ორ განზომილებიანი სეისმური ტალღების სიმულაცია

შესავალი

სეისმური ტალღების აკუსტიკური მოდელი

სეისმური ტალღები გამოიყენება მიწისქვეშა გეოლოგიური სტრუქტურების თვისებების დასადგენად. ფიზიკური მოდელი წარმოადგენს ჰეტეროგენურ ელასტიკურ გარემოში მცირე ელასტიკური რხევების გავრცელებას.

ელასტიკური გარემოს დეფორმაციის ზოგადი მათემატიკური მოდელი ეფუძნება ნიუტონის II კანონს:

$$\rho \boldsymbol{u}_{tt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \boldsymbol{f} \quad (1)$$

ასევე ვიყენებთ ჰუკის განზოგადებულ კანონს, რომელიც $\boldsymbol{\sigma}$ და $\boldsymbol{u}$ აკავშირებს ერთმანეთთან *(Hooke's generalized law):*

$$\boldsymbol{\sigma} = K\nabla \cdot \boldsymbol{u}\boldsymbol{I} + G\left(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T - \frac{2}{3}\nabla \cdot \boldsymbol{u}\boldsymbol{I}\right) \quad (2)$$

$\boldsymbol{u}$ არის წანაცვლების ველი *(displacement field);*

$\boldsymbol{\sigma}$ სტრეს ტენზორი;

ρ სიმკვივე;

$\boldsymbol{f}$ *Body force* - სხეულის მოცულობაზე არსებული ძალები (მაგ: გრავიტაციული);

K *Bulk modulus* - ბალკის მუდმივა (გრეხის მუდმივა);

G *Shear modulus*

ტალღის მოძრაობის პროცესში , ყველა ეს სიდიდე შესაძლოა იცვლებოდეს დროში. ($\boldsymbol{u}$ და $\boldsymbol{\sigma}$ -ის ცვლილება მნიშვნელოვანია.)

ელასტიკური ტალღების აკუსტიკური მიახლოება მომდინარეობს ძირითადი დაშვებიდან, რომ ჰუკის კანონის II წევრი, წანაცვლების წნევას აღმძვრელ დეფორმაციებს წარმოადგენენ, შეგვიძლია უგულებელვყოთ. ეს დაშვება ასევე შეიძლება განიმარტოს, როგორც გეოლოგიური გარემოს სითხის მიახლოება

ამოცანის ამოხსნის პროცესში ასევე არ ვითვალისწინებთ ე.წ. Body forces : $\boldsymbol{f}$ შესაბამისად:

$$(2) \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = K\nabla \cdot \boldsymbol{u}$$

$$(1) \Rightarrow \quad \rho \boldsymbol{u}_{tt} = \nabla \boldsymbol{\sigma}$$

ჩავსვათ და გამოგვივა:

$$\rho \boldsymbol{u}_{tt} = \nabla(K\nabla \cdot \boldsymbol{u}) \qquad (3)$$

შემოვიყვანოთ p როგორც წნევა:

$$p = -K\nabla \cdot \boldsymbol{u} \qquad (4)$$

შესაბამისად:

$$\frac{(3)}{\rho} \Rightarrow \qquad \boldsymbol{u}_{tt} = \frac{1}{\rho}\nabla(K\nabla \cdot \boldsymbol{u}) = -\frac{1}{\rho}\nabla p \qquad (5)$$

ავიღოთ მიღებული განტოლების დივერგენცია:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}_{tt} = \nabla \cdot \left(-\frac{1}{\rho}\nabla p\right)$$

$$(4) \Rightarrow \quad \nabla \cdot \boldsymbol{u} = -\frac{p}{K}$$

$$-\frac{p_{tt}}{K} = \nabla \cdot \left(-\frac{1}{\rho}\nabla p\right)$$

მივიღეთ ელასტიკური ტალღის აკუსტიკური მიახლოება:

$$p_{tt} = K\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right) \qquad (6)$$

საბოლოოდ, მივიღეთ სტანდარტული დიფერენციალური განტოლება, ცვლადი კოეფიციენტებით. მიღებულ განტოლებას ემატება წყაროს წევრი s(x,y,z,t) , რათა ავაგოთ რალღის გავრცელების გენერირების მოდელი.

