$

Mà $e \in p$ nên $r(e) \in p^0$, điều này mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của m. Suy ra $m = 0$, và do đó $w \in G_0(v) = T(v)$. Vậy E là đồ thị đối kết.

Bây giờ, lấy $u \in E^0$ là đỉnh kỳ dị và $v \in E^0$ bất kỳ. Ta sẽ chứng minh $v \geq u$. Gọi m là số nguyên nhỏ nhất sao cho $u \in G_m(v)$. Nếu $m > 0$, do u là đỉnh kỳ dị nên $u \in G_{m-1}(v)$, mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của m. Do đó $m = 0$, tức là $u \in T(v)$, hay $v \geq u$. Điều kiện ii) được thỏa mãn.

Chiều đảo. Giả sử E là đồ thị đối kết và với mọi đỉnh kỳ dị $u \in E^0$, ta có $v \geq u$ với mọi $v \in E^0$. Ta sẽ chứng minh rằng nếu H là tập con di truyền bão hòa khác rỗng của E^0, thì $H = E^0$.

Chọn $v \in E^0 \setminus H$. Nếu v là đỉnh kỳ dị, thì với mọi $w \in H$, ta có $w \geq v$ (theo giả thiết ii)), nên theo tính di truyền của H ta có $v \in H$, mâu thuẫn. Do đó v không là đỉnh kỳ dị.

Vì v không là đỉnh chìm nên $s^{-1}(v) \neq \emptyset$. Do H là bão hòa và $v \notin H$ nên tồn tại cạnh $e_1 \in s^{-1}(v)$ sao cho $r(e_1) \notin H$. Lặp lại quá trình này, ta xây dựng được một đường đi $p = e_1 e_2 \ldots$ với $r(e_i) \notin H$ với mọi i, tức là $p \in E^\infty$.

Vì E là đồ thị đối kết, nên tồn tại $w \in H$ sao cho $w \in T(r(e_i))$ với một i. Do đó tồn tại đỉnh $u \in p^0$ sao cho $w \in T(u)$, và vì $w \in H$, theo tính di truyền của H, ta có $u \in H$, mâu thuẫn với việc $u \in p^0 \subseteq E^0 \setminus H$. Vậy $H = E^0$. Khi đó, E^0 chỉ có các tập con di truyền bão hòa là $\emptyset$ và E^0. □

Hệ quả 2.33. *$L_K(E)$ đơn nếu và chỉ nếu E thỏa mãn các điều sau:*

i) *Mỗi chu trình trong E đều có lối ra.*

ii) *E là đồ thị đối kết.*

iii) *Với mọi đỉnh kỳ dị $u \in E^0$, ta có $v \geq u$ với mọi $v \in E^0$.*

Chứng minh.

Áp dụng Mệnh đề 2.32 và Định lý 2.30. □

2.7 Tính đơn của $L_K(E)$ và điều kiện (K)

Định nghĩa 2.34. Cho E là một đồ thị. Ta nói E thỏa mãn *Điều kiện* (K) nếu không có đỉnh nào trong E^0 mà chỉ có một đường đi đơn đóng tại nó, nghĩa là

$$\{v \in E^0 : |CSP(v)| = 1\} = \emptyset.$$

Mệnh đề 2.35. *Nếu $L_K(E)$ đơn thì E thỏa mãn Điều kiện* (K).

Chứng minh.

Giả sử $L_K(E)$ đơn, và giả sử tồn tại $v \in E^0$ sao cho $CSP(v) = \{p\}$. Nếu p không là chu trình thì tồn tại một chu trình c đặt tại v có các cạnh là tập con của các cạnh của p, mâu thuẫn với $CSP(v) = \{p\}$. Do đó p là chu trình, và như vậy, theo điều kiện (ii) của Định lý 2.30, có lối ra e cho p.

Đặt $A = p^0$ (là tập tất cả các đỉnh trong p). Khi đó $r(e) \notin A$, nếu không ta sẽ có đường đi đơn đóng tại v khác p. Cho $X = \{r(e)\}$ và $\overline{X}$ là bao đóng di truyền bão hòa của X. Vì $L_K(E)$ đơn nên $\overline{X} = E^0$, do đó tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho

$$n = \min\Big\{m : A \cap G_m(X) \neq \emptyset\Big\}.$$

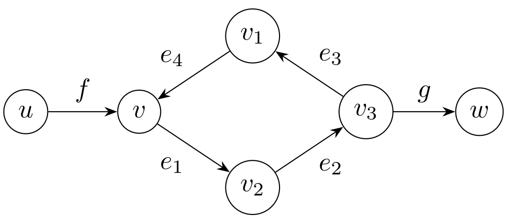
Cho $w \in A \cap G_n(X)$ và giả sử $n \neq 0$. Do tính nhỏ nhất của n, ta có $w \notin G_{n-1}(X)$. Như vậy, theo định nghĩa của $G_n(X)$, w phải là một đỉnh thường và

$$r(s^{-1}(w)) \subseteq G_{n-1}(X),$$

nghĩa là w chỉ phát ra cạnh vào trong $G_{n-1}(X)$. Vì w là một đỉnh trong p, nên tồn tại $f \in s^{-1}(w)$ sao cho $r(f) \in A$. Như vậy $r(f) \in A \cap G_{n-1}(X)$, trái với tính nhỏ nhất của n. Vậy $n = 0$, và do đó $w \in G_0(X) = T(r(e))$. Điều này có nghĩa là tồn tại đường đi q từ $r(e)$ đến w. Vì w nằm trong chu trình p và e là lối ra cho p, nên tồn tại đường đi p' từ w đến $r(e)$, và do đó $p'q$ là một chu trình tại w. Tuy nhiên, điều này dẫn đến $|CSP(v)| \geq 2$, mâu thuẫn. $\square$

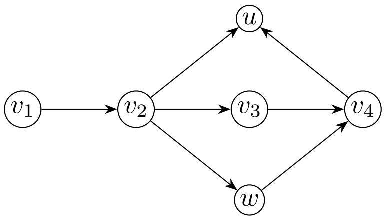
Bài tập

Bài tập 2.1. Cho đồ thị E như sau:



Liệt kê tất cả các tập con di truyền và các tập con bão hòa của E^0.

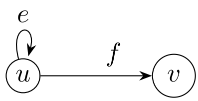
Bài tập 2.2. Cho đồ thị E như sau:



a) Liệt kê tất cả các tập con di truyền và tất cả các tập con bão hòa của E^0.

b) $L_K(E)$ có đơn không?

Bài tập 2.3. Cho đồ thị E như sau:



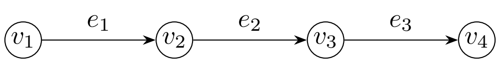
a) Chứng minh rằng u đối kết và v không đối kết.

b) Tìm các tập con di truyền bão hòa của E.

c) E có thỏa mãn Điều kiện (L) không?

d) $L_K(E)$ có đơn không?

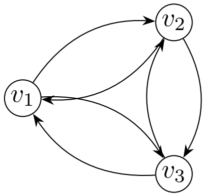
Bài tập 2.4. Cho đồ thị E như sau:



a) Với mỗi $v \in E^0$, xác định tập $T(v)$.

b) Xác định tập $P_l(E)$.

Bài tập 2.5. Cho đồ thị E như sau:



a) Xác định xem các đỉnh v_1, v_2, v_3 có phải là đỉnh đối kết không.

b) Đồ thị E có là đồ thị đối kết không? Giải thích.

3

Cấu trúc ideal của đại số đường đi Leavitt

3.1 Ideal sinh bởi đỉnh chìm

Định nghĩa 3.1. Cho $v \in E^0$, đặt

$$R(v) = \{p \in \text{Path}(E) : r(p) = v\}.$$

Ta gọi số phần tử của $R(v)$ là *chỉ số ra* của v, ký hiệu bởi $n(v)$.

Do $v \in R(v)$ với mọi $v \in E^0$ nên $n(v)$ có thể vô hạn nhưng luôn khác 0.

Mệnh đề 3.2. *Cho E là đồ thị hữu hạn, hữu hạn đường, không có chu trình; $v \in E^0$ là một đỉnh chìm và K là trường. Đặt*

$$I_v := \text{span}(\{pq^* : p, q \in \text{Path}(E), r(p) = r(q) = v\}).$$

Khi đó I_v là một ideal của $L_K(E)$ và $I_v \cong M_{n(v)}(K)$.

Chứng minh.

Xét hai đơn thức $pq^* \in I_v$ và $p'q'^* \in L_K(E)$ sao cho $p'q'^*pq^* \neq 0$. Khi đó, theo Bổ đề 1.11, tồn tại $p_1, q_1 \in \mathrm{Path}(E)$ sao cho

$$p = q'p_1 \text{ hoặc } q' = pq_1.$$

Nếu $q' = pq_1$ thì do v là một đỉnh chìm nên $\deg(q_1) = 0$, do đó

$$p'q'^*pq^* = p'q^* \in I_v;$$

nếu $p = q'p_1$ thì do $r(p'p_1) = r(p_1) = r(p) = v = r(q)$ nên

$$p'q'^*pq^* = (p'p_1)q^* \in I_v.$$

Như vậy I_v là ideal trái của $L_K(E)$.

Tương tự, I_v cũng là ideal phải của $L_K(E)$.

Đặt $n = n(v)$. Khi đó

$$\{p \in \mathrm{Path}(E) \mid r(p) = v\} = \{p_1, \ldots, p_n\}.$$

Do đó

$$I_v = \Big\{\sum k_{ij}p_ip_j^* : i, j = 1, \ldots, n;\ k_{ij} \in K\Big\}.$$

Dễ thấy

$$(p_ip_j^*)(p_jp_k^*) = p_ivp_k^* = p_ip_k^*$$

và do v là đỉnh chìm nên nếu $j \neq t$ thì $p_j^*p_t = 0$. Do đó,

$$(p_ip_j^*)(p_tp_k^*) = 0.$$

Như vậy $\{p_ip_j^* : i, j = 1, \ldots, n\}$ là tập các đơn vị ma trận cho I_v. □

Mệnh đề 3.3. *Cho E là đồ thị hữu hạn, hữu hạn đường và không có chu trình. Đặt $\{v_1, \ldots, v_t\}$ là tập các đỉnh chìm. Khi đó*

$$L_K(E) \cong \bigoplus_{i=1}^{t} M_{n(v_i)}(K).$$

Chứng minh.

Do Mệnh đề 3.2, ta chỉ cần chứng minh

$$L_K(E) = \bigoplus_{i=1}^{t} I_{v_i},$$

trong đó I_{v_i} được định nghĩa như trong Mệnh đề 3.2.

Xét đơn thức $pq^* \neq 0$ với $p, q \in \mathrm{Path}(E)$. Nếu tồn tại i sao cho $r(p) = v_i$ thì $pq^* \in I_{v_i}$; nếu $r(p) \neq v_i$ với mọi i thì $r(p)$ không là đỉnh chìm. Mà E hữu hạn và không chu trình, nên $r(p)$ là đỉnh thường. Do đó, theo (CK2),

$$pq^* = \Big(p\Big(\sum_{e\in s^{-1}(r(p))} ee^*\Big)q^*\Big) = \sum_{e\in s^{-1}(r(p))} pe(qe)^*.$$

Hơn nữa, do E hữu hạn và không chu trình nên mỗi thành phần của tổng ở trên, hoặc thuộc I_{v_i} nào đó, hoặc có thể được lặp lại như trên (nhiều lần, nếu cần) để đi đến đỉnh chìm. Cứ tiếp tục quá trình này, pq^* có thể được biểu diễn như là tổng của các đơn thức có dạng $pp'(qq')^*$ với $r(pp') = v_i$ (với i nào đó). Do đó,

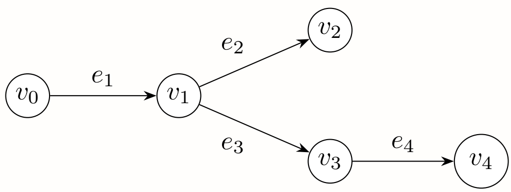
$$L_K(E) = \sum_{i=1}^{t} I_{v_i}.$$

Xét $pq^* \in I_{v_i}$ và $p'q'^* \in I_{v_j}$ với $i \neq j$. Khi đó, do v_i, v_j là đỉnh chìm nên $(pq^*)(p'q'^*) = 0$. Điều này chứng tỏ $I_{v_i} \cdot I_{v_j} = 0$. Do đó,

$$L_K(E) = \bigoplus_{i=1}^{t} I_{v_i}.$$

Áp dụng Mệnh đề 3.2 ta được kết quả cần chứng minh. $\square$

Ví dụ 3.1. Cho E là đồ thị sau:



Các đỉnh chìm của E là v_2 và v_4. Ta có:

- $R(v_2) = \{v_2, e_2, e_1e_2\}$, nên $n(v_2) = 3$.
- $R(v_4) = \{v_4, e_4, e_3e_4, e_1e_3e_4\}$, nên $n(v_4) = 4$.

Do đó, từ Mệnh đề 3.3 ta được

$$L_K(E) \cong M_3(K) \oplus M_4(K).$$

3.2 Ideal sinh bởi tập di truyền

Bổ đề 3.4. *Cho E là một đồ thị và H là một tập con di truyền của E. Ký hiệu $I(H)$ là ideal của $L_K(E)$ sinh bởi H. Khi đó:*

i) $I(H) = \{\sum kpq^* \mid k \in K,\ p, q \in \mathrm{Path}(E),\ r(p) = r(q) \in H\}$.

ii) $I(H) = I(\overline{H})$.

Chứng minh.

i) Đặt

$$J := \left\{\sum kpq^* \mid k \in K,\ p, q \in \mathrm{Path}(E),\ r(p) = r(q) \in H\right\}.$$

Với mọi $p, q, p_1, q_1 \in \mathrm{Path}(E)$ và $u \in H$ sao cho

$$pq^*up_1q_1^* \neq 0,$$

do Bổ đề 1.11, tồn tại $p_2 \in \mathrm{Path}(E)$ sao cho

$$p_1 = qp_2 \text{ hoặc } q = p_1p_2.$$

Do đó

$$pq^*up_1q_1^* = pp_2q_1^* \quad \text{hoặc} \quad pq^*up_1q_1^* = pp_2^*q_1^*.$$

Chú ý rằng $u = s(p_1) \in H$ là di truyền, kéo theo $r(p_1) \in H$. Do đó, cả hai trường hợp đều dẫn đến

$$pq^*up_1q_1^* \in J.$$

Điều này chứng tỏ J là ideal của $L_K(E)$ và $H \subseteq J$, suy ra

$$I(H) \subseteq J.$$

Rõ ràng mỗi đơn thức trong J đều thuộc $I(H)$ nên

$$J \subseteq I(H).$$

Vậy $J = I(H)$.

ii) Rõ ràng $I(H) \subseteq I(\overline{H})$. Ngược lại, ký hiệu H_n như G_n trong Mệnh đề 2.28, ta định nghĩa $H_n \subseteq I(H)$ với mọi $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Hiển nhiên

$$H_0 = T(H) = H \subseteq I(H).$$

Giả sử $H_{n-1} \subseteq I(H)$ và ta lấy $u \in H_n \setminus H_{n-1}$. Khi đó

$$s^{-1}(u) = \{e_1, \dots, e_m\} \text{ và } r(s^{-1}(u)) \subseteq H_{n-1}.$$

Do giả thiết quy nạp, cả hai tập hợp này đều chứa trong $I(H)$, nên

$$u = \sum_{i=1}^{m} e_i e_i^* \in I(H).$$

Do đó, $I(\overline{H}) \subseteq I(H)$. □

Định lý 3.5. *Cho E là một đồ thị hữu hạn đường, K là một trường và I là một ideal phân bậc của $L_K(E)$. Khi đó $I = I(H)$, với $H := I \cap E^0$.*

Chứng minh.

Giả sử I là ideal phân bậc của $L_K(E)$ và đặt $H := I \cap E^0$. Do Bổ đề 2.29, H là tập con di truyền bão hòa của E^0, và hiển nhiên $I(H) \subseteq I$.

Xét $\alpha \in I$, ta chứng minh $\alpha \in I(H)$. Do $L_K(E)$ có đơn vị địa phương là tổng các đỉnh thuộc E^0 nên ta chỉ cần chứng minh với mọi đỉnh $v \in E^0$ sao cho $\alpha v \neq 0$ ta có $\alpha v \in I(H)$.

Từ tính phân bậc của I, ta có thể giả sử rằng α là phần tử thuần nhất. Ta chứng minh khẳng định của định lý bằng quy nạp theo bậc ảo degge(αv) của αv.

Giả sử degge$(\alpha v) = 0$. Ta viết

$$\alpha v = \sum_{i=1}^{m} k_i \gamma_i, \quad \text{với } k_i \in K^*,\ \gamma_i \in \mathrm{Path}(E),\ \gamma_i \neq \gamma_j\ \forall i \neq j.$$

Từ αv là phần tử thuần nhất, suy ra mọi đường đi γ_i đều có cùng độ dài. Do đó, với mọi j,

$$v = r(\gamma_j) = (k_j)^{-1} k_j \gamma_j^* \gamma_j = (k_j)^{-1} \gamma_j^* (\sum k_i \gamma_i)$$

nên

$$(k_j)^{-1} \gamma_j^* \alpha v \in I \cap E^0 = H.$$

Điều này dẫn đến $\alpha v \in I(H)$.

Giả sử kết quả đúng khi bậc ảo bé hơn $n \in \mathbb{N}$, ta chứng minh kết quả cũng đúng khi $\operatorname{degge}(\alpha v) = n$. Ta viết

$$\alpha v = \sum \mu_i e_i^* + \lambda,$$

với $\mu_i \in L_K(E)$, $e_i \in E^1$, $e_i \neq e_j$ khi $i \neq j$, $\lambda \in KE$ là dạng biểu diễn của αv với ít cạnh ảo nhất. Do với mọi i ta có $e_i^* = e_i^*.v$, nghĩa là $v = s(e_i)$, nên $s^{-1}(v) \neq \emptyset$.

Chọn một $f \in s^{-1}(v)$. Nếu $e_i^* = 0$ với mọi i thì $\alpha v f = \lambda f$, nên theo quy nạp, $\alpha v f \in I(H)$; nếu tồn tại i sao cho $e_i^* \neq 0$ thì $f = e_i$, và do đó

$$\alpha v f = \Big(\sum \mu_j e_j^*\Big) f = \mu_i + \lambda f.$$

Do $\operatorname{degge}(\mu_i + \lambda f) < \operatorname{degge}(\alpha v)$ nên theo quy nạp ta được $\alpha v f \in I(H)$.

Trong cả hai trường hợp ta đều có $\alpha v \in I(H)$. Do đó

$$\alpha = \alpha\Big(\sum_{f \in s^{-1}(v)} f f^*\Big) = \sum_{f \in s^{-1}(v)} \alpha v f f^* \in I(H). \qquad \square$$

Nhận xét. Không phải mọi ideal trong $L_K(E)$ đều phân bậc. Chẳng hạn, xét K-đại số đường đi Leavitt kết hợp với đồ thị $E = R_1$:

Ta biết rằng đại số này đẳng cấu với $K[x, x^{-1}]$, nên cả hai có cùng số lượng các ideal (vô hạn), trong khi theo Định lý 3.5, $L_K(E)$ chỉ có hai ideal phân bậc là $\{0\}$ và $L_K(E)$, đó là hai ideal sinh bởi các tập con di truyền bão hòa $\emptyset$ và E^0 của E^0.

3.3 Ideal sinh bởi cặp chấp nhận được

Định nghĩa 3.6. Cho A là một K-đại số và I là ideal trái của vành A. Ta nói I là *ideal trái đại số* của A nếu I là K-đại số con của A.

Định nghĩa tương tự cho *ideal phải đại số* và *ideal đại số*.

Bổ đề 3.7. *Cho K là một trường và E là một đồ thị. Khi đó mọi ideal trái của vành $L_K(E)$ đều là ideal trái đại số của $L_K(E)$ (tương tự cho ideal phải đại số và ideal đại số).*

Chứng minh.

Giả sử I là ideal trái của vành $L_K(E)$. Lấy hai phần tử tùy ý $a \in K$ và $y \in I$. Đặt $u_1, \dots, u_r$ là tập các đỉnh thuộc E^0 sao cho

$$u = \sum_{i=1}^{r} u_i, \quad y = uy$$

(tập các đỉnh đầu của các đơn thức trong biểu diễn dưới dạng đa thức của y). Khi đó

$$ay = (au)y \in L_K(E)I \subseteq I.$$

Điều này chứng tỏ I là một đại số con của $L_K(E)$. $\square$

Định nghĩa 3.8. Cho H là tập con di truyền bão hòa của E^0. Đặt

$$\mathrm{Br}(H, v) := s^{-1}(v) \cap r^{-1}(E^0 \setminus H)$$

và đặt

$$B_H := \{v \in E^0 \mid H \leq \mathrm{Inf}(E),\ 0 < |\mathrm{Br}(H, v)| < \infty\}.$$

Ta gọi B_H là *tập đỉnh gãy* của H.

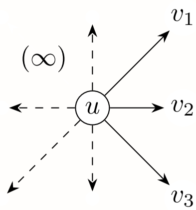
- Nếu $v \in B_H$ và $S \subseteq B_H$ thì ta ký hiệu:

$$v^H := v - \sum_{e \in \mathrm{Br}(H,v)} ee^* \quad \text{và} \quad S^H = \{v^H \mid v \in S\}.$$

Khi đó cặp (H, S) gọi là một *cặp chấp nhận được*.

Như vậy, B_H là tập hợp gồm tất cả các đỉnh v không thuộc H và có vô hạn cạnh có gốc tại v mà chỉ có hữu hạn ngọn không thuộc H. Do (CK1), dễ thấy rằng v^H là một lũy đẳng.

Ví dụ 3.2. Cho $E := C_{\mathbb{N}_0}$ là đồ thị đồng hồ vô hạn, với $\aleph_0$ cạnh



Cho trước $m \in \mathbb{N}$, ta có $H_1 := \{v_1, \ldots, v_m\}$ và $H_2 := \{v_n \mid n \geq m\}$ là các tập con di truyền của E^0, trong khi $B_{H_1} = \emptyset$, $B_{H_2} = \{u\}$.

Định lý 3.9. *Cho E là một đồ thị và (H, S) là một cặp chấp nhận được của E. Ký hiệu $I_{(H,S)}$ là ideal hai phía của $L_K(E)$ sinh bởi tập hợp*

$$\{u : u \in H\} \cup \{v^H : v \in S\}.$$

Khi đó $I_{(H,S)}$ là ideal sinh bởi hai tập hợp

$$\{pq^* : p, q \in \mathrm{Path}(E);\ r(p) = r(q) \in H\}$$

và

$$\{pw^H q^* : p, q \in \mathrm{Path}(E);\ r(p) = r(q) = w \in S\}.$$

Hơn nữa, $I_{(H,S)}$ là ideal phân bậc trong $L_K(E)$.

Chứng minh.

Đặt J là ideal sinh bởi các tập hợp

$$\{pq^* : p, q \in \mathrm{Path}(E);\ r(p) = r(q) \in H\}.$$

và

$$\{pw_q^{H*} : p, q \in \mathrm{Path}(E); r(p) = r(q) = w \in S\}.$$

Rõ ràng mọi phần tử thuộc J đều nằm trong ideal sinh bởi

$$\{v : v \in H\} \cup \{w^H : w \in S\},$$

nên $J \subseteq I_{(H,S)}$.
Để chứng minh điều ngược lại, ta lấy $x \in I_{(H,S)}$, khi đó

$$x = \sum_i \alpha_i v_i \beta_i + \sum_j \gamma_j w_j^H \lambda_j,$$

với $\alpha_i, \beta_i, \gamma_j, \lambda_j \in L_K(E)$, $v_i \in H$, $w_j \in S$ và tổng là hữu hạn.
Do Hệ quả 1.13, mỗi phần tử trong $L_K(E)$ đều có dạng

$$\sum_i k_i p_i q_i^*, \quad \text{với } \ p_i, q_i \in \mathrm{Path}(E), k_i \in K.$$

Như vậy, để cho tiện, ta bỏ đi các vô hướng k_i và biểu diễn biểu thức trên dưới dạng

$$x = \sum_i (p_{1i} q_{1i}^*) v_i (p_{2i} q_{2i}^*) + \sum_j (p_{3j} q_{3j}^*) w_j^H (p_{4j} q_{4j}^*),$$

với $p_{ij}, q_{ij} \in \mathrm{Path}(E)$.

Lấy một hạng tử $0 \neq y = (p_1 q_1^*) v (p_2 q_2^*)$ từ tổng đầu tiên và một hạng tử $0 \neq z = (p_3 q_3^*) w^H (p_4 q_4^*)$ từ tổng thứ hai.

Do $y \neq 0$ nên $s(q_1) = s(p_2) = v$, và do đó $y = p_1 q_1^* p_2 q_2^*$. Suy ra $q_1^* p_2 \neq 0$, nên theo Bổ đề 1.11, tồn tại $\gamma, \tau \in \mathrm{Path}(E)$ sao cho

$$p_2 = q_1 \gamma \ \text{ hoặc } \ q_1 = p_2 \tau.$$

- Với trường hợp thứ nhất, ta có $y = p_1 \gamma q_2^*$. Từ $s(p_2) = v$ và $r(p_2) = r(\gamma)$, ta có $r(\gamma) \in T(v)$. Do tính di truyền của H, ta được $r(\gamma) \in H$. Như vậy, bằng cách đặt $p = p_1 \gamma, q = q_2$ ta có $y = p r(\gamma) q^* \in J$.

- Với trường hợp thứ hai, ta có $y = p_1 \tau^* q_2^*$. Chứng minh tương tự trường hợp thứ nhất, ta cũng được $y \in J$.

Từ định nghĩa của w^H, ta có thể biểu diễn

$$w^H := w - \sum_{e \in Br(H,w)} ee^*,$$

suy ra

$$z = p_3q_3^*p_4q_4^* - \sum_{e\in Br(H,w)} p_3q_3^*ee^*p_4q_4^*.$$

Ta xét bốn trường hợp sau:

Trường hợp 1: $l(q_3) = 0; l(p_4) = 0$. Khi đó $q_3 = p_4 = w$, suy ra

$$z = p_3wq_4^* - \sum_{e\in Br(H,w)} p_3ee^*q_4^*.$$

Đặt $p = p_3, q = q_4$, ta có $z = pw^Hq^* \in J$.

Trường hợp 2: $l(q_3) = 0; l(p_4) > 0$. Gọi f là cạnh đầu của p_4, nghĩa là $p_4 = fp_4'$, khi đó:

$$z = p_3fp_4'q_4^* - \sum_{e\in Br(H,w)} p_3ee^*fp_4'q_4^*.$$

Nếu $r(f) \notin H$ thì do $s(f) = w$, ta có $f \in Br(H,w)$. Khi đó $e^*f = 0$ với mọi $e \in Br(H,w) \setminus \{f\}$, nên

$$z = p_3fp_4'q_4^* - p_3ff^*fp_4'q_4^* = p_3fp_4'q_4^* - p_3fp_4'q_4^* = 0,$$

mâu thuẫn. Vậy $r(f) \in H$, kéo theo $f \notin Br(H,w)$. Khi đó $e^*f = 0$ với mọi $e \in Br(H,w)$, suy ra

$$z = p_3fp_4'q_4^*.$$

Từ $r(f) = s(p_4') \in H$, và H là tập con truyền, nên $r(p_4') \in H$. Đặt $p = p_3fp_4', q = q_4$, ta có

$$z = pr(p_4')q^* \in J.$$

Trường hợp 3: $l(q_3) > 0; l(p_4) = 0$. Chứng minh tương tự Trường hợp 2.

Trường hợp 4: $l(q_3) > 0; l(p_4) > 0$. Đặt $p_4 = fp_4', q_3 = gq_3'$, với $f, g \in E^1$.

Nếu $f \neq g$, thì với mọi $e \in Br(H,w)$ ta có $g^*e = 0$ hoặc $e^*f = 0$, nên

$$z = p_3(q_3')^*g^*fp_4'q_4^* - \sum_{e\in Br(H,w)} p_3(q_3')^*(g^*e)(e^*f)p_4'q_4^* = 0,$$

mâu thuẫn. Vậy $f = g$, do đó

$$z = p_3(q_3')^* f p_4' q_4^* - \sum_{e \in Br(H,w)} p_3(q_3')^*(f^*e)(e^*f)p_4'q_4^*.$$

Tương tự Trường hợp 2, nếu $r(f) \notin H$ thì mâu thuẫn. Vậy $r(f) \in H$, kéo theo $f \notin Br(H,w)$. Khi đó $e^*f = 0$ với mọi $e \in Br(H,w)$, và như vậy

$$z = (p_3(q_3')^*)r(f)(p_4'q_4^*).$$

Đặt $p = p_3, q = q_4$, ta được $z \in J$. Vậy $x \in J$, nên $I_{(H,S)} \subseteq J$.

Để chứng minh $I_{(H,S)}$ phân bậc, ta thấy rằng mỗi đơn thức pq^* thỏa mãn $r(p) = r(q) \in H$ là phần tử thuần nhất bậc $l(p) - l(q)$. Hơn nữa, với mọi $w \in S$, ta có w^H là phần tử thuần nhất bậc 0, nên pw^Hq^* là phần tử thuần nhất bậc $l(p) - l(q)$. Như vậy, mỗi phần tử thuộc $I_{(H,S)}$ đều có thể được biểu diễn dưới dạng tổng của các phần tử thuần nhất dạng pq^* hoặc pw^Hq^*, và mỗi phần tử dạng này đều thuộc $I_{(H,S)}$, do đó $I_{(H,S)}$ là ideal phân bậc. □

Nhận xét. Nếu H là tập con di truyền bão hòa của E^0 thì bằng cách lấy $S = \emptyset$ và áp dụng Định lý 3.9, ta được $I(H)$ là ideal sinh bởi tập

$$\{pq^* : p, q \in \text{Path}(E),\ r(p) = r(q) \in H\},$$

nghĩa là Bổ đề 3.4 có thể được xem như là hệ quả của Định lý 3.9.

Định lý 3.10 (Mô tả ideal phân bậc). *Cho E là một đồ thị, K là một trường và I là một ideal phân bậc của $L_K(E)$. Khi đó, $I = I_{(H,S)}$, với $H = I \cap E^0$ và $S = \{w \in B_H \mid w^H \in I\}$.*

Chứng minh.

Dễ thấy rằng $I_{(H,S)} \subseteq I$. Ngược lại, do I là ideal phân bậc, nên ta chỉ cần chứng minh các phần tử thuần nhất của I đều thuộc $I_{(H,S)}$. Hơn nữa, do $L_K(E)$ có đơn vị địa phương là tổng các đỉnh thuộc E^0, nên ta chỉ cần chứng minh rằng, với mọi phần tử thuần nhất $\alpha \in I$ và với mọi $v \in E^0$ sao cho $\alpha v \neq 0$, thì có $\alpha v \in I_{(H,S)}$.

Ta chứng minh $\alpha v \in I_{(H,S)}$ bằng quy nạp theo bậc cạnh ảo của các phần tử trong I. Ký hiệu bậc cạnh ảo của phần tử $\beta \in L_K(E)$ bởi $\mathrm{degge}(\beta)$. Trước tiên, giả sử $\mathrm{degge}(\alpha v) = 0$. Khi đó

$$\alpha v = \sum_{\text{h.h.}} k_i\gamma_i, \quad \text{với } k_i \in K^*, \gamma_i \in \mathrm{Path}(E).$$

Do I là ideal phân bậc nên ta có thể xem tất cả các γ_i đều có cùng bậc. Hơn nữa, ta có thể giả sử tất cả các γ_i đều khác nhau.

Với mọi j, ta có

$$\gamma_j^*\alpha v = \gamma_j^*\Big(\sum_{i=1}^{m} k_i\gamma_i\Big) = k_j\gamma_j^*\gamma_j = k_j r(\gamma_j) = k_j v,$$

nên $v = k_j^{-1}\gamma_j^*\alpha v \in I \cap E^0 = H$, nghĩa là $\alpha v \in I(H) \subseteq I_{(H,S)}$.

Giả sử kết quả đúng cho mọi dạng biểu diễn có bậc cạnh ảo nhỏ hơn $n \in \mathbb{N}$ và ta chứng minh kết quả đúng cho $\mathrm{degge}(\alpha v) = n \in \mathbb{N}$. Ta viết

$$\alpha v = \sum_{i=1}^{m} \mu_i e_i^* + \lambda, \quad \text{với } \mu_i \in L_K(E), e_i \in E^1, \lambda \in KE,$$

và ta giả sử đây là dạng biểu diễn của αv với ít cạnh ảo nhất. Do $e_i^* = e_i^* v$ nên $v = s(e_i)$ với mọi i; nói riêng, $s^{-1}(v) \neq \varnothing$.

Trường hợp 1: $s^{-1}(v)$ hữu hạn.

Với mỗi $f \in s^{-1}(v)$:
- Nếu $f \neq e_i$ với mọi $i = 1, \dots, m$ thì $e_i^* f = 0$ với mọi $i = 1, \dots, m$. Do đó

$$\alpha v f = \lambda f \in I.$$

- Nếu tồn tại $j \in \{1, \dots, m\}$ sao cho $f = e_j$ thì

$$\alpha v f = \sum_{i=1}^{m} \mu_i e_i^* f + \lambda f = \mu_j + \lambda f \in I.$$

Trong cả hai trường hợp ta đều có

$$\alpha v f \in I \ \text{ và } \ \mathrm{degge}(\alpha v f) < \mathrm{degge}(\alpha),$$

nên theo quy nạp ta được

$$\alpha v f \in I_{(H,S)}, \quad \text{với mọi } f \in s^{-1}(v).$$

Do đó

$$\alpha v = \alpha\Big(\sum_{f \in s^{-1}(v)} f f^*\Big) = \sum_{f \in s^{-1}(v)} (\alpha f) f^* \in I_{(H,S)}.$$

Trường hợp 2: $s^{-1}(v)$ vô hạn.

Nếu $|s^{-1}(v) \cap r^{-1}(E^0 \setminus H)| = \infty$ thì tồn tại

$$g \in s^{-1}(v) \cap r^{-1}(E^0 \setminus H)$$

sao cho $g \neq e_i$ với mọi i. Khi đó

$$\alpha v g = \lambda g \in I,$$

kéo theo $r(g) \in H$, mâu thuẫn. Vậy

$$|s^{-1}(v) \cap r^{-1}(E^0 \setminus H)| < \infty.$$

Do đó

$$v \in H \quad \text{hoặc} \quad v \in B_H.$$

- Nếu $v \in H$ thì rõ ràng $\alpha v \in I_{(H,S)}$.
- Nếu $v \in B_H$ thì viết

$$v = v^H + \sum_{f \in Br(H,v)} f f^*.$$

+ Nếu $e_i \in Br(H,v)$ thì

$$e_i^* v^H = e_i^*\Big(v - \sum_{f \in Br(H,v)} f f^*\Big) = 0,$$

nên $e_i^* v^H \in I$;

+ Nếu $e_i \notin Br(H,v)$ thì

$$e_i^* v^H = e_i^*\Big(v - \sum_{f \in Br(H,v)} f f^*\Big) = e_i^* v.$$

Mà $e_i \notin Br(H,v)$ nên $r(e_i) \in H$. Do đó

$$e_i^* v^H = r(e_i) e_i^* v \in I.$$

Vậy trong cả hai trường hợp ta đều có $e_i^* v^H \in I$. Mặt khác,

$$\alpha v^H = \sum_{i=1}^{m} \mu_i e_i^* v^H + \lambda v^H, \ \text{ và } \ \alpha \in I, \ e_i^* v^H \in I,$$

nên $\lambda v^H \in I$.

Nếu $\lambda = 0$ thì

$$\alpha v^H = \sum_{i=1}^{m} \mu_i e_i^* v^H \in I_{(H,S)}.$$

Ngược lại, do λ là phần tử thuần nhất, ta có thể viết

$$\lambda = \sum k_i \lambda_i, \ \text{ với } k_i \in K^*, \lambda_i \in \mathrm{Path}(E), l(\lambda_i) = l(\lambda).$$

Với λ_j bất kỳ ta có

$$\lambda_j^*(\lambda v^H) = k_j \lambda_j^* \lambda_j v^H = k_j v^H \in I,$$

từ đó $v^H \in I$ và

$$\alpha v^H = \sum \mu_i e_i^* v^H + \lambda v^H \in I_{(H,S)}.$$

Bây giờ, với mọi $f \in Br(H,v)$, ta tính αf. Nếu $f \neq e_i$ với mọi i thì

$$\alpha f = \sum \mu_i e_i^* f + \lambda f = \lambda f \in I,$$

kéo theo

$$r(f) = f^* f = f^* \lambda^* \lambda f \in I \cap E^0 = H,$$

đây là điều mâu thuẫn (trong đó ta ký hiệu $\lambda^* = \sum k_i^{-1} \lambda_i^*$).

Do đó tồn tại i sao cho $f = e_i$. Suy ra

$$\alpha f = \mu_i + \lambda f = (\mu_i + \lambda f) r(f)$$

là phần tử thuộc I với $\mathrm{degge}(\alpha f) < \mathrm{degge}(\alpha)$.

Lặp lại quá trình trên bằng cách thay αv bởi $\alpha f r(f)$ và bằng quy nạp theo bậc cạnh ảo, ta được $\alpha v \in I_{(H,S)}$. $\square$

3.4 Ideal tối tiểu và đế của vành

Định nghĩa 3.11. Cho R là một vành và L là một ideal trái của R. Ta nói L là *ideal trái tối tiểu* của R nếu $L \neq 0$ và không tồn tại ideal trái K của R sao cho $0 \subsetneq K \subsetneq L$.

Tổng tất cả các ideal trái tối tiểu của vành R được gọi là *đế trái* (left socle) của R, ký hiệu bởi $\mathrm{soc}_l(R)$. Nếu R không chứa ideal trái tối tiểu thì ta ký hiệu $\mathrm{soc}_l(R) = \{0\}$.

! Đế phải của R, ký hiệu $\mathrm{soc}_r(R)$, được định nghĩa tương tự.

Rõ ràng $\mathrm{soc}_l(R)$ là ideal trái của R. Mệnh đề sau chứng tỏ nó cũng là ideal phải của R.

Mệnh đề 3.12. *Với mọi vành R, $\mathrm{soc}_l(R)$ là ideal hai phía của R.*

Chứng minh.

Do $\mathrm{soc}_l(R)$ là tổng của các ideal trái của R nên $\mathrm{soc}_l(R)$ cũng là ideal trái của R. Lấy hai phần tử khác không bất kỳ $s \in \mathrm{soc}_l(R)$ và $r \in R$. Do $s \in \mathrm{soc}_l(R)$, nên tồn tại các ideal trái tối tiểu L_i của R sao cho ta có thể biểu diễn

$$s = l_1 + \cdots + l_n, \quad \text{với} \;\; l_i \in L_i.$$

Như vậy

$$sr = l_1 r + \cdots + l_n r.$$

Với mỗi L_i, ta xét ánh xạ $\phi : L_i \to R$ bởi $\phi(x) = xr$, với mọi $x \in L_i$. Với mọi $r' \in R$, $x \in L_i$ ta có

$$\phi(r'x) = (r'x)r = r'(xr) = r'(\phi(x))).$$

Hơn nữa, dể thấy ϕ là cộng tính, nên ϕ là một đồng cấu R-mô đun.

Từ $\ker(\phi)$ là ideal trái của R, chứa trong L_i, và L_i là ideal trái tối tiểu, nên

$$\ker(\phi) = L_i; \text{ hoặc } \ker(\phi) = \{0\}.$$

- Nếu $\ker(\phi) = L_i$ thì $\phi(L_i) = \{0\}$;

- Nếu $\ker(\phi) = \{0\}$ thì ϕ là đơn cấu, và do đó $\phi : L_i \to \phi(L_i)$ là đẳng cấu R-mô đun trái. Nói riêng, $\phi(L_i)$ là ideal trái tối tiểu của R.

Vậy trong cả hai trường hợp ta đều có $\phi(L_i) \subseteq \mathrm{soc}_l(R)$, nghĩa là $xr \in \mathrm{soc}_l(R)$ với mọi $x \in L_i$. Như vậy $l_i r \in \mathrm{soc}_l(R)$, và do đó ta được kết quả cần chứng minh.

Tương tự, $\mathrm{soc}_r(R)$ cũng là ideal hai phía của R. □

Mệnh đề 3.13. *Nếu R là vành nửa nguyên tố thì* $\mathrm{soc}_l(R) = \mathrm{soc}_r(R)$.

Chứng minh.

Từ R nửa nguyên tố, Hệ quả 2.6 cho ta đế trái của R là tổng tất cả các ideal trái tối tiểu có dạng Re, với e là phần tử lũy đẳng của R. Hơn nữa, từ Mệnh đề 2.8 ta biết rằng, Re là ideal trái tối tiểu khi và chỉ khi eR là ideal phải tối tiểu. Như vậy, nếu

$$\mathrm{soc}_l(R) = \sum_i Re_i$$

thì

$$\sum_i e_i R \subseteq \mathrm{soc}_r(R).$$

Do với mỗi i ta có

$$e_i \in Re_i \subseteq \mathrm{soc}_r(R).$$

Do $\mathrm{soc}_r(R)$ là ideal hai phía, ta được

$$\mathrm{soc}_l(R) = \sum_i Re_i \subseteq \mathrm{soc}_r(R).$$

Chứng minh tương tự, ta được

$$\mathrm{soc}_r(R) \subseteq \mathrm{soc}_l(R).$$

Như vậy $\mathrm{soc}_r(R) = \mathrm{soc}_l(R)$. □

Hệ quả 3.14. *Cho E là một đồ thị và K là một trường. Khi đó*

$$\mathrm{soc}_l(L_K(E)) = \mathrm{soc}_r(L_K(E)).$$

Từ hệ quả trên, ta có thể bỏ đi từ 'trái' và 'phải' khi nói đến đế của đại số đường đi Leavitt $L_K(E)$, và ta ký hiệu bởi $\mathrm{soc}(L_K(E))$.

3.5 Ideal tối tiểu và đế của $L_K(E)$

Bổ đề 3.15. *Cho E là đồ thị, K là trường, $u \in E^0$ và $v \in T(u)$. Nếu trong E chỉ có đúng một đường đi p nối từ u đến v và p không rẽ nhánh thì $L_K(E)u \cong L_K(E)v$ như là $L_K(E)$-môđun trái.*

Chứng minh.

Từ p là đường đi duy nhất sao cho $s(p) = u$ và $r(p) = v$, ta được

$$p^*p = v.$$

Hơn nữa, từ p không chứa rẽ nhánh nên mỗi cạnh e_i trong p đều thỏa mãn $s(e_i) = e_i e_i^*$. Do đó

$$pp^* = u.$$

Xét các ánh xạ

$$\varphi_p : L_K(E)u \to L_K(E)v, \ \varphi_p(x) := xp$$

và

$$\varphi_{p^*} : L_K(E)v \to L_K(E)u, \ \varphi_{p^*}(y) := yp^*.$$

Dễ thấy đây là các đồng cấu $L_K(E)$-môđun trái. Hơn nữa,

$$\varphi_p\varphi_{p^*}(x) = xp^*p = xv = x$$

và

$$\varphi_{p^*}\varphi_p(y) = ypp^* = yu = y,$$

nên φ_p và φ_{p^*} cùng khả nghịch và là nghịch đảo của nhau. Do đó ta được kết quả cần chứng minh. $\square$

Mệnh đề 3.16. *Cho E là đồ thị, K là trường. Giả sử $u \in E^0$ là đỉnh thường và $s^{-1}(u) = \{f_1, \dots, f_n\}$. Khi đó*

$$L_K(E)u = \bigoplus_{i=1}^{n} L_K(E) f_i f_i^*.$$

Hơn nữa, nếu $v_i \neq v_j$ với mọi $i \neq j$ (trong đó $v_i = r(f_i)$) thì

$$L_K(E)u \cong \bigoplus_{i=1}^{n} L_K(E) v_i.$$

Chứng minh.

Do $u = \sum_{i=1}^{n} f_i f_i^*$, nên

$$L_K(E)u = \sum_{i=1}^{n} L_K(E) f_i f_i^*.$$

Hơn nữa, các phần tử $f_i f_i^*$ là các lũy đẳng trực giao nên, nếu

$$x_i f_i f_i^* = \sum_{j \neq i} x_j f_j f_j^*, \quad \text{với} \;\; x_i, x_j \in L_K(E)$$

thì bằng cách nhân hai vế cho $f_i f_i^*$ ta được $x_i f_i f_i^* = 0$, do đó tổng trên là trực tiếp.

Để chứng minh ý còn lại, ta xét ánh xạ

$$\phi : L_K(E)u \to \bigoplus_{i=1}^{n} L_K(E) v_i, \;\; \phi(x) := \sum_i x f_i.$$

Rõ ràng ϕ là đồng cấu $L_K(E)$-môđun trái.

Giả sử tồn tại $x \in L_K(E)u$ sao cho

$$\phi(x) = \sum_i x f_i = 0.$$

Do $r(f_i) \neq r(f_j)$ với mọi $i \neq j$, nên với mỗi $j \in \{1, \dots, n\}$ ta được

$$0 = \sum_i x f_i r(f_j) = x f_j,$$

và do đó

$$x = xu = \sum_i x f_i f_i^* = 0.$$

Như vậy $\ker(\phi) = \{0\}$, nghĩa là ϕ đơn cấu.

Lấy phần tử tùy ý

$$y = \sum_{i=1}^n y_i \in \bigoplus_{i=1}^n L_K(E)v_i.$$

Do với mỗi $i \in \{1, \dots, n\}$, ta có $y_i f_i^* f_i = y_i v_i = y_i$, nên

$$\sum_{i=1}^n y_i f_i^* \in L_K(E)u$$

và

$$\phi\Big(\sum_{i=1}^n y_i f_i^*\Big) = \sum_{i=1}^n \phi(y_i f_i^*) = \sum_{i=1}^n \Big(\sum_{j=1}^n y_i f_i^* f_j\Big) = \sum_{i=1}^n y_i f_i^* f_i = y.$$

Vậy ϕ là toàn cấu. □

Mệnh đề 3.17. *Cho E là đồ thị, K là trường. Nếu $u \in E^0$ là một vô hạn phát xạ, và $s^{-1}(u) = \{f_i\}_{i\in I}$ (trong đó I là tập chỉ số vô hạn) thì*

$$\bigoplus_{i=1}^n L_K(E) f_i f_i^* \subsetneq L_K(E)u.$$

Chứng minh.

Do tập hợp $\{f_i f_i^*\}_{1\le i\le n}$ là tập các lũy đẳng trực giao nên tổng

$$\sum_{i=1}^n L_K(E) f_i f_i^*$$

là tổng trực tiếp. Hơn nữa, với mỗi i ta có $r(f_i^*) = u$, nên

$$\bigoplus_{i=1}^n L_K(E) f_i f_i^* \subseteq L_K(E)u.$$

Ngược lại, giả sử

$$\bigoplus_{i=1}^{n} L_K(E)f_if_i^* = L_K(E)u.$$

Do $u = u^2 \in L_K(E)u$ nên tồn tại tập con hữu hạn $\{f_j\}$ của $s^{-1}(u)$ và tồn tại các $x_j \in L_K(E)$ sao cho

$$u = \sum_j x_j f_j f_j^*.$$

Do u có vô hạn phát xạ, nên tồn tại $f \in s^{-1}(u)$ sao cho $f \neq f_j$ với mọi j. Do đó

$$f = uf = \sum_j x_j f_j f_j^* f = 0,$$

mâu thuẫn.

Như vậy

$$\bigoplus_{i=1}^{n} L_K(E)f_if_i^* \subsetneq L_K(E)u.$$

□

Hệ quả 3.18. *Cho E là đồ thị, K là trường và $u \in E^0$. Nếu $T(u)$ chứa điểm rẽ nhánh thì $L_K(E)u$ không là ideal trái tối tiểu.*

Chứng minh.

Giả sử $v \in T(u)$ là điểm rẽ nhánh sao cho trên đường đi p nối từ u đến v không còn điểm rẽ nhánh khác. Khi đó v là đỉnh thường hoặc có vô hạn phát xạ. Do đó từ Mệnh đề 3.16 và Mệnh đề 3.17 ta được $L_K(E)v$ không tối tiểu, do với mọi $f_i \in s^{-1}(v)$ ta có $L_K(E)f_if_i^*$ thực sự chứa trong $L_K(E)v$. Do Bổ đề 3.15, ta có $L_K(E)u \cong L_K(E)v$ như $L_K(E)$-môđun trái, và như vậy $L_K(E)u$ không là ideal trái tối tiểu. □

Mệnh đề 3.19. *Cho E là đồ thị, K là trường và $u \in E^0$. Nếu tồn tại một đường đi đóng đặt tại u thì $L_K(E)u$ không là ideal trái tối tiểu.*

Chứng minh.

Giả sử c là một đường đi đóng đặt tại u và $L_K(E)u$ là ideal trái tối tiểu. Do Hệ quả 3.18, $T(u)$ không chứa điểm rẽ nhánh, nên c là chu trình không lối ra. Từ

$$0 \neq u + c = u(u + c) = (u + c)u$$

nên

$$\{0\} \subsetneq L_K(E)(u + c) \subseteq L_K(E)u.$$

Do tính tối tiểu của $L_K(E)u$, ta được

$$L_K(E)(u + c) = L_K(E)u.$$

Nói riêng,

$$u \in [uL_K(E)u](u + c).$$

Như vậy ta có thể viết

$$u = p(c, c^*)(u + c),$$

với p là đa thức Laurent với hệ số thuộc K. Cân bằng bậc hai vế ta được điều mâu thuẫn, và như vậy $L_K(E)$ không tối tiểu. $\square$

Bổ đề 3.20. *Cho R là vành và $0 \neq e \in R$ là một lũy đẳng. Khi đó*

$$\mathrm{End}_R(Re) \cong (eRe)^{\mathrm{op}},$$

trong đó $(eRe)^{\mathrm{op}}$ là vành đối của eRe với phép nhân '$\cdot$' xác định bởi

$$(er_1e) \cdot (er_2e) = (er_2e)(er_1e), \quad \text{với } r_1, r_2 \in R.$$

Tương tự, $\mathrm{End}_R(eR) \cong eRe$.

Chứng minh.

Lấy R-đồng cấu bất kỳ $f \in \mathrm{End}_R(Re)$. Khi đó tồn tại $r_f \in R$ sao cho $f(e) = r_fe$. Xét ánh xạ

$$\phi : \mathrm{End}_R(Re) \to (eRe)^{\mathrm{op}} \quad \phi(f) := er_fe.$$

Dễ dàng kiểm tra ϕ được định nghĩa tốt.

Giả sử $f, g \in \operatorname{End}_R(Re)$ sao cho

$$f(e) = r_f e \text{ và } g(e) = r_g e, \text{ với } r_f, r_g \in R.$$

Khi đó

$$(f+g)(e) = f(e) + g(e) = (r_f + r_g)e.$$

Suy ra

$$\phi(f+g) = e(r_f + r_g)e = \phi(f) + \phi(g).$$

Tiếp theo,

$$(fg)(e) = f(r_g e) = f(r_g e^2) = r_g e f(e) = r_g e r_f e.$$

Suy ra

$$\phi(fg) = (er_g e)(er_f e) = \phi(g)\phi(f).$$

Như vậy ϕ là đồng cấu vành.

Lấy phần tử bất kỳ $x = ere \in (eRe)^{\text{op}}$, và đặt $f \in \operatorname{End}_R(Re)$ là đồng cấu sao cho $f(e) = re$. Khi đó $\phi(f) = ere = x$, nên ϕ là toàn cấu.

Cuối cùng, giả sử $f \in \operatorname{End}_R(Re)$ sao cho $\phi(f) = er_f e = 0$ (trong đó $r_f \in R$ thỏa mãn $f(e) = r_f e$). Khi đó

$$0 = er_f e = ef(e) = f(e^2) = f(e)$$

nên với mọi $se \in Re$, ta có

$$f(se) = sf(e) = 0$$

và như vậy $f = 0$. Do đó ϕ là đơn cấu, nghĩa là

$$\operatorname{End}_R(Re) \cong (eRe)^{\text{op}}.$$

Chứng minh tương tự ta được $\operatorname{End}_R(eR) \cong eRe$. $\square$

Mệnh đề 3.21. *Cho E là đồ thị, K là trường và $v \in E^0$. Khi đó $L_K(E)v$ tối tiểu khi và chỉ khi $v \in P_l(E)$, trong đó $P_l(E)$ là tập tất cả các đỉnh thẳng trong E^0.*

Chứng minh.

Giả sử $v \in P_l(E)$. Do Bổ đề 3.20 ta được

$$\mathrm{End}(L_K(E)v) \cong (vL_K(E)v)^{\mathrm{op}}.$$

Với mọi $x \in (vL_K(E)v)^{\mathrm{op}}$ ta có

$$x = v\Big(\sum_{i=1}^{n} k_i p_i q_i^*\Big)v = \sum_{i=1}^{n} k_i(vp_iq_i^*v),$$

trong đó $p_i, q_i \in \mathrm{Path}(E), n \in \mathbb{N}$.

Nếu tồn tại i sao cho $vp_iq_i^*v \neq 0$ thì

$$s(p_i) = s(q_i) = v \text{ và } r(p_i) = r(q_i).$$

Như vậy p_i và q_i là hai đường đi từ v đến $r(p_i)$. Từ v là đỉnh thẳng, suy ra $p_i = q_i$. Hơn nữa, từ p_i không chứa điểm rẽ nhánh nên $vp_iq_i^*v = v$. Như vậy $x = \big(\sum k_i\big)v$ và do đó

$$\mathrm{End}(L_K(E)v) \cong (vL_K(E)v)^{\mathrm{op}} \cong Kv.$$

Do Kv là trường với phần tử đơn vị v nên mọi phần tử khác 0 trong $\mathrm{End}(L_K(E)v)$ đều khả nghịch, và như vậy chúng là tự đẳng cấu.

Lấy $0 \neq a \in L_K(E)v$. Do $L_K(E)$ có đơn vị địa phương nên $L_K(E)a \neq 0$. Hơn nữa $L_K(E)$ nửa nguyên tố nên $(L_K(E)a)^2 \neq 0$, và do đó tồn tại $b, c \in L_K(E)$ sao cho $(ca)(ba) \neq 0$.
Xét $\phi : L_K(E)v \to L_K(E)v$ xác định bởi $\phi(x) = x(ba)$. Khi đó

$$\phi(a) = aba \neq 0$$

nên ϕ là tự đồng cấu khác không, và do đó ϕ là tự đẳng cấu (do $\mathrm{End}(L_K(E)v) \cong Kv$). Như vậy, từ $v \in L_K(E)v$, ta phải có $v = d(ba)$, với $d \in L_K(E)$. Do đó $v \in L_K(E)a$, và như vậy, do Bổ đề 2.7, $L_K(E)v$ tối tiểu.

Ngược lại, nếu $L_K(E)v$ tối tiểu thì từ Hệ quả 3.18 và Mệnh đề 3.19 ta được $v \in P_l(E)$. $\square$

Bổ đề 3.22. *Cho E là một đồ thị và K là một trường. Khi đó*

$$\sum_{u \in P_l(E)} L_K(E)u \subseteq \operatorname{soc}(L_K(E)).$$

Chứng minh.

Từ Mệnh đề 3.21 ta được $L_K(E)u$ là ideal trái tối tiểu với mọi $u \in P_l(E)$, nên chứa trong $\operatorname{soc}(L_K(E))$. $\square$

Ví dụ 3.3. Ví dụ sau chứng tỏ chiều ngược lại của Bổ đề trên không đúng:

$$v \xleftarrow{e} z \xrightarrow{f} w$$

Ta có các ideal trái tối tiểu của $L_K(E)$ là

$$L_K(E)v,\ L_K(E)w,\ L_K(E)ee^*,\ L_K(E)ff^*,$$

nên

$$\operatorname{soc}(L_K(E)) = L_K(E)v + L_K(E)w + L_K(E)ee^* + L_K(E)ff^* = L_K(E).$$

Mà $P_l(E) = \{v, w\}$ nên

$$\sum_{u \in P_l(E)} L_K(E)u = L_K(E)v + L_K(E)w.$$

Hơn nữa, $z \notin L_K(E)v + L_K(E)w$, nên

$$\operatorname{soc}(L_K(E)) \neq \sum_{u \in P_l(E)} L_K(E)u.$$

Định lý 3.23. *Cho E là một đồ thị, K là một trường và $x \in L_K(E)$ sao cho $L_K(E)x$ là ideal trái tối tiểu. Khi đó, tồn tại $v \in P_l(E)$ sao cho*

$$L_K(E)x \cong L_K(E)v$$

như là $L_K(E)$-môđun trái.

Chứng minh.

Xét $x \in L_K(E)$. Từ Định lý rút gọn (Định lý 1.27) ta có hai trường hợp cần xét sau:

Trường hợp 1. Tồn tại $y, z \in \text{Path}(E)$ sao cho

$$0 \neq \lambda = y^* x z \in wL_K(E)w = K\langle c; c^* \rangle,$$

với c là chu trình không lối ra đặt tại $w \in E^0$. Do

$$0 \neq L_K(E)y^*x \subseteq L_K(E)x$$

và do $L_K(E)x$ tối tiểu, ta được

$$L_K(E)y^*x = L_K(E)x.$$

Hơn nữa, xét ánh xạ $\phi_z : L_K(E)x \to L_K(E)xz$ xác định bởi $\phi_z(a) = az$ với mọi $a \in L_K(E)x$. Rõ ràng ϕ_z là toàn cấu khác 0. Tương tự, từ $L_K(E)x$ tối tiểu và $\ker(\phi_z) \neq L_K(E)x$ (do $0 \neq y^*xz \in \text{Im}(\phi_z)$), ta có $\ker(\phi_z) = \{0\}$ và như vậy ϕ_z là đơn cấu. Do đó

$$L_K(E)x \cong L_K(E)xz = L_K(E)y^*xz = L_K(E)\lambda,$$

nghĩa là $L_K(E)\lambda$ là ideal trái tối tiểu của $L_K(E)$.

Với mọi $0 \neq a \in (wL_K(E)w)$, ta có $a \in L_K(E)\lambda$. Mà $L_K(E)\lambda$ tối tiểu trong $L_K(E)$ nên $L_K(E)a = L_K(E)\lambda$, và do đó $\lambda \in L_K(E)a$. Suy ra

$$\lambda = w\lambda \in wL_K(E)a = (wL_K(E)w)a.$$

Như vậy, theo Bổ đề 2.7, $(wL_K(E)w)\lambda$ tối tiểu trong $wL_K(E)w$.

Tiếp theo, dễ dàng chứng minh rằng hàm

$$\phi : wL_K(E)w \to K[t, t^{-1}]$$

xác định bởi $\phi(w) = 1$, $\phi(c) = t$, $\phi(c^*) = t^{-1}$ (được mở rộng một cách tuyến tính và nhân tính) là một đẳng cấu. Kéo theo $\phi((wL_K(E)w)\lambda)$ tối tiểu trong $K[t, t^{-1}]$. Tuy nhiên, do $K[t, t^{-1}]$ là miền nguyên nên không có ideal trái tối tiểu. Như vậy Trường hợp 1 không xảy ra.

Trường hợp 2. Tồn tại $y, z \in \text{Path}(E)$ và $v \in E^0$ sao cho

$$0 \neq \lambda = y^*xz = kv \neq 0.$$

Khi đó $L_K(E)v = L_K(E)kv$. Chứng minh tương tự Trường hợp 1, ta được

$$L_K(E)x \cong L_K(E)y^*xz = L_K(E)kv \cong L_K(E)v$$

như là $L_K(E)$-môđun trái. Cuối cùng, do $L_K(E)v$ tối tiểu nên từ Mệnh đề 3.21 ta được $v \in P_l(E)$. $\square$

Định lý 3.24. *Cho E là một đồ thị và K là một trường. Khi đó*

$$\operatorname{soc}(L_K(E)) = I(P_l(E)).$$

Chứng minh.

"$\subseteq$": Gọi I là ideal trái tối tiểu của $L_K(E)$. Từ $L_K(E)$ nửa nguyên tố nên từ Hệ quả 2.6 suy ra, tồn tại lũy đẳng $0 \neq \alpha \in L_K(E)$ sao cho $I = L_K(E)\alpha$.

Hơn nữa, từ Định lý 3.23, tồn tại $u \in P_l(E)$ sao cho

$$L_K(E)\alpha \cong L_K(E)u.$$

Như vậy, tồn tại đẳng cấu $L_K(E)$-môđun trái

$$\phi : L_K(E)\alpha \to L_K(E)u,$$

và do đó tồn tại $x, y \in L_K(E)$ sao cho $\phi(\alpha) = xu$ và $\phi^{-1}(u) = y\alpha$. Suy ra

$$\alpha = \phi^{-1}\phi(\alpha) = \phi^{-1}(xu) = xu\phi^{-1}(u) = x(u)y\alpha \in I(P_l(E)),$$

nghĩa là $I = L_K(E)\alpha \subseteq I(P_l(E))$. Do đó

$$\operatorname{soc}(L_K(E)) \subseteq I(P_l(E)).$$

"$\supseteq$": Lấy một đỉnh bất kỳ $v \in P_l(E)$. Do Mệnh đề 3.21, ta có

$$L_K(E)v \subseteq \operatorname{soc}(L_K(E)).$$

Do $\operatorname{soc}(L_K(E))$ là ideal hai phía, ta được

$$L_K(E)vL_K(E) \subseteq \operatorname{soc}(L_K(E)).$$

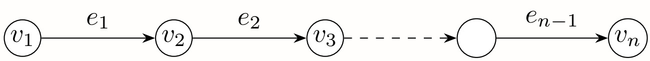
Như vậy $I(P_l(E)) = L_K(E)P_l(E)L_K(E) \subseteq \operatorname{soc}(L_K(E))$. $\square$

Hệ quả 3.25. *Cho E là một đồ thị và K là một trường. Khi đó*

$$\operatorname{soc}(L_K(E)) \neq 0 \Leftrightarrow P_l(E) \neq \emptyset.$$

Áp dụng Định lý 3.24, ta có thể xác định đế của một số đại số đường đi Leavitt $L_K(E)$ sau:

Ví dụ 3.4. E là đồ thị đường hữu hạn M_n.

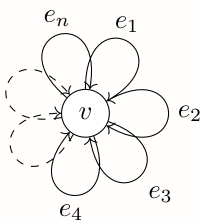


Do mọi đỉnh của M_n là điểm thẳng, nên theo Định lý 3.24 ta có

$$\mathrm{soc}(L_K(M_n)) = I(P_l(M_n)) = I((M_n)^0) = L_K(M_n).$$

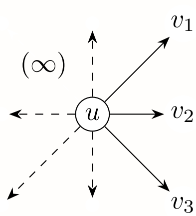
Như vậy, từ $L_K(M_n) \cong M_n(K)$ ta được $\mathrm{soc}(M_n(K)) = M_n(K)$.

Ví dụ 3.5. E là đồ thị hoa hồng n cánh R_n.



Đồ thị R_n chứa một đỉnh đơn v và là điểm đặt của n chu trình. Nói riêng, v không là điểm thẳng. Như vậy $P_l(R_n) = \emptyset$; và do đó $\mathrm{soc}(R_n) = 0$. Từ $L_K(R_n) \cong L(1, n)$, nên ta cũng có $\mathrm{soc}(L(1, n)) = 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Ví dụ 3.6. E là đồ thị đồng hồ vô hạn C_∞.



Trong trường hợp này, các điểm thẳng của C_∞ là các mũi kim v_i, nghĩa là $P_l(C_\infty) = \{v_i\}_{i=1}^{\infty}$. Như vậy $\operatorname{soc}(L_K(C_\infty)) = I(\{v_i\}_{i=1}^{\infty})$. Mặt khác, ánh xạ $\phi : L_K(C_\infty) \to \left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} M_2(K)\right) \oplus KI_{22}$ biến v_i thành $(E_{11})_i$ là đẳng cấu, trong đó $(E_{11})_i \in \bigoplus_{i=1}^{\infty} M_2(K)$ là phần tử với E_{11} thuộc thành phần thứ i của tổng và các thành phần còn lại bằng 0. Như vậy $\operatorname{soc}\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} M_2(K)\right) \oplus KI_{22}\right)$ là ideal hai phía sinh bởi tập $\{(E_{11})_i\}_{i=1}^{\infty}$. Chú ý rằng ideal này chứa mọi đơn vị ma trận $(E_{mn})_j$, do $(E_{mn})_j = (E_{m1})_j(E_{11})_j(E_{1n})_j$, và do các đơn vị ma trận như thế sinh ra $M_2(K)$, nên $\operatorname{soc}\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} M_2(K)\right) \oplus KI_{22}\right) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} M_2(K)$.

Bài tập

Bài tập 3.1. Cho đồ thị E như sau:

$$\begin{tikzcd} & & v_2 & \\ v_0 \arrow[r, "e_1"] & v_1 \arrow[ur, "e_2"] \arrow[dr, "e_3"'] & & \\ & & v_3 \arrow[r, "e_4"] & v_4 \end{tikzcd}$$

Hãy mô tả các ideal sinh bởi các đỉnh chìm của E.

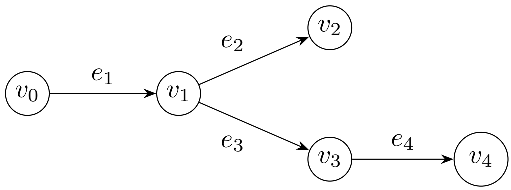
Bài tập 3.2. Cho đồ thị E hữu hạn, không có chu trình và mọi đỉnh đều dẫn đến đúng một đỉnh chìm. Chứng minh rằng ideal sinh bởi mỗi đỉnh chìm là một ideal đơn của $L_K(E)$.

Bài tập 3.3. Cho đồ thị E như sau:

$$v_1 \xrightarrow{e} v_2 \xrightarrow{f} v_3$$

Gọi $H = \{v_2, v_3\}$. Chứng minh rằng H là tập con di truyền, và xác định ideal $I = \langle H \rangle$ trong $L_K(E)$.

Bài tập 3.4. Cho đồ thị E như sau:



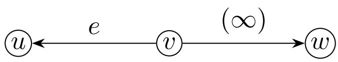
Xét tập con $H = \{v_2, v_3, v_4\}$.

a) Chứng minh rằng H là tập con di truyền.

b) Chứng minh rằng ideal $\langle H \rangle$ không là ideal tối tiểu.

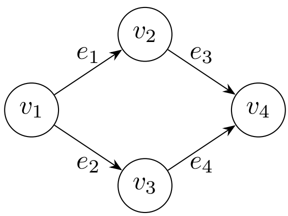
c) Tìm một tập con di truyền $H' \subset H$ sao cho $\langle H' \rangle$ là ideal tối tiểu.

Bài tập 3.5. Cho đồ thị E như sau:



Xét tập con di truyền $H = \{u\}$. Chứng tỏ w là đỉnh gãy đối với H và xác định ideal $I_{(H,S)}$ với $S = \{w\}$.

Bài tập 3.6. Cho đồ thị E như sau:



a) Xác định tất cả các tập con di truyền $H \subseteq E^0$. Với mỗi tập H, xác định tập đỉnh gãy B_H.

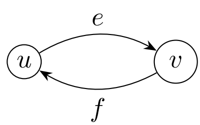
b) Tìm một cặp chấp nhận được không tầm thường (H, S) và viết ideal $I_{(H,S)}$ tương ứng.

Bài tập 3.7. Cho đồ thị E như sau:

$$v \xrightarrow{(\infty)} w$$

Xét $H = \{w\}$. Chứng minh rằng H là tập con di truyền của E, v là đỉnh gãy đối với H, cặp $(H, \{v\})$ là cặp chấp nhận được và $I_{(H,\{v\})} \neq I_{(H,\varnothing)}$.

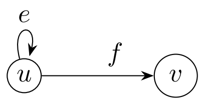
Bài tập 3.8. Cho đồ thị E như sau:



a) Chứng minh rằng $L_K(E)v$ là ideal trái không tối tiểu.

b) Xác định $\mathrm{soc}(L_K(E))$.

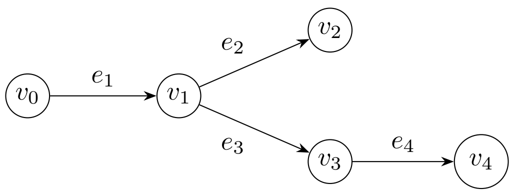
Bài tập 3.9. Cho đồ thị E như sau:



a) Chứng minh rằng $L_K(E)u$ là ideal trái không tối tiểu.

b) Xác định $\mathrm{soc}(L_K(E))$.

Bài tập 3.10. Cho đồ thị E như sau:



a) Xác định tất cả các ideal trái tối tiểu của $L_K(E)$.

b) Xác định $\mathrm{soc}(L_K(E))$.

4

Một số nghiên cứu nâng cao của đại số đường đi Leavitt

4.1 Giới hạn trực tiếp

Định nghĩa 4.1. Một tập A được gọi là *tập hướng lên* nếu tồn tại thứ tự $\leq$ trên A sao cho $\forall a, b \in A$, tồn tại $c \in A$ sao cho $a \leq c$ và $b \leq c$.

Định nghĩa 4.2. Cho $\{R_i : i \in I\}$ là một họ các vành (không nhất thiết có đơn vị), trong đó I là một tập chỉ số hướng lên; và với mỗi $i, j \in I$, $i \leq j$, ký hiệu $\varphi_{ij} : R_i \to R_j$ là một đồng cấu vành từ R_i vào R_j. Ta nói $(R_i, \varphi_{ij})_I$ là một *hệ trực tiếp các vành theo chỉ số I* nếu với mọi $i, j, k \in I$ thỏa mãn $i \leq j \leq k$ ta có $\varphi_{ik} = \varphi_{jk}\varphi_{ij}$, nghĩa là biểu đồ sau giao hoán:

$$\begin{tikzcd} R_i \arrow[r, "\varphi_{ij}"] \arrow[dr, "\varphi_{ik}"'] & R_j \arrow[d, "\varphi_{jk}"] \\ & R_k \end{tikzcd}$$

Định nghĩa 4.3. Nếu $(R_i, \varphi_{ij})_I$ là một hệ trực tiếp các vành theo chỉ số I và R là một vành sao cho với mỗi $i \in I$, tồn tại đồng cấu $\varphi_i : R_i \to R$ thì ta nói $(R, \varphi_i)_I$ là *giới hạn trực tiếp* của hệ nếu các điều sau được thỏa mãn:

i) Với mỗi $i, j \in I, i \leq j$, ta có $\varphi_i = \varphi_j \varphi_{ij}$, nghĩa là biểu đồ sau giao hoán:

$$\begin{tikzcd} R_i \arrow[r, "\varphi_{ij}"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & R_j \arrow[d, "\varphi_j"] \\ & R \end{tikzcd}$$

ii) Nếu S là vành sao cho tồn tại đồng cấu $\mu_i : R_i \to S$ thỏa mãn $\mu_i = \mu_j \varphi_{ij}$ với mọi $i, j \in I$ với $i \leq j$ thì tồn tại duy nhất một đồng cấu vành $\mu : R \to S$ sao cho $\mu_i = \mu \varphi_i$ với mọi $i \in I$, nghĩa là biểu đồ sau giao hoán:

$$\begin{tikzcd} R_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\mu_i"'] & R \arrow[d, "\mu"] \\ & S \end{tikzcd}$$

Bây giờ ta giả sử rằng $(\overline{R}, \overline{\varphi}_i)$ là một vành khác sao cho i) và ii) thỏa mãn. Khi đó tồn tại duy nhất đồng cấu $\mu : R \to \overline{R}$ sao cho $\overline{\varphi}_i = \mu \varphi_i$ với mọi $i \in I$. Tương tự, tồn tại duy nhất đồng cấu $\mu' : \overline{R} \to R$ sao cho $\varphi_i = \mu' \overline{\varphi}_i$ với mọi $i \in I$. Như vậy ta có

$$\varphi_i = \mu' \mu \varphi_i \;\text{ và }\; \overline{\varphi}_i = \mu \mu' \overline{\varphi}_i.$$

Do tính duy nhất của μ và μ', ta được

$$\mu \mu' = 1_{\overline{R}} \;\text{ và }\; \mu' \mu = 1_R.$$

Do đó μ là một đẳng cấu, nghĩa là $R \cong \overline{R}$. Điều này có nghĩa là giới hạn trực tiếp được xác định duy nhất sai khác một đẳng cấu, và do đó ta có thể ký hiệu giới hạn này bởi $\varinjlim (R_i, \varphi_{ij})$.

Nếu I là tập chỉ số hướng lên và $\{R_i : i \in I\}$ là một dãy chuyển tiến các vành (nghĩa là $R_i \subseteq R_{i+1}$ với mọi $i \in I$) thì bằng cách xem φ_{ij} là đơn cấu nhúng từ R_i vào R_j với mỗi $i \leq j$ $(i, j \in I)$, ta có $(R_i, \varphi_{ij})_I$ là một hệ trực tiếp. Trong trường hợp này ta thường bỏ φ_{ij} trong ký hiệu và viết giới hạn trực tiếp của họ R_i đơn giản là $\varinjlim_{i \in I} R_i$.

Ta cũng dễ dàng chứng minh rằng

$$\varinjlim_{i\in I} R_i = \bigcup_{i\in I} R_i.$$

Mệnh đề 4.4. *Nếu R là vành có đơn vị địa phương và I là tập tất cả các đơn vị địa phương của R thì tồn tại một thứ tự cho I sao cho I là tập hướng lên và tồn tại một hệ trực tiếp (eRe, φ_{ef}), $e, f \in I, e \leq f$ sao cho $R = \varinjlim(eRe, \varphi_{ef})$.*

Chứng minh.

Do R có đơn vị địa phương nên tồn tại tập lũy đẳng $I \subseteq R$ thỏa mãn điều kiện với mỗi tập con hữu hạn $\{x_1, \dots, x_n\}$ của R, tồn tại $e \in I$ sao cho $x_i \in eRe$ với mọi $i = 1, \dots, n$.

Ta định nghĩa thứ tự $\leq$ trên I bằng cách viết $e \leq f$ nếu $e \in fRf$ (chú ý rằng $e \leq f \Leftrightarrow eRe \subseteq fRf$). Hơn nữa I là một tập hướng lên, do với mỗi cặp $e, f \in I$, tồn tại $g \in I$ sao cho $e, f \in gRg$ (do tính đơn vị địa phương của R), nghĩa là $e \leq g$ và $f \leq g$.

Với mỗi $e, f \in I$ thỏa mãn $e \leq f$, ta đặt $\varphi_{ef} : eRe \to fRf$ và $\varphi_e : eRe \to R$ là hai đồng cấu nhúng. Khi đó ta dễ thấy $(eRe, \varphi_{ef})_I$ là một hệ trực tiếp. Hơn nữa, với mỗi $e, f \in I, e \leq f$ ta có biểu đồ sau giao hoán:

$$\begin{tikzcd} eRe \arrow[r, "\varphi_{ef}"] \arrow[dr, "\varphi_e"'] & fRf \arrow[d, "\varphi_f"] \\ & R \end{tikzcd}$$

Như vậy điều i) trong định nghĩa giới hạn trực tiếp được thỏa mãn.

Giả sử tồn tại vành S và đồng cấu vành $\mu_e : eRe \to S$ sao cho

$$\mu_e = \mu_f \varphi_{ef} \text{ với mọi } e, f \in I \text{ thỏa mãn } e \leq f.$$

Cho $x \in R$. Khi đó, tồn tại $e \in I$ sao cho $x \in eRe$. Hơn nữa, nếu tồn tại $f \in I$ với $f \neq e$ sao cho $x \in fRf$ thì do I là tập hướng lên nên tồn tại $g \in I$ sao cho $e \leq g$ và $f \leq g$. Do đó:

$$\mu_e(x) = \mu_g(\varphi_{eg}(x)) = \mu_g(x) = \mu_g(\varphi_{fg}(x)) = \mu_f(x).$$

Như vậy, phép tương ứng $\mu : R \to S$ xác định bởi $\mu(x) = \mu_e(x)$ là một ánh xạ. Hơn nữa, với mọi $x, y \in R$, tồn tại $e \in I$ sao cho

$$x + y \in eRe \quad \text{và} \quad xy \in eRe,$$

như vậy

$$\mu(x+y) = \mu_e(x+y) = \mu_e(x) + \mu_e(y) = \mu(x) + \mu(y)$$

và

$$\mu(xy) = \mu_e(xy) = \mu_e(x)\mu_e(y) = \mu(x)\mu(y).$$

Do đó μ là đồng cấu vành.

Tiếp theo, với mỗi $e \in I$, ta có

$$\mu(\varphi_e(x)) = \mu(x) = \mu_e(x) \text{ với mọi } x \in eRe.$$

Do đó biểu đồ sau giao hoán:

$$\begin{tikzcd} eRe \arrow[r, "\varphi_e"] \arrow[dr, "\mu_e"'] & R \arrow[d, "\mu"] \\ & S \end{tikzcd}$$

Cuối cùng, nếu $\nu : R \to S$ cũng là đồng cấu vành sao cho $\nu\varphi_e = \mu_e$ với mọi $e \in I$ thì với mọi $x \in R$, bằng cách chọn $f \in I$ sao cho $x \in fRf$, ta được

$$\nu(x) = \nu(\varphi_f(x)) = \mu_f(x) = \mu(x),$$

nên $\nu = \mu$. Vậy μ xác định duy nhất, nghĩa là điều ii) trong định nghĩa giới hạn trực tiếp được thỏa mãn.

Tóm lại, $R = \varinjlim(eRe, \varphi_{ef})$. $\square$

4.2 Tính ma trận địa phương của $L_K(E)$

Định nghĩa 4.5. Cho R là vành có đơn vị địa phương. Ta nói R là vành *ma trận địa phương* nếu

$$R = \varinjlim(eRe, \varphi_{ef}),$$

trong đó mỗi vành con eRe đẳng cấu với một tổng trực tiếp hữu hạn các vành ma trận hữu hạn chiều trên K và ánh xạ chuyển φ_{ef} là ánh xạ nhúng ma trận.

! Chú ý rằng khi R là vành ma trận địa phương thì mọi tập con hữu hạn của R đều nằm trong một đại số con hữu hạn chiều của R.

Mệnh đề 4.6. *Cho E là đồ thị hữu hạn dòng và K là trường. Khi đó $L_K(E)$ là vành ma trận địa phương khi và chỉ khi E không chu trình.*

Chứng minh.

Trước tiên ta giả sử rằng E không chu trình. Nếu E hữu hạn thì từ Mệnh đề 3.3 ta được kết quả. Bây giờ ta giả sử E vô hạn và xem các đỉnh của E^0 là $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$. Xét dãy các đồ thị con $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ của E, với $F_i = (F_i^0, F_i^1, r, s)$ xác định bởi

$$F_i^0 := \{v_1, \dots, v_i\} \cup r(s^{-1}(\{v_1, \dots, v_i\})),$$

$$F_i^1 := s^{-1}(\{v_1, \dots, v_i\})$$

và các ánh xạ r, s được cảm sinh từ E. Nói riêng, $F_i \subseteq F_{i+1}$ với mọi i.

Tiếp theo, ta chứng minh $L_K(F_i)$ là đại số con của $L(E)$ với mọi i. Lưu ý rằng ánh xạ nhúng $\varphi : L_K(F_i) \to L_K(E)$ là một đồng cấu K-đại số và thỏa mãn (CK1). Với (CK2), nếu v là một đỉnh chìm trong F_i (v không nhất thiết là đỉnh chìm trong E) thì ta không có (CK2) tại v trong $L_K(F_i)$; nếu v không là đỉnh chìm trong F_i thì tồn tại $e \in F_i^1 := s^{-1}(\{v_1, \dots, v_i\})$ sao cho $s(e) = v$. Nhưng $s(e) \in \{v_1, \dots, v_i\}$ và do đó tồn tại j sao cho $v = v_j$ và $F_i^1 := s^{-1}(\{v_1, \dots, v_j\})$ đảm bảo rằng tất cả các cạnh đến v đều thuộc F_i, vì vậy (CK2) tại v trong $L_K(F_i)$ và $L_K(E)$ là như nhau. Các hệ thức còn lại không có sự khác biệt.

Bằng cách xây dựng ánh xạ $\psi_i : L_K(E) \to L_K(F_i)$ tương tự như việc xây dựng ánh xạ ở trong Định lý 2.30, ta được φ_i là đồng cấu đại vành và $\psi_i \varphi = \mathrm{Id}_{L_K(F_i)}$. Do E là đồ thị không chu trình nên F_i cũng là đồ thị không chu trình. Hơn nữa, do hữu hạn đỉnh của E ta suy ra F_i hữu hạn (sau mỗi bước ta chỉ thêm vào hữu hạn đỉnh). Đặt $\{v_1^i, \dots, v_{t_i}^i\}$ là tập hợp tất cả các đỉnh chìm trong F_i. Do Mệnh đề 3.3,

$$L_K(F_i) \cong \bigoplus_{j=1}^{t_i} M_{n_{F_i}(v_j^i)}(K).$$

Bây giờ ta sẽ xây dựng ánh xạ chuyển $\rho_i : L_K(F_i) \to L_K(F_{i+1})$. Bằng cách sắp xếp lại nếu cần, ta có thể giả sử tồn tại $\alpha \geq 0$ sao cho

$v_1^{i+1} = v_\alpha^i, \dots, v_\alpha^i = v_{t_i}^i$ nhưng $v_j^i \notin \{v_1^{i+1}, \dots, v_{t_{i+1}}^{i+1}\}$ với mọi $j > \alpha$. Do ta thêm nhiều đỉnh và cạnh từ F_i vào F_{i+1} nên rõ ràng với $j \leq \alpha$ ta có

$$n_{F_i}(v_j^i) \leq n_{F_{i+1}}(v_j^{i+1})$$

và do đó ta có thể nhúng

$$\Phi_i^j : M_{n_{F_i}(v_j^i)}(K) \to M_{n_{F_{i+1}}(v_j^{i+1})}(K)$$

qua phép tương ứng $x \mapsto \text{diag}(x, 0)$.

Với $j > \alpha$ ta có v_j^i không là đỉnh chìm trong F_{i+1} nên tồn tại $w_1 \in F_{i+1}^0$ sao cho $v_j^i \leq w_1$ và $v_j^i \neq w_1$. Nếu w_1 không là đỉnh chìm trong F_{i+1} thì tồn tại $w_2 \in F_{i+1}^0$ sao cho $w_1 \leq w_2$ và $w_1 \neq w_2$. Cứ tiếp tục quá trình trên ta được một dãy các đỉnh

$$v_j^i \leq w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_n.$$

Nhưng F_{i+1} là hữu hạn và không chu trình nên ta không thể lặp lại các đỉnh và ta có quá lắm hữu hạn các đỉnh như vậy. Do đó quá trình này phải dừng lại ở một đỉnh chìm v_s^{i+1}, với $s > \alpha$ và $v_j^i \leq v_s^{i+1}$ trong F_{i+1}. Bằng cách sắp xếp lại các đỉnh, ta được dãy

$$\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_\sigma = t_i$$

sao cho ta có bất đẳng thức sau trong F_{i+1}:

$$v_{\alpha_n - 1}^i, \dots, v_{\alpha_n}^i \leq v_{\alpha_n}^{i+1}, \quad \text{với mọi } 0 \leq n \leq \sigma.$$

Ta có các v_l^i $(l \in \{\alpha_n - 1, \dots, \alpha_n\})$ là các đỉnh chìm trong F_i nên các tập hợp

$$\{p \in \text{Path}(F_{i+1}) : p = p'q, p' \in \text{Path}(F_i), r(p') = v_l^i, r(q) = v_{\alpha_n}^{i+1}\}$$

là rời nhau. Hơn nữa, tất cả các tập hợp rõ ràng chứa trong

$$\{p \in \text{Path}(F_{i+1}) : r(p) = v_{\alpha_n}^{i+1}\}.$$

Do đó

$$n_{F_{i+1}}(v_{\alpha_n}^{i+1}) \geq n_{F_i}(v_{\alpha_n - 1}^i) + \dots + n_{F_i}(v_{\alpha_n}^i).$$

Như vậy ta có thể xây dựng đơn cấu

$$\Psi_i^n : \bigoplus_{l=\alpha_n - 1 + 1}^{\alpha_n} M_{n_{F_i}(v_l^i)}(K) \to M_{n_{F_{i+1}}(v_{\alpha_n}^{i+1})}(K)$$

xác định bởi

$$(x_{\alpha_n-1+1}, \ldots, x_{\alpha_n}) \mapsto \operatorname{diag}(x_{\alpha_n-1+1}, \ldots, x_{\alpha_n}, 0).$$

Cuối cùng,

$$\rho_i = (\bigoplus_{j=1}^{\alpha} \Phi_i^j) \oplus (\bigoplus_{n=1}^{\sigma} \Psi_i^n)$$

là đơn cấu chuyển cần xác định.

Mỗi đỉnh $v \in E^0$ đều tồn tại i sao cho $v \in F_i^0$; hơn nữa, mỗi cạnh $e \in E^0$ đều tồn tại j sao cho $e \in F_j^1$. Khi đó rõ ràng

$$L_K(E) \cong \varinjlim L_K(F_i).$$

Ngược lại, giả sử $p \in \text{Path}(E)$ là chu trình trong E. Khi đó $\{p^m\}_{m=1}^{\infty}$ là một tập độc lập tuyến tính vô hạn, nên p không chứa trong bất kỳ đại số con hữu hạn chiều nào của $L_K(E)$. Như vậy $L_K(E)$ không là vành ma trận địa phương. □

4.3 Vành vô hạn thuần túy

Định nghĩa 4.7. Cho R là một vành. Một R-module trái P được gọi là *vô hạn trực tiếp* nếu P đẳng cấu với một hạng tử trực tiếp thực sự của nó, nghĩa là tồn tại R-module trái Q sao cho

$$P \cong P \oplus Q.$$

! Với P, Q như trên và với $n \in \mathbb{N}$ ta có:

$$P \cong P \oplus Q \cong (P \oplus Q) \oplus Q \cong P \oplus Q^2 \cong \ldots \cong P \oplus Q^n.$$

Định nghĩa 4.8. Một lũy đẳng $e \in R$ được gọi là *lũy đẳng vô hạn* nếu ideal phải eR là R-module phải vô hạn trực tiếp.

Vành R được gọi là *vô hạn thuần túy* nếu mọi ideal phải của R đều chứa ít nhất một lũy đẳng vô hạn.

Bổ đề 4.9. *Cho R là vành và $e \in R$ là một lũy đẳng. Khi đó:*

i) *Re là một hạng tử trực tiếp của R.*

ii) *Mọi hạng tử trực tiếp của Re đều có dạng Rf với f lũy đẳng.*

iii) *Nếu $f \in Re$ là một lũy đẳng thì Rf là hạng tử trực tiếp của Re.*

Chứng minh.

i) Do $e = e^2$ nên
$$Re = \{re : r \in R\}.$$
Đặt
$$T = \{t - te : t \in R\}.$$
Dễ thấy T là ideal trái của R. Với $r \in R$ bất kỳ, ta có
$$r = re + (r - re),$$
nên
$$R = Re + T.$$
Hơn nữa, giả sử $x \in Re \cap T$. Khi đó tồn tại $s, t \in R$ sao cho $x = se = t - te$. Suy ra
$$x = se = se^2 = xe = (t - te)e = te - te = 0.$$
Do đó $Re \cap T = \{0\}$. Vậy
$$R = Re \oplus T.$$

ii) Giả sử $Re = B \oplus C$. Do $e = e^2 \in Re$ nên tồn tại $f \in B$ và $g \in C$ sao cho $e = f + g$. Hơn nữa, do $f \in Re$ nên tồn tại $f' \in R$ sao cho $f = f'e$, và như vậy
$$f = f'e = f'e^2 = fe.$$
Do đó
$$f = fe = f(f + g) = f^2 + fg,$$
nghĩa là
$$f - f^2 = fg.$$
Ta có $f - f^2 \in B$ và do C là ideal trái nên $fg \in C$, và do đó
$$f^2 - f \in B \cap C = \{0\},$$

nghĩa là $f^2 = f$.

Do B là ideal trái nên $Rf \subseteq B$. Ngược lại, lấy $x \in B$. Do $x \in Re$, nên $x = xe = x(f + g)$, nghĩa là

$$x - xf = xg.$$

Suy ra $x - xf \in B \cap C$, và như vậy $x = xf \in Rf$. Do đó $B = Rf$.

iii) Giả sử $f \in Re$ là lũy đẳng. Đặt $g = e - f$, ta chứng minh

$$Re = Rf \oplus Rg.$$

Trước hết, do $f \in Re$ nên tồn tại $f' \in R$ sao cho $f = f'e$, suy ra $f = fe \in Re$, kéo theo $g \in Re$. Vậy

$$Rf + Rg \subseteq Re.$$

Hơn nữa, nếu $r \in Re$ thì

$$re = r(ef + e - ef) = ref + rg \in Rf + Rg,$$

vì vậy

$$Re = Rf + Rg.$$

Lấy $x \in Rf \cap Rg$. Do f và $g = e - f$ lũy đẳng nên tồn tại $r, s \in R$ sao cho $x = rf = sg$. Do đó

$$rf = rf^2 = sgf = sef = sef^2 = 0.$$

Vậy $Re = Rf \oplus Rg$. □

Mệnh đề 4.10. *Cho vành R và $e \in R$ lũy đẳng. Khi đó, e là lũy đẳng vô hạn khi và chỉ khi tồn tại $f \in R$ là phần tử lũy đẳng và tồn tại $x, y \in R$ sao cho $e = xy$, $f = yx$ và $fe = ef = f \neq e$.*

Chứng minh.

Giả sử e là lũy đẳng vô hạn. Khi đó tồn tại các ideal phải B, C khác không của R sao cho $eR = B \oplus C$ và tồn tại đẳng cấu R-module phải $\varphi : eR \to B$. Do $e \in eR$ nên tồn tại $0 \neq f \in B$ và $0 \neq g \in C$ sao cho $e = f + g$. Dựa trên chứng minh của Bổ đề 4.9ii) (nhưng đối với

R-môđun phải), ta có thể kết luận f, g là các lũy đẳng và $B = fR$, $C = gR$, nghĩa là
$$eR = fR \oplus gR.$$
Do $f \in eR$ và e lũy đẳng nên $f = ef$. Tương tự, $g = eg$, và như vậy
$$g = eg = (f+g)g = fg + g^2.$$
Do đó $fg = 0$, nên
$$fe = f(f+g) = f^2 + fg = f.$$
Hơn nữa, do $g \neq 0$ nên $f \neq e$.

Do $\varphi : eR \to fR$ đẳng cấu R-môđun phải nên tồn tại $x \in eR$ và $y \in fR$ sao cho $\varphi(x) = f$ và $\varphi(e) = y$. Khi đó
$$yx = \varphi(e)x = \varphi(ex) = \varphi(fx) = f.$$
Hơn nữa
$$\varphi(xy) = \varphi(x)y = fy = y = \varphi(e),$$
và do φ là đẳng cấu, nên $xy = e$.

Ngược lại, giả sử tồn tại $f, x, y \in R$ sao cho
$$f^2 = f, \quad xy = e, \quad yx = f, \quad ef = fe = f \neq e.$$
Đặt $g = e - f$, ta có $g \neq 0$ và $e = f + g$, suy ra
$$eR \subseteq fR + gR.$$
Hơn nữa,
$$fR + gR = efR + (e - ef)R \subseteq eR,$$
nên
$$eR = fR + gR.$$
Nếu tồn tại $r_1, r_2 \in R$ sao cho $fr_1 + gr_2 = 0$, thì
$$fr_1 = f.fr_1 = f(e-f)r_2 = (fe - f)r_2 = 0.$$
Như vậy, $eR = fR \oplus gR$.

Cố định một cặp x, y thỏa mãn các điều trên, ta sẽ hoàn tất chứng minh bằng việc chỉ ra một đẳng cấu $\varphi : eR \to fR$. Do $eR = xyR$ và

$fR = yxR$ nên phép tương ứng $xyr \mapsto yxyr$ (với $r \in R$) xác định một R-đồng cấu $\varphi : eR \to fR$. Nếu $\varphi(xyr) = 0$ thì $yxyr = 0$, suy ra

$$xyr = er = e^2r = xyyxr = 0,$$

nghĩa là φ là đơn cấu. Hơn nữa, nếu $yxr \in fR$ thì

$$xyr = fr = f.fr = yxyr = \varphi(xyyr),$$

nên φ là toàn cấu. $\square$

Hệ quả 4.11. *Cho R là vành và S là vành con của R. Nếu R không có phần tử lũy đẳng vô hạn thì S không có phần tử lũy đẳng vô hạn.*

Chứng minh.

Giả sử R không có phần tử lũy đẳng vô hạn mà S có phần tử lũy đẳng vô hạn e. Theo Mệnh đề 4.10, có phần tử lũy đẳng f, và $x, y \in S$ sao cho

$$e = xy, \quad f = yx, \quad fe = ef = f \neq e.$$

Vì những phần tử này cũng nằm trong R nên theo Mệnh đề 4.10, e là phần tử lũy đẳng vô hạn trong R–mâu thuẫn. $\square$

Mệnh đề 4.12. *Nếu vành R là một hợp trực tiếp của dãy chuyển các đại số con hữu hạn chiều thì R không chứa các lũy đẳng vô hạn. Nói riêng, R không vô hạn thuần túy.*

Chứng minh.

Giả sử R chứa lũy đẳng vô hạn e. Khi đó, theo Mệnh đề 4.10, tồn tại lũy đẳng $f \in R$ và $x, y \in R$ sao cho

$$e = xy, \quad f = yx, \quad fe = ef = f \neq e.$$

Vì R là hợp trực tiếp của dãy chuyển các đại số con hữu hạn chiều, nên tồn tại đại số con S hữu hạn chiều của R sao cho $e, f, x, y \in S$. Như vậy, tiếp tục áp dụng Mệnh đề 4.10 ta có e là lũy đẳng hữu hạn trong S. Do đó $eS = A_1 \oplus B_1$, trong đó $A_1 \neq \{0\}$, và tồn tại một đẳng cấu $\varphi : eS \to B_1$. Đặt

$$A_2 := \varphi(A_1) \text{ và } B_2 := \varphi(B_1).$$

Khi đó

$$B_1 = \varphi(eS) = \varphi(A_1 \oplus B_1) = A_2 \oplus B_2.$$

Vì φ là đẳng cấu, nên $A_2 \neq \{0\}$ và như vậy $B_2 \supsetneq B_1$. Lại đặt

$$A_3 := \varphi(A_2) \text{ và } B_3 := \varphi(B_2),$$

ta có $\varphi(B_1) = B_2 = A_3 \oplus B_3$. Tương tự như trên, $B_3 \supsetneq B_2$. Như vậy, bằng cách lặp lại quá trình này, ta có một dãy chuyển giảm vô hạn của các ideal phải:

$$B_1 \supsetneq B_2 \supsetneq B_3 \supsetneq \dots$$

và như vậy

$$eS = A_1 \oplus B_1 = A_1 \oplus A_2 \oplus B_2 = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus B_3 = \dots,$$

mâu thuẫn với tính hữu hạn chiều của S. □

Hệ quả 4.13. *Nếu R là vành có tính ma trận địa phương thì R không vô hạn thuần túy.*

4.4 Tính đơn vô hạn thuần túy của $L_K(E)$

Mệnh đề 4.14. *Giả sử $w \in E^0$ là đỉnh sao cho không có đường đi đơn đóng nào tại bất kỳ đỉnh $v \in T(w)$. Khi đó, đại số góc $wL_K(E)w$ là không vô hạn thuần túy.*

Chứng minh.

Đặt $H^0 = T(w)$, $H^1 = s^{-1}(H^0)$. Khi đó, với mọi đỉnh $z \in H^0$ không là đỉnh chìm, và với mọi $e \in s^{-1}(z)$ ta có $z \in T(w)$ nên $r(e) = T(w) = H^0$. Do đó $r(H^1) \subseteq H^0$. Như vậy, bằng cách thu hẹp các hàm s và r từ E^1 lên H_1, ta được $H = (H^0, H^1, r, s)$ là một đồ thị.

Tiếp theo, ta chứng minh $L_K(H)$ là đại số con của $L_K(E)$. Để chứng minh điều này, ta cần chứng minh các hệ thức đại số đường đi Leavitt đúng trong $L_K(H)$. Rõ ràng là ba hệ thức đầu tiên đúng. Với hệ thức (CK2), giả sử v là đỉnh thường trong H. Khi đó, v cũng là đỉnh thường trong E. Hơn nữa $s_H^{-1}(v) = s_E^{-1}(v) \subseteq H^1$, nên hệ thức (CK2) cũng đúng trong $L_K(H)$.

Do không có đường đi đơn đóng nào đặt tại đỉnh v bất kỳ trong $T(w)$ nên H là đồ thị không chu trình. Do đó $L_K(H)$ có tính ma trận địa phương (Mệnh đề **??**), và như vậy, theo Hệ quả 4.13, $L_K(H)$ không vô hạn thuần túy. Do $wL_K(H)w$ là vành con của $L_K(H)$ và $L_K(H)$ không chứa các lũy đẳng vô hạn, nên theo Hệ quả **??**, $wL_K(H)w$ không chứa lũy đẳng vô hạn nào, và do đó $wL_K(H)w$ không vô hạn thuần túy.

Cuối cùng, gọi $\alpha = \sum k_i p_i q_i^*$ là một phần tử tuỳ ý trong $L_K(E)$, với $k_i \in K$ và $p_i, q_i \in \text{Path}(E)$. Khi đó $w\alpha w = \sum k_{ij} p_{ij}^* q_{ij}$, trong đó $s(p_{ij}) = w = s(q_{ij})$. Như vậy $p_{ij}, q_{ij} \in \text{Path}(H)$ và do đó

$$wL_K(E)w \subseteq wL_K(H)w.$$

Suy ra

$$wL_K(H)w = wL_K(E)w.$$

Do đó $wL_K(E)w$ không vô hạn thuần túy. □

Định lý 4.15. *Cho E là một đồ thị và K là một trường. Khi đó, $L_K(E)$ đơn vô hạn thuần túy nếu và chỉ nếu E thoả mãn các điều sau:*

i) *E^0 chỉ có các tập con di truyền bão hoà là $\varnothing$ và E^0.*

ii) *Mỗi chu trình trong E đều có lối ra.*

iii) *Với mỗi $v \in E^0$, tồn tại $u \in T(v)$ sao cho u là điểm đặt của một chu trình trong E.*

Chứng minh.

Chiều đảo. Giả sử có các điều kiện i), ii) và iii). Theo Định lý 2.30 ta có $L_K(E)$ đơn. Để chứng minh $L_K(E)$ là vô hạn thuần túy, ta chứng minh $L_K(E)$ không là vành chia và với mọi $0 \neq x, y \in L_K(E)$ tồn tại $s, t \in L_K(E)$ sao cho $sxt = y$.

Từ ii) và iii) suy ra, tồn tại ít nhất một chu trình có lối ra trong E,

nên tồn tại hai cạnh phân biệt $e_1, e_2 \in E^1$. Từ $e_1^* e_2 = 0$ suy ra $L_K(E)$ không là vành chia.
Bây giờ cho $0 \neq x, y \in L_K(E)$. Vì mọi chu trình trong E đều có lối ra nên từ Định lý rút gọn (Định lý 1.27), tồn tại $a, b \in L_K(E)$ và $u \in E^0$ sao cho

$$0 \neq axb = u.$$

Theo iii), tồn tại $v \in T(u)$ sao cho có chu trình c đặt tại v. Vì vậy, hoặc $u = v$ hoặc tồn tại $p \in \mathrm{Path}(E)$ sao cho $s(p) = u$ và $r(p) = v$. Bằng cách chọn $a' = b' = u$ trong trường hợp đầu, hoặc chọn $a' = p^*$, $b' = p$ trong trường hợp sau, ta được $a'ub' = v$. Vì c là đường đi có độ dài dương đặt tại $v \in L_K(E)$ nên, theo Mệnh đề 2.35, tồn tại đường đi đơn q đặt tại v với $q \neq c$. Với mỗi $m \in \mathbb{N}$, đặt $d_m = c^{m-1}q$. Vì c không là đường đi con của q và ngược lại, nên $c^*q = 0 = q^*c$. Áp dụng tính chất $c^*c = v$ và giả sử $m > n$, ta có

$$d_m^* d_n = (q^*(c^*)^{m-1})(c^{n-1}q) = q^*(c^*)^{m-n}q = 0.$$

Tương tự $d_m^* d_n = 0$ khi $n > m$. Trong trường hợp $m = n$, ta có

$$d_m^* d_n = q^* v q = v,$$

và do đó

$$d_m^* d_n = \delta_{m,n} v \quad \text{với mọi} \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Từ $L_K(E)$ đơn, ta có $\langle v \rangle = L_K(E)$. Do đó, với mọi $w \in E^0$, ta có thể viết

$$w = \sum_{i=1}^{t} a_i v b_i, \quad \text{với} \quad a_i, b_i \in L_K(E).$$

Đặt

$$a_w = \sum_{i=1}^{t} a_i d_i^* \quad \text{và} \quad b_w = \sum_{j=1}^{t} d_j b_j.$$

Do $d_i^* d_j = \delta_{ij} v$, nên

$$a_w v b_w = \Big(\sum_{i=1}^{t} a_i d_i^*\Big) v \Big(\sum_{j=1}^{t} d_j b_j\Big) = \sum_{i=1}^{t} a_i v b_i = w.$$

Nói cách khác, với mọi $w \in E^0$, tồn tại $a_w, b_w \in L_K(E)$ sao cho

$$a_w v b_w = w.$$

Do $L_K(E)$ có đơn vị địa phương, nên tồn tại tập hữu hạn đỉnh $X = \{v_1, \dots, v_s\}$ sao cho $e = \sum_{i=1}^{s} v_i$ là đơn vị địa phương cho y, do đó $ey = e\cdot y = y$. Với mỗi $v_i \in X$, đặt a_{v_i}, b_{v_i} là các phần tử mà $a_{v_i} v b_{v_i} = v_i$. Đặt

$$s' = \sum_{i=1}^{s} a_{v_i} d_i^*, \quad t' = \sum_{j=1}^{s} d_j b_{v_j}.$$

Khi đó

$$s'vt' = \Big(\sum_{i=1}^{s} a_{v_i} d_i^*\Big) v \Big(\sum_{j=1}^{s} d_j b_{v_j}\Big) = \sum_{i=1}^{s} a_{v_i} v b_{v_i} = \sum_{i=1}^{s} v_i = e.$$

Tóm lại, ta đã chọn được các phần tử $a, b, a', b', s', t' \in L_K(E)$ sao cho

$$axb = u, \quad a'ub' = v, \quad s'vt' = e.$$

Đặt $s = s'a'a$ và $t = bb't'y$. Khi đó

$$sxt = (s'a'a)x(bb't'y) = s'a'(axb)b't'y = s'(a'ub')t'y = (s'vt')y = ey = y,$$

và như vậy $L_K(E)$ là vô hạn thuần túy.

Chiều thuận. Giả sử $L_K(E)$ đơn vô hạn thuần túy. Từ $L_K(E)$ đơn ta được i) và ii). Giả sử iii) không đúng. Khi đó tồn tại $w \in E^0$ sao cho không tồn tại $v \in T(w)$ để E có chu trình đặt tại v. Như vậy, theo Mệnh đề 4.14, $wL_K(E)w$ không vô hạn thuần túy, do đó $L_K(E)$ không vô hạn thuần túy, mâu thuẫn. $\square$

Mệnh đề 4.16. *Cho E là một đồ thị và K là một trường. Khi đó, nếu $L_K(E)$ đơn thì một trong hai trường hợp sau xảy ra:*

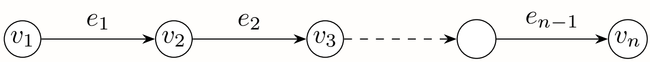
i) *$L_K(E)$ là đơn vô hạn thuần túy và E chứa một chu trình.*

ii) *$L_K(E)$ là ma trận địa phương và E là đồ thị không chu trình.*

Chứng minh.

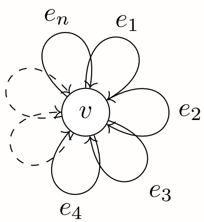
Nếu E không chu trình thì theo Mệnh đề 4.6, $L_K(E)$ là ma trận địa phương. Ngược lại, giả sử E chứa một chu trình c. Theo Hệ quả 2.33 ta có E là đồ thị đối kết, và như vậy mỗi đỉnh của E đều nối với đường đi vô hạn ∞. Do đó mỗi đỉnh của E đều nối đến một chu trình, thoả mãn điều kiện iii) của Định lý 4.15. Vì $L_K(E)$ đơn, nên điều kiện i) và ii) của Định lý 4.15 được thoả mãn, và như vậy $L_K(E)$ là đơn vô hạn thuần túy. □

Ví dụ 4.1. Xét đồ thị dường hữu hạn M_n.



Vì M_n không chu trình với mọi $n \in \mathbb{N}$, nên $L_K(E)$ là ma trận địa phương với mọi $n \in \mathbb{N}$. Điều này không có gì bất ngờ, do $L_K(M_n) \cong M_n(K)$.

Ví dụ 4.2. Xét đồ thị hoa hồng n cánh R_n, với $n \geq 2$.



Vì R_n chứa n chu trình nên $L_K(R_n) \cong L(1, n)$ là đơn vô hạn thuần túy.

4.5 Đồ thị sinh bởi tập cạnh

Cho E là đồ thị và F là một tập con hữu hạn của E^1. Ta ký hiệu:

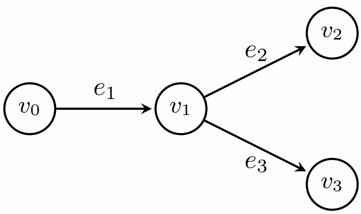
- $s(F) = \{v \in E^0 \mid s^{-1}(v) \cap F \neq \emptyset\}$;
- $r(F) = \{u \in E^0 \mid r^{-1}(u) \cap F \neq \emptyset\}$;
- $W_F = s(F) \cap r(F) \cap s(E^1 \setminus F)$;
- $Z_F = r(F) \setminus s(F)$.

Bây giờ ta xây dựng đồ thị mới E_F với tập đỉnh E_F^0, tập cạnh E_F^1 và các ánh xạ s, r xác định bởi:

- $E_F^0 = F \cup W_F \cup Z_F$ (mỗi cạnh trong F là một đỉnh của đồ thị mới);
- $E_F^1 = \{(f, x) \in F \times E_F^0 : r(f) = s(x)\}$ (ta xem $s(v) = v$, $\forall v \in E^0$);
- Với mọi $(f, x) \in E_F^1$, $s((f, x)) = f$; $r((f, x)) = x$.

Chú ý rằng, do F hữu hạn nên E_F là đồ thị hữu hạn. Ngoài ra, mọi đỉnh trong W_F và Z_F đều trở thành đỉnh chìm trong đồ thị mới.

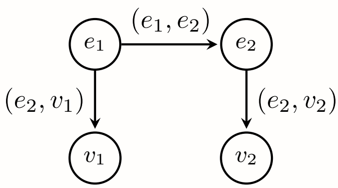
Ví dụ 4.3. Cho E là đồ thị dưới đây và $F = \{e_1, e_2\}$.



Khi đó $W_F = \{v_1\}$ và $Z_F = \{v_2\}$, do đó $E_F^0 = \{e_1, e_2, v_1, v_2\}$. Như vậy

$$E_F = \{(e_1, e_2), (e_1, v_1), (e_2, v_2)\},$$

và do đó ta có:



Bổ đề 4.17. *Cho E là đồ thị không chu trình. Khi đó, với mọi tập con hữu hạn $F \subseteq E^1$, ta có E_F là đồ thị không chu trình.*

Chứng minh.

Theo định nghĩa, mọi đỉnh $v \in E_F^0$ là đỉnh chìm, trừ khi $v = e \in F$. Từ $r((x, y)) = y$ với $(x, y) \in E_F^1$, ta suy ra mọi chu trình trong E_F đều có dạng

$$(e_1, e_2)(e_2, e_3) \ldots (e_n, e_1),$$

trong đó $e_1, e_2, \ldots, e_n \in F$. Tuy nhiên, (e, f) là một cạnh của E_F chỉ khi $r(e) = s(f)$ trong E. Như vậy $e_1 e_2 \ldots e_n$ là một chu trình trong E, mâu thuẫn với giả thiết E không chu trình. $\square$

Mệnh đề 4.18. *Cho E là một đồ thị và F là tập con hữu hạn của E^1. Khi đó tồn tại đồng cấu đại số $\phi : L_K(E_F) \to L_K(E)$ thoả mãn:*

i) $F \cup F^* \subseteq \mathrm{Im}(\phi)$, *trong đó* $F^* = \{e^* : e \in F\}$;

ii) $r(F) \subseteq \mathrm{Im}(\phi)$;

iii) *Nếu* $w \in E^0$ *sao cho* $\varnothing \neq s_E^{-1}(w) \subseteq F$ *thì* $w \in \mathrm{Im}(\phi)$.

Chứng minh.

Trước hết, ta định nghĩa ánh xạ $\phi : L_K(E_F) \to L_K(E)$ thông qua các phần tử sinh như sau:

- Với mỗi $w \in E_F^0$:

  + Nếu $w = e \in F$ thì $\phi(w) = ee^*$;

  + Nếu $w \in W_F$ thì $\phi(w) = w - \sum_{f \in s^{-1}(w) \cap F} ff^*$;

  + Nếu $w \in Z_F$ thì $\phi(w) = w$.

- Với mỗi $h = (e, f) \in E_F^1$:

  + Nếu $f \in F$, thì $\phi(h) = eff^*$;

  + Nếu $f = r(e) \in W_F$, thì $\phi(h) = e - \sum_{g \in s^{-1}(r(e)) \cap F} egg^*$;

  + Nếu $f = r(e) \in Z_F$, thì $\phi(h) = e$.

- Với mỗi $h \in E_F^1$, $\phi(h^*) = \phi(h)^*$.

Khi mở rộng tuyến tính và nhân tính, ta dễ kiểm tra các hệ thức (CK1), (CK2) đều được bảo toàn. Do đó, ϕ là đồng cấu đại số.

i) Áp dụng (CK2) cho mọi $f \in F$ như đã làm trong phần giải thích, ta suy ra $f \in \mathrm{Im}(\phi)$, và $f^* \in \mathrm{Im}(\phi)$.

ii) Với mỗi $f \in F$ ta có $r(f) = f^* f \in \mathrm{Im}(\phi)$. Do đó $r(F) \subseteq \mathrm{Im}(\phi)$.

iii) Nếu $w \in E^0$ không là đỉnh chìm trong E và $s^{-1}(w) = \{f_1, ..., f_n\} \subseteq F$ thì $w = \sum f_i f_i^* \in \mathrm{Im}(\phi)$. $\square$

Bổ đề 4.19. *Cho E là một đồ thị, F là tập con hữu hạn của E^1 và $\phi : L_K(E_F) \to L_K(E)$ là đồng cấu được xác định như Mệnh đề 4.18. Khi đó, nếu E là đồ thị không chu trình thì ϕ là đơn cấu.*

Chứng minh.

Nhắc lại rằng, với mỗi $w \in E_F^0$, ta có:

$$\phi(w) = \begin{cases} ee^*, & \text{nếu } w = e \in F, \\ w, & \text{nếu } w \in Z_F, \\ w - \sum\limits_{f \in s^{-1}(w) \cap F} ff^*, & \text{nếu } w \in W_F. \end{cases}$$

Với hai trường hợp đầu, ta dễ dàng thấy rằng $\phi(w) \neq 0$; với trường hợp cuối, do

$$W_F = s(F) \cap r(F) \cap (E^1 \setminus F)$$

nên w phát ra ít nhất một cạnh trong $E^1 \setminus F$, do đó theo (CK2), $\phi(w) \neq 0$. Như vậy $\phi(w) \neq 0$ với mọi $w \in E_F^0$.

Nếu E là đồ thị không chu trình thì theo Bổ đề 4.17, E_F cũng là đồ thị không chu trình. Giả sử $\ker(\phi) \neq 0$. Khi đó, do mọi ideal khác 0 trong $L_K(E_F)$ đều không chứa đỉnh, nên theo Định lý rút gọn (Định lý 1.27), tồn tại $0 \neq x \in \ker(\phi)$ có dạng:

$$x = \sum_{i=-m}^{n} k_i c^i,$$

với c là một chu trình không lối ra trong E_F. Nhưng điều này không thể xảy ra, do E_F không có chu trình. Như vậy $\ker(\phi) = 0$, nghĩa là ϕ là đơn cấu. □

4.6 Xây dựng đại số con $B(X)$

Cho E là một đồ thị và $X = \{a_1, \dots, a_n\}$ là một tập con hữu hạn gồm các phần tử khác 0 của $L_K(E)$. Khi đó, mỗi phần tử của X đều có dạng

$$a_r = \sum_{i=1}^{s_r} k_{ri} v_{ri} + \sum_{j=1}^{t_r} k'_{rj} p_{rj} q^*_{rj},$$

trong đó $k_{ri}, k'_{rj} \in K \setminus \{0\}$, $v_{ri} \in E^0$, $p_{rj}, q_{rj} \in \text{Path}(E)$. Hơn nữa, mỗi p_{rj}, q_{rj} đều có độ dài khác 0.

Đặt F là tập hợp tất cả các cạnh xuất hiện trong các đường đi p_{rj} hoặc q_{rj} và S là tập hợp tất cả các đỉnh v_{ri}.

Khi đó F, F^*, S là các tập hữu hạn và là tập hợp tất cả các cạnh và các đỉnh xuất hiện trong dạng biểu diễn của các phần tử trong X.

Bây giờ ta phân hoạch S thành các tập con rời nhau sau đây:

$$S_1 = S \cap r(F), \quad \text{và đặt } T = S \setminus S_1,$$

$$S_2 = \{v \in T : s_E^{-1}(v) \subseteq F\},$$

$$S_3 = \{v \in T : s_E^{-1}(v) \cap F = \emptyset\},$$

$$S_4 = \{v \in T : s_E^{-1}(v) \cap F \neq \emptyset \text{ và } s_E^{-1}(v) \cap (E^1 \setminus F) \neq \emptyset\}.$$

Đặt E_F là đồ thị như trong Định nghĩa và $\phi : L_K(E_F) \to L_K(E)$ là đồng cấu được xác định như Mệnh đề 4.18. Đặt $B(X)$ là K-đại số con của $L_K(E)$ sinh bởi $\mathrm{Im}(\phi) \cup S_3 \cup S_4$.

Với các ký hiệu như trên, ta có tính chất quan trọng của $B(X)$ như sau:

Mệnh đề 4.20. *Với các ký hiệu như trên, ta có:*

i) $X \subseteq B(X)$.

ii) $B(X) = \mathrm{Im}(\phi) \bigoplus \left(\bigoplus_{v_i \in S_3} K v_i\right) \bigoplus \left(\bigoplus_{w_j \in S_4} K u_{w_j}\right)$, *trong đó*
$$u_w := w - \sum_{f \in s^{-1}(w) \cap F} f f^*.$$

iii) *Họ* $\{B(X) : X \subseteq L_K(E), X$ *hữu hạn*$\}$ *là tập hướng lên của các đại số con của* $L_K(E)$.

iv) $L_K(E) = \varinjlim_{\substack{X \subseteq L_K(E) \\ X \text{ hữu hạn}}} B(X)$.

Chứng minh.

i) Do Mệnh đề 4.18, ta có

$$F \cup F^* \cup S_1 \cup S_2 \subseteq \mathrm{Im}(\phi) \subseteq B(X).$$

Do định nghĩa, ta có $S_3 \cup S_4 \subseteq B(X)$. Vậy $X \subseteq B(X)$.

ii) Vì $S_3 \subseteq E^0$ là tập các lũy đẳng trực giao nên

$$\sum_{v_i \in S_3} Kv_i = \bigoplus_{v_i \in S_3} Kv_i.$$

Hơn nữa, với mọi $u_{w_i}, u_{w_j} \in S_4$, ta có

$$\begin{aligned}
u_{w_i}u_{w_j} &= \big(w_i - \sum_{f_i \in F \cap s^{-1}(w_i)} f_i f_i^*\big)\big(w_j - \sum_{f_j \in F \cap s^{-1}(w_j)} f_j f_j^*\big) \\
&= \delta_{ij} w_i - \delta_{ij}\big(\sum_{f_i \in F \cap s^{-1}(w_i)} f_i f_i^*\big) \\
&= \delta_{ij}\big(w_i - \sum_{f_i \in F \cap s^{-1}(w_i)} f_i f_i^*\big) = \delta_{ij} u_{w_i}.
\end{aligned}$$

Do đó $\{u_{w_j} : w_j \in S_4\}$ là tập các lũy đẳng trực giao. Như vậy,

$$\sum_{w_j \in S_4} Ku_{w_j} = \bigoplus_{w_j \in S_4} Ku_{w_j}.$$

Tiếp theo, ta chứng tỏ tổng

$$\mathrm{Im}(\phi) + \big(\bigoplus_{v_i \in S_3} Kv_i\big) + \big(\bigoplus_{w_j \in S_4} Ku_{w_j}\big)$$

là tổng trực tiếp.

Lấy $v \in S_3$. Do định nghĩa của S_3 ta được $v \notin r(F) \cup s(F)$, nên

$$v \notin W_F \cup Z_F.$$

Khi đó, v trực giao với mọi phần tử $\phi(x)$, với

$$x \in (E_F^0) \cup (E_F^1) \cup (E_F^1)^*.$$

Thật vậy, nếu $x = e \in F$ thì do $v \notin s(F)$ nên

$$v\phi(x) = vee^* = 0;$$

nếu $x = w \in W_F$ thì do $v \notin W_F$ nên $v \neq w$, do đó

$$v\phi(x) = v\big(w - \sum_{f \in s^{-1}(w) \cap F} ff^*\big) = 0;$$

nếu $x = w \in Z_F$ thì do $v \notin Z_F$ nên $v \neq w$, do đó $v\phi(x) = vw = 0$..

Tương tự, dễ dàng kiểm tra $\phi(x)v = 0$ với mọi x thuộc một trong ba trường hợp trên. Như vậy v trực giao với mọi phần tử của $\phi(E_F^0)$.

Bây giờ ta giả sử $h = (x, y) \in E_F^1$. Khi đó

$$\phi(h) = \phi(xhy) = \phi(x)\phi(h)\phi(y),$$

và

$$\phi(h^*) = \phi(yh^*x) = \phi(y)\phi(h^*)\phi(x).$$

Do $x, y \in E_F^0$ nên v trực giao với $\phi(h)$ và $\phi(h^*)$. Do đó v trực giao với mọi phần tử sinh của $\mathrm{Im}(\phi)$, và như vậy Kv_i trực giao với $\mathrm{Im}(\phi)$ với mọi $v_i \in S_3$. Do mỗi v_i là lũy đẳng, nên ta được

$$\Big(\bigoplus_{v_i \in S_3} Kv_i\Big) \cap \mathrm{Im}(\phi) = \{0\}.$$

Tiếp theo, ta chứng minh rằng

$$\Big(\bigoplus_{w_j \in S_4} Ku_{w_j}\Big) \cap \mathrm{Im}(\phi) = \{0\}.$$

Lấy $w \in S_4$. Do định nghĩa của S_4, ta được $w \notin r(F)$, và như vậy ta lại có $w \notin W_F \cup Z_F$. Tiếp tục, ta cần chứng tỏ u_w trực giao với mọi phần tử $\phi(x)$, với $x \in (E_F^0) \cup (E_F^1) \cup (E_F^1)^*$.

- Nếu $x = e \in F$ thì

$$u_w\phi(x) = \big(w - \sum_{f \in F \cap s^{-1}(w)} ff^*\big)ee^* = \delta_{w,s(e)}ee^* - \delta_{w,s(e)}ee^*ee^* = 0.$$

- Nếu $x = w' \in W_F$ thì do $w \notin W_F$ nên $w \neq w'$, do đó

$$u_w\phi(x) = \big(w - \sum_{f \in F \cap s^{-1}(w)} ff^*\big)\big(w' - \sum_{f' \in F \cap s^{-1}(w')} f'f'^*\big) = 0.$$

- Nếu $x = w' \in Z_F$ thì do $w \notin Z_F$ nên $w \neq w'$, do đó

$$u_w\phi(x) = \big(w - \sum_{f \in F \cap s^{-1}(w)} ff^*\big)w' = 0.$$

Tương tự, $\phi(x)u_w = 0$ với mỗi x thuộc một trong ba trường hợp như trên. Do đó u_w trực giao với mọi phần tử sinh của $\mathrm{Im}(\phi)$, nghĩa là Ku_{w_j} trực giao với $\mathrm{Im}(\phi)$ với mọi $w_j \in S_4$. Như vậy

$$\Big(\bigoplus_{w_j \in S_4} Ku_{w_j}\Big) \cap \mathrm{Im}(\phi) = \{0\}.$$

Lấy $v \in S_3$ và $w \in S_4$. Do $S_3 \cap S_4 = \varnothing$ nên $v \neq w$, do đó

$$v \cdot u_w = v\big(w - \sum_{f \in F \cap s^{-1}(w)} ff^*\big) = 0 = \big(w - \sum_{f \in F \cap s^{-1}(w)} ff^*\big)v = u_w \cdot v.$$

Như vậy

$$\Big(\bigoplus_{v_i\in S_3} Kv_i\Big)\cap\Big(\bigoplus_{w_j\in S_4} Ku_{w_j}\Big)=\{0\}.$$

Mặt khác, các tập hợp này cùng với $\mathrm{Im}(\phi)$ đôi một trực giao nên

$$\mathrm{Im}(\phi)+\Big(\bigoplus_{v_i\in S_3} Kv_i\Big)+\Big(\bigoplus_{w_j\in S_4} Ku_{w_j}\Big)=\mathrm{Im}(\phi)\oplus\Big(\bigoplus_{v_i\in S_3} Kv_i\Big)\oplus\Big(\bigoplus_{w_j\in S_4} Ku_{w_j}\Big).$$

Tiếp theo, ta chứng minh tổng này bằng $B(X)$. Đặt

$$A=\mathrm{Im}(\phi)\oplus\Big(\bigoplus_{v_i\in S_3} Kv_i\Big)\oplus\Big(\bigoplus_{w_j\in S_4} Ku_{w_j}\Big).$$

Dễ thấy

$$\mathrm{Im}(\phi)\subseteq B(X) \text{ và } \bigoplus_{v_i\in S_3} Kv_i\subseteq B(X).$$

Lấy $w\in S_4$, với mỗi $f\in F\cap s^{-1}(w)$ ta có

$$ff^*\in \mathrm{Im}(\phi)\subseteq B(X),$$

do đó

$$u_w=w-\sum_{f\in F\cap s^{-1}(w)} ff^*\in B(X).$$

Vậy $A\subseteq B(X)$.

Ngược lại, do $\mathrm{Im}(\phi)\subseteq A, S_3\subseteq A$ và với mọi $w\in S_4$, ta có

$$\sum_{f\in F\cap s^{-1}(w)} ff^*\in \mathrm{Im}(\phi),$$

nên

$$w=u_w+\sum_{f\in F\cap s^{-1}(w)} ff^*\in A.$$

Do đó mọi phần tử sinh của $B(X)$ đều thuộc A, nghĩa là $B(X)\subseteq A$. Như vậy $B(X)=A$.

iii) Đặt $Z=\{B(X)\mid X\subseteq L_K(E), X \text{ hữu hạn}\}$. Để chứng minh B là một tập hướng lên, ta cần chứng minh rằng với mỗi cặp tập con hữu hạn $X_1, X_2\subseteq L_K(E)$ tồn tại tập hữu hạn $X_3\subseteq L_K(E)$ sao cho

$$B(X_1), B(X_2)\subseteq B(X_3).$$

Nếu $X\subseteq L_K(E)$ là một tập hữu hạn thì các tập hợp F, S_3, S_4 là hữu hạn. Do F hữu hạn nên E_F hữu hạn, do đó $L_K(E_F)$ là K-đại số hạn sinh. Như vậy $\mathrm{Im}(\varphi)$, và do đó $B(X)$ là K-đại số hữu hạn sinh.

Giả sử X_1 và X_2 là tập con hữu hạn của $L_K(E)$, đặt T_1, T_2 tương ứng là tập sinh hữu hạn của $B(X_1), B(X_2)$ và đặt $T = T_1 \cup T_2$. Khi đó, với mỗi phần tử sinh $t \in T_1$ ta có $t \in T \subseteq B(T)$ (do (i)), và như vậy $B(X_1) \subseteq B(T)$. Tương tự, $B(X_2) \subseteq B(T)$.

iv) Đặt

$$M = \varinjlim_{\substack{\{X \subseteq L_K(E), \\ X \text{ hữu hạn}\}}} B(X).$$

Giả sử $L_K(E) \neq M$, nghĩa là tồn tại $X \subseteq L_K(E)$ mà $X \not\subseteq M$ (ta có thể cho X là tập hữu hạn). Nhưng điều này không thể xảy ra, vì $X \subseteq B(X)$ (theo (i)) và $B(X) \subseteq M$ (theo (iii)). Do đó $L_K(E) = M$. $\square$

4.7 Điều kiện chính quy

Định nghĩa 4.21. Một vành R được gọi là *chính quy von Neumann* nếu với mỗi $x \in R$, tồn tại $y \in R$ sao cho $x = xyx$.

Định nghĩa 4.22. Cho R là vành. Ta nói:

- R là π-*chính quy* nếu với mỗi $x \in R$, tồn tại $y \in R$ và $n \in \mathbb{N}$ sao cho $x^n = x^n y x^n$.
- R là π-*chính quy trái* nếu với mỗi $a \in R$, tồn tại $n \in \mathbb{N}$ và $b \in R$ sao cho $a = ba^{n+1}$.
- R là π-*chính quy phải* nếu với mỗi $a \in R$, tồn tại $n \in \mathbb{N}$ và $b \in R$ sao cho $a = a^{n+1}b$.
- Vành R là π-*chính quy mạnh* nếu R là π-chính quy phải và trái.

! Dễ thấy, vành chính quy von Neumann là vành π-chính quy (lấy $n = 1$), nhưng điều ngược lại không đúng. Chẳng hạn, vành $R = \mathbb{Z}_4$ là π-chính quy (vì $2^2 = 0 = 2^2 \cdot 1 \cdot 2^2$ và $3^2 = 1 = 3^2 \cdot 1 \cdot 3^2$) nhưng không là chính quy von Neumann (2 không là phần tử chính quy von Neumann).

Bổ đề 4.23 (Azumaya, Dischinger)**.** *Cho R là vành π-chính quy mạnh và có đơn vị. Khi đó, với mỗi $a \in R$, tồn tại $n \in \mathbb{Z}^+$ và $x \in R$ sao cho $ax = xa$ và $a^{n+1}x = a^n = xa^{n+1}$.*

Bổ đề 4.24. *Cho R là một vành có đơn vị địa phương. Khi đó, R là π-chính quy mạnh khi và chỉ khi với mọi phần tử lũy đẳng $e \in R \setminus \{0\}$, vành con eRe là π-chính quy mạnh.*

Chứng minh.

($\Leftarrow$) Giả sử R là π-chính quy mạnh và $e \in R$ là một lũy đẳng. Lấy $x \in eRe$. Khi đó, tồn tại $y \in R$ sao cho $x^n = yx^{n+1}$ và tồn tại $z \in R$ sao cho $x^m = x^{m+1}z$. Hơn nữa, từ $x \in eRe$ ta có $x = xe = ex$, nên

$$x^n = ex^n = e(yx^{n+1}) = eyex^{n+1}.$$

Như vậy, tồn tại $y' = eye \in eRe$ sao cho $x^n = y'x^{n+1}$. Tương tự, tồn tại $z' = eze \in eRe$ sao cho $x^m = x^{m+1}z'$, nghĩa là eRe là π-chính quy mạnh.

($\Rightarrow$) Ngược lại, giả sử eRe là π-chính quy mạnh với mọi lũy đẳng trong R, và lấy $x \in R$. Do R có đơn vị địa phương nên tồn tại phần tử lũy đẳng $f \in R \setminus \{0\}$ sao cho $x \in fRf$. Do fRf là π-chính quy mạnh, nên tồn tại $y, z \in fRf$ sao cho

$$x^n = yx^{n+1} \quad \text{và} \quad x^m = x^{m+1}z.$$

Tuy nhiên, do y, z là các phần tử của R, nên từ điều này suy ra R là vành π-chính quy mạnh. □

Bổ đề 4.25. *Cho R là một vành. Nếu R là π-chính quy mạnh thì với mỗi $a \in R$, tồn tại $n \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $a^n = fw = wf$, trong đó $f^2 = f$, w khả nghịch và a, f, w giao hoán nhau.*

Chứng minh.

Do R là π-chính quy mạnh nên theo Bổ đề 8.10, tồn tại $b \in R$ và $n \in \mathbb{Z}^+$ sao cho

$$ab = ba \quad \text{và} \quad a^n = a^{n+1}b.$$

Do đó,

$$a^n = a^n(ab) = a^{n+1}b(ab) = a^{n+2}b^2.$$

Bằng quy nạp ta được

$$a^n = a^{n+k}b^k, \text{ với } k \geq 1.$$

Nói riêng,

$$a^n = a^{2n}b^n = b^n a^{2n}.$$

Đặt $f = a^n b^n = b^n a^n$. Ta có

$$f^2 = (a^n b^n)^2 = a^n b^n a^n b^n = a^n b^n = f.$$

Do đó f lũy đẳng. Hơn nữa, do $ab = ba$ nên $af = fa$ và

$$a^n f = f a^n = a^{2n} b^n = a^n.$$

Đặt $c = b^n f$. Khi đó,

$$c = b^n a^n b^n = b^n a^n b^n a^n b^n = a^n b^n b^n a^n b^n = f b^n f$$

nên $c \in fRf$. Đặt $w = a^n + (1 - f)$. Khi đó

$$fw = wf = a^n f = a^n,$$

đồng thời w khả nghịch và có nghịch đảo là $w^{-1} = c + (1 - f)$. □

Định lý 4.26. *Cho E là một đồ thị, K là một trường. Các điều sau tương đương:*

i) $L_K(E)$ *là chính quy von Neumann.*

ii) $L_K(E)$ *là π-chính quy.*

iii) E *không có chu trình.*

iv) $L_K(E)$ *là K-ma trận địa phương.*

v) $L_K(E)$ *là π-chính quy mạnh.*

Chứng minh.

i) $\Rightarrow$ ii) Hiển nhiên từ định nghĩa vành chính quy von Neumann và π-chính quy.

ii) $\Rightarrow$ iii) Giả sử $L_K(E)$ là π-chính quy và giả sử tồn tại chu trình c đặt tại đỉnh v trong E. Lấy $x = v + c \in L_K(E)$. Do $L_K(E)$ là π-chính quy, nên tồn tại $y \in L_K(E)$ và $n \in \mathbb{N}$ sao cho $x^n y x^n = x^n$. Chú ý rằng $xv = vx = x$, nên bằng cách đặt $a = vyv$ ta có

$$x^n a x^n = x^n(vyv)x^n = x^n y x^n = x^n.$$

Bây giờ ta biểu diễn a dưới dạng tổng của các thành phần thuần nhất phân bậc của nó, ta có

$$a = \sum_{i=s}^{t} a_i, \text{ với } s, t \in \mathbb{Z}, a_s \neq 0, a_t \neq 0 \text{ và } \deg a_i = i.$$

Suy ra $vav = \sum_{i=s}^{t} va_iv$.

Do $\deg(v) = 0$, nên từ đẳng thức $vav = a$ suy ra $va_iv = a_i, \forall i$.

Vì v lũy đẳng và $cv = vc = c$ nên áp dụng công thức hệ số nhị thức, ta được:

$$x^n = (v+c)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} v^{n-k} c^k = v + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} c^k.$$

Khai triển đẳng thức $x^n a x^n = x^n$, ta được:

$$\Big(v + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} c^k\Big)\Big(\sum_{i=s}^{t} a_i\Big)\Big(v + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} c^k\Big) = v + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} c^k. \quad (*)$$

Do $\deg(c) > 0$ ta suy ra $\deg(c^k) > 0$ với mọi $1 \leq k \leq n$. Cân bằng bậc thấp nhất ở hai vế ta được $va_sv = v$, kéo theo $a_s = v$. Do đó $s = 0$ và như vậy ta có thể viết

$$a = \sum_{i=0}^{t} a_i, \text{ với } a_0 = v.$$

Bây giờ ta giả sử $\deg(c) = m > 0$, khi đó $\deg(c^k) = km$. Do đó, trừ hạng tử đầu tiên, mọi hạng tử còn lại của vế phải của đẳng thức trên có bậc là km với $1 \leq k \leq n$. Cân bằng bậc hai vế ta được $a_i \neq 0$ chỉ khi tồn tại $0 \leq k \leq n$ sao cho $i = km$.

Tiếp theo, ta dùng quy nạp để chứng minh rằng, với mỗi $0 \leq k \leq n$, $a_{km} = f_k(c)$, với $f_k(c)$ là đa thức theo c với hệ số nguyên.

- Với $k = 0$ ta có $a_0 = v = c^0$, nên khẳng định trên đúng khi $k = 0$.

- Với $k = 1$, cân bằng hệ số bậc m hai vế của $(*)$ ta được
$va_m v + \binom{n}{1} c a_0 v + a_0 \binom{n}{1} c = \binom{n}{1} c.$

Mà $a_0 = v$ nên ta được

$$a_m + nc + nc = nc,$$

nghĩa là $a_m = -nc$, là một đa thức theo c với hệ số nguyên.

Giả sử $l > 1$ và giả sử $a_{km} = f_k(c)$ là đa thức theo c với hệ số nguyên tại mọi $0 \leq k < l$. Cân bằng hệ số bậc lm ở hai vế của $(*)$ ta được:

$$\begin{aligned} a_{lm} &+ \binom{n}{1} c \Big(a_{(l-1)m} + a_{(l-2)m} \binom{n}{1} c + \cdots + a_0 \binom{n}{l-1} c^{l-1} \Big) \\ &+ \binom{n}{2} c^2 \Big(a_{(l-2)m} + a_{(l-3)m} \binom{n}{1} c + \cdots + a_0 \binom{n}{l-2} c^{l-2} \Big) \\ &+ \binom{n}{3} c^3 \Big(a_{(l-3)m} + a_{(l-4)m} \binom{n}{1} c + \cdots + a_0 \binom{n}{l-3} c^{l-3} \Big) \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \binom{n}{l} c^l a_0 = \binom{n}{l} c^l. \end{aligned}$$

Theo quy nạp, $a_m, \ldots, a_{(l-1)m}$ là các đa thức theo c với hệ số nguyên, nên, bằng cách sắp xếp lại đẳng thức trên theo a_{lm}, ta thu được a_{lm} là đa thức theo c với hệ số nguyên.

Như vậy, ta có thể kết luận rằng mọi thành phần thuần nhất a_i khác không của a đều giao hoán với c, do đó $ac = ca$. Như vậy

$$(v + c)^n = (v + c)^n a (v + c)^n = a (v + c)^{2n}.$$

Do $a_0 (v + c)^{2n} = (v + c)^{2n} \neq 0$ nên tồn tại i là chỉ số lớn nhất sao cho $a_i (v + c)^{2n} \neq 0$. Khi đó, số hạng bậc cao nhất của $a(v + c)^{2n}$ là $a_i c^{2n}$, với bậc $i + 2mn$, trong khi số hạng bậc cao nhất của $(v + c)^n$ là c^n, với bậc mn. Đây là điều mâu thuẫn. Do đó E phải là đồ thị không chu trình.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Giả sử E là đồ thị không chu trình. Đặt

$$\{B(X) \mid X \subseteq L_K(E),\ X \text{ hữu hạn}\}$$

là tập hướng lên của các đại số con của $L_K(E)$ được nói đến trong Mệnh đề 4.20iii). Do Mệnh đề 4.20iv), ta biết rằng giới hạn trực tiếp của tập này là $L_K(E)$. Như vậy, do Mệnh đề 4.20ii), ta chỉ cần chứng minh rằng, với mỗi tập hợp hữu hạn $X \subseteq L_K(E)$, tập hợp

$$B(X) = \mathrm{Im}(\phi) \bigoplus \Big(\bigoplus_{v_i \in S_3} Kv_i \Big) \bigoplus \Big(\bigoplus_{w_j \in S_4} Ku_{w_j} \Big)$$

đẳng cấu với tổng trực tiếp các vành ma trận hữu hạn chiều trên K.

Trước tiên ta chú ý rằng, nếu đồ thị E không chu trình thì E_F phải là đồ thị không chu trình (Bổ đề 4.17). Hơn nữa, do E_F hữu hạn và không có chu trình, nên theo Mệnh đề 3.3 ta có:

$$L_K(E_F) \cong \bigoplus_{i=1}^{l} M_{m_i}(K), \quad m_1, \ldots, m_l \in \mathbb{N}.$$

Bây giờ, do Bổ đề 4.19, đồng cấu hạn chế $\bar{\phi} : L_K(E_F) \to \mathrm{Im}(\phi)$ là đẳng cấu, do đó

$$\mathrm{Im}(\phi) \cong \bigoplus_{i=1}^{l} M_{m_i}(K).$$

Hơn nữa, mỗi hạng tử của tổng trực tiếp $\bigoplus_{v_i \in S_3} Kv_i$ đều đẳng cấu với $K \cong M_1(K)$. Tương tự, mỗi hạng tử của tổng trực tiếp $\bigoplus_{w_j \in S_4} Ku_{w_j}$ đều đẳng cấu với $M_1(K)$. Như vậy, với mỗi tập con X hữu hạn của $L_K(E)$, $B(X)$ đẳng cấu với tổng trực tiếp của hữu hạn vành ma trận hữu hạn chiều trên K.

iv) $\Rightarrow$ i) Giả sử $L_K(E)$ là vành ma trận địa phương. Khi đó, mỗi phần tử của $L_K(E)$ chứa trong một tập con $S \cong \bigoplus_{i=1}^{l} M_{m_i}(K)$. Mà mọi vành có dạng này đều là vành chính quy von Neumann. Do đó, $L_K(E)$ là chính quy von Neumann.

iv) $\Rightarrow$ v) Giả sử $L_K(E)$ là vành ma trận địa phương. Khi đó, mỗi phần tử $x \in L_K(E)$ chứa trong một vành con $S \cong \bigoplus_{i=1}^{l} M_{m_i}(K)$. Mà mỗi vành có dạng này đều là vành đơn nguyên Artin trái (phải) nên dãy chuyển giảm các ideal trái

$$Sx \supseteq Sx^2 \supseteq Sx^3 \supseteq \ldots$$

sẽ dừng, nghĩa là tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $Sx^n = Sx^{n+1}$. Mà S đơn nguyên, nên

$$x^n \in Sx^n = Sx^{n+1},$$

nghĩa là tồn tại $y \in S \subseteq L_K(E)$ sao cho

$$x^n = yx^{n+1}.$$

Tương tự, S cũng là Artin phải nên tồn tại $m \in \mathbb{N}$ và $z \in L_K(E)$ sao cho

$$x^m = x^{m+1}z.$$

Do đó $L_K(E)$ là vành π-chính quy mạnh.

v) $\Rightarrow$ ii) Giả sử $L_K(E)$ là π-chính quy mạnh và lấy $x \in L_K(E)$. Do $L_K(E)$ có đơn vị địa phương nên tồn tại phần tử lũy đẳng $e \in L_K(E)$ sao cho $x \in eL_K(E)e$. Khi đó, do Bổ đề 4.24, $eL_K(E)e$ cũng là vành π-chính quy mạnh. Do $eL_K(E)e$ là vành đơn nguyên nên theo Bổ đề 4.23, tồn tại $y \in eL_K(E)e$ và $n \in \mathbb{N}$ sao cho

$$xy = yx \text{ và } x^{n+1}y = x^n = yx^{n+1}.$$

Như vậy

$$x^n = x^{n+1}y = (x^n)xy = (x^{n+1}y)xy = x^{n+2}y^2.$$

Tiếp tục quá trình trên, ta được $x^n = x^{2n}y^n$. Mà $xy = yx$, suy ra

$$x^n = x^n y^n x^n.$$

Vậy $L_K(E)$ là π-chính quy. □

Ví dụ 4.4. Cho M_n là đồ thị đường hữu hạn. Do M_n là đồ thị không chu trình nên $L_K(M_n) \cong M_n(K)$ là chính quy von Neumann, π-chính quy, π-chính quy mạnh và $L_K(M_n)$ là K-ma trận địa phương.

Ví dụ 4.5. Cho R_n là đồ thị hoa hồng n cánh. Vì R_n có chu trình nên $L_K(R_n) \cong L(1, n)$ không là chính quy von Neumann, π-chính quy, π-chính quy mạnh hoặc là K-ma trận địa phương.

Bài tập

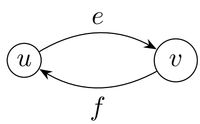
Bài tập 4.1. Cho đồ thị E có hữu hạn đỉnh và mọi chu trình trong E đều có lối ra. Chứng minh rằng $L_K(E)$ không chứa lũy đẳng vô hạn nếu và chỉ nếu E không chứa chu trình.

Bài tập 4.2. Giả sử $L_K(E)$ đơn vô hạn thuần túy và cho $v \in E^0$. Chứng minh rằng $T(v)$ chứa điểm đặt của ít nhất một chu trình trong E.

Bài tập 4.3. Cho đồ thị E như sau:

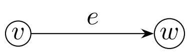
Chứng minh rằng $L_K(E)$ không vô hạn thuần túy.

Bài tập 4.4. Cho đồ thị E như sau:



Chứng minh rằng $L_K(E)$ là đơn vô hạn thuần túy.

Bài tập 4.5. Cho đồ thị E như sau:



Xác định xem $L_K(E)$ có phải là chính quy von Neumann không?

Bài tập 4.6. Giả sử E là đồ thị hữu hạn không có chu trình. Chứng minh rằng $L_K(E)$ là π-chính quy.

Tài liệu tham khảo

[1] G. Abrams and G. A. Pino, The Leavitt path algebra of a graph, *J. Algebra* **293** (2005), no. 2, 319–334.

[2] G. Abrams, G. A. Pino and M. S. Molina, Finite-dimensional Leavitt path algebras, *J. Pure Appl. Algebra* **209** (2007), 753–762.

[3] G. Abrams and G. A. Pino, The Leavitt path algebras of arbitrary graphs, *Houston J. Math.* **34** (2008), 423–442.

[4] G. Abrams and K. M. Rangaswamy, Regularity conditions for arbitrary Leavitt path algebras, *Algebr. Represent. Theory* **13** (2010), 319–334.

[5] G. Abrams, Leavitt path algebras: the first decade, *Bull. Math. Sci.* **5** (2015), 59–120.

[6] G. Abrams, P. Ara, and M. Siles Molina, *Leavitt path algebras.* Lecture Notes in Mathematics series, Vol. 2191, Springer-Verlag Inc., 2017.

[7] G.M. Bergman, On Jacobson radicals of graded rings, *Unpublished.*

[8] T. Y. Lam, *A First Course in Noncommutative Rings*, Graduate Texts in Mathematics 131, Springer (2001).

[9] C. Năstăsescu and F. Van Oystaeyen, *Methods of Graded Rings*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1836, Springer, 2004.

[10] G. A. Pino, D. M. Barquero, C. M. Gonzalez, M. S. Molina, The socle of a Leavitt path algebra, *J. Algebra Appl.* **6** (2007), no. 6, 635–654.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN