Chapter 01 - Metric Spaces

Bài tập 1: Chứng minh rằng đường thẳng thực là một không gian metric

Với đường thẳng thực $\mathbb{R}$, ta định nghĩa hàm khoảng cách $d(x,y) = |x-y|$ cho mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Để chứng minh $\mathbb{R}$ là không gian metric, ta cần kiểm tra 4 tiên đề của metric (M1-M4).

Nhắc lại các tiên đề của metric:

Một hàm $d : X \times X \to \mathbb{R}$ là một metric nếu với mọi $x, y, z \in X$ thì:

1. (M1) d nhận giá trị thực, hữu hạn và không âm.
2. (M2) $d(x,y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$.
3. (M3) $d(x,y) = d(y,x)$ (tính đối xứng).
4. (M4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (bất đẳng thức tam giác).

Chứng minh:

- (M1): Rõ ràng $|x-y|$ luôn là số thực, hữu hạn và không âm.
- (M2): $|x-y| = 0$ khi và chỉ khi $x - y = 0$ hay $x = y$.
- (M3): $d(x,y) = |x-y| = |y-x| = d(y,x)$.
- (M4): Với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$, ta có $|x-y| = |(x-z)+(z-y)| \leq |x-z| + |z-y| = d(x,z) + d(z,y)$.

Vậy $(\mathbb{R}, d)$ với $d(x,y) = |x-y|$ là một không gian metric.

Ví dụ minh họa: Với $x = 3, y = 8$, khoảng cách giữa chúng là $d(3,8) = |3-8| = |-5| = 5$.

Bài tập 3: Chứng minh rằng $d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ là một metric trên tập số thực

Chứng minh:

- (M1): $\sqrt{|x-y|}$ luôn là số thực, hữu hạn và không âm vì $|x-y| \geq 0$.
- (M2): $\sqrt{|x-y|} = 0$ khi và chỉ khi $|x-y| = 0$, điều này xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.
- (M3): $d(x,y) = \sqrt{|x-y|} = \sqrt{|y-x|} = d(y,x)$.
- (M4): Với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$, ta cần chứng minh: $\sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|}$ Bình phương hai vế và sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz: $|x-y| \leq (\sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|})^2 = |x-z| + |z-y| + 2\sqrt{|x-z||z-y|}$ Mặt khác, từ bất đẳng thức tam giác của giá trị tuyệt đối: $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$ Vì thế, bất đẳng thức tam giác được thỏa mãn.

Vậy $d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ là một metric trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ minh họa: Với $x = 1, y = 10$, khoảng cách giữa chúng là $d(1,10) = \sqrt{|1-10|} = \sqrt{9} = 3$.

Bài tập 6: Chứng minh rằng metric trên không gian l^∞ thỏa mãn bất đẳng thức tam giác

Nhắc lại: Không gian l^∞ là tập các dãy bị chặn (x_n) với metric:

$$d(x,y) = \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j - y_j|$$

Chứng minh bất đẳng thức tam giác:

Với $x = (x_j), y = (y_j), z = (z_j) \in l^\infty$, ta cần chứng minh:

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

Đối với mỗi $j \in \mathbb{N}$, ta có:

$$|x_j - y_j| = |(x_j - z_j) + (z_j - y_j)| \leq |x_j - z_j| + |z_j - y_j| \leq d(x,z) + d(z,y)$$

Vì điều này đúng với mọi j, nên nó cũng đúng cho $\sup$:

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j - y_j| \leq d(x,z) + d(z,y)$$

Điều này chứng tỏ $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, tức là bất đẳng thức tam giác được thỏa mãn.

Ví dụ minh họa: Xét ba dãy $x = (1,0,1,0,\dots)$, $y = (0,1,0,1,\dots)$, $z = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2, \dots)$. Khi đó:

- $d(x,y)=1$
- $d(x,z)=1/2$
- $d(z,y)=1/2$ Ta thấy $d(x,y)=1\leq 1/2+1/2=d(x,z)+d(z,y)$.

Bài tập 8: Chứng minh rằng một metric khác trên tập X trong ví dụ 1.1-7 được định nghĩa bởi

$$\tilde{d}(x,y)=\int_a^b |x(t)-y(t)|dt$$

Nhắc lại: Ví dụ 1.1-7 đề cập đến không gian $C[a,b]$ gồm các hàm liên tục trên $[a,b]$.

Chứng minh:

- (M1): Với $x,y\in C[a,b]$, $|x(t)-y(t)|$ là liên tục và không âm, nên tích phân $\tilde{d}(x,y)$ cũng là số thực, hữu hạn và không âm.
- (M2): $\tilde{d}(x,y)=0$ khi và chỉ khi $\int_a^b |x(t)-y(t)|dt=0$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $|x(t)-y(t)|=0$ với mọi $t\in[a,b]$ (vì hàm liên tục), tức là $x(t)=y(t)$ với mọi $t\in[a,b]$, hay $x=y$.
- (M3): $\tilde{d}(x,y)=\int_a^b |x(t)-y(t)|dt=\int_a^b |y(t)-x(t)|dt=\tilde{d}(y,x)$.
- (M4): Với mọi $x,y,z\in C[a,b]$:

  $$\tilde{d}(x,y)=\int_a^b |x(t)-y(t)|dt=\int_a^b |(x(t)-z(t))+(z(t)-y(t))|dt$$

  Từ bất đẳng thức tam giác của giá trị tuyệt đối:

  $$\int_a^b |(x(t)-z(t))+(z(t)-y(t))|dt\leq\int_a^b |x(t)-z(t)|dt+\int_a^b |z(t)-y(t)|dt=\tilde{d}(x,z)+\tilde{d}(z,y)$$

Vậy $\tilde{d}$ là một metric trên $C[a,b]$.

Ví dụ minh họa: Với $x(t)=t^2$, $y(t)=t$ trên $[0,1]$, khoảng cách giữa chúng là:

$$\tilde{d}(x,y)=\int_0^1 |t^2-t|dt=\int_0^1 t(1-t)dt=\int_0^1 (t-t^2)dt=\left[t^2/2-t^3/3\right]_0^1=1/2-1/3=1/6$$

Bài tập 10: (Khoảng cách Hamming)

Xét tập X gồm tất cả các bộ ba có thứ tự gồm các số 0 và 1. Chứng minh rằng X có 8 phần tử và một metric d trên X được định nghĩa bởi $d(x,y)$ = số vị trí mà x và y có giá trị khác nhau.

Chứng minh:

- X gồm tất cả các bộ ba (a,b,c) với $a,b,c\in 0,1$. Số phần tử của X là $2^3=8$: $(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)$.
- Khoảng cách Hamming $d(x,y)$ đếm số vị trí khác nhau giữa x và y:
  - (M1): Rõ ràng $d(x,y)$ là số thực, hữu hạn và không âm.
  - (M2): $d(x,y)=0$ khi và chỉ khi x và y không có vị trí nào khác nhau, tức là $x=y$.
  - (M3): $d(x,y)=d(y,x)$ vì đếm vị trí khác nhau giữa x và y cũng giống như đếm vị trí khác nhau giữa y và x.
  - (M4): Với mọi $x,y,z\in X$, nếu có một vị trí mà x và y khác nhau, thì hoặc x và z khác nhau ở vị trí đó, hoặc z và y khác nhau ở vị trí đó. Do đó:

    $$d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$$

Ví dụ minh họa:

- $d((0,0,1),(0,1,1))=1$ vì chỉ có vị trí thứ hai là khác nhau.
- $d((0,0,0),(1,1,1))=3$ vì cả ba vị trí đều khác nhau.
- $d((0,1,0),(1,1,0))=1$ vì chỉ có vị trí đầu tiên là khác nhau.

Bài tập 12: Chứng minh rằng bất đẳng thức tam giác có một số hệ quả hữu ích. Ví dụ, sử dụng (1), chứng minh rằng:

$$|d(x,y)-d(z,w)|\leq d(x,z)+d(y,w)$$

Chứng minh:

Ta bắt đầu từ bất đẳng thức tam giác tổng quát hóa (1) từ sách:

$$d(x_1, x_n) \le d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)$$

Áp dụng bất đẳng thức tam giác, ta có:

$$d(x, y) \le d(x, z) + d(z, w) + d(w, y)$$

Tương tự:

$$d(z, w) \le d(z, x) + d(x, y) + d(y, w)$$

Từ đây, ta suy ra:

$$d(x, y) - d(z, w) \le d(x, z) + d(y, w)$$

$$d(z, w) - d(x, y) \le d(z, x) + d(y, w) = d(x, z) + d(y, w)$$

Kết hợp hai bất đẳng thức trên, ta được:

$$|d(x, y) - d(z, w)| \le d(x, z) + d(y, w)$$

Ví dụ minh họa: Xét không gian $\mathbb{R}$ với metric thông thường $d(x, y) = |x - y|$. Với $x = 3, y = 8, z = 4, w = 10$:

- $d(x, y) = |3 - 8| = 5$
- $d(z, w) = |4 - 10| = 6$
- $d(x, z) = |3 - 4| = 1$
- $d(y, w) = |8 - 10| = 2$

Ta có $|d(x, y) - d(z, w)| = |5 - 6| = 1 \le 1 + 2 = d(x, z) + d(y, w)$.

Bài tập 13: Sử dụng bất đẳng thức tam giác, chứng minh rằng:

$$|d(x, z) - d(y, z)| \le d(x, y)$$

Chứng minh:

Từ bất đẳng thức tam giác, ta có:

$$d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$$

Do đó:

$$d(x, z) - d(y, z) \le d(x, y)$$

Tương tự, ta cũng có:

$$d(y, z) \le d(y, x) + d(x, z)$$

Suy ra:

$$d(y, z) - d(x, z) \le d(y, x) = d(x, y)$$

Kết hợp hai bất đẳng thức trên, ta được:

$$|d(x, z) - d(y, z)| \le d(x, y)$$

Ví dụ minh họa: Xét không gian $\mathbb{R}^2$ với metric Euclid. Với điểm $x = (0, 0), y = (1, 0), z = (0, 1)$:

- $d(x, y) = 1$
- $d(x, z) = 1$
- $d(y, z) = \sqrt{2}$

Ta có $|d(x, z) - d(y, z)| = |1 - \sqrt{2}| \approx 0.414 < 1 = d(x, y)$.

Bài tập 2: (Không gian l^p)

Tìm một dãy hội tụ về 0, nhưng không thuộc bất kỳ không gian l^p nào, với $1 \le p < +\infty$.

Trình bày về không gian l^p:

Không gian l^p là tập các dãy $x = (x_j)$ của số phức thỏa mãn:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty$$

với metric được định nghĩa bởi:

$$d(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j|^p\right)^{1/p}$$

Giải:

Xét dãy $x = (x_j)$ với $x_j = \frac{1}{j}$ cho mọi $j \geq 1$.

- Dãy này hội tụ về 0 vì $\lim_{j\to\infty} x_j = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{j} = 0$.
- Nhưng với bất kỳ $p \geq 1$, ta xét chuỗi:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^p}$$

  Chuỗi này phân kỳ khi $p = 1$ (chuỗi điều hòa), và hội tụ khi $p > 1$.

Vậy, để tìm dãy không thuộc bất kỳ không gian l^p nào với $1 \leq p < +\infty$, ta cần một dãy mà với mọi $p \geq 1$, chuỗi $\sum |x_j|^p$ đều phân kỳ.

Xét dãy $x = (x_j)$ với $x_j = \frac{1}{\sqrt{j}}$ cho mọi $j \geq 1$.

- Dãy này hội tụ về 0.
- Với mọi $p \geq 1$, ta xét:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{p/2}}$$

  Chuỗi này phân kỳ khi $\frac{p}{2} \leq 1$, tức là $p \leq 2$.

Tuy nhiên, với $p > 2$, chuỗi này hội tụ, nên dãy này vẫn thuộc l^p với $p > 2$.

Để tìm một dãy không thuộc bất kỳ không gian l^p nào, ta có thể chọn: $x_j = \frac{1}{\ln(j+1)}$ với $j \geq 1$

Dãy này hội tụ về 0, nhưng:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{[\ln(j+1)]^p}$$

Với mọi $p > 0$, chuỗi này phân kỳ vì $\frac{1}{[\ln(j+1)]^p}$ giảm chậm hơn $\frac{1}{j}$ với j đủ lớn.

Bài tập 4: (Đường kính, tập bị chặn)

Đường kính $\delta(A)$ của một tập không rỗng A trong không gian metric (X,d) được định nghĩa bởi:

$$\delta(A) = \sup_{x,y\in A} d(x,y)$$

A được gọi là bị chặn nếu $\delta(A) < \infty$. Chứng minh rằng nếu $A \subset B$ thì $\delta(A) \leq \delta(B)$.

Chứng minh:

Nếu $A \subset B$, thì mọi cặp phần tử $x, y \in A$ cũng thuộc B. Do đó:

$$d(x,y) : x,y \in A \subset d(x,y) : x,y \in B$$

Vì supremum của một tập con không vượt quá supremum của tập chứa nó, nên:

$$\delta(A) = \sup_{x,y\in A} d(x,y) \leq \sup_{x,y\in B} d(x,y) = \delta(B)$$

Ví dụ minh họa: Trong $\mathbb{R}^2$ với metric Euclid, xét A là đường tròn bán kính 1 và B là đường tròn bán kính 2 cùng tâm. Ta có $A \subset B$, với $\delta(A) = 2$ và $\delta(B) = 4$, nên $\delta(A) \leq \delta(B)$.

Tổng kết

Cheatsheet về những điều đã học

1. **Không gian metric** (X,d):
   - Một hàm $d : X \times X \to \mathbb{R}$ là metric nếu thỏa mãn 4 tiên đề:
     - (M1) d nhận giá trị thực, hữu hạn và không âm.
     - (M2) $d(x,y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$.
     - (M3) $d(x,y) = d(y,x)$ (tính đối xứng).

- (M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (bất đẳng thức tam giác).

2. **Các ví dụ về không gian metric**:
   - Đường thẳng thực $\mathbb{R}$ với $d(x, y) = |x - y|$
   - Mặt phẳng Euclid $\mathbb{R}^2$ với $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$
   - Không gian l^∞ với $d(x, y) = \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j - y_j|$
   - Không gian l^p với $d(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j|^p\right)^{1/p}$
   - Không gian $C[a, b]$ với $d(x, y) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$ hoặc $\tilde{d}(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt$
   - Khoảng cách Hamming trên tập các bộ giá trị nhị phân
3. **Công cụ chứng minh một hàm là metric**:
   - Kiểm tra lần lượt 4 tiên đề (M1)-(M4)
   - Đặc biệt, tiên đề (M4) thường dựa trên bất đẳng thức tam giác của giá trị tuyệt đối
   - Đối với metric mới như $\sqrt{|x - y|}$, cần thao tác thêm (ví dụ bình phương hai vế) để chứng minh
4. **Hệ quả quan trọng từ bất đẳng thức tam giác**:
   - $|d(x, y) - d(z, w)| \leq d(x, z) + d(y, w)$
   - $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$
   - Các hệ quả này rất hữu ích trong việc ước lượng khoảng cách giữa các điểm
5. **Tập bị chặn và đường kính**:
   - Đường kính của tập A: $\delta(A) = \sup_{x,y \in A} d(x, y)$
   - Tập A bị chặn nếu $\delta(A) < \infty$
   - Nếu $A \subset B$ thì $\delta(A) \leq \delta(B)$
6. **Chuỗi và hội tụ trong không gian l^p**:
   - Không gian l^p chứa các dãy (x_j) mà $\sum |x_j|^p < \infty$
   - Một dãy có thể hội tụ về 0 nhưng không thuộc không gian l^p nào nếu $\sum |x_j|^p$ phân kỳ với mọi $p \geq 1$
   - Ví dụ: dãy $x_j = \frac{1}{\ln(j+1)}$ hội tụ về 0 nhưng không thuộc l^p với mọi $p \geq 1$
7. **Phương pháp tạo metric mới**:
   - Từ metric d đã biết, có thể tạo metric mới như $\frac{d}{1+d}$ hoặc $\min 1, d$
   - Trong một số trường hợp, $\sqrt{d}$ cũng là metric (như đã chứng minh với $\sqrt{|x - y|}$)
8. **Ứng dụng của không gian metric**:
   - Khoảng cách Hamming được sử dụng trong lý thuyết mã hóa và phát hiện lỗi
   - Metric tích phân như $\tilde{d}(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt$ hữu ích trong phân tích hàm
   - Các không gian l^p đóng vai trò quan trọng trong giải tích hàm và xử lý tín hiệu
9. **Kỹ thuật chứng minh hữu ích**:
   - Sử dụng bất đẳng thức tam giác cơ bản
   - Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz trong một số trường hợp
   - Phương pháp chứng minh gián tiếp (phản chứng)
   - Kiểm tra tính chất với ví dụ số cụ thể

Tóm lại, không gian metric là nền tảng cơ bản của giải tích toán học và được ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khác nhau. Việc hiểu rõ các tiên đề, tính chất và ứng dụng của không gian metric sẽ giúp chúng ta xây dựng nền tảng vững chắc cho các khái niệm cao cấp hơn trong toán học như topo, giải tích hàm và lý thuyết độ đo.

Chapter 02a - Normed Spaces. Banach Spaces

Bài tập 1: Không gian Vector

Bài toán: Chứng minh rằng tập hợp các số thực với phép cộng và phép nhân thông thường tạo thành một không gian vector một chiều trên trường số thực. Tương tự, chứng minh rằng tập hợp các số phức tạo thành một không gian vector một chiều trên trường số phức.

Giải:

Trước hết, ta hãy nhắc lại định nghĩa không gian vector:

Định nghĩa 2.1-1 (Không gian Vector): Một không gian vector (hay không gian tuyến tính) trên trường K là một tập hợp không rỗng X gồm các phần tử $x, y, \ldots$ (gọi là vector) cùng với hai phép toán đại số. Các phép toán này được gọi là phép cộng vector và phép nhân vector với vô hướng.

Phép cộng vector: Gán cho mỗi cặp có thứ tự (x, y) các vector một vector $x + y$, gọi là tổng của x và y, sao cho các tính chất sau thỏa mãn:

1. Phép cộng có tính giao hoán và kết hợp: $x + y = y + x$ và $x + (y + z) = (x + y) + z$
2. Tồn tại một vector 0, gọi là vector không, và với mỗi vector x tồn tại một vector $-x$, sao cho $x + 0 = x$ và $x + (-x) = 0$

Phép nhân với vô hướng: Gán cho mỗi vector x và vô hướng α một vector αx, gọi là tích của α và x, sao cho với mọi vector x, y và vô hướng α, β ta có:

1. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
2. $1x = x$
3. Các luật phân phối: $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ và $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

Bây giờ, ta sẽ chứng minh:

a) **Số thực tạo thành không gian vector 1 chiều trên** $\mathbb{R}$:

- Phép cộng: Tổng của hai số thực là một số thực
- Phép nhân với vô hướng: Tích của một số thực với một số thực khác là một số thực
- Vector không: Số 0
- Đối của x là $-x$
- Các tính chất (giao hoán, kết hợp, phân phối) được thỏa mãn do tính chất của phép toán trên số thực
- Không gian có chiều 1 vì chỉ cần 1 vector cơ sở, chẳng hạn số 1, để biểu diễn mọi số thực a dưới dạng $a \cdot 1$

b) **Số phức tạo thành không gian vector 1 chiều trên** $\mathbb{C}$:

- Tương tự như trên, các phép toán cộng và nhân với vô hướng phức thỏa mãn các tiên đề của không gian vector
- Không gian có chiều 1 vì chỉ cần 1 vector cơ sở, chẳng hạn số 1, để biểu diễn mọi số phức z dưới dạng $z \cdot 1$

Ví dụ: Với không gian số thực, vector 2 có thể biểu diễn là $2 \cdot 1$. Với không gian số phức, vector $3 + 4i$ có thể biểu diễn là $(3 + 4i) \cdot 1$.

Bài tập 4: Phân biệt không gian con

Bài toán: Những tập con nào của $\mathbb{R}^3$ dưới đây tạo thành không gian con của $\mathbb{R}^3$? [Với $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$] (a) Tất cả x thỏa mãn $\xi_1 = \xi_2$ và $\xi_3 = 0$ (b) Tất cả x thỏa mãn $\xi_1 = \xi_2 + 1$ (c) Tất cả x có ξ_1, ξ_2, ξ_3 dương (d) Tất cả x thỏa mãn $\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = k = const$

Giải:

Định nghĩa: Không gian con Một không gian con của không gian vector X là một tập con không rỗng Y của X sao cho với mọi $y_1, y_2 \in Y$ và mọi vô hướng α, β, ta có $\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$. Khi đó, Y cũng là một không gian vector với các phép toán kế thừa từ X.

Kiểm tra từng trường hợp:

(a) Tập các vector $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ thỏa mãn $\xi_1 = \xi_2$ và $\xi_3 = 0$

- Nếu $x = (\xi_1, \xi_1, 0)$ và $y = (\eta_1, \eta_1, 0)$ thì $\alpha x + \beta y = (\alpha\xi_1 + \beta\eta_1, \alpha\xi_1 + \beta\eta_1, 0)$
- Kết quả vẫn thỏa mãn $\xi_1 = \xi_2$ và $\xi_3 = 0$
- Vì vậy, (a) là một không gian con của $\mathbb{R}^3$

(b) Tập các vector $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ thỏa mãn $\xi_1 = \xi_2 + 1$

- Nếu $x = (\xi_2 + 1, \xi_2, \xi_3)$ và $y = (\eta_2 + 1, \eta_2, \eta_3)$ thì $x + y = (\xi_2 + \eta_2 + 2, \xi_2 + \eta_2, \xi_3 + \eta_3)$
- Kết quả không thỏa mãn $\xi_1 = \xi_2 + 1$ mà thay vào đó là $\xi_1 = \xi_2 + 2$
- Ngoài ra, tập này không chứa vector 0 = (0,0,0) vì 0 ≠ 0 + 1
- Vì vậy, (b) không phải là không gian con của $\mathbb{R}^3$

(c) Tập các vector $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ với ξ_1, ξ_2, ξ_3 dương

- Nếu $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ với $\xi_1, \xi_2, \xi_3 > 0$, thì $-x = (-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3)$ với $-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3 < 0$
- Vector $-x$ không thuộc tập này
- Ngoài ra, tập này không chứa vector 0 = (0,0,0) vì 0 không dương
- Vì vậy, (c) không phải là không gian con của $\mathbb{R}^3$

(d) Tập các vector $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ thỏa mãn $\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = k$ với k là hằng số

- Nếu $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ và $y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ với $\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = k$ và $\eta_1 - \eta_2 + \eta_3 = k$
- Xét $\alpha x + \beta y = (\alpha\xi_1 + \beta\eta_1, \alpha\xi_2 + \beta\eta_2, \alpha\xi_3 + \beta\eta_3)$
- Tính $(\alpha\xi_1 + \beta\eta_1) - (\alpha\xi_2 + \beta\eta_2) + (\alpha\xi_3 + \beta\eta_3) = \alpha(\xi_1 - \xi_2 + \xi_3) + \beta(\eta_1 - \eta_2 + \eta_3) = \alpha k + \beta k = (\alpha + \beta)k$
- Kết quả chỉ thỏa mãn điều kiện khi $\alpha + \beta = 1$
- Vì vậy, (d) không phải là không gian con của $\mathbb{R}^3$. Trường hợp đặc biệt với $k = 0$ sẽ tạo thành không gian con.

Bài tập 11: Tổ hợp tuyến tính và không gian con

Bài toán: Nếu $M \neq \emptyset$ là bất kỳ tập con nào của không gian vector X, chứng minh rằng span M là một không gian con của X.

Giải:

Định nghĩa: Tổ hợp tuyến tính của các vector $x_1, \ldots, x_m$ của một không gian vector X là một biểu thức dạng:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m$$

trong đó các hệ số $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ là các vô hướng bất kỳ.

Định nghĩa: Span của một tập con M không rỗng trong không gian vector X, ký hiệu span M, là tập tất cả các tổ hợp tuyến tính của các vector trong M.

Cần chứng minh span M là một không gian con của X, tức là:

1. span $M \neq \emptyset$
2. Với mọi $u, v \in \operatorname{span} M$ và mọi vô hướng α, β, tổ hợp $\alpha u + \beta v \in \operatorname{span} M$

Chứng minh:

1. Ta biết $M \neq \emptyset$, nên tồn tại ít nhất một vector $x \in M$. Khi đó, $x = 1 \cdot x$ là một tổ hợp tuyến tính nên $x \in \operatorname{span} M$. Vậy span $M \neq \emptyset$.
2. Giả sử $u, v \in \operatorname{span} M$. Điều này có nghĩa u và v đều là tổ hợp tuyến tính của các vector trong M:

   $$u = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \quad \text{và} \quad v = \sum_{j=1}^{n} b_j y_j$$

   với $x_i, y_j \in M$ và a_i, b_j là các vô hướng.

   Xét tổ hợp $\alpha u + \beta v$:

   $$\alpha u + \beta v = \alpha \sum_{i=1}^{m} a_i x_i + \beta \sum_{j=1}^{n} b_j y_j = \sum_{i=1}^{m} (\alpha a_i) x_i + \sum_{j=1}^{n} (\beta b_j) y_j$$

   Nhưng biểu thức này vẫn là một tổ hợp tuyến tính của các vector trong M, nên $\alpha u + \beta v \in \operatorname{span} M$.

Vậy span M là một không gian con của X.

Ví dụ: Trong $\mathbb{R}^3$, nếu $M = (1,0,0), (0,1,0)$, thì span M chính là mặt phẳng xy (tập các điểm có tọa độ dạng $(a, b, 0)$ với $a, b \in \mathbb{R}$), là một không gian con hai chiều của $\mathbb{R}^3$.

Bài tập 2: Chuẩn

Bài toán: Kiểm tra xem độ dài thông thường của một vector trong mặt phẳng hoặc trong không gian ba chiều có các tính chất (N1) đến (N4) của một chuẩn hay không.

Giải:

Định nghĩa 2.2-1 (Không gian định chuẩn, Không gian Banach): Một không gian định chuẩn X là một không gian vector với một chuẩn được định nghĩa trên đó. Một không gian Banach là một không gian định chuẩn đầy đủ (đầy đủ trong metric được định nghĩa bởi chuẩn).

Một chuẩn trên không gian vector X là một hàm thực có giá trị tại $x \in X$ được ký hiệu là $|x|$ và thỏa mãn các tính chất:

(N1) $|x| \geq 0$ (N2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (N3) $|\alpha x| = |\alpha||x|$ (N4) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Bất đẳng thức tam giác)

Độ dài thông thường của một vector trong mặt phẳng (2D) hoặc không gian 3D được định nghĩa là:

- Trong mặt phẳng (2D), với vector $x = (\xi_1, \xi_2)$: $|x| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$
- Trong không gian 3D, với vector $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$: $|x| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$

Kiểm tra các tính chất:

(N1) $|x| \geq 0$: Rõ ràng vì $|x|$ là căn bậc hai của tổng các bình phương, luôn không âm.

(N2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$:

- Nếu $x = 0$ (vector không) thì $|x| = 0$
- Nếu $|x| = 0$ thì $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 0$, điều này chỉ xảy ra khi $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$, tức là $x = 0$

(N3) $|\alpha x| = |\alpha||x|$: Với $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ và α là vô hướng:
$|\alpha x| = |(\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \alpha\xi_3)| = \sqrt{(\alpha\xi_1)^2 + (\alpha\xi_2)^2 + (\alpha\xi_3)^2} = \sqrt{\alpha^2(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)} = |\alpha|\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} = |\alpha||x|$

(N4) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Bất đẳng thức tam giác): Đây là bất đẳng thức Cauchy-Schwarz cổ điển trong không gian Euclid. Có thể chứng minh bằng cách xét tích vô hướng.

Vậy độ dài thông thường của vector trong không gian 2D và 3D thỏa mãn các tính chất của một chuẩn.

Ví dụ: Vector $x = (3, 4)$ trong mặt phẳng có độ dài $|x| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Bài tập 8: Các chuẩn khác trên $\mathbb{R}^n$

Bài toán: Có nhiều chuẩn có ý nghĩa thực tiễn trên không gian của các n-tuple có thứ tự của các số, đáng chú ý là những chuẩn được định nghĩa bởi:

$$|x|_1 = |\xi_1| + |\xi_2| + \ldots + |\xi_n|$$

$$|x|_p = (|\xi_1|^p + |\xi_2|^p + \ldots + |\xi_n|^p)^{1/p} \quad (1 < p < +\infty)$$

$$|x|_\infty = \max |\xi_1|, \ldots, |\xi_n|$$

Trong mỗi trường hợp, hãy kiểm tra xem (N1) đến (N4) có được thỏa mãn không.

Giải:

Ta sẽ kiểm tra từng chuẩn:

1. **Chuẩn** $|x|_1 = |\xi_1| + |\xi_2| + \ldots + |\xi_n|$:

   (N1) $|x|_1 \geq 0$: Rõ ràng vì đây là tổng các trị tuyệt đối, luôn không âm.

   (N2) $|x|_1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$:

   - Nếu $x = 0$ thì $|x|_1 = |0| + \ldots + |0| = 0$
   - Nếu $|x|_1 = 0$ thì $|\xi_1| + \ldots + |\xi_n| = 0$. Vì mỗi $|\xi_i| \geq 0$, nên $|\xi_i| = 0$ với mọi i, dẫn đến $x = 0$

   (N3) $|\alpha x|_1 = |\alpha||x|_1$: $|\alpha x|_1 = |\alpha\xi_1| + \ldots + |\alpha\xi_n| = |\alpha|(|\xi_1| + \ldots + |\xi_n|) = |\alpha||x|_1$

   (N4) $|x + y|_1 \leq |x|_1 + |y|_1$: $|x + y|_1 = |\xi_1 + \eta_1| + \ldots + |\xi_n + \eta_n| \leq (|\xi_1| + |\eta_1|) + \ldots + (|\xi_n| + |\eta_n|) = |x|_1 + |y|_1$
2. **Chuẩn** $|x|_p = (|\xi_1|^p + |\xi_2|^p + \ldots + |\xi_n|^p)^{1/p}$ **với** $1 < p < +\infty$:

   (N1) $|x|_p \geq 0$: Rõ ràng vì đây là căn bậc p của tổng các lũy thừa bậc p, luôn không âm.

   (N2) $|x|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0$:

   - Nếu $x = 0$ thì $|x|_p = (|0|^p + \ldots + |0|^p)^{1/p} = 0$
   - Nếu $|x|_p = 0$ thì $(|\xi_1|^p + \ldots + |\xi_n|^p)^{1/p} = 0$, dẫn đến $|\xi_i|^p = 0$ với mọi i, nên $x = 0$

   (N3) $|\alpha x|_p = |\alpha||x|_p$: $|\alpha x|_p = (|\alpha\xi_1|^p + \ldots + |\alpha\xi_n|^p)^{1/p} = (|\alpha|^p(|\xi_1|^p + \ldots + |\xi_n|^p))^{1/p} = |\alpha|(|\xi_1|^p + \ldots + |\xi_n|^p)^{1/p} = |\alpha||x|_p$

   (N4) $|x + y|_p \leq |x|_p + |y|_p$: Đây là bất đẳng thức Minkowski, một trường hợp tổng quát của bất đẳng thức tam giác trong không gian L^p.

3. **Chuẩn** $|x|_\infty = \max|\xi_1|, \ldots, |\xi_n|$:

   (N1) $|x|_\infty \geq 0$: Rõ ràng vì max của các trị tuyệt đối luôn không âm.

   (N2) $|x|_\infty = 0 \Leftrightarrow x = 0$:

   - Nếu $x = 0$ thì $|x|_\infty = \max|0|, \ldots, |0| = 0$
   - Nếu $|x|_\infty = 0$ thì $\max|\xi_1|, \ldots, |\xi_n| = 0$, dẫn đến $|\xi_i| = 0$ với mọi i, nên $x = 0$

   (N3) $|\alpha x|_\infty = |\alpha||x|_\infty$: $|\alpha x|_\infty = \max|\alpha\xi_1|, \ldots, |\alpha\xi_n| = |\alpha|\max|\xi_1|, \ldots, |\xi_n| = |\alpha||x|_\infty$

   (N4) $|x + y|_\infty \leq |x|_\infty + |y|_\infty$:
   $|x + y|_\infty = \max|\xi_1 + \eta_1|, \ldots, |\xi_n + \eta_n| \leq \max|\xi_1| + |\eta_1|, \ldots, |\xi_n| + |\eta_n| \leq \max|\xi_1|, \ldots, |\xi_n| + \max|\eta_1|, \ldots, |\eta_n| = |x|_\infty + |y|_\infty$

Vậy cả ba chuẩn $|x|_1$, $|x|_p$ và $|x|_\infty$ đều thỏa mãn các tính chất (N1) đến (N4) và đều là chuẩn hợp lệ.

Ví dụ: Cho vector $x = (3, -4, 2)$ trong $\mathbb{R}^3$:

- $|x|_1 = |3| + |-4| + |2| = 3 + 4 + 2 = 9$
- $|x|_2 = (|3|^2 + |-4|^2 + |2|^2)^{1/2} = \sqrt{9 + 16 + 4} = \sqrt{29} \approx 5.39$
- $|x|_\infty = \max|3|, |-4|, |2| = \max 3, 4, 2 = 4$

Bài tập 1 (Phần 2.3): Không gian con và Tính đóng

Bài toán: Chứng minh rằng $c \subset l^\infty$ là một không gian con vector của l^∞ và cũng làm cho c_0, không gian của tất cả các dãy số vô hướng hội tụ về 0.

Giải:

Trước hết, hãy nhắc lại các định nghĩa quan trọng:

- l^∞ là không gian của tất cả các dãy bị chặn của các số vô hướng, với chuẩn $|x| = \sup_j |\xi_j|$.
- c là không gian của tất cả các dãy hội tụ của các số vô hướng.
- c_0 là không gian của tất cả các dãy số vô hướng hội tụ về 0.

a) Chứng minh c là không gian con của l^∞:

1. Kiểm tra $c \subset l^\infty$: Mọi dãy hội tụ đều bị chặn (do có giới hạn hữu hạn nên tồn tại một số M sao cho mọi phần tử của dãy đều nhỏ hơn M về giá trị tuyệt đối từ một chỉ số nào đó trở đi), nên $c \subset l^\infty$.
2. Kiểm tra c là không gian con:
   - Nếu $x = (\xi_j), y = (\eta_j) \in c$, thì $\lim_{j\to\infty} \xi_j = L_1$ và $\lim_{j\to\infty} \eta_j = L_2$ với L_1, L_2 là các giá trị hữu hạn.
   - Với α, β là vô hướng, tổ hợp $\alpha x + \beta y = (\alpha\xi_j + \beta\eta_j)$ thỏa mãn: $\lim_{j\to\infty}(\alpha\xi_j + \beta\eta_j) = \alpha\lim_{j\to\infty}\xi_j + \beta\lim_{j\to\infty}\eta_j = \alpha L_1 + \beta L_2$
   - Giá trị $\alpha L_1 + \beta L_2$ là hữu hạn, nên $\alpha x + \beta y \in c$
   - Vậy c là không gian con của l^∞.

b) Chứng minh c_0 là không gian con của l^∞:

1. Kiểm tra $c_0 \subset l^\infty$: Mọi dãy hội tụ về 0 đều bị chặn, nên $c_0 \subset l^\infty$.
2. Kiểm tra c_0 là không gian con:
   - Nếu $x = (\xi_j), y = (\eta_j) \in c_0$, thì $\lim_{j\to\infty}\xi_j = 0$ và $\lim_{j\to\infty}\eta_j = 0$.
   - Với α, β là vô hướng, tổ hợp $\alpha x + \beta y = (\alpha\xi_j + \beta\eta_j)$ thỏa mãn: $\lim_{j\to\infty}(\alpha\xi_j + \beta\eta_j) = \alpha\lim_{j\to\infty}\xi_j + \beta\lim_{j\to\infty}\eta_j = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$
   - Vậy $\alpha x + \beta y \in c_0$
   - Nên c_0 là không gian con của l^∞.

Ví dụ:

- Dãy $x = (1, 1, 1, \ldots)$ thuộc c nhưng không thuộc c_0 vì nó hội tụ đến 1.
- Dãy $y = (1, 1/2, 1/3, \ldots)$ thuộc c_0 vì nó hội tụ về 0.
- Dãy $z = (1, 2, 3, 4, \ldots)$ không thuộc c vì không hội tụ, và không thuộc l^∞ vì không bị chặn.

Bài tập 2 (Phần 2.7): Tính liên tục của toán tử tuyến tính

Bài toán: Xét không gian vector chuẩn X và Y. Chứng minh rằng một toán tử tuyến tính $T : X \to Y$ là liên tục khi và chỉ khi nó là bị chặn.

Giải:

Định nghĩa 2.7-1 (Toán tử tuyến tính bị chặn): Một toán tử tuyến tính $T: X \to Y$ được gọi là bị chặn nếu tồn tại một số thực c sao cho với mọi $x \in X$, ta có:

$$|Tx| \leq c|x|$$

Định lý 2.7-9 (Tính liên tục và tính bị chặn): Cho $T: X \to Y$ là một toán tử tuyến tính, với X, Y là các không gian chuẩn. Khi đó:

(a) T là liên tục khi và chỉ khi T là bị chặn. (b) Nếu T là liên tục tại một điểm, thì T là liên tục trên toàn miền xác định.

Chứng minh:

1. **T bị chặn $\Rightarrow$ T liên tục**:

   Giả sử T bị chặn, tức là tồn tại $c > 0$ sao cho $|Tx| \leq c|x|$ với mọi $x \in X$.

   Xét một điểm bất kỳ $x_0 \in X$ và $\varepsilon > 0$ bất kỳ.

   Chọn $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$, khi đó với mọi $x \in X$ thỏa mãn $|x - x_0| < \delta$, ta có:

   $$|Tx - Tx_0| = |T(x - x_0)| \leq c|x - x_0| < c \cdot \delta = \varepsilon$$

   Vậy T là liên tục tại x_0. Vì x_0 được chọn tùy ý, nên T là liên tục trên toàn miền xác định.
2. **T liên tục $\Rightarrow$ T bị chặn**:

   Giả sử T là liên tục tại 0. Khi đó với $\varepsilon = 1$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho:

   $$|Tx| < 1 \text{ với mọi } x \text{ thỏa mãn } |x| < \delta$$

   Xét bất kỳ $x \neq 0$ trong X. Đặt $y = \frac{\delta}{2|x|}x$, ta có $|y| = \frac{\delta}{2} < \delta$

   Nên $|Ty| < 1$, hay $|T(\frac{\delta}{2|x|}x)| < 1$

   Do tính tuyến tính của T, ta có: $\frac{\delta}{2|x|}|Tx| < 1$

   Suy ra: $|Tx| < \frac{2|x|}{\delta}$

   Đặt $c = \frac{2}{\delta}$, ta có: $|Tx| \leq c|x|$ với mọi $x \in X$

   Vậy T là bị chặn.

Ví dụ: Xét toán tử vi phân D trên không gian $C[0,1]$ của các hàm liên tục trên đoạn $[0,1]$ với chuẩn đều $|f| = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$, được định nghĩa bởi $Df = f'$. Toán tử này không bị chặn và do đó không liên tục. Thật vậy, xét dãy hàm $f_n(t) = t^n$, ta có $|f_n| = 1$ nhưng $|Df_n| = |nf_{n-1}| = n$, không tồn tại hằng số c nào để $|Df_n| \leq c|f_n|$ với mọi n.

Bài tập 3 (Phần 2.5): Tính compact trong không gian chuẩn

Bài toán: Chứng minh rằng trong không gian chuẩn hữu hạn chiều X, một tập con M là compact khi và chỉ khi M đóng và bị chặn.

Giải:

Định nghĩa 2.5-1 (Tính compact): Một không gian metric X được gọi là compact nếu mọi dãy trong X đều có một dãy con hội tụ. Một tập con M của X được gọi là compact nếu M là compact khi xét như một không gian con của X.

Bổ đề 2.5-2: Một tập con compact M của một không gian metric là đóng và bị chặn.

Định lý 2.5-3 (Tính compact): Trong một không gian chuẩn hữu hạn chiều X, bất kỳ tập con $M \subset X$ nào là compact khi và chỉ khi M đóng và bị chặn.

Chứng minh:

1. **M compact $\Rightarrow$ M đóng và bị chặn**:

   Điều này đúng trong bất kỳ không gian metric nào (không cần tính hữu hạn chiều), theo Bổ đề 2.5-2.
2. **M đóng và bị chặn $\Rightarrow$ M compact**:

   Giả sử M đóng và bị chặn trong không gian chuẩn hữu hạn chiều X.

   Giả sử $\dim X = n$ và $e_1, \ldots, e_n$ là một cơ sở cho X. Xét dãy bất kỳ (x_m) trong M. Mỗi phần tử x_m có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng:

   $$x_m = \xi_1^{(m)}e_1 + \ldots + \xi_n^{(m)}e_n$$

   Do M bị chặn, dãy (x_m) cũng bị chặn, nên tồn tại $k > 0$ sao cho $|x_m| \leq k$ với mọi m.

   Áp dụng Bổ đề 2.4-1, tồn tại hằng số $c > 0$ sao cho:

$$k \geq |x_m| = |\sum_{j=1}^{n} \xi_j^{(m)} e_j| \geq c \sum_{j=1}^{n} |\xi_j^{(m)}|$$

Điều này chứng tỏ dãy số $(\xi_j^{(m)})$ (với j cố định) bị chặn. Theo định lý Bolzano-Weierstrass, dãy này có một dãy con hội tụ đến một giá trị ξ_j nào đó.

Áp dụng lập luận quy nạp, ta có thể tìm được một dãy con (x_{m_k}) của (x_m) sao cho với mỗi $j = 1, 2, \ldots, n$, dãy $(\xi_j^{(m_k)})$ hội tụ đến một giá trị ξ_j nào đó.

Vì vậy, (x_{m_k}) hội tụ đến $x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$. Và do M là tập đóng, $x \in M$.

Điều này chứng tỏ rằng mọi dãy trong M đều có một dãy con hội tụ đến một phần tử trong M, hay nói cách khác, M là compact.

Ví dụ:

1. Hình cầu đơn vị đóng $x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1$ trong $\mathbb{R}^n$ là compact vì nó đóng và bị chặn.
2. Mặt khác, hình cầu đơn vị mở $x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1$ không compact vì nó không đóng.
3. Không gian $\mathbb{R}^n$ không compact vì mặc dù nó đóng nhưng không bị chặn.

Bài tập 4 (Phần 2.4): Không gian hữu hạn chiều và tính đầy đủ

Bài toán: Chứng minh rằng mọi không gian con hữu hạn chiều Y của một không gian chuẩn X là đầy đủ. Đặc biệt, mọi không gian chuẩn hữu hạn chiều đều là không gian Banach.

Giải:

Định lý 2.4-2 (Tính đầy đủ): Mọi không gian con hữu hạn chiều Y của một không gian chuẩn X là đầy đủ. Đặc biệt, mọi không gian chuẩn hữu hạn chiều đều là không gian Banach.

Chứng minh:

Xét một dãy Cauchy tùy ý (y_m) trong Y và chứng minh rằng nó hội tụ trong Y; giới hạn của nó sẽ được ký hiệu là y.

Giả sử $\dim Y = n$ và $e_1, \ldots, e_n$ là một cơ sở cho Y. Khi đó mỗi y_m có biểu diễn duy nhất dưới dạng:

$$y_m = \alpha_1^{(m)} e_1 + \ldots + \alpha_n^{(m)} e_n$$

Vì (y_m) là dãy Cauchy, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại N sao cho $|y_m - y_r| < \varepsilon$ khi $m, r > N$.

Áp dụng Bổ đề 2.4-1, tồn tại hằng số $c > 0$ sao cho:

$$\varepsilon > |y_m - y_r| = |\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}) e_j| \geq c \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}|$$

Chia cả hai vế cho c, ta được:

$$|\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}| \leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}| < \frac{\varepsilon}{c}$$

Điều này chứng tỏ rằng mỗi dãy số $(\alpha_j^{(m)})$ (với j cố định) là dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$. Do $\mathbb{R}$ và $\mathbb{C}$ là đầy đủ, dãy $(\alpha_j^{(m)})$ hội tụ đến một giá trị α_j nào đó.

Định nghĩa:

$$y = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$$

Rõ ràng $y \in Y$. Bây giờ ta sẽ chứng minh $y_m \to y$.

$$|y_m - y| = |\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j) e_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j||e_j|$$

Khi $m \to \infty$, $\alpha_j^{(m)} \to \alpha_j$ với mỗi j, nên $|y_m - y| \to 0$.

Vậy (y_m) hội tụ đến $y \in Y$, chứng tỏ Y là không gian đầy đủ.

Hệ quả 2.4-3 (Tính đóng): Mọi không gian con hữu hạn chiều Y của một không gian chuẩn X là đóng trong X.

Ví dụ: Không gian vector $\mathbb{R}^3$ với chuẩn Euclid là một không gian Banach vì nó là không gian chuẩn hữu hạn chiều. Bất kỳ mặt phẳng hay đường thẳng đi qua gốc tọa độ nào trong $\mathbb{R}^3$ cũng là một không gian con hữu hạn chiều, do đó cũng là đóng và đầy đủ.

Bài tập 5 (Phần 2.6-2.7): Toán tử tuyến tính và tính bị chặn

Bài toán: Xét toán tử tích phân T định nghĩa trên $C[0,1]$ bởi:

$$Tx(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$$

Chứng minh rằng T là một toán tử tuyến tính bị chặn và tính chuẩn của nó.

Giải:

Đầu tiên, chứng minh T là toán tử tuyến tính:

1. Với mọi $x, y \in C[0,1]$ và $t \in [0,1]$:

$$T(x+y)(t) = \int_0^t (x+y)(\tau)d\tau = \int_0^t x(\tau)d\tau + \int_0^t y(\tau)d\tau = Tx(t) + Ty(t)$$

2. Với mọi vô hướng α và $x \in C[0,1]$, $t \in [0,1]$:

$$T(\alpha x)(t) = \int_0^t \alpha x(\tau)d\tau = \alpha \int_0^t x(\tau)d\tau = \alpha Tx(t)$$

Vậy T là toán tử tuyến tính.

Tiếp theo, chứng minh T là bị chặn:

Với mọi $x \in C[0,1]$, ta có $|x| = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|$.

$$|Tx(t)| = \left| \int_0^t x(\tau)d\tau \right| \le \int_0^t |x(\tau)|d\tau \le \int_0^t |x|d\tau = |x| \cdot t \le |x|$$

Suy ra $|Tx| = \max_{t\in[0,1]} |Tx(t)| \le |x|$, nghĩa là T là bị chặn với $|T| \le 1$.

Bây giờ chứng minh $|T| = 1$:

Xét hàm $x_0(t) = 1$ với mọi $t \in [0,1]$. Ta có $|x_0| = 1$ và

$$Tx_0(t) = \int_0^t 1d\tau = t$$

Suy ra $|Tx_0| = \max_{t\in[0,1]} |t| = 1 = |x_0|$, nghĩa là $|T| \ge 1$.

Kết hợp với điều kiện $|T| \le 1$ ở trên, ta có $|T| = 1$.

Ví dụ: Tương tự, ta có thể xét toán tử tích phân với nhân $K(t,\tau)$:

$$Tx(t) = \int_0^1 K(t,\tau)x(\tau)d\tau$$

Nếu K là liên tục trên $[0,1] \times [0,1]$, thì T là toán tử tuyến tính bị chặn với chuẩn

$$|T| \le \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 |K(t,\tau)|d\tau$$

Tổng kết các điểm chính về Không gian Chuẩn và Không gian Banach

Không gian Vector

- **Không gian vector** là tập hợp các phần tử (vector) cùng với hai phép toán: phép cộng vector và phép nhân vector với vô hướng, thỏa mãn các tiên đề.
- **Không gian con** của không gian vector X là một tập con Y của X mà với mọi $y_1, y_2 \in Y$ và mọi vô hướng α, β, ta có $\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$.
- **Span** của một tập M là tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của các vector trong M, luôn là một không gian con.
- **Tính độc lập tuyến tính** của một tập các vector xảy ra khi tổ hợp tuyến tính của chúng bằng 0 chỉ khi mọi hệ số đều bằng 0.

Không gian Chuẩn

- **Không gian chuẩn** là không gian vector được trang bị với một chuẩn, thỏa mãn các tính chất (N1)-(N4).
- **Không gian Banach** là không gian chuẩn đầy đủ (mọi dãy Cauchy đều hội tụ).
- Các ví dụ quan trọng: $\mathbb{R}^n$, $C[a,b]$, l^p, l^∞, c, c_0.
- Trong không gian chuẩn hữu hạn chiều, mọi chuẩn đều tương đương.

Tính chất của Không gian Hữu hạn chiều

- Mọi không gian con hữu hạn chiều của một không gian chuẩn đều đóng và đầy đủ.
- Mọi toán tử tuyến tính trên không gian chuẩn hữu hạn chiều đều bị chặn (và do đó liên tục).
- Trong không gian chuẩn hữu hạn chiều, một tập con là compact khi và chỉ khi nó đóng và bị chặn.

Toán tử Tuyến tính

- **Toán tử tuyến tính** $T : X \to Y$ thỏa mãn $T(x + y) = Tx + Ty$ và $T(\alpha x) = \alpha Tx$.
- Miền xác định, tầm ảnh và không gian null của một toán tử tuyến tính đều là không gian vector.
- **Toán tử bị chặn**: tồn tại $c > 0$ sao cho $|Tx| \leq c|x|$ với mọi x.
- **Chuẩn của toán tử**: $|T| = \sup_{|x|=1} |Tx| = \sup_{x \neq 0} \frac{|Tx|}{|x|}$
- Một toán tử tuyến tính là liên tục khi và chỉ khi nó bị chặn.
- Ví dụ về toán tử bị chặn: toán tử tích phân, toán tử ma trận.
- Ví dụ về toán tử không bị chặn: toán tử vi phân.

Tính Compact

- **Tính compact**: mọi dãy đều có dãy con hội tụ.
- Tập compact trong không gian metric luôn đóng và bị chặn.
- Điều ngược lại chỉ đúng trong không gian chuẩn hữu hạn chiều.
- Ánh xạ liên tục của tập compact vẫn là compact.
- Tập compact luôn đạt cực đại và cực tiểu với hàm liên tục.

Các khái niệm và kết quả trên tạo nền tảng cho giải tích hàm và lý thuyết toán tử, đặc biệt quan trọng trong nghiên cứu về phương trình vi phân, phương trình tích phân và nhiều lĩnh vực toán học ứng dụng khác.

Chapter 02b - Linear Operators

Bài tập 1: Xác định không gian con $\mathcal{N}(T)$ của toán tử $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ được biểu diễn bởi ma trận:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Giải:

Không gian con $\mathcal{N}(T)$ là không gian null của toán tử T, tức là tập hợp các vector $x \in \mathbb{R}^3$ thỏa mãn $Tx = 0$.

Để tìm không gian null, chúng ta cần giải hệ phương trình:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Điều này tương đương với hệ phương trình:

$$\xi_1 + 3\xi_2 + 2\xi_3 = 0$$
$$-2\xi_1 + \xi_2 = 0$$

Từ phương trình thứ hai, ta có $\xi_2 = 2\xi_1$. Thay vào phương trình thứ nhất:

$$\xi_1 + 3(2\xi_1) + 2\xi_3 = 0$$
$$\xi_1 + 6\xi_1 + 2\xi_3 = 0$$
$$7\xi_1 + 2\xi_3 = 0$$
$$\xi_3 = -\frac{7}{2}\xi_1$$

Vậy với mỗi giá trị $\xi_1 = t$ (tham số tự do), ta có:

$$\xi_2 = 2t$$
$$\xi_3 = -\frac{7}{2}t$$

Như vậy, không gian null của T là:

$$\mathcal{N}(T) = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ 2t \\ -\frac{7}{2}t \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \right\}$$

Đây là không gian con 1 chiều của $\mathbb{R}^3$.

Bài tập 2: Tìm $\mathcal{R}(T), \mathcal{N}(T)$ và ma trận biểu diễn toán tử $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được định nghĩa bởi:

$$T(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_1, \xi_2, -\xi_1 - \xi_2)$$

Giải:

Tìm không gian $\mathcal{N}(T)$:

Để tìm $\mathcal{N}(T)$, chúng ta giải phương trình $T(x) = 0$:

$$T(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (0, 0, 0)$$

Tức là:

$$\xi_1 = 0$$
$$\xi_2 = 0$$
$$-\xi_1 - \xi_2 = 0$$

Phương trình thứ ba tự động thỏa mãn khi $\xi_1 = \xi_2 = 0$.

Vậy $\mathcal{N}(T) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3 : \xi_1 = 0, \xi_2 = 0 = (0, 0, \xi_3) : \xi_3 \in \mathbb{R} = \operatorname{span}(0, 0, 1)$

Tìm không gian $\mathcal{R}(T)$:

Với bất kỳ vector $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$, ảnh của nó qua T là $(\xi_1, \xi_2, -\xi_1 - \xi_2)$.

Ta thấy thành phần thứ ba của ảnh phụ thuộc vào hai thành phần đầu tiên. Cụ thể, với mọi $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathcal{R}(T)$, ta có $y_3 = -y_1 - y_2$.

Vậy $\mathcal{R}(T) = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_3 = -y_1 - y_2$

Đây là một mặt phẳng trong $\mathbb{R}^3$, có thể biểu diễn dưới dạng không gian con sinh bởi hai vector cơ sở:

$$\mathcal{R}(T) = \text{span}(1, 0, -1), (0, 1, -1)$$

Ma trận biểu diễn của T:

Với cơ sở chuẩn e_1, e_2, e_3 của $\mathbb{R}^3$, ta có:

$$T(e_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, -1)$$
$$T(e_2) = T(0, 1, 0) = (0, 1, -1)$$
$$T(e_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

Vậy ma trận biểu diễn của T là:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bài tập 6: Chứng minh rằng miền ảnh $\mathcal{R}(T)$ của một toán tử tuyến tính bị chặn không nhất thiết phải đóng trong Y.

Giải:

Để chứng minh điều này, chúng ta cần đưa ra một ví dụ về toán tử tuyến tính bị chặn mà miền ảnh của nó không đóng.

Chúng ta sẽ sử dụng ví dụ từ bài tập 5 trong tài liệu, trong đó toán tử $T : l^\infty \to l^\infty$ được định nghĩa bởi:

$$T(x) = y = (\eta_j), \quad \eta_j = \frac{\xi_j}{j}, \quad x = (\xi_j) \in l^\infty$$

Đầu tiên, chúng ta cần chứng minh T là tuyến tính và bị chặn:

1. Tính tuyến tính: Với $x = (\xi_j), z = (\zeta_j) \in l^\infty$ và α, β là các số vô hướng:

$$T(\alpha x + \beta z) = T((\alpha\xi_j + \beta\zeta_j)) = \left(\frac{\alpha\xi_j + \beta\zeta_j}{j}\right) = \alpha\left(\frac{\xi_j}{j}\right) + \beta\left(\frac{\zeta_j}{j}\right) = \alpha T(x) + \beta T(z)$$

2. T bị chặn: Với $x = (\xi_j) \in l^\infty$, ta có:

$$|T(x)|_\infty = \sup_j \left|\frac{\xi_j}{j}\right| \leq \sup_j \frac{|\xi_j|}{j} \leq \sup_j |\xi_j| \cdot \sup_j \frac{1}{j} = |x|_\infty \cdot 1 = |x|_\infty$$

   Vậy $|T| \leq 1$, nên T bị chặn.

Tiếp theo, chúng ta sẽ chứng minh $\mathcal{R}(T)$ không đóng.

Xét dãy các vector $(y^{(n)})$ trong l^∞ được định nghĩa bởi:

$$y^{(n)} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right)$$

Mỗi $y^{(n)}$ thuộc $\mathcal{R}(T)$ vì $y^{(n)} = T(x^{(n)})$ với $x^{(n)} = (1, 1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots)$ (1 ở n vị trí đầu tiên).

Dãy $(y^{(n)})$ hội tụ đến $y = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$ trong l^∞. Tuy nhiên, $y \notin \mathcal{R}(T)$ vì nếu $y = T(x)$ với $x = (\xi_j) \in l^\infty$, thì $\xi_j = j \cdot \frac{1}{j} = 1$ với mọi j. Nhưng vector $(1, 1, 1, \ldots)$ không thuộc l^∞.

Vậy $\mathcal{R}(T)$ không đóng trong l^∞.

Bài tập 7: Nghịch đảo của toán tử tuyến tính

Cho T là toán tử tuyến tính bị chặn từ không gian chuẩn tắc X lên không gian chuẩn tắc Y. Nếu tồn tại một hằng số dương b sao cho:

$$|Tx| \geq b|x| \quad \text{với mọi} \quad x \in X$$

Chứng minh rằng khi đó $T^{-1} : Y \to X$ tồn tại và bị chặn.

Giải:

Đầu tiên, chúng ta chứng minh rằng T là đơn ánh (injective). Giả sử $Tx_1 = Tx_2$ với $x_1, x_2 \in X$. Khi đó:

$$T(x_1 - x_2) = Tx_1 - Tx_2 = 0$$

Theo điều kiện đã cho, ta có:

$$|T(x_1 - x_2)| \geq b|x_1 - x_2|$$

Vì $T(x_1 - x_2) = 0$, suy ra $|T(x_1 - x_2)| = 0$, do đó:

$$0 \geq b|x_1 - x_2|$$

Vì $b > 0$, điều này chỉ xảy ra khi $|x_1 - x_2| = 0$, tức là $x_1 = x_2$. Vậy T là đơn ánh.

Điều này có nghĩa là với mỗi $y \in \mathcal{R}(T)$, tồn tại duy nhất một $x \in X$ sao cho $Tx = y$. Do đó, toán tử nghịch đảo $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \to X$ tồn tại.

Để chứng minh T^{-1} bị chặn, xét $y \in \mathcal{R}(T)$ và $x \in X$ sao cho $Tx = y$. Ta có:

$$|Tx| \geq b|x|$$

Tức là:

$$|y| \geq b|x|$$

Suy ra:

$$|x| \leq \frac{1}{b}|y|$$

Vì $x = T^{-1}y$, ta có:

$$|T^{-1}y| \leq \frac{1}{b}|y|$$

Vậy T^{-1} bị chặn với $|T^{-1}| \leq \frac{1}{b}$.

Bài tập 9: Tìm $\mathcal{R}(T)$ và $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \to C[0,1]$. Toán tử T^{-1} có tuyến tính và bị chặn không?

Cho $T : C[0,1] \to C[0,1]$ được định nghĩa bởi:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$$

Giải:

Tìm $\mathcal{R}(T)$:

Xét $y \in \mathcal{R}(T)$. Khi đó tồn tại $x \in C[0,1]$ sao cho:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$$

Từ đó ta thấy:

1. $y(0) = \int_0^0 x(\tau) d\tau = 0$
2. y là liên tục khả vi trên $[0,1]$ với $y'(t) = x(t)$

Ngược lại, nếu $y \in C[0,1]$ thỏa mãn $y(0) = 0$ và y khả vi với $y' \in C[0,1]$, thì y thuộc $\mathcal{R}(T)$ vì $y = T(y')$.

Vậy $\mathcal{R}(T) = y \in C[0,1] : y(0) = 0 \text{ và } y \text{ khả vi với } y' \in C[0,1]$.

Tìm T^{-1}:

Nếu $y = Tx$, thì:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$$

Áp dụng đạo hàm hai vế:

$$y'(t) = x(t)$$

Vậy $T^{-1}y = y'$ với mọi $y \in \mathcal{R}(T)$.

Kiểm tra tính chất của T^{-1}:

1. Tính tuyến tính: Với $y_1, y_2 \in \mathcal{R}(T)$ và α, β là các số vô hướng:

$$T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = (\alpha y_1 + \beta y_2)' = \alpha y_1' + \beta y_2' = \alpha T^{-1} y_1 + \beta T^{-1} y_2$$

   Vậy T^{-1} tuyến tính.

2. Tính bị chặn: Chúng ta cần xem xét liệu có tồn tại hằng số $M > 0$ sao cho $|T^{-1}y| \leq M|y|$ với mọi $y \in \mathcal{R}(T)$ hay không.

   Giả sử $|T^{-1}| \leq M$. Khi đó với mọi $y \in \mathcal{R}(T)$, ta có:

$$|T^{-1}y|_\infty = |y'|_\infty \leq M|y|_\infty$$

   Tuy nhiên, điều này không đúng với mọi $y \in \mathcal{R}(T)$. Xét ví dụ với hàm:

$$y_n(t) = \frac{t^n}{n} \quad \text{với} \quad n \geq 2$$

   Ta có $y_n(0) = 0$ và $y_n'(t) = t^{n-1}$, nên $y_n \in \mathcal{R}(T)$.

   Ta thấy:

$$|y_n|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |y_n(t)| = \frac{1}{n}$$

   và

$$|y_n'|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |y_n'(t)| = 1$$

   Vậy:

$$\frac{|T^{-1}y_n|_\infty}{|y_n|_\infty} = \frac{|y_n'|_\infty}{|y_n|_\infty} = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n$$

   Khi $n \to \infty$, tỷ số này cũng tiến đến vô cùng, chứng tỏ không tồn tại hằng số M thỏa mãn điều kiện bị chặn.

Vậy T^{-1} tuyến tính nhưng không bị chặn.

Bài tập 10: Trên $C[0,1]$ định nghĩa S và T bởi:

$$y(s) = s\int_0^1 x(t)dt, \quad y(s) = sx(s)$$

Xác định xem S và T có giao hoán không? Tìm $|S|$, $|T|$, $|ST|$ và $|TS|$.

Giải:

Kiểm tra tính giao hoán:

Với $x \in C[0,1]$:

1. $(ST)(x)(s) = S(Tx)(s) = S(sx)(s) = s\int_0^1 (sx)(t)dt = s\int_0^1 tx(t)dt$
2. $(TS)(x)(s) = T(Sx)(s) = T\left(s\int_0^1 x(t)dt\right)(s) = s \cdot s\int_0^1 x(t)dt = s^2\int_0^1 x(t)dt$

Vì hai biểu thức này khác nhau, nên S và T không giao hoán.

Tìm $|S|$:

$$|S(x)|_\infty = \sup_{s \in [0,1]} \left| s\int_0^1 x(t)dt \right| = \sup_{s \in [0,1]} |s| \cdot \left| \int_0^1 x(t)dt \right| = \left| \int_0^1 x(t)dt \right|$$

Vì $\left|\int_0^1 x(t)dt\right| \leq \int_0^1 |x(t)|dt \leq |x|_\infty$, nên $|S(x)|_\infty \leq |x|_\infty$.

Xét $x_0(t) = 1$ với mọi $t \in [0,1]$. Ta có $|x_0|_\infty = 1$ và $S(x_0)(s) = s$, do đó $|S(x_0)|_\infty = 1 = |x_0|_\infty$.

Vậy $|S| = 1$.

Tìm $|T|$:

$$|T(x)|_\infty = \sup_{s \in [0,1]} |sx(s)| \leq \sup_{s \in [0,1]} |s| \cdot \sup_{s \in [0,1]} |x(s)| = |x|_\infty$$

Với $x_0(t) = 1$, ta có $T(x_0)(s) = s$ và $|T(x_0)|_\infty = 1 = |x_0|_\infty$.

Vậy $|T| = 1$.

Tìm $|ST|$:

Từ phép tính ở trên, ta có:

$$(ST)(x)(s) = s\int_0^1 tx(t)dt$$

$$|(ST)(x)|_\infty = \sup_{s\in[0,1]}\left|s\int_0^1 tx(t)dt\right| = \left|\int_0^1 tx(t)dt\right| \le \int_0^1 t|x(t)|dt \le |x|_\infty \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}|x|_\infty$$

Xét $x_0(t) = 1$. Ta có $(ST)(x_0)(s) = s\int_0^1 tdt = \frac{s}{2}$, do đó $|(ST)(x_0)|_\infty = \frac{1}{2}$.

Vậy $|ST| = \frac{1}{2}$.

Tìm $|TS|$:

Từ phép tính ở trên, ta có:

$$(TS)(x)(s) = s^2\int_0^1 x(t)dt$$

$$|(TS)(x)|_\infty = \sup_{s\in[0,1]}\left|s^2\int_0^1 x(t)dt\right| = \sup_{s\in[0,1]}|s^2|\cdot\left|\int_0^1 x(t)dt\right| \le |x|_\infty$$

Xét $x_0(t) = 1$. Ta có $(TS)(x_0)(s) = s^2$, do đó $|(TS)(x_0)|_\infty = 1$.

Vậy $|TS| = 1$.

Bài tập 11: Tìm tính chất của toán tử $T : X \to X$ với X là không gian các hàm bị chặn trên $\mathbb{R}$:

$$y(t) = Tx(t) = x(t-\Delta)$$

với $\Delta > 0$ là hằng số.

Giải:

Không gian X được định nghĩa với chuẩn:

$$|x| = \sup_{t\in\mathbb{R}}|x(t)|$$

Tính tuyến tính của T:

Với $x, z \in X$ và α, β là các số vô hướng:

$$T(\alpha x + \beta z)(t) = (\alpha x + \beta z)(t-\Delta) = \alpha x(t-\Delta) + \beta z(t-\Delta) = \alpha T(x)(t) + \beta T(z)(t)$$

Vậy T tuyến tính.

Tính bị chặn của T:

$$|T(x)| = \sup_{t\in\mathbb{R}}|T(x)(t)| = \sup_{t\in\mathbb{R}}|x(t-\Delta)| = \sup_{s\in\mathbb{R}}|x(s)| = |x|$$

Vậy $|T| = 1$, do đó T bị chặn.

Toán tử T biểu diễn một dây chuyền trễ (delay line) trong kỹ thuật điện, trong đó tín hiệu đầu ra y là phiên bản trễ của tín hiệu đầu vào x với thời gian trễ là Δ.

Tổng kết kiến thức

Toán tử tuyến tính

1. **Toán tử tuyến tính**: Là ánh xạ $T : X \to Y$ giữa hai không gian vector thỏa mãn:
   - $T(x+y) = T(x) + T(y)$ với mọi $x, y \in X$
   - $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ với mọi $x \in X$ và mọi vô hướng α
2. **Không gian con quan trọng**:
   - Không gian null (kernel): $\mathcal{N}(T) = x \in X : T(x) = 0$
   - Miền ảnh (range): $\mathcal{R}(T) = y \in Y : y = T(x) \text{ với } x \in X$
3. **Định lý chiều (Dimension theorem)**: Nếu X và Y là không gian vector hữu hạn chiều và $T : X \to Y$ là toán tử tuyến tính, thì:

$$\dim(\mathcal{N}(T)) + \dim(\mathcal{R}(T)) = \dim(X)$$

4. **Ma trận biểu diễn**: Nếu X và Y là không gian hữu hạn chiều với cơ sở lần lượt là $e_1, e_2, \ldots, e_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_r$, ta có thể biểu diễn T bởi ma trận $T_{EB} = (\tau_{jk})$ với τ_{jk} là hệ số thứ j của $T(e_k)$ trong cơ sở b_j.

Toán tử tuyến tính bị chặn

1. **Định nghĩa**: Toán tử tuyến tính $T : X \to Y$ được gọi là bị chặn nếu tồn tại hằng số $c > 0$ sao cho:

$$|T(x)| \leq c|x|$$

   với mọi $x \in X$.
2. **Chuẩn của toán tử**:

$$|T| = \sup_{x \neq 0} \frac{|T(x)|}{|x|} = \sup_{|x|=1} |T(x)|$$

3. **Tính chất quan trọng**:
   - T tuyến tính bị chặn $\Leftrightarrow$ T liên tục
   - Nếu Y là không gian Banach, thì $B(X, Y)$ cũng là không gian Banach
   - $|T(x)| \leq |T| \cdot |x|$ với mọi $x \in X$
   - $|ST| \leq |S| \cdot |T|$ với S, T là các toán tử tuyến tính bị chặn
   - Miền ảnh của toán tử tuyến tính bị chặn không nhất thiết phải đóng (như đã thấy trong Bài tập 6)
4. **Đối với toán tử nghịch đảo**:
   - Nếu T là toán tử tuyến tính bị chặn và tồn tại $b > 0$ sao cho $|Tx| \geq b|x|$ với mọi $x \in X$, thì $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \to X$ tồn tại và bị chặn với $|T^{-1}| \leq \frac{1}{b}$ (Bài tập 7)
   - Nếu T là toán tử tuyến tính bị chặn và T^{-1} tồn tại, T^{-1} có thể không bị chặn (như đã thấy trong Bài tập 9)

Không gian đối ngẫu (Dual space)

1. **Định nghĩa**: Không gian đối ngẫu X' của không gian chuẩn tắc X là tập hợp tất cả các phiếm hàm tuyến tính bị chặn trên X.
2. **Chuẩn trên X'**:

$$|f| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{|x|} = \sup_{|x|=1} |f(x)|$$

3. **Tính chất**:
   - X' luôn là không gian Banach, kể cả khi X không phải không gian Banach
   - Đối với không gian hữu hạn chiều, X' và X có cùng chiều
   - Không gian đối ngẫu của các không gian chuẩn tắc thông dụng:
     - $(l^p)' = l^q$ với $1 < p < \infty$ và $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
     - $(l^1)' = l^\infty$
     - $(c_0)' = l^1$
4. **Phản xạ (Reflexivity)**: Không gian chuẩn tắc X được gọi là phản xạ nếu phép nhúng chính tắc $C : X \to X''$ là toàn ánh. Mọi không gian hữu hạn chiều đều phản xạ về mặt đại số.

Phân tích toán tử

1. **Phổ của toán tử tuyến tính T**: Là tập hợp các giá trị λ sao cho toán tử $(T - \lambda I)$ không khả nghịch.
2. **Giá trị riêng và vector riêng**: Số λ là giá trị riêng của T nếu tồn tại vector $x \neq 0$ sao cho $Tx = \lambda x$. Vector x được gọi là vector riêng ứng với giá trị riêng λ.
3. **Toán tử compact**: Toán tử tuyến tính bị chặn $T : X \to Y$ được gọi là compact nếu ảnh của mọi tập bị chặn trong X là tương đối compact trong Y.
   - Ví dụ: Toán tử tích phân Fredholm $K(x)(t) = \int_a^b k(t,s)x(s)ds$ với hạt nhân k liên tục trên $[a, b] \times [a, b]$ là toán tử compact trên $C[a, b]$.

Các ứng dụng

1. **Phương trình vi phân**: Nhiều phương trình vi phân có thể được biểu diễn dưới dạng phương trình toán tử $Tx = y$, trong đó T là toán tử tuyến tính bị chặn.
2. **Phương trình tích phân**: Phương trình Fredholm loại hai $x(t) - \lambda \int_a^b k(t,s)x(s)ds = y(t)$ có thể viết dưới dạng $(I - \lambda K)x = y$, trong đó K là toán tử tích phân Fredholm.
3. **Kỹ thuật điện**: Toán tử dịch chuyển (shift operator) như trong Bài tập 11 mô tả dây chuyền trễ trong kỹ thuật điện, trong đó tín hiệu đầu ra là phiên bản trễ của tín hiệu đầu vào.
4. **Lý thuyết điều khiển**: Toán tử tuyến tính bị chặn được sử dụng trong lý thuyết điều khiển để mô tả hệ thống và phân tích tính ổn định.

Các kỹ thuật giải quyết bài toán

1. **Xác định không gian null $\mathcal{N}(T)$**:
   - Giải phương trình $Tx = 0$
   - Với ma trận biểu diễn, tìm không gian null bằng cách giải hệ phương trình tuyến tính đồng nhất
2. **Xác định miền ảnh $\mathcal{R}(T)$**:
   - Phân tích dạng tổng quát của Tx với $x \in X$ bất kỳ
   - Sử dụng định lý chiều để xác định chiều của miền ảnh
3. **Tính chuẩn của toán tử**:
   - Tìm ước lượng trên của $|Tx|$ đối với $|x| = 1$
   - Xây dựng dãy (x_n) với $|x_n| = 1$ sao cho $|Tx_n| \to |T|$
4. **Kiểm tra tính bị chặn của toán tử nghịch đảo**:
   - Xác định xem có tồn tại hằng số $b > 0$ sao cho $|Tx| \geq b|x|$ với mọi $x \in X$ hay không
   - Hoặc tìm phản ví dụ với dãy (x_n) có $|x_n| = 1$ nhưng $|Tx_n| \to 0$

Việc hiểu sâu và áp dụng thành thạo các khái niệm và kỹ thuật này sẽ giúp bạn giải quyết hiệu quả các bài toán liên quan đến không gian chuẩn tắc và toán tử tuyến tính bị chặn.

Chapter 03a - Inner Product Spaces

Bài tập 1: Chứng minh bất đẳng thức Pythagoras

Bài toán: Nếu $x \perp y$ trong không gian tích vô hướng X, hãy chứng minh rằng:

$$|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$$

Lời giải:

Theo định nghĩa của không gian tích vô hướng, với hai vector x và y bất kỳ, ta có:

$$|x+y|^2 = (x+y, x+y)$$

Khai triển vế phải:

$$|x+y|^2 = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y)$$

Theo tính chất tích vô hướng, ta có $(y,x) = \overline{(x,y)}$. Vì $x \perp y$, nghĩa là $(x,y) = 0$, nên:

$$|x+y|^2 = (x,x) + 0 + 0 + (y,y) = |x|^2 + |y|^2$$

Đây là bất đẳng thức Pythagoras trong không gian tích vô hướng, tổng quát hóa bất đẳng thức Pythagoras quen thuộc trong không gian Euclid.

Mở rộng: Công thức này có thể mở rộng cho n vector trực giao. Nếu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các vector đôi một trực giao, thì:

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2$$

Bài tập 5: Chứng minh đẳng thức Apollonius

Bài toán: Chứng minh đẳng thức Apollonius: với bất kỳ phần tử nào trong không gian tích vô hướng, ta có:

$$|z-x|^2 + |z-y|^2 = \frac{1}{2}|x-y|^2 + 2|z - \frac{1}{2}(x+y)|^2$$

Lời giải:

Đặt $m = \frac{1}{2}(x+y)$ (điểm giữa của x và y). Ta sẽ tính:

$$|z-x|^2 + |z-y|^2 = (z-x, z-x) + (z-y, z-y)$$

Khai triển vế phải:

$$= |z|^2 - (z,x) - (x,z) + |x|^2 + |z|^2 - (z,y) - (y,z) + |y|^2$$
$$= 2|z|^2 + |x|^2 + |y|^2 - 2\mathrm{Re}(z,x) - 2\mathrm{Re}(z,y)$$

Đồng thời, ta tính:

$$\frac{1}{2}|x-y|^2 = \frac{1}{2}(|x|^2 - (x,y) - (y,x) + |y|^2)$$
$$= \frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2 - 2\mathrm{Re}(x,y))$$

Và:

$$2|z-m|^2 = 2|z - \frac{1}{2}(x+y)|^2$$
$$= 2(z - \frac{1}{2}(x+y), z - \frac{1}{2}(x+y))$$
$$= 2(|z|^2 - \mathrm{Re}(z, \frac{x+y}{2}) - \mathrm{Re}(\frac{x+y}{2}, z) + |\frac{x+y}{2}|^2)$$
$$= 2|z|^2 - 2\mathrm{Re}(z,x) - 2\mathrm{Re}(z,y) + \frac{1}{2}|x+y|^2$$
$$= 2|z|^2 - 2\mathrm{Re}(z,x) - 2\mathrm{Re}(z,y) + \frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2 + 2\mathrm{Re}(x,y))$$

Kết hợp các biểu thức và đơn giản, ta sẽ nhận được đẳng thức Apollonius. Đẳng thức này là một tổng quát hóa của định lý Pythagoras và có nhiều ứng dụng trong hình học và giải tích hàm.

Bài tập 7: Chứng minh điều kiện trực giao trong không gian tích vô hướng

Bài toán: Chứng minh rằng trong không gian tích vô hướng, $x \perp y$ khi và chỉ khi $|x + \alpha y| = |x - \alpha y|$ với mọi vô hướng α.

Lời giải:

Chiều thuận: Giả sử $x \perp y$, nghĩa là $(x, y) = 0$.

Ta có:

$$|x + \alpha y|^2 = (x + \alpha y, x + \alpha y)$$
$$= (x, x) + \alpha(x, y) + \overline{\alpha}(y, x) + |\alpha|^2(y, y)$$
$$= |x|^2 + |\alpha|^2|y|^2$$

Tương tự:

$$|x - \alpha y|^2 = |x|^2 + |\alpha|^2|y|^2$$

Do đó $|x + \alpha y| = |x - \alpha y|$.

Chiều đảo: Giả sử $|x + \alpha y| = |x - \alpha y|$ với mọi α.

Điều này nghĩa là:

$$|x + \alpha y|^2 = |x - \alpha y|^2$$

Khai triển:

$$(x, x) + \alpha(x, y) + \overline{\alpha}(y, x) + |\alpha|^2(y, y) = (x, x) - \alpha(x, y) - \overline{\alpha}(y, x) + |\alpha|^2(y, y)$$

Rút gọn:

$$\alpha(x, y) + \overline{\alpha}(y, x) = -\alpha(x, y) - \overline{\alpha}(y, x)$$
$$2\alpha(x, y) + 2\overline{\alpha}(y, x) = 0$$
$$\alpha(x, y) + \overline{\alpha}(y, x) = 0$$

Đặt $\alpha = 1$, ta có $(x, y) + (y, x) = 0$. Vì $(y, x) = \overline{(x, y)}$, nên $(x, y) + \overline{(x, y)} = 0$

Điều này chỉ có thể đúng khi $(x, y) = 0$, nghĩa là $x \perp y$.

Đây là cách hình học để kiểm tra tính trực giao của hai vector trong không gian tích vô hướng.

Bài tập 8: Điều kiện trực giao khác

Bài toán: Chứng minh rằng trong không gian tích vô hướng, $x \perp y$ khi và chỉ khi $|x + \alpha y| \geq |x|$ với mọi vô hướng α.

Lời giải:

Chiều thuận: Giả sử $x \perp y$, nghĩa là $(x, y) = 0$.

Ta có:

$$|x + \alpha y|^2 = (x + \alpha y, x + \alpha y)$$
$$= (x, x) + \alpha(x, y) + \overline{\alpha}(y, x) + |\alpha|^2(y, y)$$
$$= |x|^2 + |\alpha|^2|y|^2 \geq |x|^2$$

Do đó $|x + \alpha y| \geq |x|$.

Chiều đảo: Giả sử $|x + \alpha y| \geq |x|$ với mọi α.

Cần chứng minh $(x, y) = 0$.

Xét hàm $f(\alpha) = |x + \alpha y|^2$. Theo giả thiết, $f(\alpha) \geq f(0)$ với mọi α, nghĩa là $\alpha = 0$ là điểm cực tiểu của $f(\alpha)$.

Tính đạo hàm của f theo α và đặt bằng 0:

$$f'(\alpha) = 2\mathrm{Re}[(x + \alpha y, y)] = 0$$

Tại $\alpha = 0$:

$$f'(0) = 2\mathrm{Re}[(x, y)] = 0$$

Tương tự, tính đạo hàm theo $i\alpha$ và đặt bằng 0 tại $\alpha = 0$, ta được:

$$2\mathrm{Im}[(x, y)] = 0$$

Kết hợp hai kết quả, ta có $(x, y) = 0$, nghĩa là $x \perp y$.

Bài tập 3: Tính trực giao trong không gian thực và phức

Bài toán: Nếu X trong bài tập 2 là không gian thực, chứng minh rằng điều kiện $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$ kéo theo $x \perp y$. Chứng minh rằng điều này không đúng với không gian phức. Đưa ra ví dụ.

Lời giải:

Trường hợp không gian thực:

Giả sử $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$.

Khai triển vế trái:

$$|x + y|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y)$$

Trong không gian thực, $(x, y) = (y, x)$, nên:

$$|x + y|^2 = |x|^2 + 2(x, y) + |y|^2$$

Từ giả thiết, ta có:

$$|x|^2 + 2(x, y) + |y|^2 = |x|^2 + |y|^2$$

Suy ra: $2(x, y) = 0$, do đó $(x, y) = 0$, nghĩa là $x \perp y$.

Trường hợp không gian phức:

Trong không gian phức, $(y, x) = \overline{(x, y)}$, nên khai triển của $|x + y|^2$ là:

$$|x + y|^2 = |x|^2 + (x, y) + \overline{(x, y)} + |y|^2$$

Từ giả thiết:

$$|x|^2 + (x, y) + \overline{(x, y)} + |y|^2 = |x|^2 + |y|^2$$

Suy ra: $(x, y) + \overline{(x, y)} = 0$, hay $2\mathrm{Re}[(x, y)] = 0$

Điều này chỉ đảm bảo phần thực của (x, y) bằng 0, nhưng không đảm bảo phần ảo bằng 0. Do đó, không thể kết luận $x \perp y$.

Ví dụ phản chứng trong không gian phức:

Xét không gian $\mathbb{C}^2$ với tích vô hướng chuẩn. Lấy $x = (1, 0)$ và $y = (0, i)$.

Ta có:

- $|x|^2 = 1$
- $|y|^2 = 1$
- $(x, y) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-i) = 0 + 0 = 0$

Vậy $x \perp y$.

Nhưng xét $x + iy$:

- $x + iy = (1, 0) + i(0, i) = (1, -1)$
- $|x + iy|^2 = |1|^2 + |-1|^2 = 1 + 1 = 2$
- $|x|^2 + |iy|^2 = 1 + 1 = 2$

Ta có $|x + iy|^2 = |x|^2 + |iy|^2$ nhưng x không trực giao với iy.

Bài tập 10: Toán tử không

Bài toán: Xét toán tử $T : X \to X$ xác định trên không gian tích vô hướng phức X. Nếu $(Tx, x) = 0$ với mọi $x \in X$, chứng minh rằng $T = 0$.

Chứng minh rằng điều này không đúng với không gian tích vô hướng thực.

Lời giải:

Không gian tích vô hướng phức:

Giả sử $(Tx, x) = 0$ với mọi $x \in X$.

Xét $x, y \in X$ bất kỳ. Ta xét hằng đẳng thức:

$$(T(x+y), x+y) = 0$$
$$(T(x+iy), x+iy) = 0$$

Từ hai điều kiện này, ta có:

$$(Tx, x) + (Tx, y) + (Ty, x) + (Ty, y) = 0$$
$$(Tx, x) + i(Tx, y) - i(Ty, x) + (Ty, y) = 0$$

Do $(Tx, x) = 0$ và $(Ty, y) = 0$ với mọi $x, y \in X$, nên:

$$(Tx, y) + (Ty, x) = 0$$
$$i(Tx, y) - i(Ty, x) = 0$$

Từ phương trình thứ hai:

$$(Tx, y) = (Ty, x)$$

Kết hợp với phương trình đầu tiên:

$$2(Tx, y) = 0$$

Do đó $(Tx, y) = 0$ với mọi $x, y \in X$. Với y bất kỳ, điều này nghĩa là $Tx = 0$ với mọi $x \in X$, hay $T = 0$.

Không gian tích vô hướng thực:

Phản ví dụ: Xét không gian Euclid $\mathbb{R}^2$ và định nghĩa toán tử T bằng phép xoay 90 độ ngược chiều kim đồng hồ:

$$T(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$$

Ta thấy rằng với mọi $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$(Tx, x) = (-x_2, x_1) \cdot (x_1, x_2) = -x_1 x_2 + x_1 x_2 = 0$$

Nhưng T không phải là toán tử không. Điều này chứng tỏ điều kiện $(Tx, x) = 0$ không đủ để kết luận $T = 0$ trong không gian tích vô hướng thực.

Tổng kết

Không gian tích vô hướng (Inner Product Space)

1. **Định nghĩa:** Không gian tích vô hướng là không gian vector X với tích vô hướng (x, y) thỏa mãn các tính chất:
   - $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ (tuyến tính theo biến thứ nhất)
   - $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ (đồng nhất theo vô hướng)
   - $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (đối xứng liên hợp)
   - $(x, x) \geq 0$ và $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (xác định dương)
2. **Chuẩn:** Tích vô hướng xác định chuẩn của vector: $|x| = \sqrt{(x, x)}$
3. **Trực giao:** Hai vector x, y trực giao khi $(x, y) = 0$, ký hiệu $x \perp y$
4. **Định lý Pythagoras:** Nếu $x \perp y$ thì $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$
5. **Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:** $|(x, y)| \leq |x||y|$, dấu "=" xảy ra khi x, y phụ thuộc tuyến tính
6. **Điều kiện trực giao:**
   - $x \perp y \Leftrightarrow |x + \alpha y| = |x - \alpha y|$ với mọi α
   - $x \perp y \Leftrightarrow |x + \alpha y| \geq |x|$ với mọi α
7. **Các tính chất khác biệt giữa không gian thực và phức:**
   - Trong không gian thực: $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 \Rightarrow x \perp y$
   - Trong không gian phức: điều kiện trên không đủ để kết luận $x \perp y$
   - Toán tử T thỏa mãn $(Tx, x) = 0$ với mọi x trong không gian phức thì $T = 0$, nhưng điều này không đúng trong không gian thực

Không gian Hilbert

1. **Định nghĩa:** Không gian Hilbert là không gian tích vô hướng đầy đủ (mọi dãy Cauchy đều hội tụ)
2. **Dãy trực chuẩn:** Dãy (e_n) trong không gian tích vô hướng là trực chuẩn nếu $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$
3. **Bất đẳng thức Bessel:** Với mọi dãy trực chuẩn (e_k) và vector x, ta có:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 \leq |x|^2$$

4. **Hệ số Fourier:** Với x và dãy trực chuẩn (e_k), các số (x, e_k) gọi là hệ số Fourier của x

5. **Phép chiếu trực giao:** Phép chiếu của x lên không gian con đóng Y là vector $y \in Y$ sao cho $|x - y| = \inf_{z \in Y} |x - z|$.
6. **Tính phụ thuộc tuyến tính:** Mọi tập trực chuẩn đều độc lập tuyến tính
7. **Quy trình Gram-Schmidt:** Phương pháp để biến đổi một tập độc lập tuyến tính thành tập trực chuẩn có cùng không gian sinh.

Chapter 03b - Hilbert Spaces

Bài 1: Biểu diễn phiếm hàm trên không gian Hilbert (Prob. 2, Sec. 3.8)

Bài toán: Chứng minh rằng mọi phiếm hàm tuyến tính bị chặn f trên không gian l^2 có thể được biểu diễn dưới dạng:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \bar{\zeta}_j$$

với $z = (\zeta_j) \in l^2$

Lời giải:

Trước tiên, chúng ta cần hiểu không gian Hilbert l^2 là gì. Đây là không gian các dãy số phức $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots)$ thỏa mãn:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2 < \infty$$

Không gian này có tích vô hướng:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \bar{\eta}_j$$

với $y = (\eta_j) \in l^2$.

Theo **Định lý Riesz** (Định lý 3.8-1), mọi phiếm hàm tuyến tính bị chặn f trên không gian Hilbert H có thể biểu diễn dưới dạng:

$$f(x) = \langle x, z \rangle$$

Với $z \in H$ phụ thuộc vào f và được xác định duy nhất bởi f, có chuẩn $|z| = |f|$.

Áp dụng vào không gian l^2, tồn tại duy nhất $z = (\zeta_j) \in l^2$ sao cho:

$$f(x) = \langle x, z \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \bar{\zeta}_j$$

Ví dụ: Xét phiếm hàm $f(x) = 3\xi_1 - 2\xi_2 + 5\xi_3$, thì $z = (3, -2, 5, 0, 0, \dots)$

Bài 2: Không gian song đẳng cự (Prob. 5, Sec. 3.8)

Bài toán: Chứng minh rằng không gian đối ngẫu của không gian thực l^2 là l^2.

Lời giải:

Trước hết, chúng ta nhắc lại định nghĩa không gian đối ngẫu. Không gian đối ngẫu X' của một không gian chuẩn X là không gian các phiếm hàm tuyến tính bị chặn trên X.

Theo Định lý Riesz, mỗi phiếm hàm tuyến tính bị chặn f trên không gian Hilbert l^2 có dạng:

$$f(x) = \langle x, z \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j z_j$$

với $z = (z_j) \in l^2$ (vì là không gian thực nên không cần lấy liên hợp).

Ngược lại, nếu $z \in l^2$ thì phiếm hàm $f(x) = \langle x, z \rangle$ là tuyến tính và bị chặn trên l^2. Thật vậy:

- Tính tuyến tính: $f(\alpha x + \beta y) = \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle = \alpha f(x) + \beta f(y)$
- Tính bị chặn: $|f(x)| = |\langle x, z \rangle| \leq |x| \cdot |z|$ (bất đẳng thức Cauchy-Schwarz)

Vậy mỗi phiếm hàm tuyến tính bị chặn trên l^2 tương ứng một-một với một phần tử của l^2, tức là $(l^2)' = l^2$.

Bài 3: Toán tử tự liên hợp (Prob. 1, Sec. 3.10)

Bài toán: Nếu S và T là các toán tử tuyến tính bị chặn tự liên hợp trên không gian Hilbert H và α, β là các số thực, chứng minh rằng $T = \alpha S + \beta T$ cũng là toán tử tự liên hợp.

Lời giải:

Nhắc lại định nghĩa toán tử tự liên hợp: Một toán tử tuyến tính bị chặn $T : H \to H$ trên không gian Hilbert H được gọi là tự liên hợp (self-adjoint) nếu $T^* = T$, trong đó T^* là toán tử liên hợp Hilbert của T.

Theo tính chất của toán tử liên hợp Hilbert (Định lý 3.9-4), ta có:

- $(S+T)^* = S^* + T^*$
- $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$

Vì S, T là các toán tử tự liên hợp nên $S^* = S$ và $T^* = T$.

Xét toán tử $T = \alpha S + \beta T$, ta có:

$$T^* = (\alpha S + \beta T)^* = \alpha^* S^* + \beta^* T^* = \bar{\alpha} S + \bar{\beta} T$$

Vì α, β là các số thực nên $\bar{\alpha} = \alpha$ và $\bar{\beta} = \beta$, do đó:

$$T^* = \alpha S + \beta T = T$$

Vậy T là toán tử tự liên hợp.

Bài 4: Phân rã toán tử (Prob. 4, Sec. 3.10)

Bài toán: Chứng minh rằng với mỗi toán tử tuyến tính bị chặn T trên H, các toán tử

$$T_1 = \frac{1}{2}(T + T^*) \quad \text{và} \quad T_2 = \frac{1}{2i}(T - T^*)$$

là tự liên hợp, và

$$T = T_1 + iT_2, \quad T^* = T_1 - iT_2.$$

Lời giải:

Chứng minh T_1 là tự liên hợp:

$$T_1^* = \left(\frac{1}{2}(T + T^*)\right)^* = \frac{1}{2}(T^* + T^{**}) = \frac{1}{2}(T^* + T) = T_1$$

Chứng minh T_2 là tự liên hợp:

$$T_2^* = \left(\frac{1}{2i}(T - T^*)\right)^* = \frac{1}{-2i}(T^* - T^{**}) = \frac{1}{2i}(T - T^*) = T_2$$

Chứng minh $T = T_1 + iT_2$:

$$T_1 + iT_2 = \frac{1}{2}(T + T^*) + i\frac{1}{2i}(T - T^*) = \frac{1}{2}(T + T^*) + \frac{1}{2}(T - T^*) = T$$

Chứng minh $T^* = T_1 - iT_2$:

$$T_1 - iT_2 = \frac{1}{2}(T + T^*) - i\frac{1}{2i}(T - T^*) = \frac{1}{2}(T + T^*) - \frac{1}{2}(T - T^*) = T^*$$

Phân rã này rất quan trọng vì nó cho thấy mọi toán tử tuyến tính bị chặn có thể phân tích thành phần thực T_1 và phần ảo T_2, cả hai đều là các toán tử tự liên hợp.

Bài 5: Toán tử dịch phải (Prob. 10, Sec. 3.9)

Bài toán: Cho (e_n) là một dãy trực chuẩn đầy đủ trong không gian Hilbert khả ly H và định nghĩa toán tử dịch phải (right shift operator) là toán tử tuyến tính $T : H \to H$ sao cho $Te_n = e_{n+1}$ với $n = 1, 2, \ldots$. Giải thích tên gọi này. Tìm miền giá, không gian con, chuẩn và toán tử liên hợp Hilbert của T.

Lời giải:

1. **Tên gọi**: Toán tử được gọi là "dịch phải" vì nó dịch chuyển mỗi vector cơ sở e_n sang "phải" một vị trí thành e_{n+1}.
2. **Miền giá**: Range(T) = $Te_n : n \geq 1 = e_{n+1} : n \geq 1 = e_2, e_3, e_4, \ldots$ Miền giá của T là không gian con đóng span$e_n : n \geq 2$.
3. **Không gian con**: Null(T) = $x \in H : Tx = 0$ Vì T là đẳng cự trên cơ sở trực chuẩn (sẽ chứng minh bên dưới), nên T là song ánh, do đó Null(T) $= 0$.
4. **Chuẩn**: Với $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \in H$, ta có:

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n T e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_{n+1}$$

Vì (e_n) là trực chuẩn, nên:

$$|Tx|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 = |x|^2$$

Do đó, T là đẳng cự và $|T| = 1$.

5. **Toán tử liên hợp Hilbert**: Theo định nghĩa, T^* thỏa mãn: $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$

   Với $x = e_n$ và $y = e_m$:

   $$\langle Te_n, e_m\rangle = \langle e_{n+1}, e_m\rangle = \delta_{n+1,m}$$
   $$\langle e_n, T^*e_m\rangle = \delta_{n+1,m}$$

   Nếu $m = 1$, thì $\langle e_n, T^*e_1\rangle = 0$ với mọi n, nên $T^*e_1 = 0$.

   Nếu $m > 1$, thì $\langle e_n, T^*e_m\rangle = \delta_{n+1,m} = 1$ khi $n = m - 1$ và 0 nếu ngược lại. Do đó, $T^*e_m = e_{m-1}$ với $m > 1$.

   Tóm lại:

   $$T^*e_1 = 0, \quad T^*e_m = e_{m-1} \text{ cho } m > 1$$

   Toán tử T^* là "toán tử dịch trái".

Bài 6: Toán tử chuyển tiếp

Bài toán (Prob. 9, Sec. 3.8): Chứng minh rằng một toán tử tuyến tính bị chặn $T : H \to H$ trên không gian Hilbert H có miền giá hữu hạn chiều khi và chỉ khi T có thể biểu diễn dưới dạng:

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} \langle x, v_j\rangle w_j$$

Lời giải:

1. **Chiều hướng** $\Leftarrow$: Nếu T có dạng $Tx = \sum_{j=1}^{n} \langle x, v_j\rangle w_j$, thì rõ ràng miền giá của T là không gian con sinh bởi các vector $w_1, w_2, \ldots, w_n$, nên có chiều tối đa là n (hữu hạn).
2. **Chiều hướng** $\Rightarrow$: Giả sử miền giá của T có chiều hữu hạn n. Khi đó, tồn tại một cơ sở $w_1, w_2, \ldots, w_n$ của miền giá $T(H)$.

   Mỗi phần tử Tx trong miền giá có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng:

   $$Tx = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x) w_j$$

   trong đó $\alpha_j(x)$ là các hàm phụ thuộc vào x.

   Bởi vì T là tuyến tính, các hàm α_j cũng là tuyến tính. Hơn nữa, vì T bị chặn, các α_j cũng là các phiếm hàm tuyến tính bị chặn.

   Áp dụng Định lý Riesz (3.8-1), mỗi α_j có dạng:

   $$\alpha_j(x) = \langle x, v_j\rangle$$

   với $v_j \in H$ nào đó.

   Do đó:

   $$Tx = \sum_{j=1}^{n} \langle x, v_j\rangle w_j$$

Bài 7: Tính ứng dụng của Định lý Riesz (Prob. 3 và 4, Sec. 3.8)

Bài toán 3: Nếu z là phần tử cố định của không gian tích vô hướng X, chứng minh rằng $f(x) = \langle x, z\rangle$ định nghĩa một phiếm hàm tuyến tính bị chặn f trên X, có chuẩn $|z|$.

Lời giải:

- Tính tuyến tính: $f(\alpha x + \beta y) = \langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle = \alpha f(x) + \beta f(y)$
- Tính bị chặn: $|f(x)| = |\langle x, z\rangle| \leq |x| \cdot |z|$ (bất đẳng thức Cauchy-Schwarz)
- Chuẩn:

  $$|f| = \sup_{|x|=1} |f(x)| = \sup_{|x|=1} |\langle x, z\rangle| \leq \sup_{|x|=1} |x| \cdot |z| = |z|$$

  Mặt khác, với $x = z/|z|$ (giả sử $z \neq 0$), ta có $|x| = 1$ và:

  $$f(x) = \langle x, z\rangle = \langle \frac{z}{|z|}, z\rangle = \frac{|z|^2}{|z|} = |z|$$

  Nên $|f| = |z|$.

Bài toán 4: Xét Bài toán 3. Nếu ánh xạ $X \to X'$ cho bởi $z \mapsto f$ là toàn ánh, chứng minh rằng X phải là không gian Hilbert.

Lời giải:

Ta cần chứng minh X là đầy đủ. Giả sử (x_n) là một dãy Cauchy trong X. Với mỗi $x \in X$, ta xét dãy số $\langle x_n, x\rangle$. Vì (x_n) là Cauchy và $\langle\cdot,\cdot\rangle$ là liên tục, dãy $\langle x_n, x\rangle$ cũng là Cauchy trong $\mathbb{C}$ (hoặc $\mathbb{R}$), nên hội tụ.

Định nghĩa phiếm hàm g trên X bởi:

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, x\rangle$$

Ta có thể kiểm tra g là tuyến tính và bị chặn. Theo giả thiết, tồn tại $y \in X$ sao cho $g(x) = \langle x, y\rangle$ với mọi $x \in X$.

Ta sẽ chứng minh $x_n \to y$. Thật vậy:

$$|x_n - y|^2 = \langle x_n - y, x_n - y\rangle = |x_n|^2 - \langle x_n, y\rangle - \langle y, x_n\rangle + |y|^2$$

Khi $n \to \infty$:

- $\langle x_n, y\rangle \to \langle y, y\rangle = |y|^2$ (theo định nghĩa của g)
- $\langle y, x_n\rangle \to \langle y, y\rangle = |y|^2$ (lấy liên hợp)
- $|x_n|^2 \to |y|^2$ (vì $\langle x_n, x_m\rangle \to \langle x_n, y\rangle$ khi $m \to \infty$ và (x_n) là Cauchy)

Do đó, $|x_n - y|^2 \to 0$ khi $n \to \infty$, tức là $x_n \to y$.

Vậy X là đầy đủ, nên là không gian Hilbert.

Bài 8: Tương đương unitary (Prob. 11, Sec. 3.10)

Bài toán: Cho S và T là các toán tử tuyến tính trên không gian Hilbert H. Toán tử S được gọi là tương đương unitary với T nếu tồn tại toán tử unitary U trên H sao cho:

$$S = UTU^{-1} = UTU^*$$

Nếu T là tự liên hợp, chứng minh rằng S cũng là tự liên hợp.

Lời giải:

Ta cần chứng minh $S^* = S$.

Vì $S = UTU^*$, nên:

$$S^* = (UTU^*)^* = U^*T^*(U^*)^* = U^*T^*U$$

Vì T là tự liên hợp nên $T^* = T$, do đó:

$$S^* = UTU^* = S$$

Vậy S là tự liên hợp.

Tổng kết (Cheatsheet)

1. Không gian Hilbert

- **Định nghĩa**: Không gian tích vô hướng đầy đủ.
- **Ví dụ quan trọng**: l^2, $L^2[-1,1]$, $L^2(0,\infty)$, $L^2(-\infty,\infty)$

2. Định lý Riesz về biểu diễn phiếm hàm

- Mọi phiếm hàm tuyến tính bị chặn f trên không gian Hilbert H có thể biểu diễn dạng:

  $$f(x) = \langle x, z\rangle$$

  với $z \in H$ duy nhất, $|z| = |f|$

3. Toán tử liên hợp Hilbert

- Nếu $T : H_1 \to H_2$ là toán tử tuyến tính bị chặn, thì $T^* : H_2 \to H_1$ là toán tử liên hợp Hilbert thỏa mãn:

  $$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$$

  với mọi $x \in H_1$, $y \in H_2$
- Tính chất: $|T^*| = |T|, \quad (T^*)^* = T, \quad (S+T)^* = S^* + T^*, \quad (\alpha T)^* = \bar{\alpha}T^*, \quad (ST)^* = T^*S^*$

4. Các loại toán tử đặc biệt

- **Toán tử tự liên hợp**: $T^* = T$
  - Đặc trưng: $\langle Tx, x\rangle$ là thực với mọi x
- **Toán tử unitary**: $T^* = T^{-1}$
  - Đặc trưng: T là đẳng cự và toàn ánh
  - Tính chất: $|T| = 1$
- **Toán tử chính quy**: $TT^* = T^*T$
  - Mọi toán tử tự liên hợp hoặc unitary đều chính quy

5. Phân rã toán tử

- Mọi toán tử tuyến tính bị chặn T có thể phân rã thành:

$$T = T_1 + iT_2$$

với $T_1 = \frac{1}{2}(T + T^*)$ và $T_2 = \frac{1}{2i}(T - T^*)$ đều là toán tử tự liên hợp

6. Một số kết quả về toán tử dịch

- **Toán tử dịch phải** T trên dãy trực chuẩn (e_n): $Te_n = e_{n+1}$
  - T là đẳng cự: $|T| = 1$
  - Miền giá: span$e_n : n \geq 2$
  - Không gian con: 0
  - Toán tử liên hợp: $T^*e_1 = 0$, $T^*e_n = e_{n-1}$ với $n \geq 2$

Chapter 04a - Fundamental Theorems for Normed Spaces and Banach Spaces

Bài tập 1: Tính chất của hàm tuyến tính

Xét một hàm tuyến tính f trên một không gian vector X. Chứng minh rằng giá trị tuyệt đối của f có các tính chất được mô tả trong (1) và (2) của định lý Hahn-Banach.

Lời giải:

Để chứng minh điều này, ta cần xem xét các tính chất (1) và (2) của hàm nửa tuyến tính:

1. $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ (tính chất nửa cộng)
2. $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ với mọi $\alpha \geq 0$ (tính chất đồng nhất dương)

Xét hàm $|f|$ với f là hàm tuyến tính. Ta cần chứng minh:

a) $|f(x+y)| \leq |f(x)| + |f(y)|$: Do f tuyến tính nên $f(x+y) = f(x) + f(y)$ Từ bất đẳng thức tam giác: $|f(x+y)| = |f(x) + f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)|$

b) $|f(\alpha x)| = \alpha |f(x)|$ với mọi $\alpha \geq 0$: Do f tuyến tính nên $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ Do đó $|f(\alpha x)| = |\alpha f(x)| = \alpha |f(x)|$ (vì $\alpha \geq 0$)

Vậy $|f|$ thỏa mãn cả hai tính chất của hàm nửa tuyến tính.

Bài tập 2: Chứng minh chuẩn là hàm nửa tuyến tính

Chứng minh rằng chuẩn trên một không gian vector X là một hàm nửa tuyến tính trên X.

Lời giải:

Theo định nghĩa, chuẩn $|\cdot|$ trên không gian vector X thỏa mãn:

1. $|x| \geq 0$ và $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $|\alpha x| = |\alpha| \cdot |x|$ với mọi α là số vô hướng
3. $|x+y| \leq |x| + |y|$ (bất đẳng thức tam giác)

Từ định nghĩa của hàm nửa tuyến tính, ta cần chứng minh:

- Tính chất nửa cộng: $|x+y| \leq |x| + |y|$ (đã có từ bất đẳng thức tam giác)
- Tính chất đồng nhất dương: Với mọi $\alpha \geq 0$, ta có $|\alpha x| = \alpha |x|$ (từ tính chất 2 của chuẩn khi $\alpha \geq 0$)

Vậy chuẩn là một hàm nửa tuyến tính trên X.

Bài tập 4: Tính chất của hàm nửa tuyến tính

Chứng minh rằng một hàm nửa tuyến tính p thỏa mãn $p(0) = 0$ và $p(-x) \geq -p(x)$.

Lời giải:

Đầu tiên, chứng minh $p(0) = 0$:

- Ta có $p(0) = p(0 \cdot x) = 0 \cdot p(x) = 0$ (từ tính chất đồng nhất dương với $\alpha = 0$)

Tiếp theo, chứng minh $p(-x) \geq -p(x)$:

- Ta có $0 = p(0) = p(x + (-x)) \leq p(x) + p(-x)$ (từ tính chất nửa cộng)
- Do đó $p(-x) \geq -p(x)$

Bài tập 5: Tính chất tập lồi

Nếu p là hàm nửa tuyến tính trên không gian vector X, chứng minh rằng tập $M = x | p(x) \leq \gamma, \gamma > 0 \text{ cố định}$ là tập lồi.

Lời giải:

Một tập hợp là lồi nếu với mọi x, y thuộc tập hợp đó và mọi $t \in [0,1]$, thì $tx + (1-t)y$ cũng thuộc tập hợp đó.

Giả sử $x, y \in M$, tức là $p(x) \leq \gamma$ và $p(y) \leq \gamma$. Xét $z = tx + (1-t)y$ với $t \in [0,1]$.

Ta có: $p(z) = p(tx + (1-t)y) \leq p(tx) + p((1-t)y)$ (từ tính chất nửa cộng) $= tp(x) + (1-t)p(y)$ (từ tính chất đồng nhất dương) $\leq t\gamma + (1-t)\gamma = \gamma$

Vậy $z \in M$, và M là tập lồi.

Bài tập 9: Mở rộng hàm tuyến tính

Cho p là hàm nửa tuyến tính trên không gian vector thực X. Cho f được định nghĩa trên $Z = x \in X | x = \alpha x_0, \alpha \in \mathbb{R}$ bởi $f(x) = \alpha p(x_0)$ với $x_0 \in X$ cố định. Chứng minh rằng f là hàm tuyến tính trên Z thỏa mãn $f(x) \leq p(x)$.

Lời giải:

Đầu tiên, chứng minh f là tuyến tính trên Z:

- Cho $x = \alpha x_0$ và $y = \beta x_0$ trong Z
- $f(x+y) = f((\alpha+\beta)x_0) = (\alpha+\beta)p(x_0) = \alpha p(x_0) + \beta p(x_0) = f(x) + f(y)$
- Với $\lambda \in \mathbb{R}$: $f(\lambda x) = f(\lambda\alpha x_0) = (\lambda\alpha)p(x_0) = \lambda(\alpha p(x_0)) = \lambda f(x)$

Tiếp theo, chứng minh $f(x) \leq p(x)$:

- Nếu $\alpha \geq 0$: $f(x) = \alpha p(x_0) = p(\alpha x_0) = p(x)$
- Nếu $\alpha < 0$: $f(x) = \alpha p(x_0) < 0$.

Mặt khác, từ tính chất $p(-x) \geq -p(x)$ ta suy ra $p(\alpha x_0) = p(-|\alpha| x_0) \geq -|\alpha| p(x_0) = \alpha p(x_0) = f(x)$

Vậy $f(x) \leq p(x)$ với mọi $x \in Z$.

Định lý Hahn-Banach (Định lý 4.2-1)

Định lý Hahn-Banach (Mở rộng các hàm tuyến tính): Cho X là không gian vector thực và p là hàm nửa tuyến tính trên X. Hơn nữa, cho f là hàm tuyến tính được định nghĩa trên không gian con Z của X và thỏa mãn:

$$f(x) \leq p(x) \text{ với mọi } x \in Z$$

Khi đó f có một mở rộng tuyến tính $\bar{f}$ từ Z lên X thỏa mãn:

$$\bar{f}(x) \leq p(x) \text{ với mọi } x \in X$$

nghĩa là, $\bar{f}$ là hàm tuyến tính trên X, thỏa mãn điều kiện trên X và $\bar{f}(x) = f(x)$ với mọi $x \in Z$.

Ý nghĩa: Định lý này đảm bảo rằng mọi hàm tuyến tính bị chặn trên bởi một hàm nửa tuyến tính trên một không gian con đều có thể được mở rộng đến toàn bộ không gian mà vẫn giữ tính chất bị chặn đó.

Ví dụ minh họa: Xét $X = \mathbb{R}^2$, $Z = (t,0) | t \in \mathbb{R}$ (trục x), $p((x,y)) = |x| + |y|$ và $f((t,0)) = t$. Ta có $f((t,0)) \leq |t| = p((t,0))$. Theo định lý Hahn-Banach, ta có thể mở rộng f thành $\bar{f}$ trên toàn bộ $\mathbb{R}^2$ sao cho $\bar{f}((x,y)) \leq |x| + |y|$ với mọi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Một mở rộng cụ thể là $\bar{f}((x,y)) = x$.

Định lý Hahn-Banach cho không gian vector phức (Định lý 4.3-1)

Định lý Hahn-Banach (Tổng quát hóa): Cho X là không gian vector thực hoặc phức và p là hàm giá trị thực trên X thỏa mãn:

1. $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ với mọi $x, y \in X$
2. $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ với mọi vô hướng α

Hơn nữa, cho f là hàm tuyến tính được định nghĩa trên không gian con Z của X và thỏa mãn:

$$|f(x)| \leq p(x) \text{ với mọi } x \in Z$$

Khi đó f có một mở rộng tuyến tính $\bar{f}$ từ Z lên X thỏa mãn:

$$|\bar{f}(x)| \leq p(x) \text{ với mọi } x \in X$$

Ý nghĩa: Định lý này là phiên bản tổng quát hơn, áp dụng cho cả không gian vector phức. Điều kiện (2) yêu cầu p thỏa mãn tính đồng nhất với mọi vô hướng, không chỉ với các số dương.

Định lý Hahn-Banach cho không gian chuẩn (Định lý 4.3-2)

Định lý Hahn-Banach (Không gian chuẩn): Cho f là hàm tuyến tính bị chặn trên không gian con Z của không gian chuẩn X. Khi đó tồn tại một hàm tuyến tính bị chặn $\bar{f}$ trên X là mở rộng của f lên X và có cùng chuẩn:

$$|\bar{f}|_X = |f|_Z$$

trong đó:

$$|\bar{f}|_X = \sup_{x\in X, |x|=1} |\bar{f}(x)|, \quad |f|_Z = \sup_{x\in Z, |x|=1} |f(x)|$$

Ý nghĩa: Định lý này đảm bảo rằng việc mở rộng hàm tuyến tính bị chặn từ không gian con lên toàn không gian có thể được thực hiện mà không làm tăng chuẩn của hàm tuyến tính đó.

Ví dụ minh họa: Xét $X = C([0,1])$ (không gian các hàm liên tục trên $[0,1]$) với chuẩn $|f|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$, và Z là không gian con của các đa thức. Cho hàm tuyến tính L trên Z với $|L|_Z = 1$. Theo định lý này, tồn tại một hàm tuyến tính $\bar{L}$ trên X với $|\bar{L}|_X = 1$ và $\bar{L}(p) = L(p)$ với mọi đa thức $p \in Z$.

Định lý 4.3-3 (Hàm tuyến tính bị chặn)

Định lý: Cho X là không gian chuẩn và $x_0 \neq 0$ là phần tử bất kỳ của X. Khi đó tồn tại hàm tuyến tính bị chặn $\bar{f}$ trên X sao cho:

$$|\bar{f}| = 1, \quad \bar{f}(x_0) = |x_0|$$

Ý nghĩa: Định lý này cho thấy không gian chuẩn có "đủ nhiều" hàm tuyến tính bị chặn để phân biệt các điểm của nó. Cụ thể, với mọi điểm $x_0 \neq 0$, tồn tại hàm tuyến tính chuẩn hóa $\bar{f}$ đạt giá trị cực đại tại $x_0/|x_0|$.

Ví dụ minh họa: Trong $\mathbb{R}^2$ với chuẩn Euclid, cho $x_0 = (3,4)$. Ta có $|x_0| = 5$. Hàm tuyến tính $\bar{f}(x,y) = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y$ thỏa mãn $|\bar{f}| = 1$ và $\bar{f}(x_0) = \bar{f}(3,4) = \frac{3}{5}\cdot 3 + \frac{4}{5}\cdot 4 = \frac{9+16}{5} = 5 = |x_0|$.

Bài tập 11: Ứng dụng của Định lý 4.3-3

Nếu $f(x) = f(y)$ với mọi hàm tuyến tính bị chặn f trên một không gian chuẩn X, chứng minh rằng $x = y$.

Lời giải:

Giả sử $f(x) = f(y)$ với mọi $f \in X'$ (không gian đối ngẫu của X).

Ta có: $f(x) - f(y) = f(x-y) = 0$ với mọi $f \in X'$

Nếu $x \neq y$ thì $x - y \neq 0$. Theo Định lý 4.3-3, tồn tại $f_0 \in X'$ sao cho $|f_0| = 1$ và $f_0(x-y) = |x-y| > 0$.

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $f(x-y) = 0$ với mọi $f \in X'$.

Do đó $x = y$.

Định lý 4.6-2 (Ánh xạ chính tắc)

Định lý: Ánh xạ chính tắc $C : X \to X''$ cho bởi công thức $(Cx)(f) = f(x)$ là một đẳng cấu của không gian chuẩn X lên không gian chuẩn $\mathcal{R}(C)$, tức ảnh của C.

Ý nghĩa: Định lý này cho thấy mọi không gian chuẩn X có thể được nhúng đẳng cấu vào không gian đối ngẫu bậc hai X'' của nó. Điều này có ý nghĩa lớn trong lý thuyết không gian phản thân.

Ví dụ minh họa: Trong $\mathbb{R}^n$, ánh xạ chính tắc C là một đẳng cấu toàn ánh vì $\mathbb{R}^n$ là phản thân (reflexive).

Định lý 4.6-4 (Tính đầy đủ)

Định lý: Nếu không gian chuẩn X là phản thân, thì X là đầy đủ (do đó là không gian Banach).

Ý nghĩa: Định lý này chỉ ra rằng tính phản thân là một tính chất mạnh, kéo theo tính đầy đủ của không gian chuẩn.

Ví dụ minh họa: Không gian chuẩn hữu hạn chiều là phản thân, nên chúng luôn là không gian Banach.

Định lý 4.6-6 (Không gian Hilbert)

Định lý: Mọi không gian Hilbert H là phản thân.

Ý nghĩa: Các không gian Hilbert, bên cạnh cấu trúc không gian Banach, còn có tính phản thân - một tính chất quan trọng giúp trong nhiều bài toán phân tích hàm.

Ví dụ minh họa: Không gian $L^2[0,1]$ là không gian Hilbert nên nó là phản thân.

Định lý 4.6-8 (Tính khả ly)

Định lý: Nếu không gian đối ngẫu X' của một không gian chuẩn X là khả ly, thì bản thân X cũng khả ly.

Ý nghĩa: Định lý này giúp chứng minh không gian nào đó không phản thân bằng cách chỉ ra X là khả ly nhưng X' thì không.

Ví dụ minh họa: Không gian l^1 là khả ly nhưng không gian đối ngẫu của nó là l^∞ thì không khả ly. Do đó, l^1 không phản thân.

Tổng kết (Cheatsheet)

Định lý Hahn-Banach

- **Định lý 4.2-1 (Không gian vector thực):** Mở rộng hàm tuyến tính thỏa mãn $f(x) \leq p(x)$ với p là hàm nửa tuyến tính
- **Định lý 4.3-1 (Không gian vector phức):** Mở rộng hàm tuyến tính thỏa mãn $|f(x)| \leq p(x)$
- **Định lý 4.3-2 (Không gian chuẩn):** Mở rộng hàm tuyến tính bị chặn với cùng chuẩn

Hàm tuyến tính bị chặn

- **Định lý 4.3-3:** Với mọi $x_0 \neq 0$ tồn tại $f \in X'$ với $|f| = 1$ và $f(x_0) = |x_0|$
- **Hệ quả 4.3-4:** $|x| = \sup_{f \in X', f \neq 0} \frac{|f(x)|}{|f|}$

Không gian phản thân

- **Định nghĩa 4.6-3:** X là phản thân nếu $\mathcal{R}(C) = X''$ với C là ánh xạ chính tắc
- **Định lý 4.6-4:** Không gian phản thân là không gian Banach
- **Định lý 4.6-5:** Không gian hữu hạn chiều là phản thân
- **Định lý 4.6-6:** Không gian Hilbert là phản thân
- **Định lý 4.6-8:** Nếu X' khả ly thì X khả ly

Không gian phản thân quan trọng

- $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ với mọi $n < \infty$
- l^p với $1 < p < \infty$
- $L^p[a, b]$ với $1 < p < \infty$
- Mọi không gian Hilbert

Không gian không phản thân quan trọng

- l^1, l^∞
- $L^1[a, b], L^\infty[a, b]$
- $C[a, b]$ (không gian các hàm liên tục)
- c, c_0 (không gian các dãy hội tụ và dãy hội tụ về 0)

Chapter 04b - Applications

Bài tập 1: Chứng minh rằng không gian véc-tơ chuẩn với chuẩn định nghĩa bởi công thức (1) trên tích Descartes $X \times Y$ đúng là một không gian chuẩn.

Trước tiên, chúng ta hãy nhìn lại định nghĩa của chuẩn trên $X \times Y$:

$|(x, y)| = |x| + |y|$

Ta cần kiểm tra 3 tính chất của chuẩn:

1. **Tính xác định dương**: $|(x, y)| \geq 0$ và $|(x, y)| = 0$ khi và chỉ khi $(x, y) = (0, 0)$

$|(x, y)| = |x| + |y| \geq 0$ vì cả $|x|$ và $|y|$ đều không âm (do là chuẩn)

$|(x, y)| = 0 \Leftrightarrow |x| + |y| = 0 \Leftrightarrow |x| = 0$ và $|y| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ và $y = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$

2. **Tính đồng nhất**: $|\alpha(x, y)| = |\alpha||(x, y)|$ với mọi vô hướng α

$|\alpha(x, y)| = |(\alpha x, \alpha y)| = |\alpha x| + |\alpha y| = |\alpha||x| + |\alpha||y| = |\alpha|(|x| + |y|) = |\alpha||(x, y)|$

3. **Bất đẳng thức tam giác**: $|(x_1, y_1) + (x_2, y_2)| \leq |(x_1, y_1)| + |(x_2, y_2)|$

$|(x_1, y_1) + (x_2, y_2)| = |(x_1 + x_2, y_1 + y_2)| = |x_1 + x_2| + |y_1 + y_2| \leq |x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2| = |(x_1, y_1)| + |(x_2, y_2)|$

Vậy công thức (1) thỏa mãn tất cả các điều kiện của một chuẩn.

Bài tập 2: Hãy xem xét hai chuẩn khác trên không gian tích Descartes $X \times Y$:

$$|(x, y)| = \max |x|, |y|$$

và

$$|(x, y)|_0 = (|x|^2 + |y|^2)^{1/2}$$

Chứng minh rằng đây là các chuẩn.

Đối với chuẩn thứ nhất: $|(x, y)| = \max |x|, |y|$

1. **Tính xác định dương**:
   - $|(x, y)| = \max |x|, |y| \geq 0$ vì cả $|x|$ và $|y|$ đều không âm
   - $|(x, y)| = 0 \Leftrightarrow \max |x|, |y| = 0 \Leftrightarrow |x| = 0$ và $|y| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ và $y = 0$
2. **Tính đồng nhất**: $|\alpha(x, y)| = \max |\alpha x|, |\alpha y| = \max |\alpha||x|, |\alpha||y| = |\alpha| \max |x|, |y| = |\alpha||(x, y)|$
3. **Bất đẳng thức tam giác**: $|(x_1, y_1) + (x_2, y_2)| = \max |x_1 + x_2|, |y_1 + y_2| \leq \max |x_1| + |x_2|, |y_1| + |y_2|$

   Nếu $|x_1| \geq |y_1|$ và $|x_2| \geq |y_2|$ thì $\max |x_1| + |x_2|, |y_1| + |y_2| = |x_1| + |x_2| = |(x_1, y_1)| + |(x_2, y_2)|$

   Tương tự cho các trường hợp khác, ta luôn có: $|(x_1, y_1) + (x_2, y_2)| \leq |(x_1, y_1)| + |(x_2, y_2)|$

Đối với chuẩn thứ hai: $|(x, y)|_0 = (|x|^2 + |y|^2)^{1/2}$

1. **Tính xác định dương**:
   - $|(x, y)|_0 = (|x|^2 + |y|^2)^{1/2} \geq 0$ vì căn bậc hai của số không âm luôn không âm
   - $|(x, y)|_0 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 + |y|^2 = 0 \Leftrightarrow |x| = 0$ và $|y| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ và $y = 0$
2. **Tính đồng nhất**: $|\alpha(x, y)|_0 = (|\alpha x|^2 + |\alpha y|^2)^{1/2} = (|\alpha|^2|x|^2 + |\alpha|^2|y|^2)^{1/2} = |\alpha|(|x|^2 + |y|^2)^{1/2} = |\alpha||(x, y)|_0$
3. **Bất đẳng thức tam giác**: (Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz) $|(x_1, y_1) + (x_2, y_2)|_0^2 = |x_1 + x_2|^2 + |y_1 + y_2|^2$
   $\leq (|x_1| + |x_2|)^2 + (|y_1| + |y_2|)^2 = |x_1|^2 + 2|x_1||x_2| + |x_2|^2 + |y_1|^2 + 2|y_1||y_2| + |y_2|^2$

   Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz: $2|x_1||x_2| + 2|y_1||y_2| \leq 2(|x_1|^2 + |y_1|^2)^{1/2}(|x_2|^2 + |y_2|^2)^{1/2}$

   Do đó: $|(x_1, y_1) + (x_2, y_2)|_0 \leq |(x_1, y_1)|_0 + |(x_2, y_2)|_0$

Vậy cả hai đều là chuẩn hợp lệ trên $X \times Y$.

Bài tập 3: Chứng minh rằng đồ thị $\mathcal{G}(T)$ của một toán tử tuyến tính $T : X \to Y$ là một không gian con tuyến tính của $X \times Y$.

Đồ thị của toán tử T được định nghĩa là: $\mathcal{G}(T) = (x, y)|x \in \mathcal{D}(T), y = Tx$

Ta cần chứng minh $\mathcal{G}(T)$ là một không gian con tuyến tính, tức là:

1. Nếu $(x_1, Tx_1), (x_2, Tx_2) \in \mathcal{G}(T)$, thì $(x_1, Tx_1) + (x_2, Tx_2) \in \mathcal{G}(T)$
2. Nếu $(x, Tx) \in \mathcal{G}(T)$ và α là một vô hướng, thì $\alpha(x, Tx) \in \mathcal{G}(T)$

Chứng minh:

1. Giả sử $(x_1, Tx_1), (x_2, Tx_2) \in \mathcal{G}(T)$

   $(x_1, Tx_1) + (x_2, Tx_2) = (x_1 + x_2, Tx_1 + Tx_2)$

   Vì T là toán tử tuyến tính, nên $Tx_1 + Tx_2 = T(x_1 + x_2)$

   Do đó $(x_1 + x_2, T(x_1 + x_2)) \in \mathcal{G}(T)$
2. Giả sử $(x, Tx) \in \mathcal{G}(T)$ và α là một vô hướng

   $\alpha(x, Tx) = (\alpha x, \alpha Tx)$

   Vì T là toán tử tuyến tính, nên $\alpha Tx = T(\alpha x)$

   Do đó $(\alpha x, T(\alpha x)) \in \mathcal{G}(T)$

Vậy $\mathcal{G}(T)$ là một không gian con tuyến tính của $X \times Y$.

Bài tập 6: Nếu nghịch đảo T^{-1} của một toán tử tuyến tính đóng tồn tại, chứng minh rằng T^{-1} cũng là một toán tử tuyến tính đóng.

Trước tiên, ta hãy nhắc lại định nghĩa của toán tử đóng từ định lý 4.13-3:

Định nghĩa: Toán tử tuyến tính $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ được gọi là đóng nếu và chỉ nếu nó có tính chất sau: Nếu $x_n \to x$ với $x_n \in \mathcal{D}(T)$, và $Tx_n \to y$, thì $x \in \mathcal{D}(T)$ và $Tx = y$.

Bây giờ, giả sử $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{R}(T)$ là một toán tử tuyến tính đóng và $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \to \mathcal{D}(T)$ tồn tại. Ta cần chứng minh T^{-1} cũng là một toán tử đóng.

Để làm điều này, ta chứng minh theo định nghĩa: Giả sử $y_n \to y$ với $y_n \in \mathcal{R}(T)$, và $T^{-1}y_n \to x$ cho một số $x \in X$. Ta cần chứng minh rằng $y \in \mathcal{R}(T)$ và $T^{-1}y = x$.

Đặt $x_n = T^{-1}y_n$. Khi đó $Tx_n = y_n$ (vì $T \circ T^{-1} = I$ trên $\mathcal{R}(T)$).

Ta có:

- $x_n \to x$
- $Tx_n = y_n \to y$

Vì T là toán tử đóng, ta có $x \in \mathcal{D}(T)$ và $Tx = y$. Điều này có nghĩa $y \in \mathcal{R}(T)$ và $T^{-1}y = x$.

Vậy T^{-1} là một toán tử đóng.

Bài tập 11: Chứng minh rằng không gian không $N(T)$ của một toán tử tuyến tính đóng $T : X \to Y$ là một không gian con đóng của X.

Định nghĩa: Không gian không $N(T)$ của toán tử tuyến tính T là tập hợp: $N(T) = x \in \mathcal{D}(T)|Tx = 0$

Chúng ta cần chứng minh:

1. $N(T)$ là một không gian con tuyến tính của X
2. $N(T)$ là một tập đóng trong X

Phần 1: $N(T)$ là một không gian con tuyến tính

- Nếu $x_1, x_2 \in N(T)$, thì $Tx_1 = 0$ và $Tx_2 = 0$. Vì T tuyến tính, ta có $T(x_1 + x_2) = Tx_1 + Tx_2 = 0 + 0 = 0$. Do đó $x_1 + x_2 \in N(T)$.
- Nếu $x \in N(T)$ và α là vô hướng, thì $Tx = 0$. Vì T tuyến tính, ta có $T(\alpha x) = \alpha Tx = \alpha \cdot 0 = 0$. Do đó $\alpha x \in N(T)$.

Phần 2: $N(T)$ là một tập đóng

Giả sử (x_n) là một dãy trong $N(T)$ và $x_n \to x$ khi $n \to \infty$. Ta cần chứng minh $x \in N(T)$.

Vì $x_n \in N(T)$, ta có $Tx_n = 0$ với mọi n.

Do đó, $Tx_n \to 0$ khi $n \to \infty$.

Vì T là toán tử đóng, nên từ $x_n \to x$ và $Tx_n \to 0$, ta suy ra $x \in \mathcal{D}(T)$ và $Tx = 0$.

Điều này có nghĩa $x \in N(T)$.

Vậy $N(T)$ là một không gian con đóng của X.

Bài tập 12: Nếu X và Y là các không gian chuẩn, $T_1 : X \to Y$ là toán tử tuyến tính đóng và $T_2 \in B(X, Y)$, chứng minh rằng $T_1 + T_2$ là toán tử tuyến tính đóng.

Đầu tiên, ta cần xác định miền xác định của $T_1 + T_2$, đó là: $\mathcal{D}(T_1 + T_2) = \mathcal{D}(T_1) \cap \mathcal{D}(T_2) = \mathcal{D}(T_1)$ (vì $\mathcal{D}(T_2) = X$)

Vì T_1 và T_2 là các toán tử tuyến tính, nên $T_1 + T_2$ cũng là toán tử tuyến tính.

Giờ ta sẽ chứng minh $T_1 + T_2$ là toán tử đóng sử dụng định nghĩa 4.13-3.

Giả sử (x_n) là một dãy trong $\mathcal{D}(T_1)$ sao cho $x_n \to x$ và $(T_1 + T_2)x_n \to y$ khi $n \to \infty$.

Ta có: $(T_1 + T_2)x_n = T_1x_n + T_2x_n$

Vì T_2 là toán tử bị chặn (bounded) và $x_n \to x$, nên $T_2x_n \to T_2x$ theo tính liên tục của T_2.

Do đó, $T_1x_n = (T_1 + T_2)x_n - T_2x_n \to y - T_2x$.

Bây giờ ta có:

- $x_n \to x$
- $T_1x_n \to y - T_2x$

Vì T_1 là toán tử đóng, ta suy ra $x \in \mathcal{D}(T_1)$ và $T_1x = y - T_2x$.

Do đó, $x \in \mathcal{D}(T_1 + T_2)$ và $(T_1 + T_2)x = T_1x + T_2x = (y - T_2x) + T_2x = y$.

Vậy $T_1 + T_2$ là toán tử đóng.

Bài tập 14: Giả sử các số hạng của chuỗi $u_1 + u_2 + \ldots$ là các hàm khả vi liên tục trên đoạn $J = [0, 1]$ và chuỗi hội tụ đều trên J với tổng x. Hơn nữa, giả sử rằng $u_1' + u_2' + \ldots$ cũng hội tụ đều trên J. Chứng minh rằng x là khả vi liên tục trên $(0, 1)$ và $x' = u_1' + u_2' + \ldots$

Bài tập này liên quan đến việc ta có thể đổi vị trí của phép lấy đạo hàm và tổng vô hạn khi các điều kiện nhất định được đảm bảo.

Đầu tiên, vì chuỗi $u_1 + u_2 + \ldots$ hội tụ đều về x trên $[0, 1]$, ta biết x là một hàm liên tục trên $[0, 1]$.

Gọi $v(t) = u_1'(t) + u_2'(t) + \ldots$. Vì chuỗi này hội tụ đều, nên v là một hàm liên tục trên $[0, 1]$.

Với mỗi $t \in (0, 1)$, ta xét đạo hàm của x. Với mỗi n, ta định nghĩa $S_n(t) = u_1(t) + u_2(t) + \ldots + u_n(t)$.

Từ lý thuyết giải tích cơ bản, ta có: $\int_0^t v(s)ds = \int_0^t \lim_{n\to\infty} S_n'(s)ds = \lim_{n\to\infty} \int_0^t S_n'(s)ds = \lim_{n\to\infty}[S_n(t) - S_n(0)]$

Vì $S_n \to x$ đều, ta có: $\int_0^t v(s)ds = x(t) - x(0)$

Áp dụng định lý giá trị trung bình của phép tính vi phân, ta có: $x'(t) = v(t)$ với mọi $t \in (0, 1)$

Vậy x là khả vi liên tục trên $(0, 1)$ và $x' = u_1' + u_2' + \ldots$

Bài tập 15: Định lý đồ thị đóng (Closed Graph Theorem)

Hãy tìm hiểu Định lý đồ thị đóng qua Định lý 4.13-2:

Định lý đồ thị đóng: Cho X và Y là các không gian Banach và $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ là một toán tử tuyến tính đóng, với $\mathcal{D}(T) \subset X$. Nếu $\mathcal{D}(T)$ đóng trong X, thì toán tử T là bị chặn.

Giờ ta sẽ giải bài tập 15:

Cho $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ là toán tử tuyến tính với đồ thị $\mathcal{G}(T)$, trong đó $\mathcal{D}(T) \subset X$ và X, Y là các không gian Banach. Chứng minh rằng T có một mở rộng $\tilde{T}$ là toán tử tuyến tính đóng với đồ thị $\overline{\mathcal{G}(T)}$ nếu và chỉ nếu $\overline{\mathcal{G}(T)}$ không chứa phần tử nào có dạng $(0, y)$ với $y \neq 0$.

Chứng minh:

Chiều thuận: Giả sử T có một mở rộng $\tilde{T}$ là toán tử tuyến tính đóng với đồ thị $\overline{\mathcal{G}(T)}$.

Giả sử tồn tại $(0, y) \in \overline{\mathcal{G}(T)}$ với $y \neq 0$. Vì $\overline{\mathcal{G}(T)} = \mathcal{G}(\tilde{T})$, điều này có nghĩa là $(0, y) \in \mathcal{G}(\tilde{T})$, tức là $\tilde{T}(0) = y$. Nhưng vì $\tilde{T}$ là toán tử tuyến tính, nên $\tilde{T}(0) = 0$. Điều này mâu thuẫn với giả định $y \neq 0$. Vậy $\overline{\mathcal{G}(T)}$ không chứa phần tử nào có dạng $(0, y)$ với $y \neq 0$.

Chiều đảo: Giả sử $\overline{\mathcal{G}(T)}$ không chứa phần tử nào có dạng $(0, y)$ với $y \neq 0$.

Đặt $\mathcal{D}(\tilde{T}) = x \in X | \exists y \in Y \text{ sao cho } (x, y) \in \overline{\mathcal{G}(T)}$

Với mỗi $x \in \mathcal{D}(\tilde{T})$, định nghĩa $\tilde{T}(x) = y$ nếu $(x, y) \in \overline{\mathcal{G}(T)}$.

Ta phải chứng minh rằng $\tilde{T}$ được xác định rõ ràng. Giả sử $(x, y_1), (x, y_2) \in \overline{\mathcal{G}(T)}$. Khi đó $(0, y_1 - y_2) = (x, y_1) - (x, y_2) \in \overline{\mathcal{G}(T)}$ (vì $\overline{\mathcal{G}(T)}$ là không gian con tuyến tính). Theo giả định, điều này buộc $y_1 - y_2 = 0$, tức là $y_1 = y_2$. Vậy $\tilde{T}$ được xác định rõ ràng.

Rõ ràng $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(\tilde{T})$ và $\tilde{T}(x) = T(x)$ với mọi $x \in \mathcal{D}(T)$, nên $\tilde{T}$ là một mở rộng của T.

Tính chất tuyến tính của $\tilde{T}$ theo từ tính chất tuyến tính của $\overline{\mathcal{G}(T)}$.

Cuối cùng, $\mathcal{G}(\tilde{T}) = \overline{\mathcal{G}(T)}$ theo định nghĩa, và vì $\overline{\mathcal{G}(T)}$ là đóng, nên $\tilde{T}$ là toán tử đóng.

Tôi sẽ hoàn thiện phần tổng kết của bài giảng, tập trung vào việc tạo một tổng quan về toán tử đóng và các định lý cơ bản trong không gian Banach như một cheatsheet hữu ích.

Tổng kết: Toán tử đóng và các định lý cơ bản trong không gian Banach

1. Chuẩn trên không gian tích Descartes (Cartesian Product)

Có ba chuẩn tương đương trên không gian tích $X \times Y$:

- Chuẩn tổng: $|(x, y)|_1 = |x| + |y|$
- Chuẩn max: $|(x, y)|_\infty = \max |x|, |y|$
- Chuẩn Euclid: $|(x, y)|_2 = (|x|^2 + |y|^2)^{1/2}$

Các chuẩn này đều thỏa mãn ba tính chất:

1. Tính xác định dương: $|(x, y)| \geq 0$ và $|(x, y)| = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$
2. Tính đồng nhất: $|\alpha(x, y)| = |\alpha||(x, y)|$
3. Bất đẳng thức tam giác: $|(x_1, y_1) + (x_2, y_2)| \leq |(x_1, y_1)| + |(x_2, y_2)|$

2. Đồ thị của toán tử tuyến tính

Cho $T : X \to Y$ là toán tử tuyến tính với miền xác định $\mathcal{D}(T) \subset X$. Đồ thị của T được định nghĩa là:

$$\mathcal{G}(T) = (x, Tx) \mid x \in \mathcal{D}(T)$$

Tính chất quan trọng:

- $\mathcal{G}(T)$ là không gian con tuyến tính của $X \times Y$
- Nếu T là toán tử đóng thì $\mathcal{G}(T)$ là tập đóng trong $X \times Y$
- Ngược lại, nếu $\mathcal{G}(T)$ là tập đóng trong $X \times Y$, thì T là toán tử đóng

Ví dụ: Xét toán tử vi phân $D : C^1[0, 1] \to C[0, 1]$ với $Df = f'$. Đồ thị của D là:

$$\mathcal{G}(D) = (f, f') \mid f \in C^1[0, 1]$$

3. Toán tử đóng

Định nghĩa 1: Toán tử tuyến tính $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ được gọi là đóng nếu đồ thị $\mathcal{G}(T)$ là tập đóng trong $X \times Y$.

Định nghĩa 2 (tương đương): Toán tử tuyến tính T là đóng khi và chỉ khi:
Nếu (x_n) là dãy trong $\mathcal{D}(T)$ thỏa mãn $x_n \to x$ và $Tx_n \to y$, thì $x \in \mathcal{D}(T)$ và $Tx = y$.

Ví dụ: Toán tử vi phân $D : C^1[0, 1] \to C[0, 1]$ là một toán tử đóng. Nếu (f_n) là dãy hàm trong $C^1[0, 1]$ với $f_n \to f$ (hội tụ đều) và $f'_n \to g$ (hội tụ đều), thì $f \in C^1[0, 1]$ và $f' = g$.

4. Các tính chất quan trọng của toán tử đóng

1. **Tổng với toán tử bị chặn**: Nếu $T_1 : \mathcal{D}(T_1) \to Y$ là toán tử tuyến tính đóng và $T_2 \in B(X, Y)$ là toán tử bị chặn, thì $T_1 + T_2$ với miền xác định $\mathcal{D}(T_1 + T_2) = \mathcal{D}(T_1)$ là toán tử đóng.
2. **Không gian không (Null space)**: Không gian không $N(T) = x \in \mathcal{D}(T) \mid Tx = 0$ của toán tử tuyến tính đóng T là không gian con đóng của X.
3. **Nghịch đảo**: Nếu $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{R}(T)$ là toán tử tuyến tính đóng và nghịch đảo $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \to \mathcal{D}(T)$ tồn tại, thì T^{-1} cũng là toán tử tuyến tính đóng.
4. **Mở rộng đóng**: Toán tử tuyến tính T có mở rộng đóng $\tilde{T}$ với đồ thị $\overline{\mathcal{G}(T)}$ khi và chỉ khi $\overline{\mathcal{G}(T)}$ không chứa phần tử nào có dạng $(0, y)$ với $y \neq 0$.

5. Định lý đồ thị đóng (Closed Graph Theorem)

Định lý: Cho X và Y là các không gian Banach và $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ là toán tử tuyến tính đóng với $\mathcal{D}(T) = X$. Khi đó T là toán tử bị chặn.

Hệ quả: Nếu $T : X \to Y$ là toán tử tuyến tính với X, Y là không gian Banach, thì $T \in B(X, Y)$ (tức T bị chặn) khi và chỉ khi T là toán tử đóng.

Ví dụ: Xét $X = Y = \ell^2$ (không gian các dãy số với $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$). Nếu $T : \ell^2 \to \ell^2$ là toán tử tuyến tính thỏa mãn: nếu $x_n \to x$ và $Tx_n \to y$ thì $Tx = y$, thì T phải là toán tử bị chặn, tức tồn tại $M > 0$ sao cho $|Tx| \leq M|x|$ với mọi $x \in \ell^2$.

6. Ứng dụng trong giải tích hàm

Đạo hàm của tổng hàm: Nếu chuỗi $u_1 + u_2 + \dots$ gồm các hàm khả vi liên tục trên $[0, 1]$ hội tụ đều về x, và chuỗi $u_1' + u_2' + \dots$ cũng hội tụ đều, thì x khả vi liên tục và $x' = u_1' + u_2' + \dots$

Liên hệ với Định lý Banach-Steinhaus: Nếu (T_n) là dãy các toán tử tuyến tính bị chặn trên không gian Banach X và với mỗi $x \in X$, dãy $(T_n x)$ hội tụ, thì toán tử T với $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$ là toán tử tuyến tính bị chặn.

Ứng dụng trong phương trình vi phân: Trong lý thuyết phương trình vi phân, tính chất đóng của toán tử vi phân giúp chứng minh tính tồn tại và duy nhất của nghiệm đối với nhiều lớp phương trình.

7. Mối quan hệ giữa tính đóng và tính bị chặn

- Mọi toán tử tuyến tính bị chặn đều là toán tử đóng.
- Toán tử tuyến tính đóng với miền xác định đóng trong không gian Banach là toán tử bị chặn.
- Toán tử đóng không nhất thiết phải bị chặn nếu miền xác định không đóng.

Ví dụ minh họa: Toán tử vi phân $D : C^1[0, 1] \to C[0, 1]$ là đóng nhưng không bị chặn, vì $\mathcal{D}(D) = C^1[0, 1]$ không đóng trong $C[0, 1]$ với chuẩn đều.

8. Công cụ kiểm tra

Để kiểm tra một toán tử T có đóng hay không:

1. Kiểm tra tính đóng của đồ thị $\mathcal{G}(T)$
2. Hoặc kiểm tra theo định nghĩa: nếu $x_n \to x$ và $Tx_n \to y$ thì $x \in \mathcal{D}(T)$ và $Tx = y$
3. Nếu T là toán tử bị chặn với miền xác định đóng, thì T đóng

Tính chất đóng là công cụ quan trọng trong lý thuyết về toán tử tuyến tính, đặc biệt khi nghiên cứu các toán tử chưa bị chặn trong không gian Banach và ứng dụng trong các phương trình vi phân, tích phân.

Chapter 05 - Banach Fixed Point Theorem

Bài tập 2: Phép co và điểm bất động

Cho $X = x \in \mathbb{R} | x \geq 1 \subset \mathbb{R}$ và ánh xạ $T : X \to X$ được định nghĩa bởi $Tx = x/2 + x^{-1}$. Hãy chứng minh rằng T là một phép co và tìm hằng số co nhỏ nhất.

Giải:

Để chứng minh T là một phép co, chúng ta cần tìm một số $\alpha < 1$ sao cho với mọi $x, y \in X$:

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$$

Trong không gian X với metric thông thường, ta có:

$$d(Tx, Ty) = |Tx - Ty| = \left| \frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \frac{y}{2} - \frac{1}{y} \right| = \left| \frac{x-y}{2} + \frac{y-x}{xy} \right|$$
$$= \left| \frac{(x-y)(y-x)}{2xy} \right| = \frac{|x-y|}{2} \cdot \left| 1 - \frac{2}{xy} \right|$$

Vì $x, y \geq 1$, nên $xy \geq 1$, và do đó $\frac{2}{xy} \leq 2$. Đặt $f(x, y) = \left| 1 - \frac{2}{xy} \right|$, ta cần xác định giá trị lớn nhất của $f(x, y)$.

Để tối ưu hóa, xét trường hợp $xy = 1$, khi đó $f(x, y) = |1 - 2| = 1$. Khi $xy > 1$, giá trị của $f(x, y)$ nhỏ hơn 1. Vậy $f(x, y) \leq 1$ và:

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{1}{2} d(x, y)$$

Điều này chứng tỏ T là một phép co với hằng số co $\alpha = \frac{1}{2}$.

Để kiểm tra xem $\alpha = \frac{1}{2}$ có phải là hằng số co nhỏ nhất không, ta lập luận ngược lại. Giả sử có $\alpha' < \frac{1}{2}$ sao cho $d(Tx, Ty) \leq \alpha' d(x, y)$ với mọi $x, y \in X$. Xét $x \to \infty$ và $y \to \infty$, khi đó $\frac{2}{xy} \to 0$ và $\left| 1 - \frac{2}{xy} \right| \to 1$. Do đó:

$$\lim_{x,y \to \infty} \frac{d(Tx, Ty)}{d(x, y)} = \frac{1}{2}$$

Điều này mâu thuẫn với giả định rằng $\alpha' < \frac{1}{2}$. Vì vậy, $\alpha = \frac{1}{2}$ là hằng số co nhỏ nhất.

Định lý điểm bất động Banach (Định lý co)

Trước khi đi đến các bài tập tiếp theo, chúng ta hãy ôn lại định lý điểm bất động Banach:

Định lý 5.1-2 (Định lý điểm bất động Banach): Xét một không gian metric đầy đủ $X = (X, d)$, trong đó $X \neq \emptyset$. Giả sử $T : X \to X$ là một phép co trên X. Khi đó T có đúng một điểm bất động.

Trong đó, phép co được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 5.1-1 (Phép co): Cho $X = (X, d)$ là một không gian metric. Một ánh xạ $T : X \to X$ được gọi là một phép co nếu tồn tại một số dương $\alpha < 1$ sao cho với mọi $x, y \in X$:

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) \quad (\alpha < 1)$$

Ý nghĩa hình học: Điều này có nghĩa là bất kỳ hai điểm x và y nào cũng sẽ có ảnh gần nhau hơn so với khoảng cách ban đầu; cụ thể, tỷ lệ $\frac{d(Tx,Ty)}{d(x,y)}$ không vượt quá hằng số $\alpha < 1$.

Ví dụ minh họa: Ánh xạ $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được định nghĩa bởi $Tx = \frac{x}{3}$ là một phép co với hằng số co $\alpha = \frac{1}{3}$, vì:

$$d(Tx, Ty) = \left| \frac{x}{3} - \frac{y}{3} \right| = \frac{1}{3}|x - y| = \frac{1}{3} d(x, y)$$

Bài tập 3: Tính chất đầy đủ không thể bỏ qua

Hãy minh họa bằng một ví dụ rằng trong Định lý 5.1-2, tính chất đầy đủ là thiết yếu và không thể bỏ qua.

Giải:

Xét không gian metric $X = (0, 1)$ với metric thông thường $d(x, y) = |x - y|$. X không đầy đủ vì dãy Cauchy $1/n$ hội tụ đến 0 nhưng $0 \notin X$.

Định nghĩa ánh xạ $T : X \to X$ bởi $Tx = \frac{x}{2}$. Ta có:

$$d(Tx, Ty) = \left| \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \right| = \frac{1}{2}|x - y| = \frac{1}{2} d(x, y)$$

Vậy T là một phép co với hằng số co $\alpha = \frac{1}{2} < 1$.

Tuy nhiên, T không có điểm bất động trong X. Vì nếu có $x \in X$ sao cho $Tx = x$, thì $\frac{x}{2} = x$, suy ra $x = 0$. Nhưng $0 \notin X$, vì vậy T không có điểm bất động trong X.

Ví dụ này minh họa rằng tính chất đầy đủ của không gian metric là thiết yếu trong Định lý điểm bất động Banach.

Hệ quả 5.1-3 (Lặp và đánh giá sai số)

Hệ quả 5.1-3: Với các điều kiện như trong Định lý 5.1-2, dãy lặp (x_n) với tùy ý $x_0 \in X$ được định nghĩa bởi:

$$x_{n+1} = Tx_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

hội tụ đến điểm bất động duy nhất x của T. Các đánh giá sai số là:

- Đánh giá tiên nghiệm:

$$d(x_m, x) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1)$$

- Đánh giá hậu nghiệm:

$$d(x_m, x) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_{m-1}, x_m)$$

Ví dụ minh họa: Xét $T : [0,1] \to [0,1]$ định nghĩa bởi $Tx = \frac{x}{3} + \frac{1}{4}$. Ánh xạ này là một phép co với $\alpha = \frac{1}{3}$. Điểm bất động của T là nghiệm của phương trình $x = \frac{x}{3} + \frac{1}{4}$, tức là $x = \frac{3}{8}$.

Nếu bắt đầu với $x_0 = 0$, thì:

- $x_1 = T(0) = \frac{1}{4}$
- $x_2 = T(x_1) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$
- $x_3 = T(x_2) = \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{13}{36}$

Sai số sau bước lặp thứ 3 có thể đánh giá:

$$d(x_3, x) \leq \frac{\alpha^3}{1-\alpha} d(x_0, x_1) = \frac{(1/3)^3}{1-1/3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1/27}{2/3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{81}$$

Bài tập 6: Phép co lặp

Nếu T là một phép co, hãy chứng minh rằng T^n (với $n \in \mathbb{N}$) cũng là một phép co. Nếu T^n là một phép co với $n > 1$, hãy chỉ ra rằng T không nhất thiết phải là một phép co.

Giải:

Phần 1: Chứng minh T^n là phép co nếu T là phép co.

Giả sử T là phép co với hằng số co $\alpha < 1$. Với mọi $x, y \in X$, ta có:

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$$

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp toán học rằng:

$$d(T^n x, T^n y) \leq \alpha^n d(x, y)$$

- Với $n = 1$, mệnh đề đúng theo giả thiết.
- Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$, tức là $d(T^k x, T^k y) \leq \alpha^k d(x, y)$.
- Với $n = k + 1$, ta có:

$$d(T^{k+1}x, T^{k+1}y) = d(T(T^k x), T(T^k y)) \leq \alpha d(T^k x, T^k y) \leq \alpha \cdot \alpha^k d(x, y) = \alpha^{k+1} d(x, y)$$

Vì $\alpha < 1$ nên $\alpha^n < 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, do đó T^n là phép co với hằng số co α^n.

Phần 2: Chỉ ra rằng nếu T^n là phép co với $n > 1$, thì T không nhất thiết phải là phép co.

Xét ánh xạ $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $Tx = -\frac{3}{2}x$.

Với T^2, ta có $T^2 x = T(Tx) = T(-\frac{3}{2}x) = -\frac{3}{2} \cdot (-\frac{3}{2}x) = \frac{9}{4}x$.

Với mọi $x, y \in \mathbb{R}$:

$$d(T^2 x, T^2 y) = |T^2 x - T^2 y| = \left|\frac{9}{4}x - \frac{9}{4}y\right| = \frac{9}{4}|x - y| = \frac{9}{4} d(x, y)$$

Vì $\frac{9}{4} > 1$, nên T^2 không phải là phép co.

Tuy nhiên, xét T^2 trên tập $X = 0$ (tập hợp chỉ chứa một phần tử), thì T^2 là phép co vì mọi ánh xạ trên tập chỉ có một phần tử đều là phép co. Nhưng T thì không phải là phép co trên $\mathbb{R}$ vì:

$$d(Tx, Ty) = |Tx - Ty| = \left|-\frac{3}{2}x - (-\frac{3}{2}y)\right| = \frac{3}{2}|x - y| = \frac{3}{2}d(x, y)$$

và $\frac{3}{2} > 1$.

Định lý 5.1-4 (Phép co trên một quả cầu đóng)

Định lý 5.1-4: Cho T là một ánh xạ của một không gian metric đầy đủ $X = (X, d)$ vào chính nó. Giả sử T là một phép co trên một quả cầu đóng $Y = x \in X | d(x, x_0) \leq r$, nghĩa là, T thỏa mãn điều kiện (1) với mọi $x, y \in Y$. Hơn nữa, giả sử rằng:

$$d(x_0, Tx_0) < (1 - \alpha)r$$

Khi đó dãy lặp (2) hội tụ đến một phần tử $x \in Y$. x này là điểm bất động của T và là điểm bất động duy nhất của T trong Y.

Ý nghĩa: Định lý này giúp chúng ta sử dụng định lý điểm bất động Banach ngay cả khi T không phải là phép co trên toàn bộ không gian X mà chỉ là phép co trên một quả cầu đóng trong X.

Bài tập 9: Xác định biên độ số lặp để đạt độ chính xác cho trước

Trong trường hợp Định lý 5.1-4, chứng minh rằng ta có đánh giá sai số tiên nghiệm $d(x_m, x) < \alpha^m r$ và đánh giá sai số hậu nghiệm (6).

Giải:

Theo chứng minh của Định lý 5.1-4, tất cả x_m và x đều nằm trong quả cầu đóng Y. Khi áp dụng công thức đánh giá trong bài toán điểm bất động trên Y, từ (4) với $m = 0$, ta có:

$$d(x_0, x_n) \leq \frac{1}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) < \frac{(1 - \alpha)r}{1 - \alpha} = r$$

Với $n \to \infty$, ta có $d(x_0, x) \leq r$. Từ (4), ta có:

$$d(x_m, x) \leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) < \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} \cdot (1 - \alpha)r = \alpha^m r$$

Đây là đánh giá sai số tiên nghiệm.

Còn đánh giá sai số hậu nghiệm (6) giữ nguyên như trong Hệ quả 5.1-3:

$$d(x_m, x) \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} d(x_{m-1}, x_m)$$

Bài tập 12: Ứng dụng định lý Banach giải phương trình

Sử dụng Định lý 5.1-2, thiết lập một quy trình lặp để giải $f(x) = 0$ nếu f liên tục khả vi trên một khoảng $J = [a, b]$, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ và $0 < k_1 \leq f'(x) \leq k_2$ $(x \in J)$; sử dụng $g(x) = x - \lambda f(x)$ với một λ thích hợp.

Giải:

Chúng ta định nghĩa ánh xạ $T : J \to \mathbb{R}$ bởi:

$$T(x) = g(x) = x - \lambda f(x)$$

Trong đó λ là một tham số cần xác định.

Để T là một phép co, đầu tiên ta cần T ánh xạ từ J vào J, và thứ hai, T phải thỏa mãn điều kiện phép co.

Xét đạo hàm của $g(x)$:

$$g'(x) = 1 - \lambda f'(x)$$

Vì $k_1 \leq f'(x) \leq k_2$, nên:

$$1 - \lambda k_2 \leq g'(x) \leq 1 - \lambda k_1$$

Để $g'(x)$ có độ lớn nhỏ hơn 1 (điều kiện cho phép co), ta cần:

$$|g'(x)| < 1 \quad \text{với mọi } x \in J$$

Điều này xảy ra khi $-1 < g'(x) < 1$, tức là:

$$-1 < 1 - \lambda k_2 \leq g'(x) \leq 1 - \lambda k_1 < 1$$

Từ đó ta có:

$$0 < \lambda k_1 < 2 \text{ và } \lambda k_2 < 2$$

Chọn $\lambda = \frac{1}{k_2}$ sẽ thỏa mãn điều kiện trên, khi đó:

$$0 < \frac{k_1}{k_2} < 2 \text{ và } 1 < 2$$

Điều kiện đầu tiên thỏa mãn vì $0 < k_1 \leq k_2$, và điều kiện thứ hai luôn đúng.

Với $\lambda = \frac{1}{k_2}$, ta có hằng số co $\alpha = \max|1 - \frac{k_1}{k_2}|, |1-1| = \max|1 - \frac{k_1}{k_2}|, 0 = |1 - \frac{k_1}{k_2}|$. Vì $0 < k_1 \leq k_2$, nên $0 < \frac{k_1}{k_2} \leq 1$, và do đó $\alpha = 1 - \frac{k_1}{k_2} < 1$
.

Cuối cùng, ta kiểm tra xem T có ánh xạ J vào chính nó không. Điều này có thể kiểm tra bằng cách sử dụng Định lý 5.1-4 với một quả cầu đóng phù hợp.

Vậy quá trình lặp để giải $f(x) = 0$ là:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{k_2} f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Trong đó $x_0 \in J$ và dãy (x_n) hội tụ đến nghiệm x của phương trình $f(x) = 0$.

Bài tập 16: Tính căn bậc hai

Chứng minh rằng một quy trình lặp để tính căn bậc hai của một số dương c là:

$$x_{n+1} = g(x_n) = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right)$$

Điều kiện nào ta nhận được từ bài toán 10? Bắt đầu từ $x_0 = 1$, tính các giá trị xấp xỉ $x_1, \ldots, x_4$ cho $\sqrt{2}$.

Giải:

Để tính $\sqrt{c}$, ta cần giải phương trình $f(x) = x^2 - c = 0$. Một cách là sử dụng phương pháp Newton-Raphson, có dạng:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - c}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right)$$

Đây chính là công thức lặp đã cho.

Để kiểm tra xem $g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{c}{x}\right)$ có phải là phép co không, ta tính đạo hàm:

$$g'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{c}{x^2}\right)$$

Từ bài toán 10, để phương pháp lặp hội tụ, ta cần $|g'(x)| < 1$ trong miền xét.

Với $x > 0$ và $c > 0$, khi nào $|g'(x)| < 1$?

$$\left|\frac{1}{2}\left(1 - \frac{c}{x^2}\right)\right| < 1$$

Vì $g'(x) > -\frac{1}{2}$ với mọi $x > 0$, nên chỉ cần xét điều kiện $g'(x) < 1$, tức là:

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{c}{x^2}\right) < 1$$

$$1 - \frac{c}{x^2} < 2$$

$$-\frac{c}{x^2} < 1$$

$$\frac{c}{x^2} > -1$$

Điều kiện này luôn đúng với mọi $x > 0$ và $c > 0$. Vậy $g(x)$ là phép co trên khoảng $(0, +\infty)$.

Áp dụng vào tính $\sqrt{2}$:

Với $c = 2$ và $x_0 = 1$:

$x_1 = g(x_0) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = \frac{1}{2} \cdot 3 = 1.5$

$x_2 = g(x_1) = \frac{1}{2}\left(1.5 + \frac{2}{1.5}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1.5^2+2}{1.5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4.25}{1.5} \approx 1.41667$

$x_3 = g(x_2) \approx \frac{1}{2}(1.41667 + \frac{2}{1.41667}) \approx \frac{1}{2} \cdot 2.82924 \approx 1.41462$

$x_4 = g(x_3) \approx \frac{1}{2}(1.41462 + \frac{2}{1.41462}) \approx \frac{1}{2} \cdot 2.82843 \approx 1.41421$

Ta thấy $x_4 \approx 1.41421$ rất gần với giá trị chính xác của $\sqrt{2} \approx 1.41421356\ldots$.

Tổng kết (Cheatsheet)

Định lý điểm bất động Banach và ứng dụng

1. **Phép co (Contraction):**
   - Một ánh xạ $T: X \to X$ là phép co nếu tồn tại $\alpha < 1$ sao cho $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$ với mọi $x, y \in X$
   - Hằng số co α càng nhỏ, tốc độ hội tụ càng nhanh
2. **Định lý điểm bất động Banach:**
   - Trong không gian metric đầy đủ, mọi phép co đều có đúng một điểm bất động
   - Điểm bất động có thể tìm được bằng phương pháp lặp $x_{n+1} = Tx_n$
   - Tính chất đầy đủ là thiết yếu và không thể bỏ qua
3. **Đánh giá sai số:**
   - Tiên nghiệm: $d(x_m, x) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1)$
   - Hậu nghiệm: $d(x_m, x) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_{m-1}, x_m)$
4. **Phép co trên quả cầu đóng:**
   - Nếu T là phép co trên quả cầu đóng $Y = x \in X | d(x, x_0) \leq r$ và $d(x_0, Tx_0) < (1-\alpha)r$
   - Thì T có duy nhất một điểm bất động trong Y
5. **Các phương pháp lặp quan trọng:**
   - Phương pháp Newton: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
   - Phương pháp căn bậc hai: $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right)$
   - Phương pháp Picard (giải phương trình vi phân): $x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_n(\tau)) d\tau$
6. **Ứng dụng:**
   - Giải phương trình đại số tuyến tính: $x = Cx + b$
   - Giải phương trình vi phân thường
   - Giải phương trình tích phân Fredholm và Volterra
   - Nhiều bài toán trong giải tích số
7. **Mở rộng:**
   - Nếu T^m là phép co (với $m > 1$) thì T vẫn có điểm bất động duy nhất
   - Tuy nhiên, T có thể không phải là phép co

Chapter 06 - Approximation Theory

I. Bài tập 6.2-1: Tính chất lồi của tập hợp các xấp xỉ tốt nhất

Bài toán: Chứng minh rằng tập hợp M của các xấp xỉ tốt nhất cho một điểm x cho trước trong không gian Y là một tập lồi.

Lời giải:

Đầu tiên, ta cần hiểu khái niệm về xấp xỉ tốt nhất và tập lồi:

1. Cho X là một không gian chuẩn và Y là một không gian con của X. Với mỗi $x \in X$, khoảng cách từ x đến Y được xác định bởi:

$$\delta = \delta(x, Y) = \inf_{y \in Y} |x - y|$$

2. Một phần tử $y_0 \in Y$ được gọi là xấp xỉ tốt nhất của x từ Y nếu:

$$|x - y_0| = \delta$$

3. Tập hợp M là tập tất cả các xấp xỉ tốt nhất của x từ Y.
4. Một tập hợp được gọi là tập lồi nếu với mọi $y, z \in M$ thì đoạn khép kín $W = v = \alpha y + (1 - \alpha)z | 0 \leq \alpha \leq 1$ cũng nằm trong M.

Chứng minh:

- Nếu M rỗng hoặc chỉ có một phần tử, tính chất lồi hiển nhiên đúng.
- Giả sử M có nhiều hơn một phần tử. Lấy $y, z \in M$.
- Theo định nghĩa của M, ta có: $|x - y| = |x - z| = \delta$.
- Với mọi $w = \alpha y + (1 - \alpha)z$ với $0 \leq \alpha \leq 1$, ta cần chứng minh $w \in M$, tức là $|x - w| = \delta$.
- Vì $w \in Y$ nên $|x - w| \geq \delta$ (theo định nghĩa của infimum).
- Mặt khác:

$$|x - w| = |x - (\alpha y + (1 - \alpha)z)| = |\alpha(x - y) + (1 - \alpha)(x - z)|$$
$$\leq \alpha|x - y| + (1 - \alpha)|x - z| = \alpha\delta + (1 - \alpha)\delta = \delta$$

- Từ hai bất đẳng thức trên, ta có $|x - w| = \delta$, do đó $w \in M$.
- Vậy M là tập lồi.

Ví dụ minh họa: Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^2$, nếu Y là một đường thẳng và x là một điểm không nằm trên đường thẳng đó, thì xấp xỉ tốt nhất của x trong Y chính là hình chiếu vuông góc của x lên Y. Trong trường hợp này, tập M chỉ có một phần tử và hiển nhiên là tập lồi.

II. Bài tập 6.2-5: Tính chất độc nhất của xấp xỉ tốt nhất trong không gian chuẩn lồi chặt

Đầu tiên, cần hiểu khái niệm không gian chuẩn lồi chặt.

Định nghĩa 6.2-2 (Tính lồi chặt): Một chuẩn được gọi là lồi chặt nếu với mọi x, y có chuẩn bằng 1,

$$|x + y| < 2 \quad (x \neq y)$$

Không gian chuẩn với chuẩn lồi chặt được gọi là không gian chuẩn lồi chặt.

Ví dụ:

- Không gian Hilbert là không gian chuẩn lồi chặt (từ bất đẳng thức song song hình).
- Không gian $C[a, b]$ với chuẩn supremum không phải là không gian chuẩn lồi chặt.

Bài toán: Chứng minh rằng trong không gian chuẩn lồi chặt, với mỗi $x \in X$ và mỗi không gian con đóng Y của X, tồn tại duy nhất một xấp xỉ tốt nhất của x từ Y.

Lời giải:

Từ Định lý 6.1-1, ta biết rằng với Y là không gian con có số chiều hữu hạn của không gian chuẩn X, luôn tồn tại ít nhất một xấp xỉ tốt nhất. Tuy nhiên, với Y là không gian con đóng bất kỳ trong không gian Hilbert, xấp xỉ tốt nhất cũng luôn tồn tại (từ Định lý 3.3-1 về hình chiếu).

Ta cần chứng minh tính duy nhất của xấp xỉ tốt nhất.

Giả sử có hai xấp xỉ tốt nhất khác nhau $y_1, y_2 \in Y$ của x. Theo Lemma 6.2-1, tập các xấp xỉ tốt nhất là tập lồi, vậy $y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ cũng là xấp xỉ tốt nhất.

Nói cách khác:

$$|x - y_1| = |x - y_2| = |x - y| = \delta$$

Đặt $z_1 = \frac{x-y_1}{\delta}, z_2 = \frac{x-y_2}{\delta}$. Ta có $|z_1| = |z_2| = 1$ và $z_1 \neq z_2$ (vì $y_1 \neq y_2$).

Mặt khác:

$$x - y = x - \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{(x - y_1) + (x - y_2)}{2} = \frac{\delta(z_1 + z_2)}{2}$$

Vậy:

$$|x - y| = \delta \left| \frac{z_1 + z_2}{2} \right|$$

Nhưng đã cho $|x - y| = \delta$, nên $\left|\frac{z_1+z_2}{2}\right| = 1$.

Đây là mâu thuẫn vì theo định nghĩa của không gian chuẩn lồi chặt, với $z_1 \neq z_2$ và $|z_1| = |z_2| = 1$, ta phải có $|z_1 + z_2| < 2$, hay $\left|\frac{z_1+z_2}{2}\right| < 1$.

Vậy xấp xỉ tốt nhất phải là duy nhất.

III. Bài tập 6.4-3: Tính chất tối tiểu của đa thức Chebyshev

Đa thức Chebyshev: Đa thức Chebyshev bậc n được định nghĩa bởi:

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t), \quad t \in [-1, 1], \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Bài toán: Chứng minh rằng đa thức

$$\bar{T}_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos t)$$

có độ lệch cực đại nhỏ nhất tính từ 0 trên đoạn $[-1, 1]$ trong tất cả các đa thức thực bậc n có hệ số hạng bậc cao nhất bằng 1.

Lời giải:

Trước tiên, cần hiểu một số khái niệm:

1. **Tập điểm cực trị (Alternating set):** Tập các điểm $t_0, \ldots, t_k$ trong $[a, b]$ với $t_0 < t_1 < \ldots < t_k$ được gọi là tập điểm cực trị cho $x - y$ nếu $x(t_j) - y(t_j)$ nhận các giá trị $+|x - y|$ và $-|x - y|$ xen kẽ tại các điểm liên tiếp t_j.
2. **Lemma 6.4-2:** Nếu Y là không gian con của $C[a, b]$ thỏa mãn điều kiện Haar và nếu với $x - y$ tồn tại một tập điểm cực trị gồm $n + 1$ điểm, thì y là xấp xỉ tốt nhất của x từ Y.

Chứng minh:

Đầu tiên, ta xem xét đa thức Chebyshev $T_n(t)$:

1. Đặt $t = \cos\theta$, khi θ thay đổi từ 0 đến π, t thay đổi từ 1 đến -1 (đoạn $[-1, 1]$).
2. Đa thức $T_n(t) = \cos(n\theta)$ có đúng $n + 1$ điểm cực trị trên đoạn $[-1, 1]$, ứng với $\theta = \frac{\pi j}{n}$ với $j = 0, 1, \ldots, n$.
3. Tại các điểm cực trị này, $T_n(t)$ nhận giá trị $+1$ và -1 xen kẽ.
4. Hệ số hạng bậc cao nhất của $T_n(t)$ là 2^{n-1} (từ công thức khai triển cosine).
5. Vậy $\bar{T}_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(t)$ là đa thức bậc n với hệ số hạng bậc cao nhất bằng 1.
6. Xét bài toán xấp xỉ hàm $x(t) = t^n$ từ không gian $Y = \mathrm{span} 1, t, \ldots, t^{n-1}$.
7. $z(t) = x(t) - y(t) = t^n - y(t)$ là đa thức bậc n với hệ số hạng bậc cao nhất bằng 1.
8. Điều kiện Haar được thỏa mãn vì mọi đa thức khác 0 bậc không quá $n - 1$ có tối đa $n - 1$ điểm không.
9. Nếu $z(t) = \bar{T}_n(t)$, thì $z(t)$ có tập điểm cực trị gồm $n + 1$ điểm với giá trị $+\frac{1}{2^{n-1}}$ và $-\frac{1}{2^{n-1}}$ xen kẽ.
10. Theo Lemma 6.4-2, $y(t) = t^n - \bar{T}_n(t)$ là xấp xỉ tốt nhất của $x(t) = t^n$ từ Y.
11. Độ lệch cực đại của xấp xỉ này là $\frac{1}{2^{n-1}}$.

Từ đó, $\bar{T}_n(t)$ có độ lệch cực đại nhỏ nhất tính từ 0 trên $[-1, 1]$ trong tất cả các đa thức bậc n có hệ số bậc cao nhất là 1.

IV. Bài tập 6.5-2: Biểu diễn khoảng cách bằng định thức Gram

Định nghĩa: Định thức Gram (Gram determinant) của một tập vector $y_1, \ldots, y_n$ trong không gian Hilbert H là định thức của ma trận G với các phần tử $G_{ij} = \langle y_i, y_j \rangle$:

$$G(y_1, \ldots, y_n) = \left| \langle y_1, y_1 \rangle \quad \langle y_1, y_2 \rangle \quad \cdots \quad \langle y_1, y_n \rangle \, \langle y_2, y_1 \rangle \quad \langle y_2, y_2 \rangle \quad \cdots \quad \langle y_2, y_n \rangle \vdots \;\; \vdots \;\; \ddots \;\; \vdots \langle y_n, y_1 \rangle \quad \langle y_n, y_2 \rangle \quad \cdots \quad \langle y_n, y_n \rangle \right|$$

Bài toán: Nếu $\dim Y < \infty$ trong (1) và $y_1, \ldots, y_n$ là một cơ sở bất kỳ cho Y, thì

$$|z|^2 = \frac{G(x, y_1, \ldots, y_n)}{G(y_1, \ldots, y_n)}$$

trong đó

$$G(x, y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} \langle x, x \rangle & \langle x, y_1 \rangle & \cdots & \langle x, y_n \rangle \\ \langle y_1, x \rangle & \langle y_1, y_1 \rangle & \cdots & \langle y_1, y_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle y_n, x \rangle & \langle y_n, y_1 \rangle & \cdots & \langle y_n, y_n \rangle \end{vmatrix}$$

Lời giải:

Từ lý thuyết xấp xỉ trong không gian Hilbert, ta biết rằng:

1. Với mỗi $x \in H$ và không gian con đóng Y của H, tồn tại một phép chiếu vuông góc $y = Px$ từ x lên Y.
2. Phần tử $z = x - y$ vuông góc với Y, tức là $\langle z, y' \rangle = 0$ với mọi $y' \in Y$.
3. Khoảng cách từ x đến Y chính là $|z| = |x - y|$.

Bây giờ, ta sẽ chứng minh công thức trong đề bài:

Giả sử $y_1, \ldots, y_n$ là cơ sở của Y, ta có $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$ với các hệ số α_i cần xác định.

Vì $z = x - y$ vuông góc với Y, ta có:

$$\langle z, y_j \rangle = 0 \quad \text{với} \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Tức là:

$$\langle x - \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i, y_j \rangle = 0$$

Hay:

$$\langle x, y_j \rangle - \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle y_i, y_j \rangle = 0$$

Đây là hệ phương trình tuyến tính có n phương trình và n ẩn $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \langle y_i, y_j \rangle = \langle x, y_j \rangle \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

Ta có thể biểu diễn hệ này dưới dạng ma trận:

$$G \cdot \alpha = b$$

trong đó G là ma trận Gram $G_{ij} = \langle y_i, y_j \rangle$ và $b_j = \langle x, y_j \rangle$.

Từ đó:

$$|z|^2 = |x - y|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \langle x, x - y \rangle - \langle y, x - y \rangle$$

Vì $\langle y, x - y \rangle = 0$ (do $x - y$ vuông góc với Y), ta có:

$$|z|^2 = \langle x, x - y \rangle = \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle = \langle x, x \rangle - \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle x, y_i \rangle$$

Áp dụng quy tắc Cramer để giải hệ phương trình cho α_i và thay vào biểu thức trên, sau một số phép tính đại số (không trình bày chi tiết ở đây), ta được:

$$|z|^2 = \frac{G(x, y_1, \ldots, y_n)}{G(y_1, \ldots, y_n)}$$

Ví dụ: Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng Euclid, nếu Y là mặt phẳng sinh bởi hai vector $y_1 = (1, 0, 0)$ và $y_2 = (0, 1, 0)$, và $x = (1, 1, 1)$, thì:

$$G(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$G(x, y_1, y_2) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 - 1 = 1$$

Vậy $|z|^2 = \frac{1}{1} = 1$, tức là khoảng cách từ x đến mặt phẳng Y là 1, phù hợp với kết quả từ hình học Euclid.

V. Bài tập 6.6-1: Xấp xỉ bằng spline

Định nghĩa: Spline bậc ba trên $[a, b]$ là hàm $y \in C^2[a, b]$ (liên tục đến đạo hàm bậc hai) mà trên mỗi đoạn con của một phân hoạch $P_n : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, hàm y trùng với một đa thức bậc không quá 3.

Bài toán: Chứng minh rằng với mỗi hàm x xác định trên $[a, b]$ và với mọi phân hoạch P_n của $[a, b]$ dạng (1), và với mọi hai số thực k_0' và k_n' , tồn tại duy nhất một spline bậc ba $y \in Y(P_n)$ thỏa mãn $n + 3$ điều kiện:

(a) $y(t_j) = x(t_j), j = 0, \ldots, n$ (b) $y'(t_0) = k'_0, y'(t_n) = k'_n$

Lời giải:

1. Trong mỗi đoạn con $I_j = [t_j, t_{j+1}]$ với $j = 0, \ldots, n-1$, spline bậc ba y phải trùng với một đa thức bậc ba p_j thỏa mãn:
   - $p_j(t_j) = x(t_j)$
   - $p_j(t_{j+1}) = x(t_{j+1})$
   - $p'_j(t_j) = k'_j$
   - $p'_j(t_{j+1}) = k'_{j+1}$

   trong đó k'_0 và k'_n đã cho, còn $k'_1, \ldots, k'_{n-1}$ cần xác định.
2. Đặt $\tau_j = 1/(t_{j+1} - t_j)$. Qua tính toán trực tiếp, ta có thể biểu diễn đa thức p_j thỏa mãn bốn điều kiện trên là:
$$p_j(t) = x(t_j)\tau_j^2(t - t_{j+1})^2[1 + 2\tau_j(t - t_j)] + x(t_{j+1})\tau_j^2(t - t_j)^2[1 - 2\tau_j(t - t_{j+1})] + k'_j\tau_j^2(t - t_j)(t - t_{j+1})^2 + k'_{j+1}\tau_j^2(t - t_j)^2(t - t_{j+1})$$
3. Tính đạo hàm bậc hai, ta được:
$$p''_j(t_j) = -6\tau_j^2 x(t_j) + 6\tau_j^2 x(t_{j+1}) - 4\tau_j k'_j - 2\tau_j k'_{j+1}$$
$$p''_j(t_{j+1}) = 6\tau_j^2 x(t_j) - 6\tau_j^2 x(t_{j+1}) + 2\tau_j k'_j + 4\tau_j k'_{j+1}$$
4. Vì $y \in C^2[a, b]$, tại các nút t_j với $j = 1, \ldots, n-1$, đạo hàm bậc hai của hai đa thức tương ứng phải bằng nhau:
$$p''_{j-1}(t_j) = p''_j(t_j), j = 1, \ldots, n-1$$
5. Thay các biểu thức của $p''_{j-1}(t_j)$ và $p''_j(t_j)$ vào, ta được hệ phương trình:
$$\tau_{j-1}k'_{j-1} + 2(\tau_{j-1} + \tau_j)k'_j + \tau_j k'_{j+1} = 3[\tau_{j-1}^2 \Delta x_j + \tau_j^2 \Delta x_{j+1}]$$

   trong đó $\Delta x_j = x(t_j) - x(t_{j-1})$ và $\Delta x_{j+1} = x(t_{j+1}) - x(t_j)$.
6. Đây là hệ phương trình tuyến tính với $n-1$ phương trình và $n-1$ ẩn $k'_1, \ldots, k'_{n-1}$. Ma trận hệ số là ma trận tam đường chéo với các phần tử chéo chính đều dương và lớn hơn tổng các phần tử ngoài đường chéo chính trên cùng một hàng.
7. Theo Định lý 5.2-1, hệ phương trình này có nghiệm duy nhất. Từ đó, ta xác định được $k'_1, \ldots, k'_{n-1}$ và do đó xác định duy nhất spline bậc ba y thỏa mãn tất cả các điều kiện đề bài.

VI. Tổng kết

Cheatsheet về xấp xỉ trong không gian chuẩn và Hilbert

1. **Khái niệm cơ bản**:
   - **Xấp xỉ tốt nhất**: Với $x \in X$ và không gian con Y, $y_0 \in Y$ là xấp xỉ tốt nhất nếu $|x - y_0| = \delta = \inf_{y \in Y} |x - y|$.
   - **Tồn tại xấp xỉ tốt nhất**: Với Y là không gian con hữu hạn chiều của không gian chuẩn X, luôn tồn tại xấp xỉ tốt nhất.
2. **Tính chất lồi**:
   - Tập hợp các xấp xỉ tốt nhất của x từ Y là một tập lồi.
   - Tập lồi: Nếu $y, z \in M$ thì $\alpha y + (1 - \alpha)z \in M$ với mọi $\alpha \in [0, 1]$.
3. **Tính duy nhất**:
   - Trong không gian chuẩn lồi chặt, xấp xỉ tốt nhất là duy nhất.
   - Không gian Hilbert là không gian chuẩn lồi chặt.
   - Không gian $C[a, b]$ với chuẩn supremum không phải là không gian chuẩn lồi chặt.
4. **Xấp xỉ đều (Uniform Approximation)**:
   - Điều kiện Haar: Không gian con Y thỏa mãn điều kiện Haar nếu mọi $y \in Y, y \neq 0$ có nhiều nhất $n-1$ điểm không trên $[a, b]$, với $n = \dim Y$.
   - Định lý Haar: Xấp xỉ tốt nhất trong không gian $C[a, b]$ là duy nhất khi và chỉ khi Y thỏa mãn điều kiện Haar.
5. **Đa thức Chebyshev**:
   - $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$ với $t \in [-1, 1]$
   - $\tilde{T}_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(t)$ có độ lệch cực đại nhỏ nhất từ 0 trong tất cả các đa thức bậc n có hệ số bậc cao nhất bằng 1.
6. **Xấp xỉ trong không gian Hilbert**:
   - Với mỗi $x \in H$ và không gian con đóng Y, tồn tại duy nhất $y \in Y$ là xấp xỉ tốt nhất của x.
   - $y = Px$ là phép chiếu vuông góc của x lên Y.
   - $z = x - y$ vuông góc với Y: $\langle z, y' \rangle = 0$ với mọi $y' \in Y$.
   - Khoảng cách từ x đến Y có thể biểu diễn bằng định thức Gram:
$$|z|^2 = \frac{G(x, y_1, \ldots, y_n)}{G(y_1, \ldots, y_n)}$$

7. **Spline bậc ba**:
   - Hàm $y \in C^2[a, b]$ mà trên mỗi đoạn con của phân hoạch trùng với đa thức bậc không quá 3.
   - Với mỗi hàm x trên $[a, b]$, mỗi phân hoạch, và hai giá trị đạo hàm đầu cuối, tồn tại duy nhất spline bậc ba nội suy x tại các nút.
   - Spline bậc ba có tính chất tối tiểu năng lượng uốn cong:

     $$\int_a^b x''(t)^2 dt \geq \int_a^b y''(t)^2 dt$$

     với y là spline bậc ba nội suy x tại các nút và có cùng đạo hàm với x tại a và b.

Chapter 07 - Spectral Theory

Lời mở đầu

Hôm nay chúng ta sẽ học về lý thuyết phổ của toán tử tuyến tính. Thay vì đi vào lý thuyết trước, chúng ta sẽ bắt đầu từ một số bài tập để hiểu tại sao lý thuyết phổ lại quan trọng trong toán học.

Bài tập 1: Tìm trị riêng và vector riêng

Tìm trị riêng và vector riêng của ma trận

$$A = [5 \quad 4\,1 \quad 2]$$

Để tìm trị riêng của ma trận, chúng ta cần giải phương trình đặc trưng:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Đối với ma trận A đã cho:

$$\det(A - \lambda I) = \det [5 - \lambda \quad 4\,1 \quad 2 - \lambda] = 0$$

Tính định thức:

$$(5 - \lambda)(2 - \lambda) - 4 \cdot 1 = 0$$

$$(5 - \lambda)(2 - \lambda) - 4 = 0$$

$$10 - 5\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

Phân tích nhân tử:

$$(\lambda - 6)(\lambda - 1) = 0$$

Vậy ta có $\lambda_1 = 6$ và $\lambda_2 = 1$

Bây giờ tìm vector riêng tương ứng với mỗi trị riêng:

Với $\lambda_1 = 6$:

$$(A - 6I)x = 0$$

$$[5 - 6 \quad 4\,1 \quad 2 - 6]\,[x_1\; x_2] = [0\; 0]$$

$$[-1 \quad 4\,1 \quad -4]\,[x_1\; x_2] = [0\; 0]$$

Từ đây ta có:

$$-x_1 + 4x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 4x_2$$

Chọn $x_2 = 1$ thì $x_1 = 4$. Vậy vector riêng tương ứng với $\lambda_1 = 6$ là $x_1 = [4\; 1]$

Với $\lambda_2 = 1$:

$$(A - 1I)x = 0$$

$$[5 - 1 \quad 4\,1 \quad 2 - 1]\,[x_1\; x_2] = [0\; 0]$$

$$[4 \quad 4\,1 \quad 1]\,[x_1\; x_2] = [0\; 0]$$

Từ đây ta có:

$$4x_1 + 4x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$$

Chọn $x_2 = 1$ thì $x_1 = -1$. Vậy vector riêng tương ứng với $\lambda_2 = 1$ là $x_2 = [-1\; 1]$

Vậy, phổ của ma trận A là $\sigma(A) = 1, 6$

Định nghĩa và khái niệm cơ bản

Qua bài tập trên, chúng ta đã tính được phổ của một ma trận. Giờ chúng ta hãy đi vào định nghĩa chính thức:

Trị riêng và vector riêng

Cho X là không gian định chuẩn và $T : X \to X$ là toán tử tuyến tính.

- Một số λ được gọi là **trị riêng** của T nếu tồn tại vector $x \neq 0$ sao cho $Tx = \lambda x$.
- Vector x được gọi là **vector riêng** tương ứng với trị riêng λ.
- **Không gian riêng** tương ứng với trị riêng λ là tập hợp tất cả các vector riêng và vector 0 của λ.

Phổ của toán tử tuyến tính

Tập hợp tất cả các trị riêng của một toán tử tuyến tính T được gọi là **phổ** của T, ký hiệu là $\sigma(T)$.

Toán tử nghịch đảo và toán tử giải

Trong không gian định chuẩn có chiều hữu hạn, phổ của một toán tử có thể được tính thông qua đa thức đặc trưng:

$$\det(T - \lambda I) = 0$$

Với toán tử T, chúng ta định nghĩa **toán tử giải** $R_\lambda(T)$ là nghịch đảo của $T - \lambda I$:

$$R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}$$

Tập hợp tất cả các λ mà $R_\lambda(T)$ tồn tại được gọi là **tập giải** (resolvent set) của T, ký hiệu $\rho(T)$.

Phổ của T là tập bù của tập giải: $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$.

Bài tập 2: Toán tử dịch phải trên không gian ℓ^2

Xét toán tử dịch phải $T : \ell^2 \to \ell^2$ định nghĩa bởi

$$T((\xi_1, \xi_2, \ldots)) = (0, \xi_1, \xi_2, \ldots)$$

Tìm phổ của T.

Lời giải:

Đầu tiên, chứng minh rằng T là toán tử bị chặn với $|T| = 1$:

Cho $x = (\xi_j) \in \ell^2$, ta có:

$$|Tx|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_{j-1}|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |\xi_j|^2 = |x|^2$$

(với quy ước $\xi_0 = 0$).

Vậy $|T| = 1$.

Để tìm phổ của T, chúng ta xem xét trường hợp khi nào $T - \lambda I$ không khả nghịch.

1. Nếu $|\lambda| > 1$, thì operator $R_0(T) = T^{-1}$ không tồn tại.
2. Nếu $|\lambda| \leq 1$, thì λ là trị riêng của T.

Để thấy điểm 2, ta cần tìm $x \neq 0$ sao cho $(T - \lambda I)x = 0$. Giả sử $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ thì:

$$(T - \lambda I)x = (0, \xi_1, \xi_2, \ldots) - (\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \ldots) = (-\lambda\xi_1, \xi_1 - \lambda\xi_2, \xi_2 - \lambda\xi_3, \ldots)$$

Để $(T - \lambda I)x = 0$, ta cần:

1. $\lambda\xi_1 = 0$
2. $\xi_1 - \lambda\xi_2 = 0$
3. $\xi_2 - \lambda\xi_3 = 0$ ...

Nếu $\lambda = 0$, thì $\xi_1 = 0$ và $\xi_j = 0$ với mọi j, nên không có vector riêng.

Nếu $\lambda \neq 0$, từ điều kiện 1 ta có $\xi_1 = 0$, từ điều kiện 2 ta có $\xi_2 = 0$, và cứ thế.

Điều này chứng tỏ T không có trị riêng. Nhưng 0 là phần tử của phổ liên tục $\sigma_c(T)$, vì nếu $T_0 x = 0$ thì $Tx = 0$ không có nghiệm $x \neq 0$.

Vậy phổ của toán tử dịch phải T là $\sigma(T) = 0$.

Bài tập 3: Nghiên cứu phổ của toán tử vi phân trong C[0,1]

Xét $T : C[0,1] \to C[0,1]$ định nghĩa bởi $Tx = vx$ với $v \in C[0,1]$ cố định. Tìm $\sigma(T)$.

Lời giải:

Đầu tiên, ta thấy T là toán tử tuyến tính và bị chặn với $|T| = |v|_\infty$.

Nếu $Tx = \lambda x$ với $x \neq 0$, thì $vx = \lambda x$, hay $(v - \lambda)x = 0$.

Vì $x \neq 0$, nên điều này xảy ra khi và chỉ khi tồn tại $t_0 \in [0, 1]$ sao cho $v(t_0) = \lambda$ và $x(t)$ có thể có giá trị khác 0 tại t_0.

Do đó, phổ của T chính là tập giá trị của hàm v trên đoạn $[0, 1]$:

$$\sigma(T) = v(t) : t \in [0, 1]$$

Đây là một tập compact trong mặt phẳng phức.

Các tính chất quan trọng của phổ

Dựa vào các bài tập trên, ta có thể tổng kết một số tính chất quan trọng của phổ:

Định lý 1: Phổ là tập đóng

Phổ $\sigma(T)$ của một toán tử tuyến tính bị chặn T trên không gian Banach phức là một tập đóng.

Chứng minh: Ta chứng minh rằng tập giải $\rho(T)$ là tập mở. Với $\lambda_0 \in \rho(T)$, toán tử $T - \lambda_0 I$ khả nghịch. Với λ đủ gần λ_0, ta có thể viết:

$$T - \lambda I = (T - \lambda_0 I) - (\lambda - \lambda_0)I = (T - \lambda_0 I)[I - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0 I)^{-1}]$$

Nếu $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{|(T - \lambda_0 I)^{-1}|}$, thì toán tử trong ngoặc vuông khả nghịch, nên $T - \lambda I$ khả nghịch.

Định lý 2: Phổ là tập compact

Phổ $\sigma(T)$ của một toán tử tuyến tính bị chặn T trên không gian Banach phức là một tập compact và nằm trong đĩa $z \in \mathbb{C} : |z| \leq |T|$.

Chứng minh: Từ Định lý 1, phổ là tập đóng. Với $|\lambda| > |T|$, toán tử $T - \lambda I$ khả nghịch và ta có chuỗi Neumann:

$$(T - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^j$$

Chuỗi này hội tụ khi $\left|\frac{T}{\lambda}\right| < 1$, hay $|\lambda| > |T|$.

Định lý 3: Phổ không rỗng

Phổ $\sigma(T)$ của một toán tử tuyến tính bị chặn không phải là 0 trên không gian Banach phức không tầm thường luôn không rỗng.

Chứng minh: Giả sử $\sigma(T) = \emptyset$. Khi đó, hàm $f(\lambda) = R_\lambda(T)$ là hàm toàn phương. Theo định lý Liouville, f là hằng số, điều này mâu thuẫn với thực tế là $R_\lambda(T) \to 0$ khi $|\lambda| \to \infty$.

Bài tập 4: Bán kính phổ

Xét toán tử $T \in B(X, X)$ trên không gian Banach X. Chứng minh rằng bán kính phổ $r_\sigma(T) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|T^n|}$.

Lời giải:

Bán kính phổ $r_\sigma(T)$ là bán kính của đĩa nhỏ nhất tâm tại gốc chứa phổ của T:

$$r_\sigma(T) = \sup |\lambda| : \lambda \in \sigma(T)$$

Từ Định lý 7.4-2 Spectral Mapping Theorem, ta có:

$$\sigma(T^n) = [\sigma(T)]^n = \lambda^n : \lambda \in \sigma(T)$$

Do đó:

$$r_\sigma(T^n) = [r_\sigma(T)]^n$$

Từ Định lý 7.3-4, ta biết rằng:

$$r_\sigma(T) \leq |T|$$

Áp dụng cho T^n:

$$r_\sigma(T^n) \leq |T^n|$$

Hay:

$$[r_\sigma(T)]^n \leq |T^n|$$

Lấy căn bậc n:

$$r_\sigma(T) \leq \sqrt[n]{|T^n|}$$

Mặt khác, từ công thức chuỗi Laurent của toán tử giải:

$$R_\lambda(T) = -\frac{1}{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{T^j}{\lambda^j}, \quad |\lambda| > r_\sigma(T)$$

Theo công thức Hadamard về bán kính hội tụ:

$$\frac{1}{r_\sigma(T)} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|T^n|}$$

Nên:

$$r_\sigma(T) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|T^n|}$$

Đây là công thức bán kính phổ Gelfand.

Tổng kết

Dưới đây là bảng tóm tắt những điều quan trọng đã học về lý thuyết phổ:

Khái niệm cơ bản

- **Trị riêng (Eigenvalue)**: $\lambda \in \mathbb{C}$ sao cho $Tx = \lambda x$ với $x \neq 0$
- **Vector riêng (Eigenvector)**: Vector $x \neq 0$ thỏa mãn $Tx = \lambda x$
- **Không gian riêng (Eigenspace)**: Tập các vector (bao gồm 0) thỏa mãn $Tx = \lambda x$
- **Phổ (Spectrum)**: Tập $\sigma(T) = \lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ không khả nghịch}$
- **Tập giải (Resolvent set)**: $\rho(T) = \mathbb{C} - \sigma(T)$
- **Toán tử giải (Resolvent)**: $R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}$

Phân loại phổ

1. **Phổ điểm (Point spectrum)** $\sigma_p(T)$: Tập các trị riêng của T
2. **Phổ liên tục (Continuous spectrum)** $\sigma_c(T)$: Tập các λ sao cho $T - \lambda I$ có ảnh dày đặc nhưng không khả nghịch
3. **Phổ phần dư (Residual spectrum)** $\sigma_r(T)$: Tập các λ sao cho $T - \lambda I$ không có ảnh dày đặc

Các tính chất quan trọng

1. Phổ của toán tử tuyến tính bị chặn là tập đóng
2. Phổ của toán tử tuyến tính bị chặn là tập compact nằm trong đĩa $z : |z| \leq |T|$
3. Phổ của toán tử tuyến tính bị chặn không phải 0 luôn không rỗng
4. Bán kính phổ: $r_\sigma(T) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|T^n|}$
5. Phương trình giải: $R_\mu - R_\lambda = (\mu - \lambda)R_\mu R_\lambda$

Ý nghĩa

Lý thuyết phổ có ứng dụng quan trọng trong:

- Giải phương trình vi phân
- Giải phương trình tích phân
- Cơ học lượng tử
- Lý thuyết ổn định
- Nhiều lĩnh vực toán học khác

Lý thuyết phổ kết nối đại số tuyến tính, giải tích hàm và giải tích phức, tạo nên một công cụ mạnh mẽ trong toán học hiện đại.

Chapter 08 - Compact Linear Operators on Normed Spaces and Their Spectrum

Bài tập 1: Chứng minh toán tử compact và tổng của toán tử compact

Giải quyết bài toán này sẽ giúp chúng ta hiểu về tính compact của toán tử tuyến tính và tính chất quan trọng của không gian toán tử compact.

Phần 1: Toán tử không (zero operator) là compact

Bài toán: Chứng minh rằng toán tử không trên mọi không gian định chuẩn là compact.

Lời giải: Xét toán tử không $T : X \to X$ định nghĩa bởi $Tx = 0$ với mọi $x \in X$.

Với mọi tập con bị chặn $M \subset X$, ta có $T(M) = 0$, và tập 0 là tập compact (vì nó là tập hữu hạn). Do đó, $\overline{T(M)} = 0$ cũng là compact.

Theo định nghĩa 8.1-1, T là toán tử tuyến tính compact.

Phần 2: Tổng của các toán tử compact

Bài toán: Nếu T_1 và T_2 là các toán tử tuyến tính compact từ không gian định chuẩn X vào không gian định chuẩn Y, chứng minh rằng $T_1 + T_2$ là toán tử tuyến tính compact.

Lời giải: Trước tiên, cần nhớ lại định lý quan trọng về đặc tính của toán tử compact:

Định lý 8.1-3 (Tiêu chuẩn tính compact): Cho X và Y là các không gian định chuẩn và $T : X \to Y$ là toán tử tuyến tính. Khi đó T là compact khi và chỉ khi nó ánh xạ mọi dãy bị chặn (x_n) trong X thành dãy (Tx_n) trong Y có chứa dãy con hội tụ.

Giả sử T_1 và T_2 là compact. Xét dãy (x_n) bất kỳ bị chặn trong X.

Vì T_1 là compact, dãy $(T_1 x_n)$ có dãy con hội tụ, gọi là $(T_1 x_{n_k})$.

Vì (x_{n_k}) là dãy con của (x_n) nên nó cũng bị chặn. Vì T_2 là compact, dãy $(T_2 x_{n_k})$ có dãy con hội tụ, gọi là $(T_2 x_{n_{k_j}})$.

Khi đó, dãy $((T_1 + T_2) x_{n_{k_j}})$ cũng hội tụ vì:

$$(T_1 + T_2) x_{n_{k_j}} = T_1 x_{n_{k_j}} + T_2 x_{n_{k_j}}$$

Và tổng của hai dãy hội tụ cũng hội tụ.

Vậy theo Định lý 8.1-3, $T_1 + T_2$ là toán tử compact.

Hệ quả: Không gian các toán tử tuyến tính compact từ X vào Y tạo thành một không gian vector, ký hiệu là $C(X, Y)$.

Bài tập 6: Toán tử tích phân là compact

Bài toán: Định nghĩa $T : l^2 \to l^2$ bởi $Tx = y = (\eta_j)$, trong đó $x = (\xi_j)$ và

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{jk} \xi_k,$$

với điều kiện $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{jk}|^2 < \infty$. Chứng minh rằng T là compact.

Lời giải: Để giải quyết bài tập này, chúng ta sẽ sử dụng Định lý 8.1-5 về dãy toán tử compact.

Định lý 8.1-5 (Dãy toán tử compact): Cho (T_n) là dãy các toán tử tuyến tính compact từ không gian định chuẩn X vào không gian Banach Y. Nếu (T_n) hội tụ đều theo chuẩn toán tử, tức là $|T_n - T| \to 0$, thì toán tử giới hạn T cũng là compact.

Đối với mỗi n, chúng ta định nghĩa toán tử $T_n : l^2 \to l^2$ bởi:

$$T_n x = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{1k} \xi_k, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{2k} \xi_k, \ldots, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{nk} \xi_k, 0, 0, \ldots \right)$$

Toán tử T_n là toán tử hạng hữu hạn (vì $\dim T_n(X) < \infty$), nên theo Định lý 8.1-4, T_n là compact.

Bây giờ chúng ta cần chứng minh rằng $|T_n - T| \to 0$ khi $n \to \infty$.

Với $x \in l^2$, $|x| \le 1$, ta có:

$$|(T - T_n)x|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_{jk}\xi_k \right|^2$$

Bằng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_{jk}\xi_k \right|^2 \leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\alpha_{jk}|^2 \right) \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^2 \right) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |\alpha_{jk}|^2$$

Do đó:

$$|(T - T_n)x|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} |\alpha_{jk}|^2$$

Khi $n \to \infty$, tổng trên tiến tới 0 (vì $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{jk}|^2 < \infty$).

Vậy $|T_n - T| \to 0$ khi $n \to \infty$, và theo Định lý 8.1-5, T là compact.

Bài tập 8: Toán tử surjective compact

Bài toán: Có tồn tại toán tử tuyến tính compact và toàn ánh (surjective) $T : l^\infty \to l^\infty$ không?

Lời giải: Câu trả lời là không. Chúng ta sẽ chứng minh điều này bằng phản chứng.

Giả sử tồn tại toán tử tuyến tính compact và toàn ánh $T : l^\infty \to l^\infty$.

Vì T là toàn ánh, ta có $T(l^\infty) = l^\infty$. Điều này có nghĩa là miền giá $\mathscr{R}(T) = l^\infty$.

Từ Định lý 8.2-3, miền giá của toán tử compact là không gian khả li (separable). Vậy l^∞ phải là không gian khả li.

Tuy nhiên, đây là một mâu thuẫn, vì l^∞ không phải là không gian khả li.

Lưu ý: Một không gian định chuẩn X là khả li khi tồn tại tập con đếm được và dày đặc trong X.

Vì vậy, không tồn tại toán tử tuyến tính compact và toàn ánh từ l^∞ vào l^∞.

Bài tập 10: Toán tử với dãy scalars hội tụ về 0

Bài toán: Cho (λ_n) là dãy các số vô hướng sao cho $\lambda_n \to 0$ khi $n \to \infty$. Định nghĩa $T : l^2 \to l^2$ bởi $Tx = y = (\eta_j)$ trong đó $x = (\xi_j)$ và $\eta_j = \lambda_j \xi_j$. Chứng minh rằng T là compact.

Lời giải: Chúng ta sẽ sử dụng định nghĩa về toán tử compact và Định lý 8.1-3.

Xét dãy (x_n) bất kỳ bị chặn trong l^2, $|x_n| \leq M$ với mọi n. Ta cần chứng minh dãy (Tx_n) có dãy con hội tụ.

Với mỗi $N \in \mathbb{N}$, ta định nghĩa toán tử projection $P_N : l^2 \to l^2$ bởi:

$$P_N(\xi_1, \xi_2, \ldots) = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N, 0, 0, \ldots)$$

P_N là toán tử hạng hữu hạn nên compact. Với mỗi N, xét dãy $(P_N x_n)$. Vì P_N compact và (x_n) bị chặn, nên dãy $(P_N x_n)$ có dãy con hội tụ $(P_N x_{n_k})$.

Bằng phương pháp đường chéo (diagonal method), ta có thể xây dựng dãy con (x_{m_j}) của (x_n) sao cho với mỗi N, dãy $(P_N x_{m_j})$ hội tụ khi $j \to \infty$.

Giờ cần chứng minh rằng dãy (Tx_{m_j}) hội tụ.

Vì $\lambda_n \to 0$, với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại N đủ lớn sao cho $|\lambda_n| < \varepsilon/(2M)$ với mọi $n > N$.

Với j, k đủ lớn, ta có:

$$|Tx_{m_j} - Tx_{m_k}| \leq |T(P_N x_{m_j}) - T(P_N x_{m_k})| + |T(x_{m_j} - P_N x_{m_j}) - T(x_{m_k} - P_N x_{m_k})|$$

Thành phần đầu tiên có thể làm nhỏ hơn $\varepsilon/2$ vì $(P_N x_{m_j})$ hội tụ.

Đối với thành phần thứ hai:

$$|T(x_{m_j} - P_N x_{m_j}) - T(x_{m_k} - P_N x_{m_k})|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |x_{m_j,n} - x_{m_k,n}|^2$$

$$\leq \left(\frac{\varepsilon}{2M} \right)^2 \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_{m_j,n} - x_{m_k,n}|^2 \leq \left(\frac{\varepsilon}{2M} \right)^2 \cdot 4M^2 = \varepsilon^2/4$$

Do đó, $|Tx_{m_j} - Tx_{m_k}| < \varepsilon$ với j, k đủ lớn, chứng tỏ dãy (Tx_{m_j}) là Cauchy và hội tụ trong l^2.

Vậy T là toán tử compact theo Định lý 8.1-3.

Bài tập 14: Giá trị phổ của toán tử compact

Bài toán: Chứng minh rằng nếu $T: X \to X$ là toán tử tuyến tính compact trên không gian định chuẩn X và $\dim X = \infty$, thì $0 \in \sigma(T)$ (tức là 0 thuộc phổ của T).

Lời giải: Chúng ta sẽ chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử $0 \notin \sigma(T)$. Theo định nghĩa, $0 \in \rho(T)$ - tập các số phân giải (resolvent set), có nghĩa là T^{-1} tồn tại, được định nghĩa trên toàn bộ X, và T^{-1} là toán tử bị chặn.

Từ Định lý 8.1-2(b), ta biết rằng toán tử đồng nhất $I: X \to X$ không phải là compact khi $\dim X = \infty$.

Nhưng $I = T \circ T^{-1}$. Theo Bổ đề 8.3-2 về tính compact của tích, nếu T là compact và T^{-1} là bị chặn, thì $T \circ T^{-1}$ phải là compact.

Điều này dẫn đến mâu thuẫn vì toán tử đồng nhất I không compact với $\dim X = \infty$.

Vậy giả thiết ban đầu sai, và $0 \in \sigma(T)$.

Bài tập 5 (Section 8.4): Toán tử trong l^2 với 0 trong phổ điểm

Bài toán: Xét toán tử $T: l^2 \to l^2$ được định nghĩa bởi $y = (\eta_j) = Tx$, trong đó $x = (\xi_j)$, $\eta_{2k} = \xi_{2k}$ và $\eta_{2k-1} = 0$, với $k = 1, 2, \ldots$. Tìm $\mathcal{N}(T_\lambda^n)$. T có phải là compact không?

Lời giải: Đầu tiên, xét toán tử $T_\lambda = T - \lambda I$ với $\lambda \neq 0$.

Với $x = (\xi_j) \in l^2$, ta có:

$$(T_\lambda x)_{2k} = (Tx)_{2k} - \lambda\xi_{2k} = \xi_{2k} - \lambda\xi_{2k} = (1-\lambda)\xi_{2k}$$
$$(T_\lambda x)_{2k-1} = (Tx)_{2k-1} - \lambda\xi_{2k-1} = 0 - \lambda\xi_{2k-1} = -\lambda\xi_{2k-1}$$

Để $x \in \mathcal{N}(T_\lambda)$, ta cần $T_\lambda x = 0$, tức là:

$$(1-\lambda)\xi_{2k} = 0 \text{ và } -\lambda\xi_{2k-1} = 0 \text{ với mọi } k$$

Nếu $\lambda \neq 1$, ta có $\xi_{2k} = 0$ và $\xi_{2k-1} = 0$ với mọi k, nên $\mathcal{N}(T_\lambda) = 0$.

Nếu $\lambda = 1$, ta có $\xi_{2k-1} = 0$ với mọi k, nhưng ξ_{2k} có thể là bất kỳ. Vậy:

$$\mathcal{N}(T_1) = (\xi_j) \in l^2 : \xi_{2k-1} = 0 \text{ với mọi } k$$

Cho $n \geq 2$, nếu $\lambda \neq 0$ và $\lambda \neq 1$, thì $\mathcal{N}(T_\lambda^n) = \mathcal{N}(T_\lambda) = 0$.

Nếu $\lambda = 1$, thì $\mathcal{N}(T_1^n) = \mathcal{N}(T_1)$ với mọi n.

Nếu $\lambda = 0$, ta có $T_0 = T$. Khi đó:

$$\mathcal{N}(T^n) = (\xi_j) \in l^2 : \xi_{2k} = 0 \text{ với mọi } k = 1, 2, \ldots$$

Về tính compact của T:

T không phải là toán tử compact. Để chứng minh điều này, ta xét dãy vector đơn vị chuẩn $e_{2k} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ (với 1 ở vị trí thứ $2k$). Dãy này bị chặn vì $|e_{2k}| = 1$ với mọi k.

Nhưng $Te_{2k} = e_{2k}$ và $|Te_{2k} - Te_{2j}| = |e_{2k} - e_{2j}| = \sqrt{2}$ khi $k \neq j$. Vậy dãy (Te_{2k}) không có dãy con hội tụ, do đó T không compact theo Định lý 8.1-3.

Bài tập 5 (Section 8.5-8.6): Tiêu chuẩn hạng cho giải được của phương trình tuyến tính

Bài toán: Một hệ phương trình tuyến tính $Ax = y$ gồm n phương trình với n ẩn có nghiệm x khi và chỉ khi ma trận mở rộng

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \eta_1 a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \eta_2 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \eta_n \end{bmatrix}$$

có cùng hạng với ma trận hệ số $A = (a_{jk})$, với $y = (\eta_j)$. Hãy thu được tiêu chuẩn quen thuộc này từ Định lý 8.5-1.

Lời giải: Định lý 8.5-1 phát biểu rằng phương trình $Tx - \lambda x = y$ có nghiệm x khi và chỉ khi y thỏa mãn $f(y) = 0$ với mọi $f \in X'$ là nghiệm của phương trình đồng nhất liên hợp $T^* f - \lambda f = 0$.

Trong trường hợp hệ phương trình tuyến tính $Ax = y$ với A là ma trận $n \times n$, ta đang làm việc trên không gian $\mathbb{R}^n$ hoặc $\mathbb{C}^n$.

Toán tử liên hợp A^* chính là ma trận chuyển vị A^T (hoặc liên hợp Hermitian A^H nếu là trường phức).

Theo Định lý 8.5-1, $Ax = y$ có nghiệm khi và chỉ khi y thỏa mãn $f(y) = 0$ với mọi f thỏa mãn $A^T f = 0$.

Nếu $\operatorname{rank}(A) = n$, thì $A^T f = 0$ chỉ có nghiệm tầm thường $f = 0$, nên $Ax = y$ luôn có nghiệm với mọi y.

Nếu $\operatorname{rank}(A) < n$, thì hệ $A^T f = 0$ có không gian nghiệm có chiều $n - \operatorname{rank}(A)$. Gọi $f_1, f_2, \ldots, f_{n-\operatorname{rank}(A)}$ là cơ sở của không gian nghiệm này.

Khi đó, $Ax = y$ có nghiệm khi và chỉ khi $f_i^T y = 0$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n - \operatorname{rank}(A)$.

Điều này tương đương với việc vector y thuộc không gian con sinh bởi các cột của A, hay $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}([A|y])$, trong đó $[A|y]$ là ma trận mở rộng.

Vậy, Định lý 8.5-1 chính là cách phát biểu tổng quát của tiêu chuẩn hạng quen thuộc trong đại số tuyến tính.

Bài tập 15 (Section 8.7): Phương trình tích phân với nhân tách được

Bài toán: Xét phương trình tích phân

$$x(s) - \mu \int_0^1 (s + t)x(t)dt = \overline{y}(s)$$

(a) Giả sử $\mu^2 + 12\mu - 12 \neq 0$ và sử dụng Bài tập 14, giải phương trình. (b) Tìm giá trị riêng và hàm riêng.

Lời giải: Phần (a): Phương trình này có dạng Fredholm loại hai với nhân $k(s, t) = s + t$ là nhân tách được (degenerate kernel).

Cụ thể, ta có thể viết $k(s, t) = s + t = s \cdot 1 + 1 \cdot t$, dạng tổng của tích các hàm một biến.

Theo lý thuyết về nhân tách được (Bài tập 14), nếu phương trình tích phân có nhân tách được có nghiệm, thì nghiệm đó có dạng:

$$x(s) = \overline{y}(s) + \mu \sum_{j=1}^{n} c_j a_j(s)$$

Trong trường hợp này, $a_1(s) = s$ và $a_2(s) = 1$.

Các hằng số c_j phải thỏa mãn hệ phương trình tuyến tính:

$$c_j - \mu \sum_{k=1}^{n} a_{jk} c_k = y_j$$

Trong đó $a_{jk} = \int_0^1 b_j(t)a_k(t)dt$ và $y_j = \int_0^1 b_j(t)\overline{y}(t)dt$

Với nhân $k(s, t) = s + t = s \cdot 1 + 1 \cdot t$, ta có $a_1(s) = s$, $a_2(s) = 1$, $b_1(t) = 1$, $b_2(t) = t$.

Tính các hệ số:

$$a_{11} = \int_0^1 1 \cdot s \cdot ds = \frac{1}{2}$$

$$a_{12} = \int_0^1 1 \cdot 1 \cdot ds = 1$$

$$a_{21} = \int_0^1 t \cdot s \cdot ds = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$a_{22} = \int_0^1 t \cdot 1 \cdot ds = \frac{1}{2}$$

Các giá trị y_j:

$$y_1 = \int_0^1 1 \cdot \overline{y}(t)dt = \int_0^1 \overline{y}(t)dt$$

$$y_2 = \int_0^1 t \cdot \overline{y}(t)dt$$

Hệ phương trình cho c_1 và c_2 là:

$$c_1 - \mu \left(\frac{1}{2}c_1 + c_2 \right) = y_1$$

$$c_2 - \mu \left(\frac{1}{4}c_1 + \frac{1}{2}c_2 \right) = y_2$$

Hay:

$$(1 - \frac{\mu}{2})c_1 - \mu c_2 = y_1$$

$$-\frac{\mu}{4}c_1 + (1 - \frac{\mu}{2})c_2 = y_2$$

Ma trận hệ số có định thức:

$$\Delta = (1 - \frac{\mu}{2})(1 - \frac{\mu}{2}) - (-\mu)(-\frac{\mu}{4}) = (1 - \frac{\mu}{2})^2 - \frac{\mu^2}{4} = 1 - \mu + \frac{\mu^2}{4} - \frac{\mu^2}{4} = 1 - \mu$$

Và:

$$\Delta_1 = y_1(1 - \frac{\mu}{2}) - (-\mu)y_2 = y_1 - \frac{\mu}{2}y_1 + \mu y_2$$

$$\Delta_2 = (1 - \frac{\mu}{2})y_2 - (-\frac{\mu}{4})y_1 = y_2 - \frac{\mu}{2}y_2 + \frac{\mu}{4}y_1$$

Vậy, khi $\mu \neq 1$:

$$c_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{y_1 - \frac{\mu}{2}y_1 + \mu y_2}{1 - \mu}$$

$$c_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{y_2 - \frac{\mu}{2}y_2 + \frac{\mu}{4}y_1}{1 - \mu}$$

Nghiệm của phương trình là:

$$x(s) = \overline{y}(s) + \mu(c_1 s + c_2)$$

Phần (b): Để tìm giá trị riêng và hàm riêng, ta cần giải phương trình đồng nhất:

$$x(s) - \mu \int_0^1 (s + t)x(t)dt = 0$$

Giá trị riêng là các giá trị μ khiến hệ phương trình cho c_1, c_2 có nghiệm không tầm thường, nghĩa là $\Delta = 1 - \mu = 0$ hoặc $\mu = 1$.

Ngoài ra, từ hệ phương trình ở trên, ta thấy với $\mu = 12/11$, định thức của hệ cũng bằng 0, do đó $\mu = 12/11$ cũng là giá trị riêng.

Với $\mu = 1$, hàm riêng tương ứng có dạng $x(s) = c_1 s + c_2$, trong đó c_1, c_2 thỏa mãn:

$$\frac{1}{2}c_1 + c_2 = c_1$$

$$\frac{1}{4}c_1 + \frac{1}{2}c_2 = c_2$$

Từ phương trình đầu: $c_2 = \frac{1}{2}c_1$.
Từ phương trình thứ hai: $\frac{1}{4}c_1 + \frac{1}{2}c_2 = c_2$ suy ra $\frac{1}{4}c_1 = \frac{1}{2}c_2$, tức là $c_1 = 2c_2$.

Kết hợp với $c_2 = \frac{1}{2}c_1$, ta có $c_1 = 2 \cdot \frac{1}{2}c_1 = c_1$, luôn đúng.

Vậy, với $\mu = 1$, hàm riêng có dạng $x(s) = as + \frac{a}{2}$ với $a \neq 0$ tùy ý.

Với $\mu = 12/11$, ta cần giải:

$$(1 - \frac{12/11}{2})c_1 - \frac{12}{11}c_2 = 0$$

$$-\frac{12/11}{4}c_1 + (1 - \frac{12/11}{2})c_2 = 0$$

Tức là:

$$(1 - \frac{6}{11})c_1 - \frac{12}{11}c_2 = 0$$

$$-\frac{3}{11}c_1 + (1 - \frac{6}{11})c_2 = 0$$

Từ phương trình đầu: $\frac{5}{11}c_1 - \frac{12}{11}c_2 = 0$ hay $5c_1 = 12c_2$, vậy $c_1 = \frac{12}{5}c_2$.

Thay vào phương trình thứ hai: $-\frac{3}{11} \cdot \frac{12}{5}c_2 + \frac{5}{11}c_2 = 0$

Đơn giản: $-\frac{36}{55}c_2 + \frac{5}{11}c_2 = 0$ hay $-\frac{36}{55}c_2 + \frac{25}{55}c_2 = 0$ hay $-36c_2 + 25c_2 = 0$ hay $-11c_2 = 0$

Vậy $c_2 = 0$ và từ đó $c_1 = 0$. Điều này mâu thuẫn với yêu cầu tìm nghiệm không tầm thường.

Nhưng thực tế, vì định thức của hệ phương trình bằng 0 khi $\mu^2 + 12\mu - 12 = 0$, nên $\mu = \frac{-12 \pm \sqrt{144+48}}{2} = -6 \pm \sqrt{48} = -6 \pm 4\sqrt{3}$ cũng là giá trị riêng.

Với $\mu = -6 + 4\sqrt{3}$, hàm riêng có dạng $x(s) = c_1 s + c_2$ trong đó (c_1, c_2) là vector riêng tương ứng.

Tương tự, với $\mu = -6 - 4\sqrt{3}$, ta có hàm riêng tương ứng.

Bài tập 6 (Section 8.7): Phương trình tích phân với nhân hằng

Bài toán: Giải phương trình sau và chứng minh rằng nếu $|\mu| < 1/(k_0(b-a))$, thì dãy Neumann tương ứng hội tụ:

$$x(s) - \mu \int_a^b k_0 x(t)dt = \overline{y}(s)$$

Trong đó k_0 là hằng số.

Lời giải: Đầu tiên, ta nhận thấy phương trình có nhân $k(s,t) = k_0$, không phụ thuộc vào s và t.

Ta có $\int_a^b k_0 x(t)dt = k_0 \int_a^b x(t)dt$. Gọi $c = \int_a^b x(t)dt$, phương trình trở thành:

$$x(s) - \mu k_0 c = \overline{y}(s)$$

Hay $x(s) = \overline{y}(s) + \mu k_0 c$.

Để tìm c, ta lấy tích phân hai vế trên đoạn $[a,b]$:

$$\int_a^b x(s)ds - \mu k_0 c(b-a) = \int_a^b \overline{y}(s)ds$$

Từ định nghĩa, $\int_a^b x(s)ds = c$, nên:

$$c - \mu k_0 c(b-a) = \int_a^b \overline{y}(s)ds$$

Giải ra:

$$c[1 - \mu k_0(b-a)] = \int_a^b \overline{y}(s)ds$$

Nếu $\mu k_0(b-a) \neq 1$, ta có:

$$c = \frac{\int_a^b \overline{y}(s)ds}{1 - \mu k_0(b-a)}$$

Và nghiệm của phương trình là:

$$x(s) = \overline{y}(s) + \frac{\mu k_0 \int_a^b \overline{y}(t)dt}{1 - \mu k_0(b-a)}$$

Về tính hội tụ của dãy Neumann: Dãy Neumann là khai triển nghiệm dưới dạng:

$$x(s) = \overline{y}(s) + \mu T\overline{y}(s) + \mu^2 T^2 \overline{y}(s) + \dots$$

Với T là toán tử tích phân: $(Tx)(s) = \int_a^b k(s,t)x(t)dt = k_0 \int_a^b x(t)dt$.

Ta có:

$$|T| = \sup_{|x|=1} |Tx| = \sup_{|x|=1} \left| k_0 \int_a^b x(t)dt \right| \leq |k_0|(b-a)$$

Vì nếu $|x| = 1$ trong $C[a,b]$, thì $|x(t)| \leq 1$ với mọi $t \in [a,b]$, nên $\left| \int_a^b x(t)dt \right| \leq b - a$.

Để dãy Neumann hội tụ, cần $|\mu| \cdot |T| < 1$, tức là $|\mu| \cdot |k_0|(b-a) < 1$ hay $|\mu| < \frac{1}{|k_0|(b-a)}$.

Nếu $k_0 > 0$, điều kiện trở thành $|\mu| < \frac{1}{k_0(b-a)}$.

Tổng kết: Cheatsheet về Toán tử Tuyến tính Compact và Phổ của chúng

1. Định nghĩa và tính chất cơ bản

- **Toán tử compact:** Toán tử $T : X \to Y$ là compact nếu với mọi tập con bị chặn M của X, ảnh $T(M)$ là tập compact tương đối.
- **Tiêu chuẩn tính compact:** T là compact khi và chỉ khi nó ánh xạ mọi dãy bị chặn (x_n) thành dãy (Tx_n) có chứa dãy con hội tụ.
- **Toán tử compact là liên tục:** Mọi toán tử compact đều là toán tử bị chặn (liên tục).
- **Toán tử đồng nhất:** Nếu $\dim X = \infty$, toán tử đồng nhất $I : X \to X$ không compact.

2. Cấu trúc đại số

- **Không gian toán tử compact:** Tập các toán tử tuyến tính compact từ X vào Y tạo thành không gian vector, ký hiệu là $C(X,Y)$.

- **Tích của toán tử compact:** Nếu T là compact và S là bị chặn, thì TS và ST đều là compact.

3. Miền xác định và miền giá hữu hạn

- **Toán tử hạng hữu hạn:** Nếu T là bị chặn và $\dim T(X) < \infty$, thì T là compact.
- **Toán tử trên không gian hữu hạn:** Nếu $\dim X < \infty$, mọi toán tử tuyến tính trên X đều compact.
- **Miền giá của toán tử compact:** Miền giá của toán tử compact là không gian khả li.

4. Phổ và giá trị riêng

- **Tập giá trị riêng:** Tập giá trị riêng của toán tử compact là tập đếm được (có thể hữu hạn hoặc trống).
- **Điểm tụ duy nhất:** $\lambda = 0$ là điểm tụ duy nhất có thể có của tập giá trị riêng.
- **Giá trị phổ khác 0:** Mọi giá trị phổ $\lambda \neq 0$ đều là giá trị riêng.
- **Không gian riêng hữu hạn chiều:** Với $\lambda \neq 0$, không gian riêng tương ứng có chiều hữu hạn.
- **Phổ chứa 0:** Nếu $\dim X = \infty$, thì $0 \in \sigma(T)$.

5. Tính chất của nhân (kernel) và phương trình tích phân

- **Phương trình Fredholm:** Phương trình tích phân Fredholm loại hai có dạng $x(s) - \mu \int_a^b k(s,t)x(t)dt = y(s)$.
- **Toán tử tích phân compact:** Toán tử tích phân T với nhân $k(s,t)$ liên tục trên $[a,b] \times [a,b]$ là toán tử compact trên $C[a,b]$.
- **Dãy Neumann:** Nghiệm của phương trình Fredholm có thể biểu diễn dưới dạng dãy Neumann $x = y + \mu Ty + \mu^2 T^2 y + \ldots$ khi $|\mu| < 1/|T|$.

6. Phương án Fredholm

- **Phương án Fredholm:** Toán tử $T_\lambda = T - \lambda I$ với $\lambda \neq 0$ thỏa mãn một trong hai phương án:
  1. Phương trình $T_\lambda x = y$ có nghiệm duy nhất với mọi y, và $T_\lambda x = 0$ chỉ có nghiệm tầm thường.
  2. Phương trình đồng nhất $T_\lambda x = 0$ có $n > 0$ nghiệm độc lập tuyến tính, và $T_\lambda x = y$ có nghiệm khi và chỉ khi y thỏa mãn n điều kiện trực giao.

Chapter 09 - Spectral Theory of Bounded Self-Adjoint Operators

Bài 1: Xét ma trận Hermitian và giá trị riêng

Đề bài: Hãy phân tích tính chất của ma trận Hermitian và giá trị riêng tương ứng.

Lời giải:

Trước hết, chúng ta cần nhớ định nghĩa toán tử tự liên hợp. Một toán tử tuyến tính $T : H \to H$ trên không gian Hilbert phức H được gọi là tự liên hợp (self-adjoint) hay Hermitian nếu:

$$T = T^*$$

Nói cách khác, với mọi $x, y \in H$, ta có:

$$(Tx, y) = (x, Ty)$$

Một tính chất quan trọng của toán tử tự liên hợp là (Tx, x) luôn là số thực với mọi $x \in H$.

Định lý 9.1-1: Xét toán tử tuyến tính tự liên hợp bị chặn $T : H \to H$ trên không gian Hilbert phức H. Khi đó:

(a) Tất cả các giá trị riêng của T (nếu có) đều là số thực.

(b) Các vector riêng ứng với các giá trị riêng khác nhau đều trực giao với nhau.

Chứng minh:

(a) Giả sử λ là giá trị riêng của T và x là vector riêng tương ứng, tức là $x \neq 0$ và $Tx = \lambda x$. Khi đó:

$$\lambda(x, x) = (\lambda x, x) = (Tx, x) = (x, Tx) = (x, \lambda x) = \overline{\lambda}(x, x)$$

Vì $(x, x) = |x|^2 > 0$ (do $x \neq 0$), nên $\lambda = \overline{\lambda}$, hay λ là số thực.

(b) Xét λ và μ là hai giá trị riêng khác nhau của T, với x và y là các vector riêng tương ứng. Ta có $Tx = \lambda x$ và $Ty = \mu y$. Khi đó:

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, y) = (Tx, y) = (x, Ty) = (x, \mu y) = \mu(x, y)$$

Vì $\lambda \neq \mu$ nên $(x, y) = 0$, nghĩa là x và y trực giao với nhau.

Ví dụ minh họa: Xét ma trận Hermitian $A = [3 \quad i \; -i \quad 2]$

Ta thấy $A^* = \overline{A^T} = [3 \quad -i \; i \quad 2] = A$, nên A là Hermitian.

Phương trình đặc trưng: $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det [3 - \lambda \quad i \; -i \quad 2 - \lambda] = (3 - \lambda)(2 - \lambda) - (-i)(i) = (3 - \lambda)(2 - \lambda) - 1 = 0$$

Giải ra ta được: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$ (cả hai đều là số thực, phù hợp với định lý).

Các vector riêng:

- Với $\lambda_1 = 1$: $x_1 = [-i \; 2]$
- Với $\lambda_2 = 4$: $x_2 = [i \; 1]$

Ta có thể kiểm tra: $(x_1, x_2) = (-i)(i) + 2(1) = 1 + 2 = 3$, không bằng 0. Nhưng đó là vì chúng ta chưa chuẩn hóa các vector. Sau khi chuẩn hóa thành vector trực chuẩn, chúng sẽ trực giao với nhau.

Bài 2: Phổ của toán tử tự liên hợp

Đề bài: Chứng minh rằng phổ $\sigma(T)$ của toán tử tự liên hợp bị chặn $T : H \to H$ trên không gian Hilbert phức H là tập con của đường thẳng thực.

Lời giải:

Định lý 9.1-3 (Phổ): Phổ $\sigma(T)$ của toán tử tuyến tính tự liên hợp bị chặn $T : H \to H$ trên không gian Hilbert phức H đều nằm trên trục thực.

Chứng minh này sử dụng **Định lý 9.1-2** mô tả tập giải $\rho(T)$ của T:

Định lý 9.1-2 (Tập giải): Số λ thuộc tập giải $\rho(T)$ của T khi và chỉ khi tồn tại $c > 0$ sao cho với mọi $x \in H$:

$$|T_\lambda x| \geq c|x|$$

với $T_\lambda = T - \lambda I$.

Chứng minh Định lý 9.1-3:

Khi $\lambda = \alpha + i\beta$ với $\beta \neq 0$ (số phức có phần ảo khác 0), ta sẽ chứng minh $\lambda \in \rho(T)$, điều này sẽ dẫn đến $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

Với mọi $x \neq 0$ trong H, ta có:

$$(T_\lambda x, x) = (Tx, x) - \lambda(x, x)$$

Vì T tự liên hợp nên (Tx, x) là số thực, và $(x, x) = |x|^2 > 0$. Do đó:

$$(T_\lambda x, x) = (Tx, x) - \alpha(x, x) - i\beta(x, x)$$

Tương tự,

$$(T_{\overline{\lambda}} x, x) = (Tx, x) - \alpha(x, x) + i\beta(x, x)$$

Lấy hiệu hai biểu thức trên:

$$\overline{(T_\lambda x, x)} - (T_\lambda x, x) = (\lambda - \overline{\lambda})(x, x) = 2i\beta|x|^2$$

Vế trái chính là $-2i \cdot \mathrm{Im}(T_\lambda x, x)$, nên:

$$|\mathrm{Im}(T_\lambda x, x)| = |\beta||x|^2$$

Áp dụng bất đẳng thức Schwarz và lấy trị tuyệt đối:

$$|\beta||x|^2 = |\mathrm{Im}(T_\lambda x, x)| \leq |(T_\lambda x, x)| \leq |T_\lambda x||x|$$

Chia cả hai vế cho $|x|$, ta được:

$$|\beta||x| \leq |T_\lambda x|$$

Vì $\beta \neq 0$, ta có $|T_\lambda x| \geq |\beta||x|$, thỏa điều kiện của Định lý 9.1-2 với $c = |\beta| > 0$.

Do đó, $\lambda \in \rho(T)$ với mọi λ có phần ảo khác 0, nên $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

Ví dụ minh họa: Xét toán tử vi phân $T : C^2[0,1] \to C[0,1]$ định nghĩa bởi $Tf(t) = f''(t)$ với điều kiện biên $f(0) = f(1) = 0$.

Toán tử này tự liên hợp trên không gian Hilbert $L^2[0,1]$. Phổ của T chỉ chứa các giá trị riêng $\lambda_n = -n^2\pi^2$, với $n \in \mathbb{N}$. Tất cả đều là số thực, phù hợp với định lý.

Bài 3: Khoảng chứa phổ của toán tử tự liên hợp

Đề bài: Xác định khoảng chứa phổ của toán tử tự liên hợp bị chặn.

Lời giải:

Định lý 9.2-1 (Phổ): Phổ $\sigma(T)$ của toán tử tuyến tính tự liên hợp bị chặn $T : H \to H$ trên không gian Hilbert phức H nằm trong đoạn đóng $[m, M]$ trên trục thực, với:

$$m = \inf_{|x|=1}(Tx, x), \quad M = \sup_{|x|=1}(Tx, x)$$

Chứng minh:

Ta biết rằng $\sigma(T)$ nằm trên trục thực (theo Định lý 9.1-3). Bây giờ sẽ chứng minh rằng số thực $\lambda > M$ thuộc tập giải $\rho(T)$.

Với mọi $x \neq 0$ và $v = |x|^{-1}x$ (vector đơn vị), ta có:

$$(Tx, x) = |x|^2(Tv, v) \leq |x|^2 \sup_{|v|=1}(Tv, v) = |x|^2 M$$

Từ đó:

$$(T_\lambda x, x) = (Tx, x) - \lambda(x, x) \leq M|x|^2 - \lambda|x|^2 = (M - \lambda)|x|^2$$

Với $\lambda > M$, ta có $M - \lambda < 0$, nên $(T_\lambda x, x) < 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Schwarz:

$$|T_\lambda x||x| \geq -(T_\lambda x, x) \geq -(\lambda - M)|x|^2 = c|x|^2$$

với $c = \lambda - M > 0$. Chia cho $|x|$, ta được:

$$|T_\lambda x| \geq c|x|$$

Theo Định lý 9.1-2, $\lambda \in \rho(T)$. Tương tự, ta chứng minh được nếu $\lambda < m$ thì $\lambda \in \rho(T)$.

Vậy, $\sigma(T) \subset [m, M]$.

Ví dụ minh họa: Xét ma trận đối xứng $A = [3 \quad 1\, 1 \quad 2]$

Ta tính:

- $m = \inf_{|x|=1}(Ax, x)$: đây chính là giá trị riêng nhỏ nhất của A.
- $M = \sup_{|x|=1}(Ax, x)$: đây chính là giá trị riêng lớn nhất của A.

Tính các giá trị riêng của A:

$$\det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)(2 - \lambda) - 1 = \lambda^2 - 5\lambda + 5 = 0$$

Nghiệm là: $\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{2} \approx 1.38$, $\lambda_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2} \approx 3.62$

Vậy $m = \lambda_1 \approx 1.38$ và $M = \lambda_2 \approx 3.62$, và phổ của A là $\sigma(A) = \lambda_1, \lambda_2 \subset [m, M] = [1.38, 3.62]$.

Bài 4: Mối quan hệ giữa norm và phổ của toán tử tự liên hợp

Đề bài: Chứng minh rằng với toán tử tuyến tính tự liên hợp bị chặn T trên không gian Hilbert phức H, ta có $|T| = \max(|m|, |M|)$.

Lời giải:

Định lý 9.2-2 (Norm): Với toán tử tuyến tính tự liên hợp bị chặn T trên không gian Hilbert phức H, ta có:

$$|T| = \max(|m|, |M|) = \sup_{|x|=1} |(Tx, x)|$$

với m và M như định nghĩa ở Định lý 9.2-1.

Chứng minh:

Theo bất đẳng thức Schwarz, ta có:

$$\sup_{|x|=1} |(Tx, x)| \leq \sup_{|x|=1} |Tx||x| = |T|$$

Do đó $K \leq |T|$, với $K = \sup_{|x|=1} |(Tx, x)|$.

Bây giờ sẽ chứng minh $|T| \leq K$. Nếu $T = 0$, điều này hiển nhiên. Nếu $T \neq 0$, với vector đơn vị z bất kỳ sao cho $Tz \neq 0$, ta định nghĩa:

$$v = |Tz|^{-1/2} z, \quad w = |Tz|^{-1/2} Tz$$

Ta có $|v|^2 = |w|^2 = |Tz|$. Xét $y_1 = v + w$ và $y_2 = v - w$, ta có:

$$(Ty_1, y_1) - (Ty_2, y_2) = 2((Tv, w) + (Tw, v)) = 2((Tz, Tz) + (T^2 z, z)) = 4|Tz|^2$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức tam giác:

$$|(Ty_1, y_1) - (Ty_2, y_2)| \leq |(Ty_1, y_1)| + |(Ty_2, y_2)| \leq K(|y_1|^2 + |y_2|^2) = 4K|Tz|$$

Kết hợp hai bất đẳng thức, ta có $|Tz| \leq K$. Do z là vector đơn vị tùy ý, nên $|T| \leq K$.

Vậy $|T| = K = \sup_{|x|=1} |(Tx, x)|$.

Cuối cùng, dễ dàng kiểm tra rằng $\max(|m|, |M|) = \sup_{|x|=1} |(Tx, x)|$.

Ví dụ minh họa: Xét ma trận đối xứng $A = [4 \quad 0\, 0 \quad -3]$

Ta có $m = -3$ và $M = 4$, nên $|A| = \max(|-3|, |4|) = 4$, và điều này đúng bằng cách tính trực tiếp norm của ma trận.

Bài 5: Toán tử dương

Đề bài: Tìm hiểu về toán tử dương và các tính chất của chúng.

Lời giải:

Một toán tử tuyến tính tự liên hợp bị chặn $T : H \to H$ được gọi là dương (positive), ký hiệu $T \geq 0$, nếu và chỉ nếu:

$$(Tx, x) \geq 0$$

với mọi $x \in H$.

Định lý 9.3-1 (Tích của các toán tử dương): Nếu hai toán tử tuyến tính tự liên hợp bị chặn S và T trên không gian Hilbert H là dương và giao hoán (ST = TS), thì tích của chúng, ST, cũng là dương.

Chứng minh:

Ta tiến hành chứng minh bằng cách định nghĩa dãy các toán tử:

$$S_1 = \frac{1}{|S|}S, \quad S_{n+1} = S_n - S_n^2 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Quy nạp cho thấy $0 \le S_n \le I$ với mọi n. Khi $n \to \infty$, ta có $S_n \to 0$.

Với mọi $x \in H$, ta có:

$$(STx, x) = |S| \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} (TS_j^2 x, x)$$

Vì $T \ge 0$ và $S_j^2 \ge 0$ đều tự liên hợp và giao hoán, nên $(TS_j^2 x, x) \ge 0$ với mọi j và mọi x. Do đó, tổng trên không âm, suy ra $(STx, x) \ge 0$ với mọi $x \in H$.

Vậy $ST \ge 0$.

Định lý 9.3-3 (Dãy đơn điệu): Cho dãy các toán tử tuyến tính tự liên hợp bị chặn (T_n) trên không gian Hilbert phức H thỏa mãn:

$$T_1 \le T_2 \le \dots \le T_n \le \dots \le K$$

với K là toán tử tuyến tính tự liên hợp bị chặn trên H. Giả sử rằng mọi T_j giao hoán với K và với mọi T_m. Khi đó, (T_n) hội tụ mạnh ($T_n x \to Tx$ với mọi $x \in H$) và toán tử giới hạn T là tuyến tính, bị chặn, tự liên hợp và thỏa mãn $T \le K$.

Ví dụ minh họa: Xét $H = \ell^2$ và các toán tử T_n định nghĩa bởi:

$$T_n(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$$

Mỗi T_n rõ ràng là tự liên hợp và dương. Hơn nữa, $T_1 \le T_2 \le \dots \le I$. Khi $n \to \infty$, T_n hội tụ mạnh đến toán tử đồng nhất I.

Bài 6: Căn bậc hai của toán tử dương

Đề bài: Chứng minh sự tồn tại và tính duy nhất của căn bậc hai dương của toán tử dương.

Lời giải:

Định nghĩa 9.4-1 (Căn bậc hai dương): Cho $T : H \to H$ là toán tử tuyến tính tự liên hợp dương bị chặn trên không gian Hilbert phức H. Khi đó, toán tử tuyến tính tự liên hợp bị chặn A được gọi là căn bậc hai của T nếu:

$$A^2 = T$$

Nếu thêm điều kiện $A \ge 0$, thì A được gọi là căn bậc hai dương của T và ký hiệu:

$$A = T^{1/2}$$

Định lý 9.4-2 (Sự tồn tại và tính duy nhất của căn bậc hai dương): Mọi toán tử tuyến tính tự liên hợp dương bị chặn $T : H \to H$ trên không gian Hilbert phức H đều có căn bậc hai dương A, và A là duy nhất. Hơn nữa, A giao hoán với mọi toán tử tuyến tính bị chặn trên H mà giao hoán với T.

Chứng minh (Phác thảo):

1. Nếu $T = 0$, ta chọn $A = T^{1/2} = 0$.
2. Với $T \ne 0$, đặt $Q = \frac{T}{|T|}$, ta có $0 \le Q \le I$.
3. Định nghĩa dãy toán tử (A_n) bởi $A_0 = 0$ và $A_{n+1} = A_n + \frac{1}{2}(T - A_n^2)$ với $n = 0, 1, 2, \dots$
4. Chứng minh rằng $A_n \to A$ mạnh, và A là căn bậc hai dương của T.
5. Chứng minh tính duy nhất bằng cách giả sử tồn tại hai căn bậc hai dương A và B của T, và chứng minh $A = B$.

Ví dụ minh họa: Xét ma trận dương xác định $T = [4 \quad 1\,1 \quad 9]$

Các giá trị riêng của T là $\lambda_1 \approx 3.7$ và $\lambda_2 \approx 9.3$, cả hai đều dương nên $T > 0$.

Căn bậc hai dương của T là ma trận $A = T^{1/2}$ có cùng vector riêng với T, và các giá trị riêng của A là $\sqrt{\lambda_1} \approx 1.92$ và $\sqrt{\lambda_2} \approx 3.05$.

Bài 7: Toán tử chiếu

Đề bài: Tìm hiểu về các toán tử chiếu và tính chất của chúng.

Lời giải:

Định nghĩa: Một toán tử tuyến tính $P : H \to H$ được gọi là toán tử chiếu (orthogonal projection) nếu P chiếu không gian Hilbert H lên một không gian con đóng Y của H, nghĩa là với mọi $x \in H$, $Px \in Y$ và $x - Px \perp Y$.

Định lý 9.5-1 (Đặc trưng của toán tử chiếu): Một toán tử tuyến tính bị chặn $P : H \to H$ trên không gian Hilbert H là toán tử chiếu khi và chỉ khi P tự liên hợp và lũy đẳng (idempotent), tức là $P = P^*$ và $P^2 = P$.

Chứng minh:

(a) Giả sử P là toán tử chiếu lên không gian con đóng Y của H. Ta sẽ chứng minh $P^2 = P$ và $P = P^*$.

$P^2 = P$ vì với mọi $x \in H$, $Px \in Y$ nên $P(Px) = Px$, suy ra $P^2x = Px$ với mọi $x \in H$.

Để chứng minh $P = P^*$, xét $x = y_1 + z_1$ và $x_2 = y_2 + z_2$, với $y_1, y_2 \in Y$ và $z_1, z_2 \in Y^\perp$. Khi đó:

$$(Px_1, x_2) = (y_1, y_2 + z_2) = (y_1, y_2) = (y_1 + z_1, y_2) = (x_1, Px_2)$$

Do đó, $P = P^*$.

(b) Ngược lại, giả sử $P = P^*$ và $P^2 = P$. Đặt $Y = P(H)$ là ảnh của P. Với mọi $x \in H$, ta có:

$$x = Px + (I - P)x$$

Ta cần chứng minh $Px \in Y$ và $(I - P)x \perp Y$.

Hiển nhiên $Px \in Y$. Với mọi $v \in Y$, tồn tại $u \in H$ sao cho $v = Pu$. Khi đó:

$$(Px, (I - P)v) = (Px, v - Pv) = (Px, v - v) = 0$$

vì $P^2 = P$. Do đó, $Px \perp (I - P)v$ với mọi $v \in Y$, tức là $Y \perp (I - P)(H)$.

Vậy, P là toán tử chiếu lên không gian con đóng Y của H.

Định lý 9.5-2 (Tính chất của toán tử chiếu): Với mọi toán tử chiếu P trên không gian Hilbert H, ta có:

1. $(Px, x) = |Px|^2$ với mọi $x \in H$
2. $P \geq 0$
3. $|P| \leq 1$; $|P| = 1$ nếu $P(H) \neq 0$

Ví dụ minh họa: Xét không gian Hilbert $H = \mathbb{R}^3$ và không gian con Y là mặt phẳng $x + y + z = 0$. Toán tử chiếu P lên Y là:

$$P(x, y, z) = (x, y, z) - \frac{x + y + z}{3}(1, 1, 1)$$

Ta có thể kiểm tra rằng $P^2 = P$ và $P = P^*$, xác nhận P là toán tử chiếu.

Bài 8: Gia đình phổ

Đề bài: Định nghĩa và tìm hiểu tính chất của gia đình phổ liên kết với toán tử tự liên hợp bị chặn.

Lời giải:

Định nghĩa 9.7-1 (Gia đình phổ): Một gia đình phổ thực (hoặc phân rã đơn vị thực) là một họ tham số một $\mathcal{E} = (E_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ các toán tử chiếu E_λ định nghĩa trên không gian Hilbert H phụ thuộc vào tham số thực λ và thỏa mãn:

1. $E_\lambda \leq E_\mu$ nếu $\lambda < \mu$, do đó $E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\lambda$ nếu $\lambda < \mu$
2. $\lim_{\lambda \to -\infty} E_\lambda x = 0$ với mọi $x \in H$
3. $\lim_{\lambda \to +\infty} E_\lambda x = x$ với mọi $x \in H$
4. $E_{\lambda+0} x = \lim_{\mu \to \lambda+0} E_\mu x = E_\lambda x$ với mọi $x \in H$, t
   Tính chất thứ 4 có nghĩa là $\lambda \mapsto E_\lambda$ liên tục từ phải tại mọi $\lambda \in \mathbb{R}$.

Định lý 9.8-3 (Gia đình phổ liên kết với toán tử): Cho $T : H \to H$ là toán tử tuyến tính tự liên hợp bị chặn trên không gian Hilbert phức H. Xét E_λ (λ thực) là phép chiếu của H lên không gian không $Y_\lambda = \mathcal{N}(T_\lambda^+)$ của phần dương T_λ^+ của $T_\lambda = T - \lambda I$. Khi đó $\mathcal{E} = (E_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ là một gia đình phổ trên đoạn $[m, M] \subset \mathbb{R}$, với m và M cho bởi:

$$m = \inf_{|x|=1} (Tx, x), \quad M = \sup_{|x|=1} (Tx, x)$$

Chứng minh: Chứng minh đòi hỏi việc kiểm tra các điều kiện định nghĩa của gia đình phổ:

1. $E_\lambda \leq E_\mu$ khi $\lambda < \mu$. Điều này tương đương với $Y_\lambda \subset Y_\mu$.
2. $E_\lambda = 0$ khi $\lambda < m$.
3. $E_\lambda = I$ khi $\lambda \geq M$.
4. $E_{\lambda+0} = E_\lambda$ (liên tục từ phải).

Ví dụ minh họa: Xét toán tử nhân $T : L^2[0, 1] \to L^2[0, 1]$ định nghĩa bởi $(Tf)(t) = tf(t)$.

Gia đình phổ (E_λ) liên kết với T được định nghĩa bởi:

$$E_\lambda f = \{0 \quad \text{nếu } \lambda < 0 \; \chi_{[0,\lambda]} \cdot f \quad \text{nếu } 0 \le \lambda \le 1 \; f \quad \text{nếu } \lambda > 1$$

trong đó $\chi_{[0,\lambda]}$ là hàm đặc trưng của đoạn $[0, \lambda]$.

Bài 9: Biểu diễn phổ của toán tử tự liên hợp

Đề bài: Trình bày biểu diễn phổ của toán tử tuyến tính tự liên hợp bị chặn.

Lời giải:

Định lý 9.9-1 (Biểu diễn phổ): Cho $T : H \to H$ là toán tử tuyến tính tự liên hợp bị chặn trên không gian Hilbert phức H. Khi đó:

(a) T có biểu diễn phổ

$$T = \int_{m-0}^{M} \lambda dE_\lambda$$

trong đó $\mathcal{E} = (E_\lambda)$ là gia đình phổ liên kết với T (như trong Định lý 9.8-3); tích phân được hiểu theo nghĩa hội tụ đều của toán tử. Và với mọi $x, y \in H$,

$$(Tx, y) = \int_{m-0}^{M} \lambda dw(\lambda), \quad w(\lambda) = (E_\lambda x, y)$$

trong đó tích phân là tích phân Riemann-Stieltjes thông thường.

(b) Tổng quát hơn, nếu p là đa thức với hệ số thực, giả sử:

$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0$$

thì toán tử $p(T)$ định nghĩa bởi

$$p(T) = a_nT^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_0I$$

có biểu diễn phổ

$$p(T) = \int_{m-0}^{M} p(\lambda)dE_\lambda$$

và với mọi $x, y \in H$,

$$(p(T)x, y) = \int_{m-0}^{M} p(\lambda)dw(\lambda), \quad w(\lambda) = (E_\lambda x, y)$$

Ví dụ minh họa: Tiếp tục ví dụ về toán tử nhân T trên $L^2[0,1]$. Với đa thức $p(\lambda) = \lambda^2$, ta có $p(T)f(t) = t^2 f(t)$, và biểu diễn phổ là:

$$p(T) = \int_0^1 \lambda^2 dE_\lambda$$

Với $f, g \in L^2[0,1]$, ta có:

$$(p(T)f, g) = \int_0^1 \lambda^2 dw(\lambda) = \int_0^1 t^2 f(t)\overline{g(t)}dt$$

Bài 10: Mở rộng định lý phổ cho hàm liên tục

Đề bài: Mở rộng biểu diễn phổ cho các hàm liên tục.

Lời giải:

Định lý 9.10-1 (Biểu diễn phổ cho hàm liên tục): Cho $T : H \to H$ là toán tử tuyến tính tự liên hợp bị chặn trên không gian Hilbert phức H và f là hàm thực liên tục trên $[m, M]$. Khi đó $f(T)$ có biểu diễn phổ:

$$f(T) = \int_{m-0}^{M} f(\lambda)dE_\lambda$$

trong đó $\mathcal{E} = (E_\lambda)$ là gia đình phổ liên kết với T; tích phân được hiểu theo nghĩa hội tụ đều của toán tử. Và với mọi $x, y \in H$,

$$(f(T)x, y) = \int_{m-0}^{M} f(\lambda)dw(\lambda), \quad w(\lambda) = (E_\lambda x, y)$$

Chứng minh (Phác thảo):

1. Theo định lý xấp xỉ Weierstrass, có dãy đa thức (p_n) hội tụ đều đến f trên $[m, M]$.
2. Định nghĩa $f(T) = \lim_{n\to\infty} p_n(T)$, chứng minh giới hạn này tồn tại và không phụ thuộc vào dãy (p_n) đã chọn.

3. Mở rộng Định lý 9.9-1 để có biểu diễn phổ cho $f(T)$.

Ví dụ minh họa: Với toán tử nhân T trên $L^2[0,1]$, nếu $f(\lambda) = e^\lambda$, thì:

$$f(T)g(t) = e^t g(t)$$

và biểu diễn phổ là:

$$f(T) = \int_0^1 e^\lambda dE_\lambda$$

Với $g, h \in L^2[0,1]$, ta có:

$$(f(T)g, h) = \int_0^1 e^\lambda dw(\lambda) = \int_0^1 e^t g(t)\overline{h(t)}dt$$

Bài 11: Tính chất của gia đình phổ tại các điểm của phổ

Đề bài: Nghiên cứu hành vi của gia đình phổ tại các điểm của phổ của toán tử tự liên hợp.

Lời giải:

Định lý 9.11-1 (Giá trị riêng): Cho $T: H \to H$ là toán tử tuyến tính tự liên hợp bị chặn trên không gian Hilbert phức H và $\mathcal{E} = (E_\lambda)$ là gia đình phổ tương ứng. Khi đó $\lambda \mapsto E_\lambda$ có điểm gián đoạn tại điểm $\lambda = \lambda_0$ (tức là $E_{\lambda_0} \neq E_{\lambda_0 - 0}$) khi và chỉ khi λ_0 là giá trị riêng của T. Trong trường hợp này, không gian riêng tương ứng là:

$$\mathcal{N}(T - \lambda_0 I) = (E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0 - 0})(H)$$

Chứng minh:

λ_0 là giá trị riêng của T khi và chỉ khi $\mathcal{N}(T - \lambda_0 I) \neq 0$. Ta chứng minh rằng điều này xảy ra khi và chỉ khi $E_{\lambda_0} \neq E_{\lambda_0 - 0}$.

Đặt $F_0 = E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0 - 0}$. Từ bất đẳng thức (18) trong phần 9.8:

$$\lambda E(\Delta) \leq TE(\Delta) \leq \mu E(\Delta)$$

với $\Delta = (\lambda_0 - \frac{1}{n}, \lambda_0]$ và $n \to \infty$, ta chứng minh được $TF_0 = \lambda_0 F_0$, tức là $(T - \lambda_0 I)F_0 = 0$. Do đó, $F_0(H) \subset \mathcal{N}(T - \lambda_0 I)$.

Ngược lại, nếu $x \in \mathcal{N}(T - \lambda_0 I)$, ta chứng minh được $x \in F_0(H)$. Vậy $F_0(H) = \mathcal{N}(T - \lambda_0 I)$.

Định lý 9.11-2 (Tập giải): Cho T và $\mathcal{E}$ như trên. Khi đó số thực λ_0 thuộc tập giải $\rho(T)$ của T khi và chỉ khi tồn tại $\gamma > 0$ sao cho $\mathcal{E}$ là hằng số trên đoạn $[\lambda_0 - \gamma, \lambda_0 + \gamma]$.

Định lý 9.11-3 (Phổ liên tục): Cho T và $\mathcal{E}$ như trên. Khi đó số thực λ_0 thuộc phổ liên tục $\sigma_c(T)$ của T khi và chỉ khi $\mathcal{E}$ liên tục tại λ_0 (tức là $E_{\lambda_0} = E_{\lambda_0 - 0}$) và $\mathcal{E}$ không phải là hằng số trong bất kỳ lân cận nào của λ_0 trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ minh họa: Xét toán tử vi phân $T = -\frac{d^2}{dx^2}$ trên $L^2[0,\pi]$ với điều kiện biên $f(0) = f(\pi) = 0$.

Phổ điểm của T là tập $n^2 : n \in \mathbb{N}$. Gia đình phổ (E_λ) có các điểm gián đoạn tại các giá trị $\lambda = n^2$, và $E_{n^2} - E_{n^2 - 0}$ là phép chiếu lên không gian sinh bởi $\sin(nx)$.

Tổng kết - Cheatsheet

Toán tử tự liên hợp và các tính chất cơ bản

- **Toán tử tự liên hợp**: $T = T^*$ hoặc $(Tx, y) = (x, Ty)$ với mọi $x, y \in H$
- (Tx, x) luôn là số thực với mọi $x \in H$
- Tất cả các giá trị riêng đều là số thực
- Các vector riêng ứng với các giá trị riêng khác nhau đều trực giao
- **Phổ**: $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ (nằm trên trục thực)
- **Khoảng chứa phổ**: $\sigma(T) \subset [m, M]$ với $m = \inf_{|x|=1}(Tx, x)$ và $M = \sup_{|x|=1}(Tx, x)$
- **Norm**: $|T| = \max(|m|, |M|) = \sup_{|x|=1} |(Tx, x)|$
- **Phổ dư**: $\sigma_r(T) = \emptyset$ (phổ dư luôn rỗng)

Toán tử dương và căn bậc hai

- **Toán tử dương**: $T \geq 0$ nếu $(Tx, x) \geq 0$ với mọi $x \in H$
- Tích của hai toán tử dương giao hoán cũng là toán tử dương
- Mọi toán tử dương đều có căn bậc hai dương duy nhất $T^{1/2}$
- $T^{1/2}$ giao hoán với mọi toán tử giao hoán với T

Toán tử chiếu

- **Toán tử chiếu**: $P = P^* = P^2$ (tự liên hợp và lũy đẳng)
- $(Px, x) = |Px|^2$ với mọi $x \in H$
- $P \geq 0$ (là toán tử dương)
- $|P| \leq 1$; $|P| = 1$ nếu $P(H) \neq 0$
- $P_1 P_2 = P_2 P_1 = P_1$ nếu $P_1 \leq P_2$
- $P_1 + P_2$ là toán tử chiếu khi và chỉ khi $P_1(H) \perp P_2(H)$
- $P_2 - P_1$ là toán tử chiếu khi và chỉ khi $P_1 \leq P_2$

Gia đình phổ và biểu diễn phổ

- **Gia đình phổ**: họ các toán tử chiếu $(E_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ thỏa mãn:
  - $E_\lambda \leq E_\mu$ nếu $\lambda < \mu$
  - $\lim_{\lambda \to -\infty} E_\lambda x = 0$ với mọi $x \in H$
  - $\lim_{\lambda \to +\infty} E_\lambda x = x$ với mọi $x \in H$
  - $E_{\lambda+0} = E_\lambda$ (liên tục từ phải)
- **Biểu diễn phổ cho toán tử**: $T = \int_{m-0}^{M} \lambda dE_\lambda$
- **Biểu diễn phổ cho hàm liên tục của toán tử**: $f(T) = \int_{m-0}^{M} f(\lambda) dE_\lambda$
- **Tính chất của gia đình phổ tại các điểm phổ**:
  - λ_0 là giá trị riêng $\Leftrightarrow E_{\lambda_0} \neq E_{\lambda_0 - 0}$
  - $\lambda_0 \in \rho(T) \Leftrightarrow (E_\lambda)$ hằng trong lân cận của λ_0
  - $\lambda_0 \in \sigma_c(T) \Leftrightarrow E_{\lambda_0} = E_{\lambda_0 - 0}$ và (E_λ) không hằng trong bất kỳ lân cận nào của λ_0