$$p_{tt} = K\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right) + S(x,y,z,t) \quad (7)$$

განტოლების მარჯვენა მხარე გავშალოთ ჩეინ რულით:

$$K\nabla\cdot\left(\frac{1}{\rho}\ \nabla p\right)=\frac{K}{\rho}\nabla^2 p+K\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right)\cdot\nabla p\approx\frac{K}{\rho}\nabla^2 p \quad (8)$$

ამ შემთხვევაში, მეორე წევრი გავანულეთ იმ დაშვებით, რომ ფარდობითად, სიმკვრივის სივრცითი გრადიენტი ძალიან მცირეა:

$$\nabla\rho^{-1}=-\rho^{-2}\nabla\rho$$ ძალიან მცირეა.

$$p_{tt}=\frac{K}{\rho}\nabla^2 p+S \qquad (9)$$

სეისმური ტალღების აკუსტიკური მიახლოება გამოიყენება მიწაში არსებული ბგერითი ტალღებისთვის. დედამიწის ზედაპირი წარმოადგენს საზღვარს, სადაც წნევა ატმოსფერული წნევის ტოლია. $p=p_0$

არაიზოტროპულობა:

საკმაოდ ხშირად, გეოგრაფიულ მატერიალებში ეფექტური ტალღის სიჩქარე განსხვავდება სხვა და სხვა სივრცული მიმართულებისთვის. ეს გამოწვეულია გეოლოგიური შრეების დატკეპვნისა და დაგრეხის შედეგად. ამ დროს შრეების თვისებები ვერტიკალური და ჰორიზონტალური მიმართულებით,განსხვავდება ერთმანეთისაგან. შესაბამისად, z ვერტიკალური მიმართულებისთვის შეგვიძლია შემოვიყვანოთ c_z _ ვერტიკალური და c_h _ჰორიზონტალური სიჩქარეები.

გარემოში ტალღის გავრცელების სიჩქარე $c=\sqrt{\frac{K}{\rho}}$

შესაბამისად, (9) ფორმულა გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$p_{tt}=c_z^2 p_{zz}+c_h^2\left(p_{xx}+p_{yy}\right)+S(x,y,z.t)$$

ამოცანის დასმა:

2D სეისმური ტალღების სიმულაცია

ჩვენი მიზანია, ავაგოთ სეისმური ტალღების სიმულაცია 2D (xz) არეში არსებული გეოგრაფიული ფენებით. ამისათვის შემოგვყავს m რაოდენობის ჰორიზონტალური ფენა, რომელთა სისქეა: $h_i, i=0\ ,1, \dots, m-1$. i-ურ ფენაში გვაქვს ვერტიკალური $c_{z,i}$ და ჰორიზონტალური $c_{h,i}$ სიჩქარეები.

სიმულაციისათვის უნდა შევქმნათ ისეთი პროგრამა, რომელიც გააკეთებს ასეთი 2D ტალღის სიმულაციას, რომელშიც იქნება სამი ფენა. რომელთათვისაც გვაქვს შემდეგი პირობები:

$$c_{z,0} = c_{z,1} = c_{z,2}$$

$$c_{h,0} = c_{h,2}$$

$$c_{h,1} \ll c_{h,0}$$

S იყოს ლოკალიზებული წერტილოვანი წყარო, (მოთავსებული შუაში) და გამოვიკვლიოთ, თუ როგორ გავრცელდება წყაროს მიერ გამოწვეული ტალღა, მოცემულ გარემოში. (წყარო შესაძლოა იყოს ლოკალიზებული გაუსური პიკი, რომელიც ირხევა დროის რაღაც ინტერვალის განმავლობაში). საზღვრები უნდა შევარჩიოთ იმდენად შორს, რომ არ შეუშალონ ტალღის გავრცელებას ხელი. ამ ამოცანაში, სასაზღვრო პირობების ტიპს არ აქვს გადამწყვეტი მნიშვნელობა.

$$p_{tt} = c_z^2 p_{zz} + c_h^2 p_{xx} + S$$

სასრულსხვაობიანი მეთოდი:

$$P_{tt} = v_x^2 P_{xx} + v_z^2 P_{zz} + f(x,z,t)$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta a} \qquad \frac{d^2 f}{da^2} \approx \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{(\Delta a)^2} \qquad f = f(a)$$

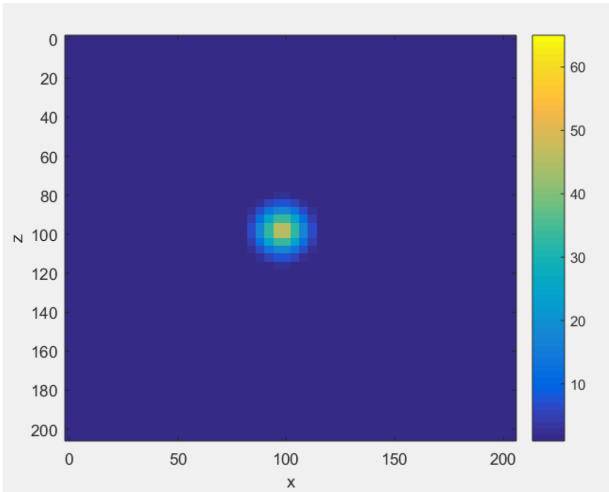
$$\frac{P^{n+1}_{i,k} - 2P^n_{i,k} + P^{n-1}_{i,k}}{(\Delta t)^2} = v_x^2 \frac{P^n_{i+1,k} - 2P^n_{i,k} + P^n_{i-1,k}}{(\Delta x)^2} + v_z^2 \frac{P^n_{i,k+1} - 2P^n_{i,k} + P^n_{i,k-1}}{(\Delta y)^2} + f^n_{i,k}$$

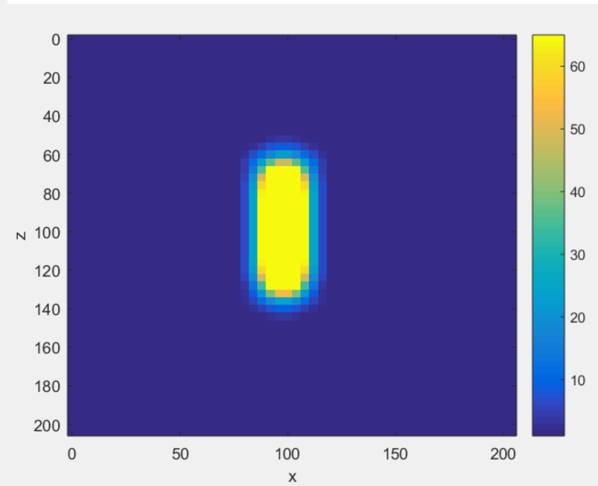
$$P^{n+1}_{i,k} = 2P^n_{i,k} - P^{n-1}_{i,k} + v_x^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \left[P^n_{i+1,k} - 2P^n_{i,k} + P^n_{i-1,k}\right] + v_z^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta y}\right)^2 \left[P^n_{i,k+1} - 2P^n_{i,k} + P^n_{i,k-1}\right] + (\Delta t)^2 f^n_{i,k}$$

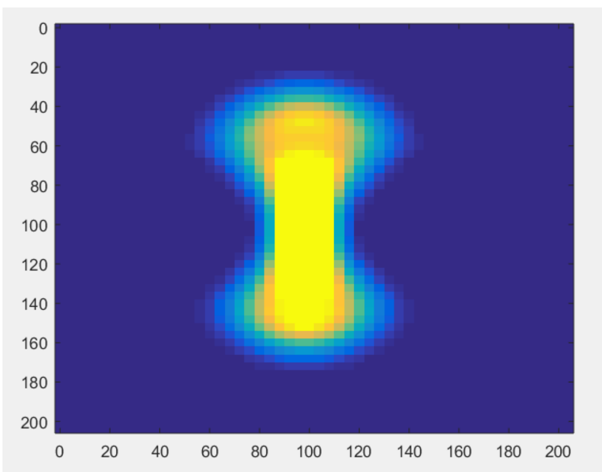
$$\left(v_z \frac{\Delta t}{\Delta y}\right)^2 \equiv C_z^2 \qquad \left(v_x \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \equiv C_x^2$$

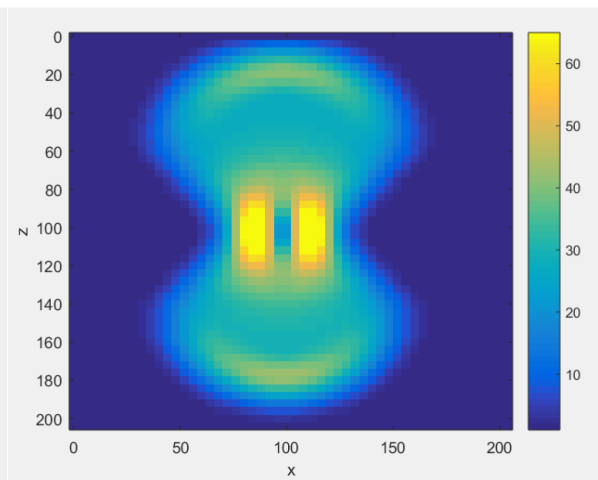
$$P^{n+1}_{i,k} = 2P^n_{i,k} - P^{n-1}_{i,k} + C_x^2 \left(P^n_{i+1,k} - 2P^n_{i,k} + P^n_{i-1,k}\right) + C_z^2 \left(P^n_{i,k+1} - 2P^n_{i,k} + P^n_{i,k-1}\right) + (\Delta t)^2 f^n_{i,k}$$

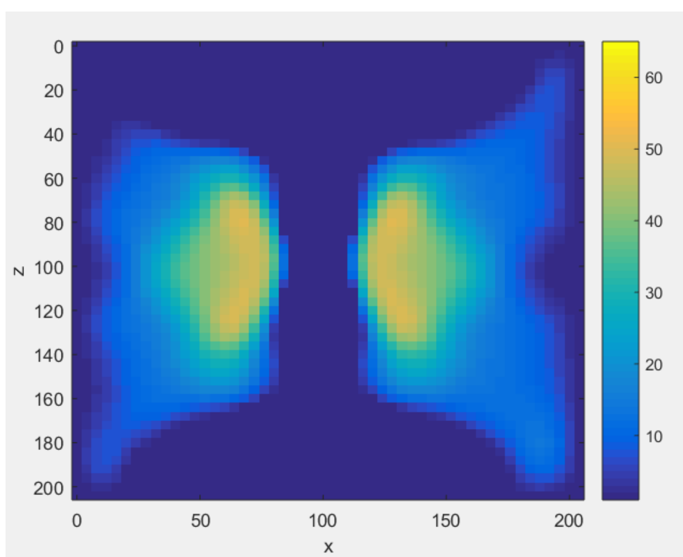
ნაკლებად ლოკალიზებული გაუსური წყაროს შემთხვევაში



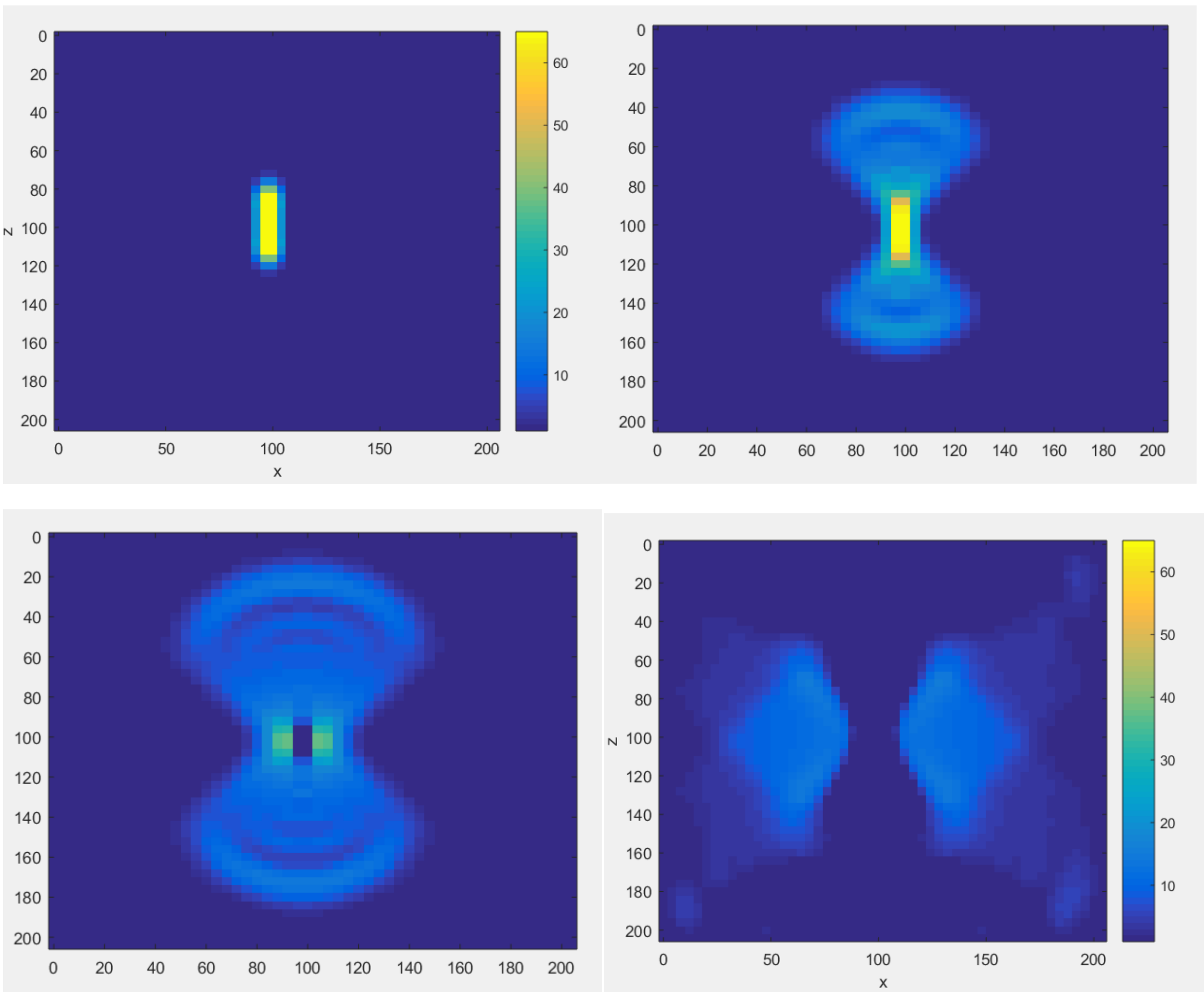




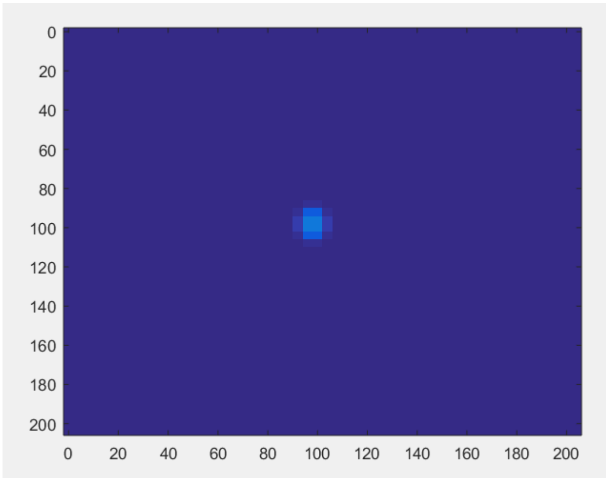


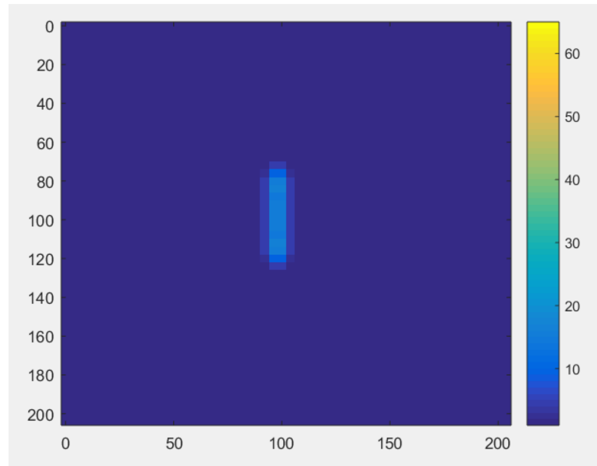


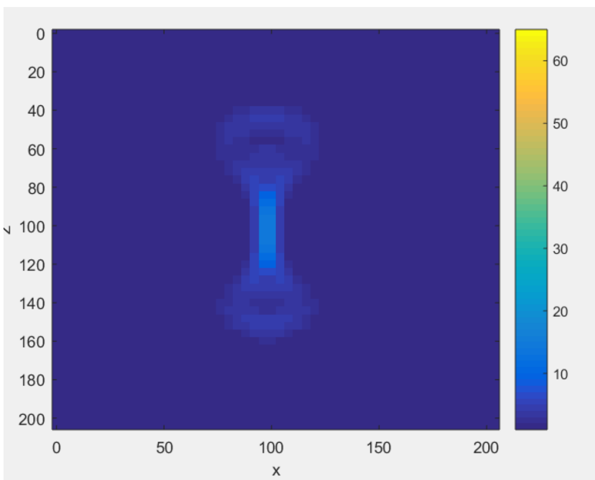
მეტად ლოკალიზებული გაუსური ტალღის შემთხვევაში

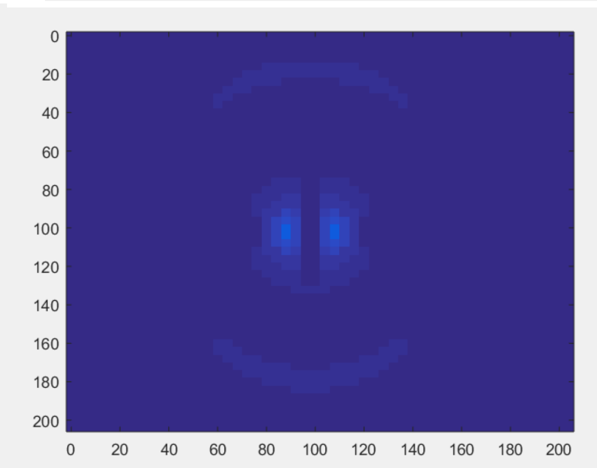


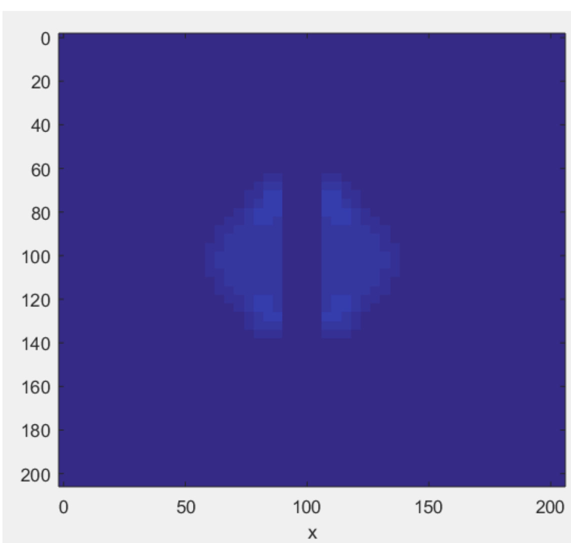
ნაკლები ამპლიტუდის მქონე ტალღის შემთხვევაში

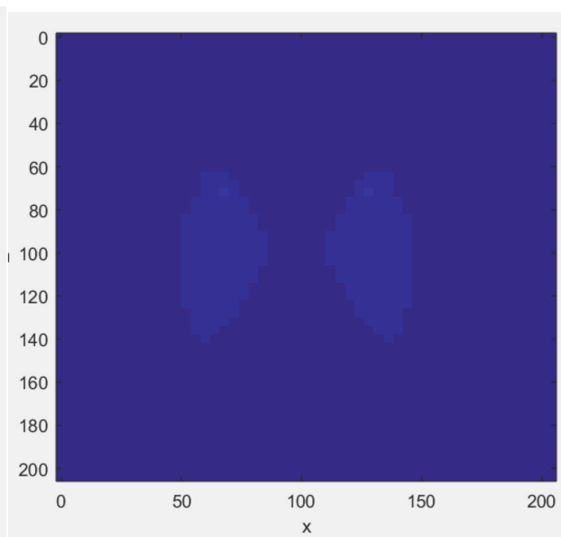












სიჩქარეები განსხვავებული რომ არ ყოფილიყო: