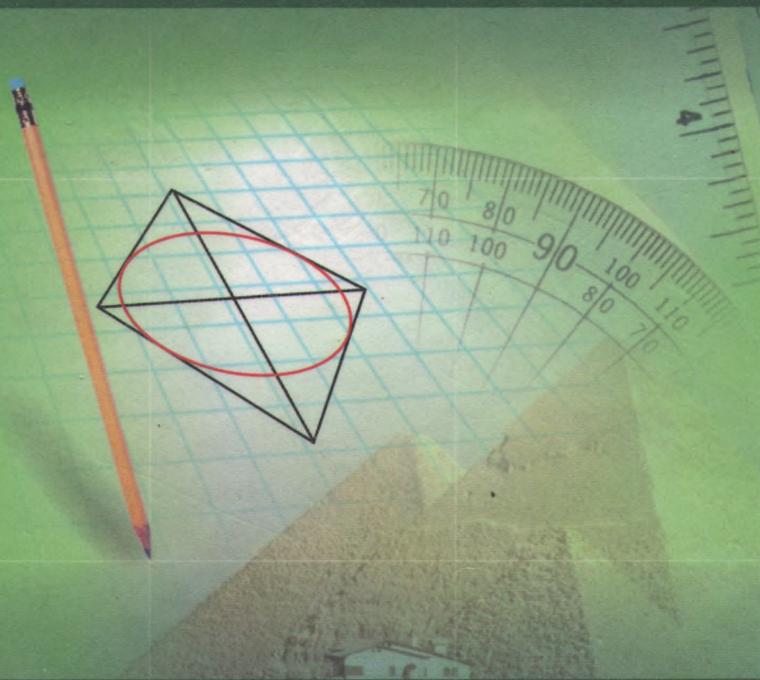


А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський, С. В. Єршов

Геометрія 8 клас



- загальноосвітня програма
- допрофільна підготовка
- поглиблене вивчення

УДК 371.388:514.11

ББК 22.151.0+я72

€80

Видано за рахунок коштів видавництва. Продаж дозволено

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України № 205 від 19.03.2008 р.)

Видано за ліцензією ПП «АН ГРО ПЛЮС»

Рецензенти:

В. Т. Лисиця, доцент кафедри вищої математики ХНУ ім. В. Н. Каразіна, канд. фіз.-мат. наук;
I. С. Маркова, учитель математики вищої категорії гімназії № 46 ім. М. В. Ломоносова
м. Харкова, вчитель-методист; головний редактор науково-методичного
журналу «Математика в школах України»

Єршова А. П.

€80 Геометрія. 8 клас: Підручник /А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський. — Х.: Веста: АН ГРО ПЛЮС, 2008. — 256 с.

ISBN 978-966-08-3575-7

Підручник містить обов'язковий обсяг навчального матеріалу, необхідні теоретичні відомості й поняття, велику кількість задач, які полегшують роботу вчителів та учнів. Наприкінці кожного розділу підбиваються підсумки, які надано у вигляді зручних таблиць. Для закріплення теоретичного матеріалу запропоновано низку практичних завдань — від простих до більш складних.

Підручник розрахований на учнів 8 класів, учителів та методистів.

УДК 371.388:514.11

ББК 22.151.0+я72

Навчальне видання
ЄРШОВА Алла Петрівна
ГОЛОБОРОДЬКО Вадим Володимирович
КРИЖАНОВСЬКИЙ Олександр Фелікович
ЄРШОВ Сергій Володимирович

ГЕОМЕТРІЯ. 8 клас Підручник

Редактор Н. Н. Томашко. Технічний редактор І. І. Копейкін. Коректор Е. А. Капустянова

Підписано до друку 01.06.2008. Формат 70×100/16. Папір офсетний.

Гарнітура Шкільна. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 20,64.

ТОВ «Веста». Свідоцтво ДК № 2540 від 26.06.2006. 61145 Харків, вул. Бакуніна, 8а.

Адреса редакції: 61145 Харків, вул. Космічна, 21а. Тел. (057) 719-48-65, тел./факс (057) 719-58-67.

З питань реалізації звертатися за тел.:

у Харкові — (057) 712-91-46, 712-91-47; Києві — (044) 599-14-53, 417-20-80;

Донецьку — (062) 345-98-24; Житомирі — (0412) 41-27-95; Дніпропетровську — (0562) 39-61-60, 39-63-54;

Львові — (032) 243-08-85; Тернополі — (0352) 26-86-94, 53-32-01,

Сімферополі — (0652) 22-87-01, 22-95-30; Миколаєві — (0512) 35-40-39, Рівному — (0362) 23-78-64.

E-mail: comptmce@ranok.kharkov.ua

«Книга поштою»: 61045 Харків, а/с 3355. Тел. (057) 717-74-55, (067) 546-53-73. E-mail: pochta@ranok.kharkov.ua
www.ranok.com.ua

© А. П. Єршова, В. В. Голобородько,
О. Ф. Крижановський, С. В. Єршов, 2008

© ПП «АН ГРО ПЛЮС», 2008

ISBN 978-966-08-3575-7

Надруковано у друкарні ПП «Тріадат» м. Харків, вул. Киргизька, 19. Тел. 757-98-16, 703-12-21. Зам. №9005/08

ЛЮБІ ДРУЗІ!

У світі Геометрії ви вже не відчуваєте себе чужинцями: у сьому класі ви познайомилися з багатьма її визначними пам'ятками, почали оволодівати її мовою й опановувати її закони. Але Геометрію не випадково вважають дивовижною — щоразу нова й непередбачувана, вона відкриває свої найкоштовніші скарби лише тому, хто проникнувся її духом і прагне не зупинятися на досягнутому.

У шкільному курсі геометрії можна умовно виділити декілька напрямів. На початковому етапі переважає «*геометрія доведень*» — ви вперше зустрілися з поняттям доведення, оволоділи його методами й логікою, навчилися отримувати з одних тверджень інші, обґруntовувати свої висновки. Останню частину минулорічного курсу було присвячено «*геометрії побудов*» — цей напрям поєднує елементи доведення і правила побудови найпростіших фігур за допомогою циркуля і лінійки. Протягом цього навчального року чільне місце буде відведене «*геометрії обчислень*». Чимало теорем, які ви будете вивчати, містять формули, що дозволяють отримати нові числові характеристики геометричних фігур. Найважливішою із цих теорем є знаменита теорема Піфагора, зустріч з якою чекає на вас саме у восьмому класі.

Однак вивчення геометрії не вичерpuється лише обчисленнями. Завдяки цьому підручнику ви дослідите нові геометричні фігури, поглибите свої знання з логіки, набудете досвіду розв'язування задач оригінальними методами, дізнаєтесь про життя й здобутки визначних учених минулого. Сподіваємося, що кожний крок на шляху пізнання додасть вам упевненості у власних силах і наблизить до нових обріїв науки.

Як користуватися підручником

Підручник має чотири розділи, кожний із яких складається з параграфів, а параграфи — з пунктів. У тексті міститься як теоретичний матеріал, так і приклади розв'язування задач. Найважливіші поняття і факти виділено напівжирним шрифтом.

Вправи і задачі, подані в підручнику, поділяються на декілька груп.

Усні вправи допоможуть вам зрозуміти, наскільки успішно ви засвоїли теоретичний матеріал. Після них можна переходити до *графічних вправ*, які виконуються в зошиті або на комп’ютері. Далі йдуть *письмові вправи*. Спочатку перевірте свої знання, виконуючи завдання *рівня А*. Більш складними є задачі *рівня Б*. І нарешті, якщо ви добре опанували матеріал і бажаєте виявити свої творчі здібності, на вас чекають задачі *рівня В*.

Після кожного параграфа в рубриці **«Повторення»** зазначено, які саме поняття й факти слід пригадати для успішного вивчення нового матеріалу, і наведено задачі для повторення, що підготують вас до сприйняття наступної теми. Розв'язувати всі задачі кожного рівня не обов'язково.

Наприкінці кожного розділу подано *контрольні запитання й задачі для підготовки до контрольних робіт*, завдяки яким ви зможете краще підготуватися до тематичного оцінювання. *Додаткові задачі* до розділів відкриють вам нові грані геометрії, допоможуть узагальнити вивчений матеріал і відчути красу нестандартного мислення.

Підсумкові огляди наприкінці кожного розділу послугують своєрідним геометричним компасом і допоможуть орієнтуватись у вивченому матеріалі. *Додатки*, наведені в кінці підручника, поглиблять ваші знання з окремих вивчених тем, а *історичні довідки* до розділів познайомлять із деякими цікавими фактами щодо розвитку геометрії та діяльністю видатних учених-геометрів.



ЧОТИРИКУТНИКИ

- Чотирикутник і його елементи
- Паралелограм і його властивості
- Ознаки паралелограма
- Види паралелограмів
- Трапеція
- Теорема Фалеса. Середні лінії трикутника і трапеції
- Вписані кути
- Вписані й описані чотирикутники
- Визначні точки трикутника

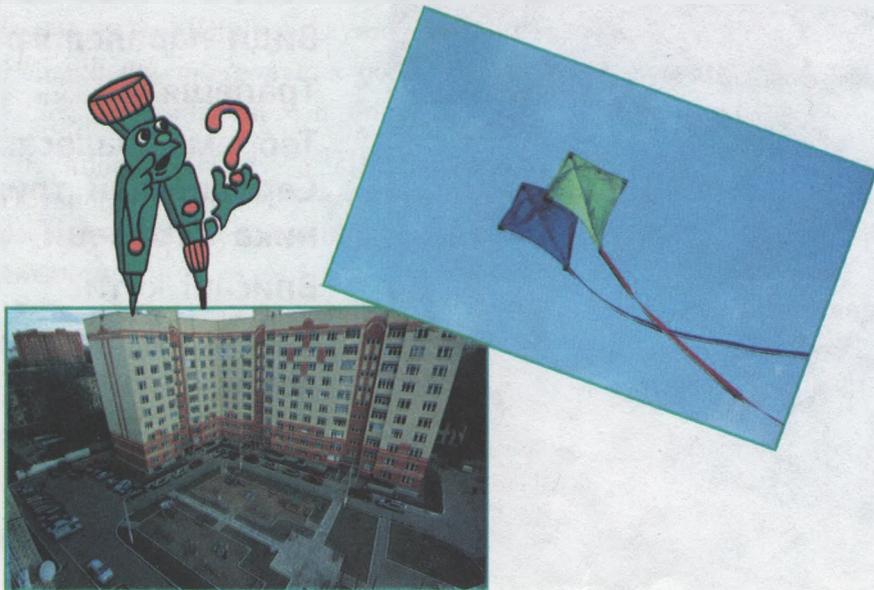
У величезному саду геометрії кожний може підібрати собі букет за смаком.

Давид Гільберт,
німецький математик

Вивчаючи геометрію в сьомому класі, ви познайомилися з основними властивостями трикутників. Курс геометрії восьмого класу розпочинається з розгляду більш складних фігур — чотирикутників. Але це не означає, що вже вивчену і, напевно, трохи забуту за літо тему «Трикутники» не слід згадувати. Навпаки, цей матеріал варто повторити ще навіть до того, як ви прийдете на перший урок геометрії у восьмому класі. Адже саме властивості трикутників є тим ключем, який відчиняє двері у світ Геометрії.

Окремі види чотирикутників уже відомі вам із курсу математики 5—6 класів. Найбільш уважні й спостережливі могли помітити, що особливе місце серед чотирикутників посідають ті, які мають паралельні сторони. Саме тому вже найближчим часом вам стануть у пригоді властивості й ознаки паралельних прямих, доведені в сьомому класі,— цей матеріал також варто пригадати.

Серед теорем, які розглядаємося в цьому розділі, особливу роль відіграє теорема Фалеса — одна з найдавніших теорем геометрії. З її допомогою ми згодом продовжимо рух шляхом пізнання нових таємниць геометричних фігур.



§ 1. Чотирикутник і його елементи

1.1. Означення чотирикутника

Із чотирикутником ви вже знайомилися на уроках математики. Дамо строгое означення цієї фігури.

Означення

Чотирикутником називається фігура, яка складається з чотирьох точок (**вершин чотирикутника**) і чотирьох відрізків, що їх послідовно сполучають (**сторін чотирикутника**). При цьому жодні три вершини не лежать на одній прямій, а жодні дві сторони не перетинаються.

На рисунку 1 зображений чотирикутник із вершинами A , B , C і D та сторонами AB , BC , CD та AD .

Кажуть, що дві вершини чотирикутника є *сусідніми вершинами*, якщо вони сполучені однією стороною; вершини, які не є сусідніми, називають *протилежними вершинами*. Аналогічно, сторони чотирикутника, які мають спільну вершину, є *сусідніми сторонами*, а сторони, які не мають спільних точок, — *протилежними сторонами*. На рисунку 1 сторони AB і CD — сусідні для сторони BC , а сторона AD — протилежна BC ; вершини B і D — сусідні з вершиною A , а вершина C — протилежна вершині A .

Чотирикутник позначають, послідовно вказуючи всі його вершини, причому букви, що стоять поряд, мають позначати сусідні вершини. Наприклад, чотирикутник на рисунку 1 можна позначити $ABCD$, $BCDA$ або $CBAD$, але не можна позначати $ABDC$ або $BDCA$.

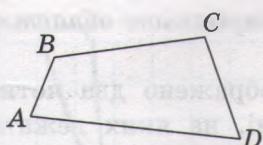


Рис. 1.

Чотирикутник $ABCD$

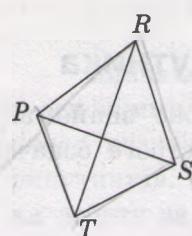


Рис. 2.
Відрізки PS і RT —
діагоналі чотирикут-
ника $PRST$

Означення

Діагонааллю чотирикутника називається відрізок, що сполучає дві протилежні вершини.

У чотирикутнику $PRST$ (рис. 2) діагоналями є відрізки PS і RT .

Означення

Периметром чотирикутника називається сума довжин усіх його сторін.

Як і для трикутника, периметр чотирикутника позначають буквою P :

$$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD.$$

1.2. Опуклі чотирикутники. Сума кутів чотирикутника

Будь-який чотирикутник обмежує частину площини, яку називають *внутрішньою областю* цього чотирикутника.

На рисунку 3, а, б зображені два чотирикутники і проведено прямі, на яких лежать сторони цих чотирикутників. У чотирикутнику $ABCD$ ці прямі не проходять через внутрішню область — такий чотирикутник є опуклим (рис. 3, а). У чотирикутнику $EFKM$ прямі EM і KM проходять через внутрішню область — цей чотирикутник є неопуклим (рис. 3, б).

Означення

Чотирикутник називається **опуклим**, якщо він лежить по один бік від будь-якої прямої, що містить його сторону.

Дійсно, чотирикутник $ABCD$ на рисунку 3, а лежить по один бік від будь-якої з прямих AB , BC , CD або AD . У шкільному курсі геометрії ми будемо розглядати лише опуклі чотирикутники (якщо інше не оговорене окремо).

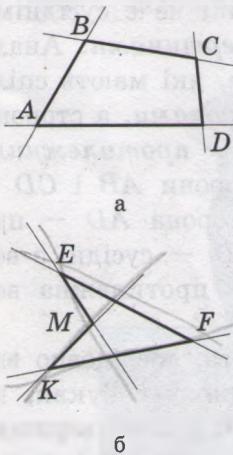


Рис. 3.
Опуклий і неопуклий
чотирикутники

Означення

Кутом (внутрішнім кутом) опуклого чотирикутника при даній вершині називається кут, утворений сусідніми сторонами, що виходять із цієї вершини.

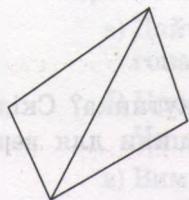


Рис. 4. Сума кутів чотирикутника дорівнює сумі кутів двох трикутників

Кути, вершини яких є сусідніми, називають **сусідніми кутами**, а кути, вершини яких протилежні, — **протилежними кутами** чотирикутника.

Теорема (про суму кутів чотирикутника)

Сума кутів чотирикутника дорівнює 360° .

Доведення¹

□ У даному чотирикутнику проведемо діагональ, яка ділить його на два трикутники (рис. 4).

Сума кутів трикутника, як відомо, дорівнює 180° . Очевидно, що сума кутів чотирикутника складається з кутів цих трикутників, тобто дорівнює 360° . Теорему доведено. ■

Задача

Кути чотирикутника $ABCD$, сусідні з кутом C , рівні, а протилежний кут удвічі більший за кут C . Знайдіть кут C , якщо $\angle B = 60^\circ$.

Розв'язання

Кутами, сусідніми з C , є кути B і D , а кутом, протилежним до C , — кут A (див. рис. 1).

За умовою задачі, $\angle B = \angle D = 60^\circ$. Оскільки сума кутів чотирикутника дорівнює 360° , то $\angle A + \angle C = 360^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 240^\circ$. Якщо градусна міра кута C дорівнює x , то градусна міра кута A за умовою дорівнює $2x$. Звідси маємо: $x + 2x = 240$; $3x = 240$; $x = 80$. Отже, $\angle C = 80^\circ$.

Відповідь: 80° .

¹ Зазначимо, що дана теорема і її доведення справедливі також і для неопуклих чотирикутників (див. задачу 29).

Запитання і задачі



УСНІ ВПРАВИ

- Скільки сусідніх вершин має вершина чотирикутника? Скільки протилежних? Назвіть сусідні й протилежні вершини для вершини B чотирикутника $ABCD$.
- Скільки сусідніх сторін має сторона чотирикутника? Скільки протилежних? Назвіть сусідні й протилежні сторони для сторони AD чотирикутника $ABCD$.
- Відрізок, який сполучає дві вершини чотирикутника, не є його діагонааллю. Чи можуть дані вершини бути протилежними?
- Вершинами чотирикутника є точки K , L , M , N .
 - Відомо, що KM і ML — сторони чотирикутника. Назвіть його діагоналі.
 - Відомо, що KL — діагональ чотирикутника. Назвіть вершини, сусідні з вершиною K .
 - Даний чотирикутник можна назвати $KMLN$. Чи можна його назвати $MLKN$?
- Чи існує чотирикутник $ABCD$, в якому $AB = 9$ см, $BC = 12$ см, $AC = 21$ см? Відповідь обґрунтуйте.
- Чи можуть усі кути опуклого чотирикутника бути гострими; тупими; прямими?
- Чи може опуклий чотирикутник мати три гострі кути; три тупі кути; два прямі кути; три прямі кути і один непрямий?
- Чи можуть кути трикутника дорівнювати трьом кутам чотирикутника? Відповідь обґрунтуйте.



ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

9. Позначте точки A , B , C і D , які не лежать на одній прямій, і послідовно сполучіть їх відрізками так, щоб утворився чотирикутник.

a) Дайте назву отриманому чотирикутнику і проведіть його діагоналі.

b) Проведіть прямі, які містять сторони чотирикутника.
Чи є даний чотирикутник опуклим?

b) Виміряйте три кути чотирикутника. Користуючись відповідною теоремою, знайдіть градусну міру четвертого кута. Перевірте отриманий результат вимірюванням.

→ **10.** Проведіть дві паралельні прямі. Позначте на одній із них точки A і D , а на другій — точки B і C так, щоб у разі послідовного сполучення цих точок утворився чотирикутник $ABCD$.

a) Чи є побудований чотирикутник опуклим? Чому?

b) Виміряйте зовнішні кути чотирикутника $ABCD$ (по одному при кожній вершині) і обчисліть їх суму.



ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

Рівень А

11. Знайдіть периметр чотирикутника, якщо його найменша сторона дорівнює 5 см, а кожна наступна сторона на 2 см більша за попередню.

→ **12.** Периметр чотирикутника дорівнює 20 см. Знайдіть сторони чотирикутника, якщо одна з них складає 40 % периметра, а три інші рівні.

13. Два кути чотирикутника дорівнюють 80° і 100° , а два інші кути мають рівні градусні міри. Знайдіть найбільший кут чотирикутника.

→ **14.** Знайдіть кути чотирикутника $ABCD$, якщо $\angle A = \angle B$, $\angle C = \angle D$, а сума кутів A і B дорівнює 160° .

15. Якщо три кути чотирикутника є тупими, то четвертий кут — гострий. Доведіть.

→ 16. Якщо сума трьох кутів чотирикутника дорівнює 270° , то дві сторони чотирикутника перпендикулярні. Доведіть.

Рівень Б

17. Визначте, чи може чотирикутник $ABCD$ бути опуклим, якщо:
- точки A і D лежать по різні боки від прямої BC ;
 - пряма AB перетинає пряму CD ;
 - пряма AB перетинає відрізок CD .

Виконайте рисунки.

18. Знайдіть сторони чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 3 дм, а одна сторона менша за кожну з трьох інших на 2 см, 3 см і 5 см відповідно.

→ 19. Сторони чотирикутника відносяться як $3 : 4 : 5 : 6$. Знайдіть периметр чотирикутника, якщо сума його найбільшої і найменшої сторін дорівнює 18 см.

20. Знайдіть кути чотирикутника, якщо один із них удвічі менший за другий, на 20° менший за третій і на 40° менший за четвертий.

→ 21. Знайдіть найменший кут чотирикутника, якщо суми його кутів, узятих по три, дорівнюють 240° , 260° і 280° .

22. Якщо один із кутів опуклого чотирикутника — гострий, то в цьому чотирикутнику обов'язково є тупий кут. Доведіть.

→ 23. Один із кутів опуклого чотирикутника дорівнює сумі двох інших кутів. Доведіть, що даний кут є тупим.

Рівень В

24. Периметри чотирикутників $ABCD$ і $ABCD_1$ рівні. Чи може один із цих чотирикутників бути опуклим, а інший — неопуклим? Відповідь підтвердьте рисунком.

25. Периметр чотирикутника $ABCD$ дорівнює 23 дм. Знайдіть довжину діагоналі AC , якщо периметр трикутника ABC дорівнює 15 дм, а периметр трикутника ADC дорівнює 22 дм.

→ 26. У чотирикутнику три кути рівні, а четвертий кут менший за їхню суму на 240° . Знайдіть кути чотирикутника.

$$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$$

$$12 \quad 14 + 22 + 19 - 14 = 340$$

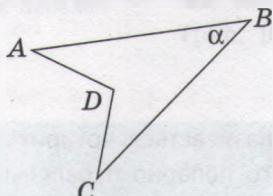
$$\{ 3\angle 1 - 14 = 340$$

$$\{ 3\angle 1 + 14 = 340$$

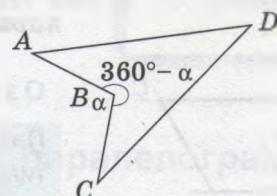
27. Доведіть, що діагоналі опуклого чотирикутника перетинаються.

→ **28.** Доведіть, що будь-який відрізок із кінцями на сторонах опуклого чотирикутника лежить у внутрішній області цього чотирикутника.

29. У неопуклому чотирикутнику $ABCD$ градусною мірою кута при вершині B вважають градусну міру α кута ABC , якщо хоча б одна з внутрішніх точок відрізків CD або AD лежить у внутрішній області кута ABC (рис. 5, а), або $(360^\circ - \alpha)$, якщо жодна внутрішня точка відрізків CD та AD не лежить у внутрішній області кута ABC (рис. 5, б). Доведіть, що сума кутів неопуклого чотирикутника дорівнює 360° .



а



б

Рис. 5



ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 2

Теоретичний матеріал

- трикутник і його елементи;
- ознаки рівності трикутників;
- властивості й ознаки паралельних прямих.

7 клас, § 7, 8, 10

7 клас, § 13–15

Задачі

30. Відомо, що $\triangle KMN = \triangle NPK$ (рис. 6).

а) Доведіть, що $MK \parallel NP$.

б) Знайдіть кут P , якщо $\angle M = 65^\circ$.

31. На рисунку 6 $MK = PN$, $\angle MKN = \angle PNK$.

а) Доведіть, що $MN \parallel KP$.

б) Знайдіть MN , якщо $KP = 14$ см.

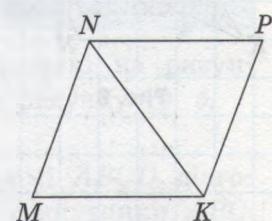


Рис. 6

§ 2. Паралелограм і його властивості



Паралелограм — від грецьких слів «паралелос» — той, що йде поруч, паралельний, і «грамма» — лінія

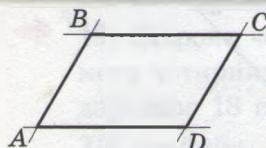


Рис. 7.
Паралелограм $ABCD$

2.1. Означення паралелограма

Розглянемо на площині дві паралельні прямі, які перетинаються двома іншими паралельними прямими (рис. 7).

У результаті такого перетину утворюється чотирикутник, який має спеціальну назву — **паралелограм**.

Означення

Паралелограмом називається чотирикутник, протилежні сторони якого попарно паралельні.

На рисунку 7 зображено паралелограм $ABCD$, у якому $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.

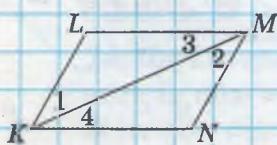


Рис. 8

Задача

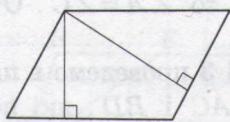
На рисунку 8 $\triangle KLM = \triangle MNK$. Доведіть, що чотирикутник $KLMN$ — паралелограм.

Розв'язання

З рівності трикутників KLM і MNK випливає рівність кутів: $\angle 1 = \angle 2$ і $\angle 3 = \angle 4$. Кути 1 і 2 є внутрішніми різносторонніми при прямих KL і MN та січній KM . Аналогічно, кути 3 і 4 є внутрішніми різносторонніми при прямих LM і KN та січній KM . За ознакою паралельності прямих маємо: $KL \parallel MN$ і $LM \parallel KN$. Отже, у чотирикутнику $KLMN$ протилежні сторони попарно паралельні, тобто $KLMN$ — паралелограм за означенням.



а



б

Рис. 9. Висоти паралелограма

Як і в трикутнику, в паралелограмі можна провести висоти (рис. 9, а, б).

Означення

Висотою паралелограма називається спільний перпендикуляр прямих, які містять його протилежні сторони.

Очевидно, що до однієї сторони паралелограма можна провести безліч висот (рис. 9, а) — усі вони будуть рівні як відстані між паралельними прямыми, а з однієї вершини паралелограма можна провести дві висоти до різних сторін (рис. 9, б).

2.2. Властивості паралелограма

Безпосередньо з означення паралелограма випливає, що будь-які два його сусідні кути є внутрішніми односторонніми при паралельних прямих, які містять протилежні сторони. Це означає, що *сума двох сусідніх кутів паралелограма дорівнює 180°* .

Доведемо ще кілька важливих властивостей сторін, кутів і діагоналей паралелограма.

Теорема (властивості паралелограма)

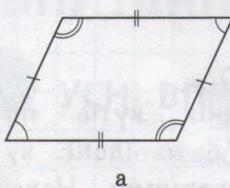
У паралелограмі:

- 1) протилежні сторони рівні;
- 2) протилежні кути рівні;
- 3) діагоналі точкою перетину діляться навпіл.

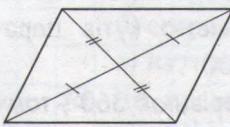
Властивості 1 і 2 відображені на рисунку 10, а, а властивість 3 — на рисунку 10, б.

Доведення

□ Проведемо в паралелограмі $ABCD$ діагональ AC (рис. 11) і розглянемо трикутники ABC і CDA . У них сторона AC — спільна, $\angle 1 = \angle 3$ як



а



б

Рис. 10. Властивості паралелограма

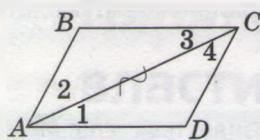


Рис. 11. Діагональ ділить паралелограм на два рівні трикутники

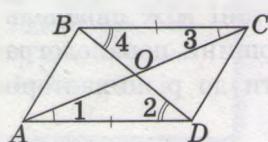
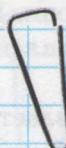


Рис. 12. При перетині діагоналей паралелограма утворюються рівні трикутники

внутрішні різносторонні при паралельних прямих AD і BC та січній AC , $\angle 2 = \angle 4$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AB і CD та січній AC . Отже, $\triangle ABC = \triangle CDA$ за другою ознакою рівності трикутників. Звідси, зокрема, випливає, що $AB = CD$, $AD = BC$ і $\angle B = \angle D$. А оскільки $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4$, то $\angle A = \angle C$. Отже, властивості 1 і 2 доведено.

Для доведення властивості 3 проведемо в паралелограмі $ABCD$ діагоналі AC і BD , які перетинаються в точці O (рис. 12).

Розглянемо трикутники AOD і COB . У них $AD = BC$ за доведеним, $\angle 1 = \angle 3$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AD і BC та січній AC , $\angle 2 = \angle 4$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AD і BC та січній BD . Отже, $\triangle AOD = \triangle COB$ за другою ознакою. Звідси випливає, що $AO = CO$ і $BO = DO$, тобто точка O є серединною кожної з діагоналей AC і BD . Теорему доведено повністю. ■



Задача

Сума двох кутів паралелограма дорівнює 200° . Знайдіть кути паралелограма.

Розв'язання

Нехай дано паралелограм $ABCD$.

Оскільки сума двох сусідніх кутів паралелограма дорівнює 180° , то дані кути можуть бути лише протилежними. Нехай $\angle B + \angle D = 200^\circ$. Тоді за властивістю кутів паралелограма $\angle B = \angle D = 200^\circ : 2 = 100^\circ$.

Сума всіх кутів паралелограма дорівнює 360° , тому $\angle A = \angle C = (360^\circ - 200^\circ) : 2 = 80^\circ$.

Відповідь: 80° і 100° .

**Задача**

У паралелограмі $ABCD$ бісектриса кута A ділить сторону BC навпіл. Знайдіть периметр паралелограма, якщо $AB = 6$ см.

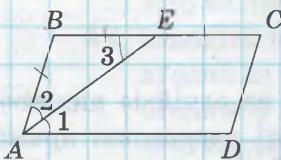


Рис. 13

Розв'язання

Нехай у паралелограмі $ABCD$ бісектриса кута A перетинає сторону BC в точці E , $BE = EC$ (рис. 13). Зазначимо, що $\angle 1 = \angle 2$, оскільки AE — бісектриса кута BAD , а $\angle 1 = \angle 3$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AD і BC та січній AE . Звідси $\angle 2 = \angle 3$, тобто за ознакою рівнобедреного трикутника трикутник ABE — рівнобедрений з основою AE , отже, $BE = AB = 6$ см. За умовою $BE = EC$, тобто $BC = 12$ см. Отже, оскільки протилежні сторони паралелограма рівні, то $P_{ABCD} = 2 \cdot (6 + 12) = 36$ (см).

Відповідь: 36 см.

Запитання і задачі**УСНІ ВПРАВИ**

32. Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. Назвіть:
 - а) сторону, паралельну стороні BC ;
 - б) сторону, яка дорівнює стороні CD ;
 - в) кут, який дорівнює куту A .
33. Чи правильно, що будь-який паралелограм має:
 - а) два кути, сума яких дорівнює 180° ;
 - б) два гострі і два тупі кути?
34. У паралелограмі $ABCD$ $\angle B < \angle C$. Порівняйте кути A і D .

35. У паралелограмі $ABCD$ $AB+CD > AD+BC$. Порівняйте сторони BC і CD .

36. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O (див. рис. 12). Назвіть:

- відрізок, який є медіаною трикутника ACD ;
- трикутник, медіаною якого є відрізок AO .



ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

37. Проведіть дві паралельні прямі. Позначте на одній із них точки A і D і проведіть через ці точки дві інші паралельні прямі, які перетинають другу пряму в точках B і C відповідно.

- Поясніть, чому чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом.
- Виміряйте кут A паралелограма $ABCD$. Користуючись властивостями паралелограма, знайдіть градусні міри інших його кутів. Перевірте отримані результати вимірюванням.
- Проведіть діагональ AC і позначте її середину — точку O . За допомогою лінійки перевірте, чи належить ця точка відрізку BD .

→ **38.** Накресліть трикутник ABD . Проведіть через вершини B і D прямі, паралельні сторонам AD і AB відповідно. Позначте точку C — точку перетину цих прямих.

- Поясніть, чому чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом.
- Проведіть дві висоти паралелограма з вершини B . Чи рівні вони?
- Виміряйте сторони AD та AB і знайдіть периметр паралелограма. Якою властивістю паралелограма ви скористалися?



ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

Рівень А

39. Накресліть у зошиті трикутник і проведіть через кожну його вершину пряму, паралельну протилежній стороні. Скільки паралелограмів утворилося на рисунку? Скільки спільніх вершин мають будь-які два паралелограми, що утворилися?

→ **40.** Три паралельні прямі перетинаються з двома іншими паралельними прямыми. Скільки паралелограмів утворилося?

41. Знайдіть периметр паралелограма $ABCD$, якщо сторона AD дорівнює 12 см і складає $\frac{2}{3}$ сторони AB .

→ **42.** Периметр паралелограма дорівнює 24 см. Знайдіть сторони паралелограма, якщо:

- а) одна з них на 2 см більша за іншу;
- б) одна з них утрічі менша за іншу;
- в) сума трьох його сторін дорівнює 17 см.

43. Знайдіть кути паралелограма, якщо:

- а) один із них дорівнює 110° ;
- б) один із них на 70° менший за інший;
- в) сума двох його кутів дорівнює 90° ;
- г) діагональ утворює з його сторонами кути 30° і 45° .

→ **44.** Знайдіть кути паралелограма, якщо:

- а) один із них є прямим;
- б) градусні міри двох його кутів відносяться як $2 : 7$;
- в) різниця двох його кутів дорівнює 40° ;
- г) сума трьох його кутів дорівнює 330° .

45. Точка перетину діагоналей паралелограма віддалена від двох його вершин на 5 см і 8 см. Знайдіть довжини діагоналей паралелограма.

46. У чотирикутнику $ABCD$ $AB \parallel CD$, $\angle ADB = \angle CBD$. Доведіть за означенням, що $ABCD$ — паралелограм.

→ **47.** У чотирикутнику $VXYZ$ $VX \parallel YZ$, $\angle V + \angle X = 180^\circ$. Доведіть за означенням, що $VXYZ$ — паралелограм.

Рівень Б

48. На площині дано три точки, які не лежать на одній прямій. Побудуйте паралелограм, трьома вершинами якого є дані точки. Скільки розв'язків має задача?

→ **49.** Скільки різних паралелограмів можна утворити з двох рівних різносторонніх трикутників, прикладаючи їх один до одного?

50. Периметр паралелограма $ABCD$ дорівнює 14 дм, а периметр трикутника ABC — 10 дм. Знайдіть довжину діагоналі AC .

→ **51.** Сума трьох сторін паралелограма дорівнює 15 м, а сума трьох інших його сторін — 18 м. Знайдіть периметр паралелограма.

- 52.** Знайдіть кути паралелограма, якщо:
- бісектриса одного з його кутів перетинає сторону під кутом 35° ;
 - висота паралелограма утворює з однією з його сторін кут 42° .

- **53.** Знайдіть кути паралелограма, якщо:
- усі його сторони рівні, а діагональ утворює зі стороною кут 25° ;
 - висота паралелограма, проведена з вершини тупого кута, ділить даний кут у відношенні $1 : 3$.

- 54.** Бісектриса кута D паралелограма $ABCD$ ділить сторону BC у відношенні $1 : 4$, починаючи від точки B . Знайдіть периметр паралелограма, якщо $BC = 15$ см.

- **55.** Бісектриса кута паралелограма ділить його сторону на відрізки завдовжки 5 см і 6 см. Знайдіть периметр паралелограма. Скільки розв'язків має задача?

- 56 (опорна).** Будь-який відрізок з кінцями на протилежних сторонах паралелограма, який проходить через точку перетину його діагоналей, ділиться цією точкою навпіл. Доведіть.

- 57.** З вершин тупих кутів B і D паралелограма $ABCD$ проведено перпендикуляри BA_1 і DC_1 до сторін AD і BC відповідно. Доведіть, що чотирикутник A_1BC_1D — паралелограм.

- **58.** За даними рисунка 14 доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

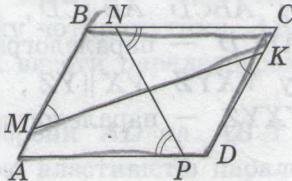


Рис. 14

Рівень В

- 59.** Через точку, яка належить стороні рівностороннього трикутника, проведені прямі, паралельні двом іншим його сторонам. Визначте периметр паралелограма, що утворився, якщо периметр трикутника дорівнює 18 см.

- **60.** У паралелограмі $ABCD$ бісектриси кутів A і D ділять сторону BC на відрізки завдовжки 5 см, 3 см і 5 см. Знайдіть периметр паралелограма. Скільки розв'язків має задача?

- 61.** Знайдіть кути паралелограма, якщо його діагональ перпендикулярна до однієї із сторін і дорівнює половині іншої сторони.

- 62. Знайдіть кути паралелограма, який ділиться діагоналлю на два рівнобедрені прямокутні трикутники (розділяйте два випадки).
- 63 (опорна).** Бісектриси двох сусідніх кутів паралелограма перпендикулярні, а бісектриси двох протилежних кутів паралельні або лежать на одній прямій. Доведіть.
- 64 (опорна).** Кут між висотами паралелограма, проведеними з однієї вершини, дорівнює куту паралелограма при сусідній вершині. Доведіть.
65. Якщо діагональ ділить чотирикутник на два рівні трикутники, то такий чотирикутник є паралелограмом. Чи правильне таке твердження? Відповідь обґрунтуйте.
- 66. Якщо діагоналі паралелограма перпендикулярні, то всі його сторони рівні. Доведіть. Сформулюйте й доведіть обернене твердження.



ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 3

Теоретичний матеріал

- ознаки рівності трикутників;
- властивості й ознаки паралельних прямих;
- поняття про властивості й ознаки.

7 клас, § 8, 10, 13

7 клас, § 14, 15

Задачі

67. Доведіть, що пряма, яка проходить через середини бічних сторін рівнобедреного трикутника, паралельна його основі.
68. У чотирикутнику $ABCD$ $AB = CD$. Які співвідношення необхідно додати до умови, щоб за даними задачі довести, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм? Висловіть припущення.

§ 3. Ознаки паралелограма

3.1. Теореми про ознаки паралелограма

Для того щоб скористатися властивостями паралелограма, у багатьох випадках потрібно спочатку переконатися, що даний чотирикутник дійсно є паралелограмом. Це можна довести або за означенням (див. задачу в п. 2.1), або за ознаками — умовами, які гарантують, що даний чотирикутник — паралелограм. Доведемо ознаки паралелограма, які найчастіше застосовуються на практиці.

Теорема (ознаки паралелограма)

- 1) Якщо дві протилежні сторони чотирикутника паралельні і рівні, то цей чотирикутник — паралелограм.
- 2) Якщо протилежні сторони чотирикутника попарно рівні, то цей чотирикутник — паралелограм.
- 3) Якщо діагоналі чотирикутника точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник — паралелограм.

Доведення

□ 1) Нехай у чотирикутнику $ABCD$ $AD \parallel BC$ і $AD = BC$ (рис. 15). Проведемо діагональ AC і розглянемо трикутники ABC і CDA . Вони мають спільну сторону AC , $AD = BC$ за умовою, $\angle 1 = \angle 2$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AD і BC та січній AC . Отже, $\triangle ABC = \triangle CDA$ за першою ознакою рівності трикутників. Із рівності цих трикутників випливає рівність кутів 3 і 4. Але ці кути є внутрішніми різносторонніми при прямих AB і CD та січній AC . Тоді за ознакою паралельності прямих $AB \parallel CD$. Таким чином, у чотирикутнику $ABCD$ протилежні сторони попарно паралельні,

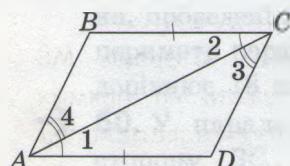


Рис. 15. Якщо в чотирикутнику $ABCD$ $AD \parallel BC$ і $AD = BC$, то $ABCD$ — паралелограм

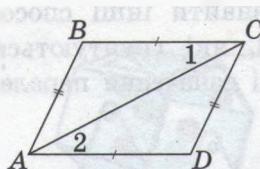


Рис. 16. Якщо в чотирикутнику $ABCD$ $AB=CD$ і $AD=BC$, то $ABCD$ — паралелограм

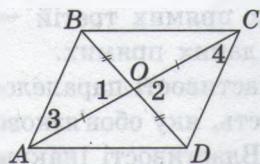


Рис. 17. Якщо в чотирикутнику $ABCD$ $AO=CO$ і $BO=DO$, то $ABCD$ — паралелограм

звідки випливає, що $ABCD$ — паралелограм за означенням.

2) Нехай у чотирикутнику $ABCD$ $AB=CD$ і $AD=BC$ (рис. 16). Знову проведемо діагональ AC і розглянемо трикутники ABC і CDA . У цьому випадку вони рівні за третьою ознакою: сторона AC — спільна, $AB=CD$ і $AD=BC$ за умовою. З рівності трикутників випливає рівність кутів 1 і 2, які є внутрішніми різносторонніми при прямих AD і BC та січній AC . За ознакою паралельності прямих $AD \parallel BC$. Отже, в чотирикутнику $ABCD$ сторони AD і BC паралельні і рівні, і за щоюно доведеною ознакою 1 $ABCD$ — паралелограм.

3) Нехай у чотирикутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O , $AO=CO$ і $BO=DO$ (рис. 17). Розглянемо трикутники AOB і COD . Ці трикутники рівні за першою ознакою: $\angle 1=\angle 2$ як вертикальні, а $AO=CO$ і $BO=DO$ за умовою. Отже, рівні і відповідні сторони і кути цих трикутників: $AB=CD$ і $\angle 3=\angle 4$. Таким чином, $ABCD$ — паралелограм за ознакою 1.

Теорему доведено повністю. ■

Задача

У паралелограмі $ABCD$ точки M і N — середини сторін AB і CD відповідно (рис. 18). Доведіть, що чотирикутник $MBND$ — паралелограм.

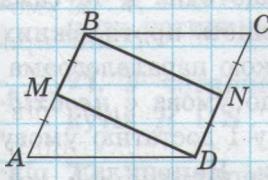


Рис. 18

Розв'язання

Розглянемо чотирикутник $MBND$. Сторони MB і ND паралельні, оскільки лежать на прямих, що містять протилежні сторони паралелограма $ABCD$. Крім того, $MB=ND$ як половини рівних сторін AB і CD паралелограма $ABCD$. Таким чином, у чотирикутнику $MBND$ дві сторони паралельні і рівні. Отже, чотирикутник $MBND$ — паралелограм.

Спробуйте самостійно знайти інші способи розв'язування цієї задачі, які ґрунтуються на застосуванні інших ознак і означення паралелограма.

3.2*. Необхідні й достатні умови¹

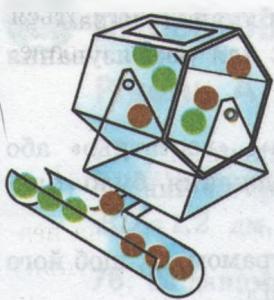
Кожна з ознак паралелограма вказує на певну особливість, наявності якої в чотирикутнику *достатньо* для того, щоб стверджувати, що він є паралелограмом. Узагалі, в математиці ознаки інакше називають *достатніми умовами*. Наприклад, перпендикулярність двох прямих третій — достатня умова паралельності даних прямих.

На відміну від ознак, властивості паралелограма вказують на ту особливість, яку обов'язково має будь-який паралелограм. Властивості інакше називають *необхідними умовами*. Пояснимо таку назву прикладом: рівність двох кутів *необхідна* для того, щоб кути були вертикальними, адже якщо цієї рівності немає, вертикальними такі кути бути не можуть.

Отже, необхідні умови (властивості) паралелограма *випливають з того*, що даний чотирикутник — паралелограм; з достатніх умов (ознак) *випливає те*, що даний чотирикутник — паралелограм.

Порівнюючи властивості й ознаки паралелограма, неважко помітити, що одна й та сама умова (наприклад попарна рівність протилежних сторін) є і властивістю, і ознакою паралелограма. У такому випадку кажуть, що умова є *необхідною і достатньою*. Необхідну і достатню умову інакше називають *критерієм*. Наприклад, рівність двох кутів трикутника — критерій рівнобедреного трикутника.

¹ Тут і далі зірочкою позначено матеріал, вивчення якого не є обов'язковим.



Чимало прикладів необхідних і достатніх умов можна знайти в інших науках і в повсякденному житті. Усі ми знаємо, що повітря — необхідна умова для життя людини, але не достатня (людині для життя потрібно ще багато чого, зокрема їжа). Виграш у лотерею — достатня умова для матеріального збагачення людини, але не необхідна, адже покращити своє фінансове становище можна і в інший спосіб. Спробуйте самостійно знайти декілька прикладів необхідних і достатніх умов.

Запитання і задачі



УСНІ ВПРАВИ

- 69.** Діагоналі чотирикутника $DEFK$ перетинаються в точці O , причому $DO = OF$, $EO = OK$. Назвіть паралельні сторони чотирикутника і поясніть, чому вони паралельні.
- 70.** У чотирикутнику $KLMN$ $KL \parallel MN$ і $KL = MN$. Назвіть рівні кути чотирикутника і поясніть, чому вони рівні.
- 71.** У чотирикутнику $PRSQ$ $PR = SQ$, $PQ = RS$. Знайдіть суму кутів R і S .
- 72.** У чотирикутнику $ABCD$ $AB \parallel CD$. Яке співвідношення між сторонами чотирикутника необхідно додати до умови задачі, щоб довести, що $ABCD$ — паралелограм? Наведіть усі можливі варіанти відповіді.

73. У чотирикутнику $ABCD$ $\angle A = 30^\circ$, $\angle C = 50^\circ$. Чи може даний чотирикутник бути паралелограмом? Яка особливість паралелограма (властивість чи ознака) використовується для розв'язування цієї задачі?

74. Поставте замість крапок слова «необхідно», «достатньо» або «необхідно і достатньо», щоб отримане твердження було правильним:

- для того, щоб чотирикутник був паралелограмом, ..., щоб його діагоналі точкою перетину ділилися навпіл;
- для того, щоб два кути були суміжними, ..., щоб їхня сума дорівнювала 180° ;
- для того, щоб прямі AB і CD були паралельними, ..., щоб чотирикутник $ABCD$ був паралелограмом.



ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

75. Проведіть дві паралельні прямі. Відкладіть на одній із них відрізок AD , а на другій — прямій відрізок BC , що дорівнює AD , так, щоб відрізки AB і CD не перетиналися. Побудуйте відрізки AB і CD .

- Поясніть, чому чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом.
- Позначте точку M так, щоб чотирикутник $ABMC$ був паралелограмом. Чи лежать точки M , C і D на одній прямій?



76. Накресліть трикутник ABC і проведіть його медіану BO . На промені BO побудуйте відрізок OD , що дорівнює BO . Сполучіть точку D з точками A і C .

- Поясніть, чому чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом.
- Позначте точку M так, щоб чотирикутник $ABDM$ був паралелограмом. Чи лежать точки M , C і D на одній прямій?



ПІСЬМОВІ ВПРАВИ

Рівень А

- 77.** Діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O . Чи є даний чотирикутник паралелограмом, якщо $AO = 4$ см, $OC = 40$ мм, $BD = 1,2$ дм, $OD = 6$ см? Відповідь обґрунтуйте.
- 78.** За даними рисунка 19, а, б доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

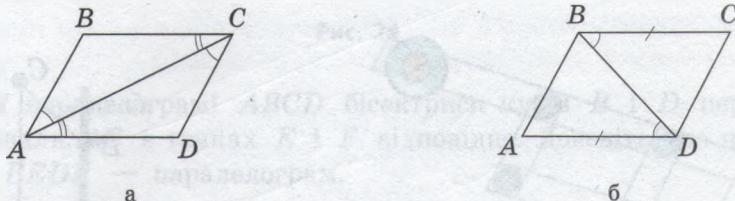


Рис. 19

- **79.** За даними рисунка 20, а, б доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

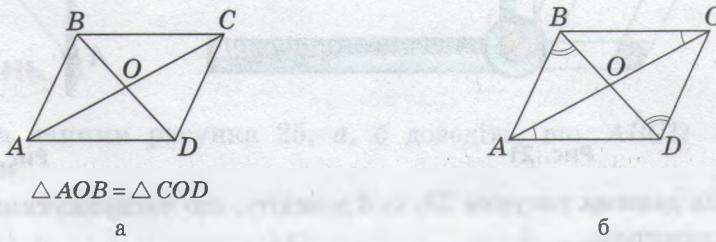


Рис. 20

- 80.** У чотирикутнику $ABCD$ сторони AB і CD паралельні. Знайдіть периметр чотирикутника, якщо $AB = CD = 9$ см, $AD = 4$ см.
- **81.** У чотирикутнику $ABCD$ $AB = CD$, $AD = BC$. Знайдіть кути чотирикутника, якщо кут A втричі більший за кут B .
- 82.** Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O . Точки B_1 і D_1 — середини відрізків BO і DO відповідно. Доведіть, що чотирикутник AB_1CD_1 — паралелограм.

- **83.** Доведіть, що відрізок, який сполучає середини протилежних сторін паралелограма, ділить даний паралелограм на два чотирикутники, які також є паралелограмами.

Рівень Б

84. У технічному кресленні для побудови паралельних прямих використовують механічну рейсшину (рис. 21). Поясніть принцип її дії.

- **85.** Поясніть, чому вісь CD , на якій кріпиться лампа (рис. 22), завжди лишається вертикальною.

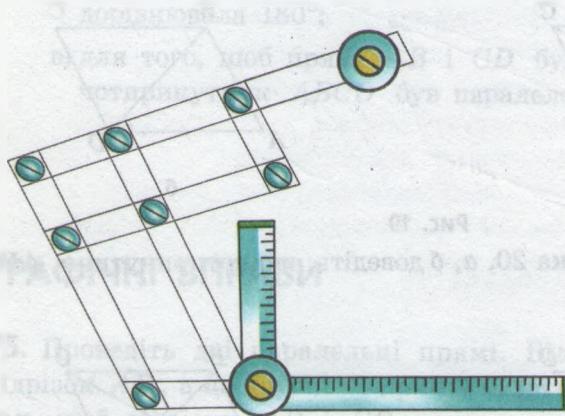


Рис. 21

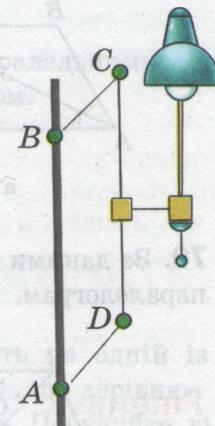
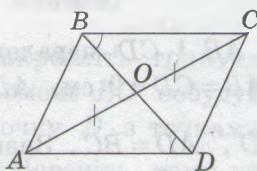
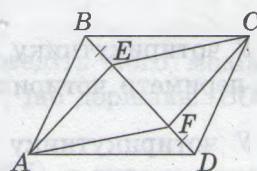


Рис. 22

- 86.** За даними рисунка 23, а, б доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.



а

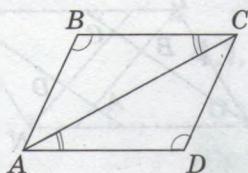


б

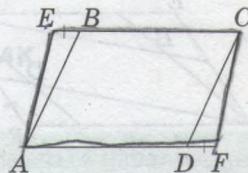
$AECF$ — паралелограм

Рис. 23

- 87. За даними рисунка 24, а, б доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.



а



б

 $AECF$ — паралелограм

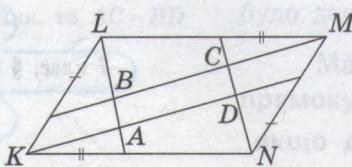
Рис. 24

88. У паралелограмі $ABCD$ бісектриси кутів B і D перетинають діагональ AC в точках E і F відповідно. Доведіть, що чотирикутник $BEDF$ — паралелограм.

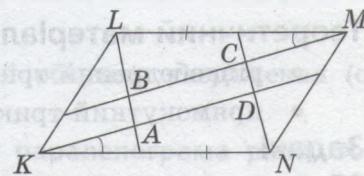
- 89. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O . Доведіть, що середини відрізків AO , BO , CO і DO є вершинами іншого паралелограма.

Рівень В

90. За даними рисунка 25, а, б доведіть, що $ABCD$ — паралелограм.

 $KLMN$ — паралелограм

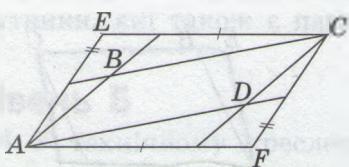
а

 $KLMN$ — паралелограм

б

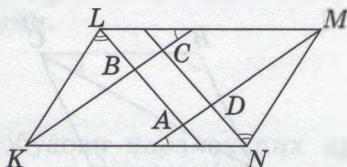
Рис. 25

→ 91. За даними рисунка 26, а, б доведіть, що $ABCD$ — паралелограм.



$AECF$ — паралелограм

а



$KLMN$ — паралелограм

б

Рис. 26

92 (опорна). Якщо в чотирикутнику протилежні кути попарно рівні, то цей чотирикутник — паралелограм. Доведіть.

93. Усередині даного кута A позначено точку O . Побудуйте відрізок з кінцями на сторонах кута, серединою якого є точка O .

→ 94. Точка M міститься всередині кута A , вершина якого недосяжна (рис. 27). Побудуйте промінь з початком у точці M , спрямований на точку A .

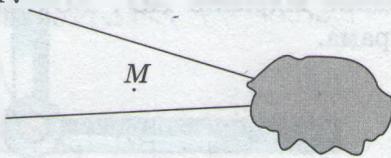


Рис. 27



ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 4

Теоретичний матеріал

- рівнобедрений трикутник;
- прямокутний трикутник.

7 клас, § 11, 17

Задачі

95. Висоти трикутника ABC , проведені з вершин A і B , перетинаються в точці O , причому $AO = BO$. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

96. Прямокутні трикутники ABC і DCB мають спільний катет BC , а гіпотенузи AC і BD паралельні. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle DCB$.

§ 4. Види паралелограмів

4.1. Прямоутник

Означення

Прямоутником називається паралелограм, у якого всі кути прямі.

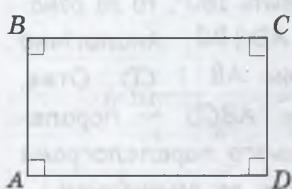


Рис. 28.
Прямоутник $ABCD$

На рисунку 28 зображене прямоутник $ABCD$. Оскільки прямоутник є окремим випадком паралелограма, він має всі властивості паралелограма: протилежні сторони прямоутника паралельні й рівні, протилежні кути рівні, діагоналі точкою перетину діляться навпіл і т.д. Однак прямоутник має деякі особливі властивості. Доведемо одну з них.

Теорема (властивість прямоутника)

Діагоналі прямоутника рівні.

Доведення

□ Нехай дано прямоутник $ABCD$ з діагоналями AC і BD (рис. 29). Трикутники BAD і CDA прямоутні й рівні за двома катетами (AD спільний, $AB=CD$ як протилежні сторони прямоутника). Звідси випливає рівність гіпотенуз цих трикутників, тобто $AC=BD$, що й треба було довести. ■

Має місце й обернене твердження (ознака прямоутника):

якщо діагоналі паралелограма рівні, то цей паралелограм є прямоутником.

Доведіть це твердження самостійно.

Таким чином, можна стверджувати, що рівність діагоналей паралелограма — необхідна й достатня умова (критерій) прямоутника.

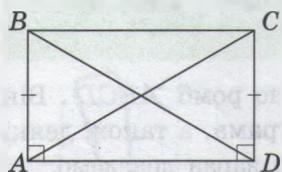


Рис. 29. Якщо $ABCD$ — прямоутник, то $AC=BD$

**Опорна задача**

Якщо всі кути чотирикутника прямі, то цей чотирикутник — прямокутник. Доведіть.

Розв'язання

Нехай у чотирикутнику $ABCD$ $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$ (рис. 28). Кути A і B є внутрішніми односторонніми при прямих AD і BC та січній AB . Оскільки сума цих кутів становить 180° , то за ознакою паралельності прямих $AD \parallel BC$. Аналогічно доводимо паралельність сторін AB і CD . Отже, за означенням паралелограма $ABCD$ — паралелограм. А оскільки всі кути цього паралелограма прямі, то $ABCD$ — прямокутник за означенням.

4.2. Ромб**Означення**

Ромбом називається паралелограм, у якого всі сторони рівні.

На рисунку 30 зображено ромб $ABCD$. Він має всі властивості паралелограма, а також деякі додаткові властивості, які ми зараз доведемо.

Теорема (властивості ромба)

Діагоналі ромба перпендикулярні й ділять його кути навпіл.

Ці властивості ромба відображені на рисунку 31.

Доведення

□ Нехай діагоналі ромба $ABCD$ перетинаються в точці O (рис. 32). Оскільки сторони ромба рівні, то трикутник ABC рівнобедрений

Рис. 30. Ромб $ABCD$



Ромб — від грецького «ромбос» — бубон (у стародавні часи цей ударний музичний інструмент мав форму ромба)

з основою AC , а за властивістю діагоналей паралелограма точка O — середина AC . Отже, відрізок BO — медіана рівнобедреного трикутника, яка одночасно є його висотою і бісектрисою. Це означає, що $BD \perp AC$, тобто діагоналі ромба перпендикулярні, і $\angle ABD = \angle CBD$, тобто BD — бісектриса кута ABC .

Аналогічно доводимо, що діагоналі ромба є бісектрисами й інших його кутів. Теорему доказано. ■

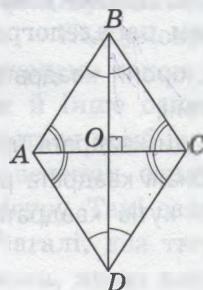


Рис. 31. Властивості ромба

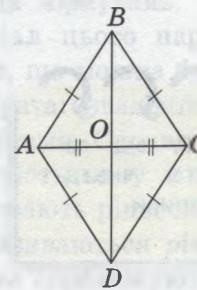
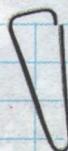


Рис. 32. До доведення властивостей ромба



Опорна задача

Якщо всі сторони чотирикутника рівні, то цей чотирикутник — ромб. Доведіть.

Розв'язання

Очевидно, що в чотирикутнику, всі сторони якого рівні, попарно рівними є і протилежні сторони. Отже, за ознакою паралелограма такий чотирикутник — паралелограм, а за означенням ромба, паралелограм, у якого всі сторони рівні, є ромбом.

Розв'язуючи задачі після параграфа, ви доведете інші ознаки прямокутника і ромба.

4.3. Квадрат



Рис. 33. Квадрат



Квадрат від латинського «квадро» — чотири

На рисунку 33 зображене ще один вид паралелограма — квадрат.

Означення

Квадратом називається прямокутник, у якого всі сторони рівні.

Інакше можна сказати, що квадрат — це прямокутник, який є ромбом. Дійсно, оскільки квадрат є прямокутником і ромбом і, звісно ж, довільним паралелограмом, то:

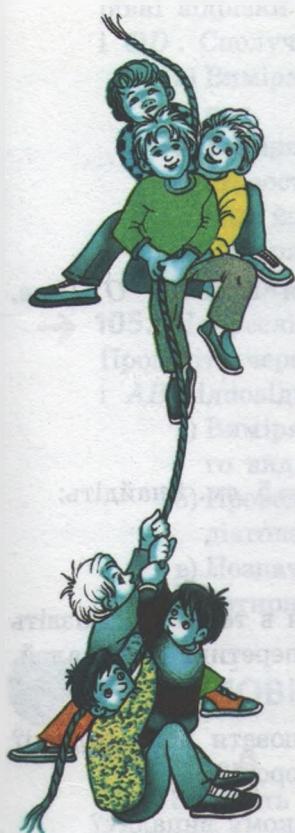
- 1) усі сторони квадрата рівні, а протилежні сторони паралельні;
- 2) усі кути квадрата прямі;
- 3) діагоналі квадрата рівні, перпендикулярні, є бісектрисами кутів квадрата і діляться точкою перетину навпіл.

4.4*. Зв'язок між окремими видами паралелограмів. Рівносильні твердження

За означеннями довільного паралелограма і його окремих видів ми можемо схематично зобразити зв'язок між ними (рис. 34).



Рис. 34. Діаграма «Види паралелограмів»



На схемі представлені множини паралелограмів, прямокутників і ромбів. Такий спосіб наочного подання множин називають **діаграмами Ейлера—Венна**. Діаграма Ейлера—Венна для паралелограмів демонструє, що множини прямокутників і ромбів є частинами (*підмножинами*) множини паралелограмів, а множина квадратів — спільною частиною (*перерізом*) множин прямокутників і ромбів. Діаграми Ейлера—Венна часто застосовують для підтвердження або перевірки правильності логічних міркувань.

Підсумовуючи матеріал цього параграфа, звернемо також увагу на те, що можна було б дати й інше означення квадрата: квадратом називається ромб із прямими кутами. Справді, обидва наведених означення описують одну й ту саму фігуру. Такі означення називають **рівносильними**, якщо вони або обидва спрощуються, або обидва не спрощуються. Наприклад, рівносильними є твердження «У трикутнику дві сторони рівні» і «У трикутнику два кути рівні», адже обидва вони правильні, якщо розглядається рівнобедрений трикутник, і обидва хибні, якщо йдеться про різносторонній трикутник. Рівносильність двох тверджень також означає, що з будь-якого одного з них випливає інше. Справді, розглянемо рівносильні твердження «Діагоналі паралелограма рівні» і «Паралелограм має прямі кути». З того, що діагоналі паралелограма рівні, випливає, що він є прямокутником, тобто має прямі кути, і навпаки: паралелограм із прямими кутами є прямокутником, тобто має рівні діагоналі. На цьому прикладі легко відстежити логічні кроки переходу від ознак фігури до її означення і згодом — до властивостей. Такий перехід досить часто доводиться робити в процесі розв'язування задач.

Запитання і задачі



УСНІ ВПРАВИ

97. Назвіть види паралелограмів, у яких:

- усі кути рівні;
- усі сторони рівні;
- діагоналі рівні;
- діагоналі перпендикулярні.

98. Діагоналі ромба $ABCD$ перетинаються в точці O (див. рис. 31). Назвіть:

- бісектрису трикутника ABD ;
- висоту трикутника ABC ;
- медіану трикутника BCD .

99. У прямокутнику $ABCD$ $AB = 8$ см, $BC = 5$ см. Знайдіть:

- відстань від точки C до сторони AD ;
- відстань між прямими AB і CD .

100. Діагоналі квадрата $ABCD$ перетинаються в точці O . Назвіть усі рівні трикутники, які утворюються при перетині діагоналей. Визначте їх вид.

101. Чи може діагональ прямокутника дорівнювати його стороні? Чи може діагональ ромба дорівнювати його стороні?

102. Чи може прямокутник бути ромбом? У якому випадку?

103. Наведіть контрприклади, які спростовують наведені хибні твердження:

- четирикутник, який має два прямих кути,— прямокутник;
- четирикутник із перпендикулярними діагоналями — ромб;
- четирикутник із рівними діагоналями — прямокутник;
- четирикутник, діагоналі якого перпендикулярні й рівні,— квадрат.



ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

104. Накресліть дві перпендикулярні прямі, які перетинаються в точці O . На одній із прямих відкладіть по різні боки від точки O рівні відрізки OA і OC , а на другій прямій — рівні відрізки OB і OD . Сполучіть точки A , B , C і D .

- Виміряйте сторони чотирикутника $ABCD$ і визначте його вид.
 - Виміряйте кут A чотирикутника $ABCD$. Користуючись властивостями цього чотирикутника, знайдіть градусні міри інших його кутів. Перевірте отримані результати вимірюванням.
 - Виміряйте кути ADB і CDB . Виділіть колльором усі пари рівних кутів між діагоналями і сторонами чотирикутника.
- **105.** Накресліть прямокутний трикутник ABD з гіпотенузою BD . Проведіть через вершини B і D прямі, паралельні сторонам AD і AB відповідно. Позначте точку C — точку перетину цих прямих.
- Виміряйте сторони чотирикутника $ABCD$ і визначте його вид.
 - Проведіть діагональ AC . Виміряйте і порівняйте довжини діагоналей чотирикутника.
 - Позначте на прямих BC і AD точки C_1 і D_1 так, щоб чотирикутник ABC_1D_1 був квадратом.



ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

Рівень А

106. Знайдіть периметр прямокутника $ABCD$, якщо $AC = 15$ см, а периметр трикутника ABC дорівнює 36 см.

→ **107.** Знайдіть сторони прямокутника, периметр якого дорівнює 36 см, а одна сторона вдвічі більша за іншу.

108. У прямокутнику $ABCD$ $\angle BAC = 65^\circ$. Знайдіть кут між діагоналями прямокутника.

→ **109.** Діагоналі прямокутника перетинаються під кутом 80° . Знайдіть кути, на які діагональ ділить кут прямокутника.

110. Діагоналі прямокутника $ABCD$ перетинаються в точці O , причому $\angle COD = 60^\circ$, $CD = 8$ см. Знайдіть довжину діагоналі.

- 111.** Знайдіть кути ромба, якщо:
- один із них на 120° більший за інший;
 - одна з його діагоналей дорівнює стороні.
- **112.** Знайдіть кути ромба, якщо:
- сума двох із них дорівнює 220° ;
 - діагональ утворює з однією з його сторін кут 25° .
- 113.** Периметр квадрата дорівнює 40 м. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей квадрата до його сторони.
- **114.** Відстань між протилежними сторонами квадрата дорівнює 5 см. Знайдіть периметр квадрата.
- 115 (опорна).** Якщо один із кутів паралелограма прямий, то цей паралелограм є прямокутником. Доведіть.
- **116 (опорна).** Якщо в паралелограмі сусідні сторони рівні, то цей паралелограм є ромбом. Доведіть.
- Рівень Б**
- 117.** Точка перетину діагоналей прямокутника віддалена від двох його сторін на 3 см і 4 см. Знайдіть периметр прямокутника.
- **118.** Бісектриса кута прямокутника ділить його сторону завдовжки 12 см навпіл. Знайдіть периметр прямокутника.
- 119.** З точки кола проведені дві перпендикулярні хорди, віддалені від центра кола на 3 см і 5 см. Знайдіть довжини цих хорд.
- 120.** Знайдіть кути ромба, якщо:
- кути, утворені його стороною з діагоналями, відносяться як $1 : 4$;
 - висота ромба вдвічі менша за сторону.
- **121.** Знайдіть кути ромба, якщо:
- висота, проведена з вершини тупого кута, відтинає від ромба рівнобедрений трикутник;
 - висота, проведена з вершини тупого кута, ділить сторону ромба навпіл.
- 122.** З вершини кута ромба, що дорівнює 120° , проведена діагональ завдовжки 6 см. Знайдіть периметр ромба.
- **123.** Діагональ квадрата дорівнює 18 м, а його сторона є діагоналлю іншого квадрата. Знайдіть периметр другого квадрата.

124. У рівнобедрений прямокутний трикутник вписано квадрат так, що дві його вершини лежать на гіпотенузі, а дві інші — на катетах (рис. 35). Знайдіть гіпотенузу трикутника, якщо сторона квадрата дорівнює 2 см.

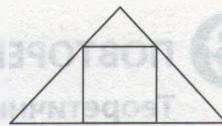


Рис. 35

→ **125.** У рівнобедрений прямокутний трикутник вписано квадрат так, що прямий кут є спільним для обох фігур (рис. 36). Знайдіть периметр квадрата, якщо катет трикутника дорівнює 4 см.

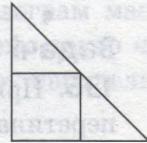


Рис. 36

126 (опорна). *Паралелограм із перпендикулярними діагоналями є ромбом.* Доведіть.

→ **127 (опорна).** Якщо діагональ паралелограма є бісектрисою його протилежних кутів, то цей паралелограм — ромб. Доведіть.

128. Відрізки AC і BD — діаметри кола. Доведіть, що $ABCD$ — прямокутник.

Рівень В

129. Серединний перпендикуляр до діагоналі прямокутника ділить його сторону у відношенні 2 : 1. Знайдіть кути, на які діагональ ділить кут прямокутника.

→ **130.** Серединний перпендикуляр до діагоналі прямокутника перетинає його сторону під кутом, що дорівнює куту між діагоналями. Знайдіть цей кут.

131. Доведіть, що всі висоти ромба рівні. Сформулюйте і доведіть обернене твердження.

→ **132.** З точки перетину діагоналей ромба проведено перпендикуляри до його сторін. Доведіть, що основи цих перпендикулярів є вершинами прямокутника.

133. Якщо діагоналі чотирикутника є бісектрисами його кутів, то цей чотирикутник — ромб. Доведіть.

134. Доведіть, що бісектриси кутів паралелограма, який не є ромбом, перетинаючись, утворюють прямокутник.

→ **135.** Доведіть, що бісектриси кутів прямокутника, який не є квадратом, перетинаючись, утворюють квадрат.



ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 5

Теоретичний матеріал

- рівнобедрений трикутник;
- прямокутний трикутник;
- задачі на побудову.

7 клас, § 11, 17, 20

Задачі

136. Пряма, паралельна основі AC рівнобедреного трикутника ABC , перетинає бічні сторони AB і BC в точках D і E відповідно.

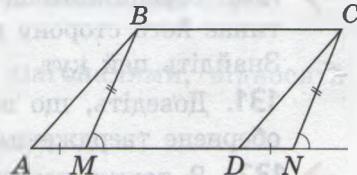
а) Доведіть, що $AE = CD$.

б) Знайдіть кути чотирикутника $ADEC$, якщо $\angle B = 80^\circ$.

137. У чотирикутнику $ABCD$ сторони AD і BC паралельні, а сторони AB і CD рівні. Чи обов'язково даний чотирикутник є паралелограмом? Наведіть контрприклад.

Задачі для підготовки до контрольної роботи № 1

1. Висота паралелограма ділить тупий кут на два кути, різниця яких дорівнює 20° . Знайдіть кути паралелограма.
2. Сума двох сторін паралелограма дорівнює 48 см, а периметр — 88 см. Знайдіть сторони паралелограма.
3. За даними рисунка доведіть, що $ABCD$ — паралелограм.
4. Бісектриса кута паралелограма в результаті перетину з його стороною утворює кути, градусні міри яких відносяться як $1 : 3$. Визначте вид паралелограма.
5. Доведіть, що ромб є квадратом, якщо його діагоналі утворюють зі стороною рівні кути.
6. Серединний перпендикуляр до діагоналі прямокутника ділить його сторону на частини, одна з яких дорівнює меншій стороні прямокутника. Знайдіть кут між діагоналями прямокутника.



§ 5. Трапеція



Трапеци́я — від грецького «трапе́зос» — маленький стіл. Спільнокореневим є слово «тра́пеза»

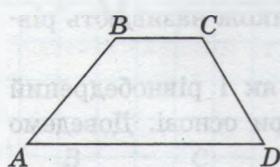


Рис. 37. Трапеція $ABCD$

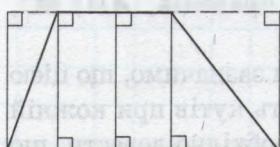


Рис. 38. Висоти трапеції

5.1. Означення трапеції

Як відомо, будь-який паралелограм має дві пари паралельних сторін. Розглянемо тепер чотирикутник, який має лише одну пару паралельних сторін.

Означення

Трапецією називається чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші не паралельні.

Паралельні сторони трапеції називають її **основами**, а непаралельні сторони — **бічними сторонами**. На рисунку 37 у трапеції $ABCD$ сторони AD і BC є основами, а AB і CD — бічними сторонами.

Кути, прилеглі до однієї бічної сторони, є внутрішніми односторонніми при паралельних прямих, на яких лежать основи трапеції. За теоремою про властивість паралельних прямих звідси випливає, що **сума кутів трапеції, прилеглих до бічної сторони, дорівнює 180°** . На рисунку 37 $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180^\circ$.

Означення

Висотою трапеції називається спільний перпендикуляр прямих, що містять її основи.

Очевидно, що в трапеції можна провести безліч висот (рис. 38) — усі вони рівні як відстані між паралельними прямими.

Найчастіше під час розв'язування задач висоти проводять із вершин кутів при меншій основі трапеції.

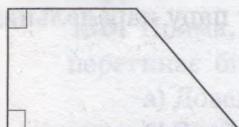


Рис. 39. Прямоокутна трапеція

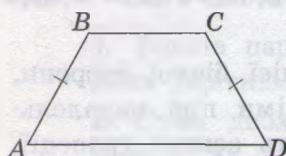


Рис. 40. Рівнобедрена трапеція $ABCD$

5.2. Окремі види трапецій

Як серед трикутників та паралелограмів, так і серед трапецій виділяються окремі види, які мають додаткові властивості.

Означення

Прямоокутною трапецією називається трапеція, у якій одна з бічних сторін перпендикулярна до основ.

На рисунку 39 зображена правоокутна трапеція. Вона має два прямі кути при меншій бічній стороні. Ця сторона водночас є її висотою трапеції.

Означення

Рівнобедреною трапецією називається трапеція, у якій бічні сторони рівні.

На рисунку 40 зображена рівнобедрена трапеція $ABCD$ з бічними сторонами AB і CD . Іноді рівнобедрену трапецію також називають рівнобічною.

Рівнобедрена трапеція, як і рівнобедрений трикутник, має рівні кути при основі. Доведемо це в наступній теоремі.

Теорема (властивість рівнобедреної трапеції)

У рівнобедреної трапеції кути при основі рівні.

Доведення

□ Нехай $ABCD$ — дана трапеція, $AD \parallel BC$, $AB = CD$.

Перед початком доведення зазначимо, що цією теоремою стверджується рівність кутів при кожній із двох основ трапеції, тобто необхідно довести, що $\angle A = \angle D$ і $\angle B = \angle C$.

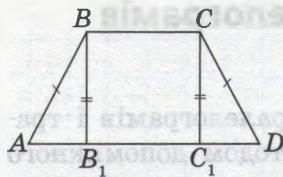


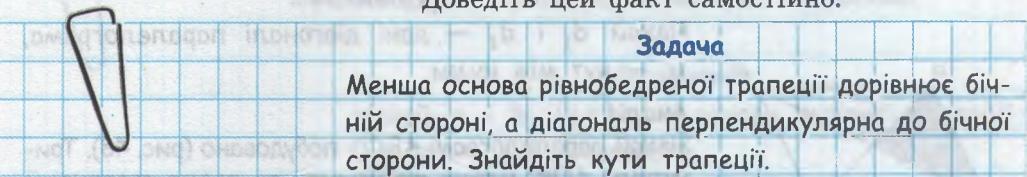
Рис. 41. Висоти, проведені з вершин тупих кутів, відтинають від рівнобедреної трапеції рівні трикутники

Проведемо висоти BB_1 і CC_1 з вершин тупих кутів і розглянемо прямокутні трикутники ABB_1 і DCC_1 (рис. 41). У них $AB = CD$ як бічні сторони рівнобедреної трапеції, $BB_1 = CC_1$ як відстані між паралельними прямими AD і BC . Отже, $\triangle ABB_1 \cong \triangle DCC_1$ за гіпотенузою і катетом. Звідси випливає, що $\angle A = \angle D$. Кути трапеції B і C також рівні, оскільки кожний із цих кутів доповнює до 180° кут при більшій основі. Теорему доведено. ■

Має місце також обернене твердження (ознака рівнобедреної трапеції):

якщо в трапеції кути при основі рівні, то така трапеція рівнобедрена.

Доведіть цей факт самостійно.



Задача

Менша основа рівнобедреної трапеції дорівнює бічній стороні, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони. Знайдіть кути трапеції.

Розв'язання

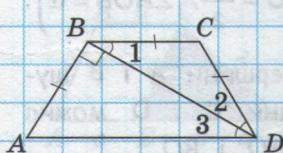


Рис. 42

Нехай дано рівнобедрену трапецію $ABCD$, у якій $AD \parallel BC$, $AB = BC = CD$, $BD \perp AB$ (рис. 42).

За умовою задачі трикутник BCD рівнобедрений з основою BD , тобто $\angle 1 = \angle 2$; з іншого боку, $\angle 1 = \angle 3$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AD і BC та січній BD .

Нехай градусна міра кута 1 дорівнює x , тоді в даній трапеції $\angle A = \angle D = 2x$, $\angle B = \angle C = x + 90^\circ$.

Оскільки сума кутів, прилеглих до бічної сторони, становить 180° , маємо: $2x + x + 90^\circ = 180^\circ$; $3x = 90^\circ$; $x = 30^\circ$.

Отже, $\angle A = \angle D = 60^\circ$, $\angle B = \angle C = 120^\circ$.

Відповідь: 60° і 120° .

5.3*. Побудова паралелограмів і трапецій

Задачі на побудову паралелограмів і трапецій часто розв'язують методом допоміжного трикутника. Нагадаємо, що для цього необхідно виділити в шуканій фігури трикутник, який можна побудувати за наявними даними. Побудувавши його, отримуємо дві або три вершини шуканого чотирикутника, а решту вершин знаходимо за даними задачі.



Задача

Побудуйте паралелограм за двома діагоналями і кутом між ними.

Розв'язання

Нехай d_1 і d_2 — дані діагоналі паралелограма, α — кут між ними.

Аналіз

Нехай паралелограм $ABCD$ побудовано (рис. 43). Трикутник AOB можна побудувати за двома сторонами

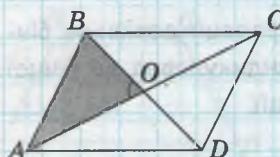


Рис. 43

і кутом між ними $\left(AO = \frac{d_1}{2}, BO = \frac{d_2}{2}, \angle AOB = \alpha \right)$.

Таким чином, ми отримаємо вершини A і B шуканого паралелограма. Вершини C і D можна дістати, «подвоївши» відрізки AO і BO .

Побудова

1. Розділимо відрізки d_1 і d_2 навпіл.
2. Побудуємо трикутник AOB за двома сторонами і кутом між ними.
3. На променях AO і BO відкладемо відрізки $OC = AO$ і $OD = BO$.
4. Послідовно сполучимо точки B , C , D і A .

Доведення

Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, оскільки за побудовою його діагоналі AC і BD точкою перетину діляться на пів. У цьому паралелограмі $AC = d_1$, $BD = d_2$, $\angle AOB = \alpha$ за побудовою.

Дослідження

Задача має єдиний розв'язок за будь-яких значень d_1 , d_2 і α .

У деяких випадках для побудови допоміжного трикутника на рисунку-ескізі необхідно провести додаткові лінії.

**Задача**

Побудуйте трапецію за чотирма сторонами.

Розв'язання

Нехай a і b ($a < b$) — основи шуканої трапеції, c і d — її бічні сторони.

Аналіз

Нехай шукану трапецію $ABCD$ побудовано (рис. 44). Проведемо через вершину C пряму CE , паралельну AB . Тоді $ABCE$ — паралелограм за означенням, отже, $CE = AB = c$. Крім того, $AE = BC = a$, отже, $ED = b - a$.

Допоміжний трикутник ECD можна побудувати за трьома сторонами. Після цього для отримання вершин A і B необхідно відкласти на промені DE і на промені з початком C , паралельному DE , відрізки завдовжки a .

Побудова

1. Побудуємо відрізок $b - a$.
2. Побудуємо трикутник ECD за трьома сторонами ($EC = c$, $CD = d$, $ED = b - a$).

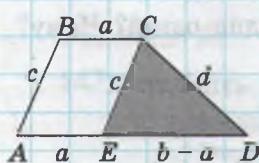


Рис. 44

3. Побудуємо промінь, який проходить через точку C і паралельний DE . При цьому побудованій промінь і промінь DE мають лежати по один бік від прямої CD .
4. На промені DE від точки E відкладемо відрізок $EA = a$, на промені з початком C — відрізок $CB = a$.
5. Сполучимо точки A і B .

Доведення

За побудовою $AD \parallel BC$, $AB \parallel CE$, $BC = a$, $AD = b - a + a = b$, $CE = c$. Оскільки за означенням $ABCE$ — паралелограм, то $AB = CE = c$. Отже, $ABCD$ — шукана трапеція.

Дослідження

Задача має єдиний розв'язок, якщо числа $b - a$, c і d задовільняють нерівність трикутника.

Запитання і задачі



УСНІ ВПРАВИ

- 138.** Чи можуть основи трапеції дорівнювати одна одній? Чому?
- 139.** Чи можуть бути рівними:
 - а) сусідні кути трапеції;
 - б) протилежні кути трапеції?
- 140.** Чи обов'язково кути трапеції, прилеглі до більшої основи, є гострими? Наведіть приклади.
- 141.** Чи може рівнобедрена трапеція бути прямокутною?
- 142.** Чи може висота трапеції бути більшою за бічну сторону; дорівнювати бічній стороні?
- 143.** Діагоналі трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) перетинаються в точці O .
 - а) Чи може трикутник AOD дорівнювати трикутнику BOC ?
 - б) Чи може трикутник AOB дорівнювати трикутнику DOC ?

144. Чи може точка перетину діагоналей трапеції бути серединою кожної з них; однієї з них?



ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

145. Накресліть паралелограм $ABCD$ і проведіть у ньому висоту CH .

а) Визначте вид трапеції $ABCH$.

б) Чи є висотою трапеції будь-яка висота паралелограма? Наведіть контрприклад.

→ **146.** Накресліть рівнобедрений трикутник AMD з основою AD . Позначте на стороні AM точку B і проведіть через неї пряму, паралельну AD . Позначте точку C — точку перетину цієї прямої зі стороною MD .

а) Визначте вид трапеції $ABCD$.

б) Проведіть діагоналі трапеції. Виміряйте і порівняйте їх довжини.



ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

Рівень А

147. Знайдіть невідомі кути:

а) трапеції $ABCD$ з основами AD і BC , якщо $\angle A = 40^\circ$, $\angle D = 50^\circ$;

б) рівнобедреної трапеції, один із кутів якої дорівнює 58° ;

в) прямокутної трапеції, найбільший кут якої утричі більший за найменший кут.

→ **148.** Знайдіть невідомі кути:

а) рівнобедреної трапеції, в якій висота, проведена з вершини тупого кута, утворює з бічною стороною кут 22° ;

б) прямокутної трапеції, яку діагональ, проведена з вершини тупого кута, ділить на два рівнобедрені прямокутні трикутники.

149. У рівнобедреній трапеції висота, проведена з вершини тупого кута, ділить більшу основу на відрізки завдовжки 6 см і 30 см. Знайдіть меншу основу трапеції.

→ **150.** Менша основа рівнобедrenoї трапеції дорівнює 10 см. Знайдіть більшу основу трапеції, якщо висота, проведена з вершини тупого кута, ділить її на відрізки, один із яких дорівнює 3 см.

151. Доведіть, що сума протилежних кутів рівнобедrenoї трапеції дорівнює 180° .

Рівень Б

152. Знайдіть кути:

- рівнобедrenoї трапеції, якщо різниця двох її протилежних кутів дорівнює 80° ;
- прямокутної трапеції, в якій діагональ є бісектрисою тупого кута й утворює з меншою бічною стороною кут 35° .

→ **153.** Знайдіть кути:

- прямокутної трапеції, якщо відношення найбільшого і найменшого з них дорівнює $3 : 2$;
- рівнобедrenoї трапеції, менша основа якої дорівнює бічній стороні і вдвічі менша за більшу основу.

154. У трапеції $ABCD$ через вершину B проведено пряму BK , паралельну стороні CD (рис. 45).

- Доведіть, що $KBCD$ — паралелограм.
- Знайдіть периметр трапеції, якщо $BC = 4$ см, $P_{\triangle ABK} = 11$ см.

→ **155.** У рівнобедреній трапеції середина більшої основи сполучена з вершинами меншої основи. При цьому утворилися три рівносторонні трикутники. Знайдіть:

- кути трапеції;
- периметр трапеції, якщо периметр одного трикутника дорівнює 12 м.

156. Діагональ рівнобедrenoї трапеції ділить навпіл її гострий кут, який дорівнює 60° . Знайдіть периметр трапеції, якщо її менша основа дорівнює 15 см.

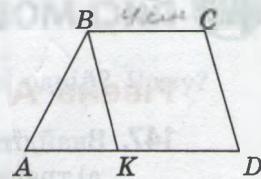


Рис. 45

- 157. Діагональ рівнобедреної трапеції є бісектрисою її тупого кута. Знайдіть периметр трапеції, якщо її основи дорівнюють 5 см і 10 см.
158. Доведіть, що бісектриси кутів трапеції, прилеглих до бічної сторони, перпендикулярні.
159. Побудуйте:
- паралелограм за двома сторонами й діагоналлю;
 - ромб за стороною і діагоналлю;
 - рівнобедрену трапецію за більшою основою, бічною стороною і гострим кутом.
- 160. Побудуйте:
- ромб за кутом і діагоналлю, протилежною цьому куту;
 - прямокутник за діагоналлю і кутом між діагоналями;
 - прямокутну трапецію за меншою основою, більшою бічною стороною і більшою діагоналлю.

Рівень В

161. Діагональ ділить рівнобедрену трапецію на два рівнобедрені трикутники. Знайдіть кути трапеції.
- 162. Довжини бічних сторін трапеції дорівнюють $2a$, а довжини основ — $7a$ і $9a$. Знайдіть кути трапеції.
- 163 (опорна). Діагоналі рівнобедреної трапеції рівні, і навпаки: якщо діагоналі трапеції рівні, то вона рівнобедрена. Доведіть.
- 164 (опорна). Діагоналі рівнобедреної трапеції утворюють з її основою рівні кути, і навпаки: якщо діагоналі трапеції утворюють з її основою рівні кути, то трапеція рівнобедрена. Доведіть.
165. Побудуйте:
- паралелограм за стороною, діагоналлю і кутом, протилежним цій діагоналі;
 - ромб за висотою і діагоналлю;
 - трапецію за основами і діагоналями.
- 166. Побудуйте:
- прямокутник за діагоналлю й периметром;
 - ромб за висотою і гострим кутом;
 - рівнобедрену трапецію за різницею основ, бічною стороною і діагоналлю.



ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 6

Теоретичний матеріал

- ознаки паралельних прямих;
- властивості паралельних прямих.

7 клас, § 14, 15

Задачі

167. Точки D , E і F — середини сторін AB , BC і AC рівностороннього трикутника ABC відповідно. Доведіть, що чотирикутник $ADEF$ — ромб. Назвіть інші ромби, трьома вершинами яких є точки D , E і F .

168. Відрізки AD і CE — рівні висоти трикутника ABC . Доведіть, що трикутник DBE рівнобедрений.

§ 6. Теорема Фалеса. Середні лінії трикутника і трапеції

6.1. Теорема Фалеса

Для подальшого вивчення властивостей трапеції доведемо важливу теорему.

Теорема (Фалеса)

Паралельні прямі, які перетинають сторони кута і відтинають на одній із них рівні відрізки, відтинають рівні відрізки і на іншій стороні.

Доведення

□ Нехай A_1, A_2, A_3 — точки перетину паралельних прямих з однією із сторін даного кута, а B_1, B_2, B_3 — відповідні точки перетину цих прямих з іншою стороною кута. Доведемо, що коли $A_1A_2 = A_2A_3$, то $B_1B_2 = B_2B_3$ (рис. 46).

Проведемо через точку B_2 пряму CD , паралельну A_1A_3 (рис. 47). Чотирикутники $A_2A_1CB_2$ і $A_3A_2B_2D$ — паралелограми за означенням. Тоді $A_1A_2 = CB_2$, $A_2A_3 = B_2D$, а оскільки $A_1A_2 = A_2A_3$, то $CB_2 = B_2D$.

Розглянемо трикутники B_1B_2C і B_3B_2D . У них $CB_2 = B_2D$ за доведеним, $\angle 1 = \angle 2$ як вертикальні, а $\angle 3 = \angle 4$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих A_1B_1 і A_3B_3 та січній CD . Отже, $\Delta B_1B_2C = \Delta B_3B_2D$ за другою ознакою, звідки $B_1B_2 = B_2B_3$.

Теорему доведено. ■

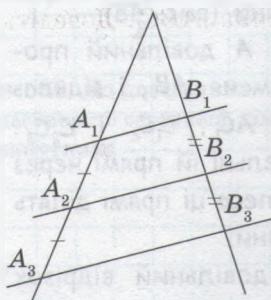


Рис. 46. Теорема Фалеса

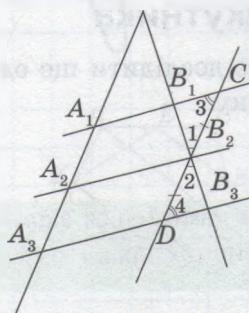


Рис. 47. До доведення
теореми Фалеса

Зазначимо, що в умові даної теореми замість сторін кута можна розглядати дві довільні прямі, тому теорема Фалеса може формулюватися і так:

паралельні прямі, які перетинають дві дані прямі і відтинають на одній із них рівні відрізки, відтинають рівні відрізки і на іншій прямій.

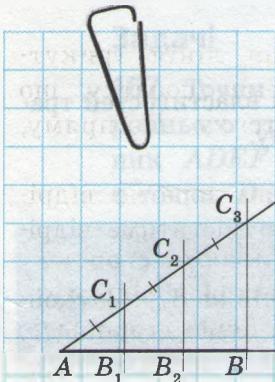


Рис. 48. Поділ відрізка на рівні частини

Задача

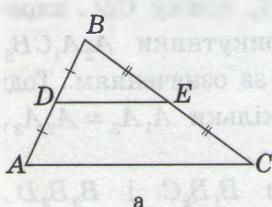
Поділіть даний відрізок на n рівних частин.

Розв'язання

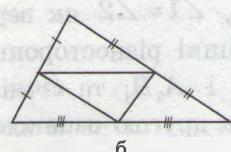
Розв'яжемо задачу для $n = 3$, тобто поділимо даний відрізок AB на три рівні частини (рис. 48).

Для цього проведемо з точки A довільний промінь, не доповняльний до променя AB , і відкладемо на ньому рівні відрізки AC_1 , C_1C_2 і C_2C_3 . Проведемо пряму C_3B і паралельні їй прямі через точки C_1 і C_2 . За теоремою Фалеса ці прямі ділять відрізок AB на три рівні частини.

Аналогічно можна поділити довільний відрізок на будь-яку кількість рівних частин.



а



б

Рис. 49. Середня лінія трикутника

6.2. Середня лінія трикутника

Теорема Фалеса допомагає дослідити ще одну визначну лінію в трикутнику.

Означення

Середньою лінією трикутника називається відрізок, що сполучає середини двох його сторін.

На рисунку 49, а відрізок DE — середня лінія трикутника ABC . У будь-якому трикутнику можна провести три середні лінії (рис. 49, б).

Теорема (властивість середньої лінії трикутника)

Середня лінія трикутника паралельна одній із його сторін і дорівнює половині цієї сторони.

Доведення

□ Нехай DE — середня лінія трикутника ABC (рис. 50). Доведемо спочатку, що $DE \parallel AC$. Проведемо через точку D пряму, паралельну AC .

За теоремою Фалеса вона перетне відрізок BC в його середині, тобто міститиме відрізок DE . Отже, $DE \parallel AC$.

Проведемо тепер середню лінію EF . За щойно доведеним вона буде паралельна стороні AB . Чотирикутник $ADEF$ з попарно паралельними сторонами за означенням є паралелограмом, звідки $DE = AF$. А оскільки точка F — середина AC , то $DE = \frac{1}{2} AC$.

Теорему доведено. ■

Опорна задача (теорема Вариньйона)

Середини сторін чотирикутника є вершинами паралелограма. Доведіть.

Розв'язання

Нехай точки K, L, M, N — середини сторін чотирикутника $ABCD$ (рис. 51). Проведемо діагональ BD . Відрізки KN і ML — середні лінії трикутників ABD і CBD відповідно. За властивістю середньої лінії трикутника вони паралельні стороні BD і дорівнюють її половині, тобто паралельні й рівні між собою. Тоді за ознакою паралелограма чотирикутник $KLMN$ — паралелограм.

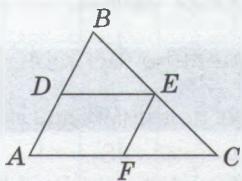


Рис. 50. До доведення властивості середньої лінії трикутника

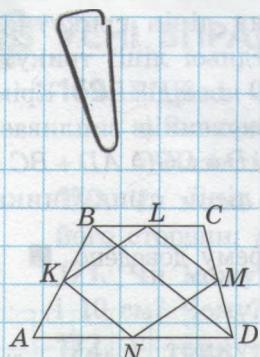


Рис. 51. Середини сторін чотирикутника $ABCD$ — вершини паралелограма

6.3. Середня лінія трапеції

Означення

Середньою лінією трапеції називається відрізок, що сполучає середини бічних сторін трапеції.

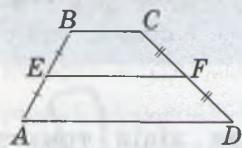


Рис. 52. Середня лінія трапеції

На рисунку 52 відрізок EF — середня лінія трапеції $ABCD$.

Теорема (властивість середньої лінії трапеції)

Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі.

Доведення

□ Нехай EF — середня лінія трапеції $ABCD$ з основами AD і BC (рис. 53). Проведемо пряму BF і позначимо точку G — точку перетину прямих BF і AD . Розглянемо трикутники BFC і GFD . У них $FC = FD$, оскільки F — середина CD , $\angle 1 = \angle 2$ як вертикальні, а $\angle 3 = \angle 4$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих BC і AD та січній CD . Отже, $\triangle BFC = \triangle GFD$ за другою ознакою, звідки $BF = FG$. Тоді за означенням EF — середня лінія трикутника ABG . За властивістю середньої лінії трикутника $EF \parallel AG$, тому $EF \parallel AD$ і $EF \parallel BC$. Крім того, з доведеної рівності трикутників випливає, що $BC = DG$, звідки $AG = AD + DG = AD + BC$. За властивістю середньої лінії трикутника

$$EF = \frac{1}{2} AG = \frac{1}{2} (AD + BC).$$

Теорему доведено. ■

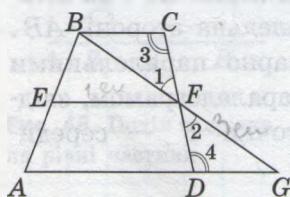


Рис. 53. До доведення властивості середньої лінії трапеції

Задача

Через точки, які ділять бічну сторону трапеції на три рівні частини, проведено прямі, паралельні основам трапеції. Знайдіть довжини відрізків цих прямих, що містяться всередині трапеції, якщо її основи дорівнюють 2 м і 5 м.

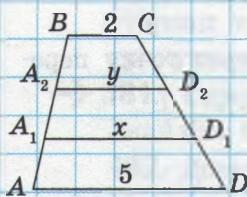


Рис. 54

Розв'язання

Нехай у трапеції $ABCD$ $AD \parallel BC$, $AA_1 = A_1A_2 = A_2D$ (рис. 54). За теоремою Фалеса паралельні прямі, що проходять через точки A_1 і A_2 , відтинають на бічній стороні CD рівні відрізки, тобто $DD_1 = D_1D_2 = D_2C$. Тоді за означенням A_1D_1 — середня лінія трапеції AA_2D_2D , A_2D_2 — середня лінія трапеції A_1BCD_1 . Нехай $A_1D_1 = x$ м, $A_2D_2 = y$ м. За властивістю середньої лінії трапеції маємо систему:

$$\begin{cases} x = \frac{y+5}{2}, & [2x-y=5, \quad x=4, \\ y = \frac{x+2}{2}; & [2y-x=2; \quad y=3. \end{cases}$$

Відповідь: 3 м і 4 м.

Запитання і задачі



УСНІ ВПРАВИ

169. Відрізок DE — середня лінія трикутника ABC (рис. 49, а).
 - Визначте вид чотирикутника $ADEC$.
 - Назвіть медіану трикутника, що виходить із вершини A .
170. Чи може середня лінія трикутника бути перпендикулярно до його сторони; до двох його сторін?
171. Чи можуть середні лінії трикутника дорівнювати 3 см, 4 см і 10 см? Чому?
172. У трикутнику ABC проведено середню лінію, паралельну стороні AC . У якому відношенні вона ділить медіану BM ; висоту BH ?
173. Середини основ трапеції сполучені відрізком. Чи є він середньою лінією трапеції?



ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

174. Чи може середня лінія трапеції бути меншою за обидві її основи; дорівнювати одній з основ?

175. Чи може середня лінія трапеції проходити через точку перетину діагоналей? Чому?

176. Накресліть трикутник ABC . Позначте на стороні AB точки A_1 , A_2 і A_3 так, щоб вони ділили відрізок AB на чотири рівні частини. Проведіть через ці точки прямі, паралельні стороні AC , і позначте точки їх перетину зі стороною BC C_1 , C_2 і C_3 відповідно.

a) Виміряйте і порівняйте довжини відрізків, на які точки C_1 , C_2 і C_3 ділять сторону BC .

b) Виділіть червоним кольором середню лінію трикутника ABC .
в) Виділіть синім кольором середню лінію трапеції AA_2C_2C .

→ **177.** Накресліть трикутник ABC . Позначте точки D , E і F — середини сторін AB , BC і AC відповідно. Сполучіть позначені точки.

a) Визначте вид чотирикутника $ADEF$.

б) Визначте вид чотирикутника $ADEC$.

в) Назвіть усі трикутники, що дорівнюють трикутнику DEF .

Запишіть відповідні рівності.



ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

Рівень А

178. За даними рисунка 55 знайдіть x , якщо $a \parallel b$.

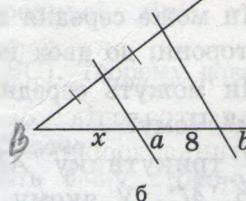
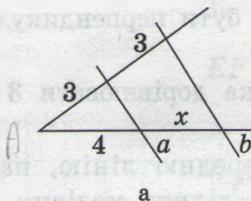


Рис. 55

→ **179.** Через середину D сторони AB трикутника ABC проведено пряму, яка паралельна AC і перетинає сторону BC в точці E . Знайдіть BE , якщо $BC = 8$ см.

180. Сторони трикутника дорівнюють 12 см, 16 см і 20 см. Знайдіть сторони трикутника, вершинами якого є середини сторін даного трикутника.

→ **181.** Середня лінія рівностороннього трикутника дорівнює 3,5 см. Знайдіть периметр трикутника.

182. Доведіть, що середні лінії трикутника ділять його на чотири рівні трикутники.

183. Середня лінія трикутника відтинає від нього трапецію з бічними сторонами 3 м і 4 м і меншою основою 5 м. Знайдіть периметр трикутника.

→ **184.** Діагоналі чотирикутника дорівнюють 18 см і 22 см. Знайдіть периметр паралелограма, вершинами якого є середини сторін даного чотирикутника.

185. Знайдіть:

а) середню лінію трапеції з основами 8 см і 12 см;

б) основи трапеції, в якій діагональ ділить середню лінію на відрізки завдовжки 3 см і 4 см.

→ **186.** Знайдіть:

а) середню лінію рівнобедреної трапеції з бічною стороною 5 см і периметром 26 см;

б) основи трапеції, якщо одна з них більша за іншу на 6 см, а середня лінія трапеції дорівнює 5 см.

187. Доведіть, що середини сторін ромба є вершинами прямокутника.

→ **188.** Доведіть, що середини сторін прямокутника є вершинами ромба.

Рівень Б

189. Пряма, яка паралельна основі рівнобедреного трикутника і проходить через середину бічної сторони, відтинає від даного трикутника трапецію. Знайдіть її периметр, якщо периметр даного трикутника дорівнює 26 см, а основа відноситься до бічної сторони як $5 : 4$.

→ **190.** Середні лінії трикутника відносяться як $4 : 5 : 6$. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 60 см.

191. Доведіть, що вершини трикутника рівновіддалені від прямої, яка містить його середню лінію.

- 192. Доведіть, що середини сторін рівнобедrenoї трапеції є вершинами ромба.
193. Як побудувати трикутник, якщо задано середини його сторін?
- 194. Як розрізати трикутник на дві частини так, щоб із них можна було скласти паралелограм?
195. Прямокутна трапеція ділиться діагоналлю на рівносторонній трикутник зі стороною a і прямокутний трикутник. Знайдіть середину лінію трапеції.
196. Кінці діаметра кола віддалені від дотичної до цього кола на 14 см і 20 см. Знайдіть діаметр кола.
- 197. Точки A і B лежать по один бік від прямої l і віддалені від неї на 7 см і 11 см відповідно. Знайдіть відстань від середини відрізка AB до прямої l .
198. Бічну сторону рівнобедреного трикутника поділено на чотири рівні частини. Через точки поділу проведені прямі, паралельні основі трикутника. Знайдіть відрізки цих прямих, що містяться всередині трикутника, якщо його основа дорівнює 12 см.

Рівень В

199. Точки M і N — середини сторін BC і AD паралелограма $ABCD$. Доведіть, що прямі AM і CN ділять діагональ BD на три рівні частини.

- 200. Поділіть даний відрізок у відношенні $3 : 2$.
201. Доведіть, що відрізок, який сполучає середини діагоналей трапеції, паралельний основам трапеції і дорівнює їх піврізниці. Розв'яжіть задачу 197 за умови, що точки A і B лежать по різni боки від прямої l .
202. Середина бічної сторони рівнобедrenoї трапеції з основами a і b ($a < b$) сполучена з основою її висоти (рис. 56). Доведіть, що:

$$\text{a) } HD = \frac{b-a}{2};$$

$$\text{б) } AH = MN = \frac{a+b}{2}.$$

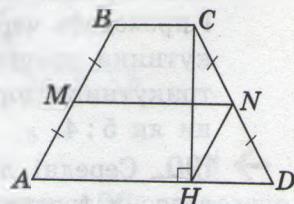


Рис. 56

→ **203.** У рівнобедреній трапеції діагональ завдовжки 4 см утворює з основою кут 60° . Знайдіть середню лінію трапеції.

204. а) У трикутнику ABC кожну з бічних сторін AB і BC розділено на m рівних частин (рис. 57). Доведіть, що відрізки, які сполучають відповідні точки поділу, паралельні між собою і паралельні стороні AC .

б) Сформулюйте і доведіть аналогічне твердження для трапеції.

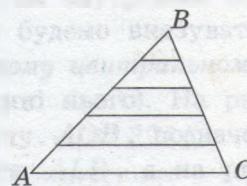


Рис. 57

ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 7

Теоретичний матеріал

- зовнішній кут трикутника;
- коло;
- коло, описане навколо трикутника;
- геометричне місце точок.

7 клас, § 19, 22

7 клас, п. 16.3, 23.1

Задачі

205. Через вершину рівностороннього трикутника, вписаного в коло, проведено пряму, паралельну його стороні. Доведіть, що ця пряма є дотичною до кола.

206. Зовнішній кут рівнобедреного трикутника дорівнює 80° . Знайдіть кути трикутника.

§ 7. Вписані кути

7.1. Градусна міра дуги

У сьомому класі вивчення властивостей трикутників завершувалося розглядом описаного і вписаного кіл. Але перед тим як розглянути описане і вписане кола для чотирикутника, нам необхідно зупинитися на додаткових властивостях кутів.

До цього часу розглядалися лише кути, градусна міра яких не перевищувала 180° . Розширимо поняття кута, ввівши до розгляду кути із градусною мірою, більшою за 180° .

На рисунку 58 кут (ab) ділить площину на дві частини. Якщо внутрішньою областю кута (ab) вважати частину площини, яка не заштрихована, то градусна міра такого кута дорівнює α . Якщо ж внутрішньою областю даного кута вважати заштриховану частину площини, то градусна міра такого кута дорівнює $(360^\circ - \alpha)$.

Часто, кажучи «кут», ми будемо мати на увазі кут разом із його внутрішньою областю, уточнюючи в разі необхідності, яка саме частина площини розглядається як внутрішня область кута.

Перейдемо тепер до вимірювання кутів у колі.

Означення

Центральним кутом у колі називається кут з вершиною в центрі кола.

На рисунку 59, *a*, *b* сторони кута з вершиною в центрі кола *O* перетинають дане коло в точках *A* і *B*. При цьому утворюються дві дуги, одна з яких менша за півколо (на ній позначена проміжна точка *L*, рис. 59, *a*), а інша — більша

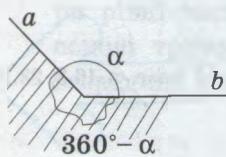


Рис. 58.
Кути на площині

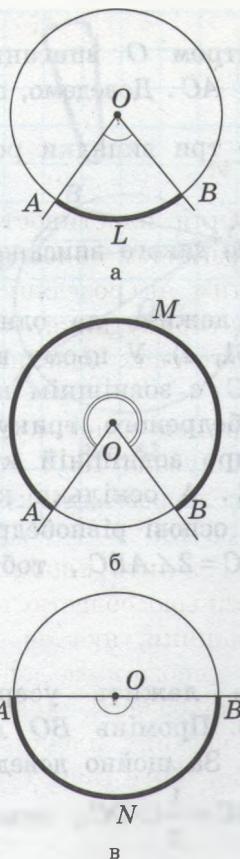


Рис. 59. Центральний кут і дуга кола

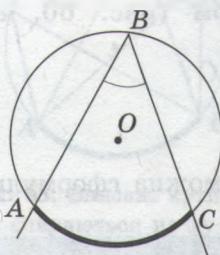


Рис. 60. Вписаний кут ABC

за півколо (на ній позначена проміжна точка M , рис. 59, б). Для того щоб уточнити, яку з частин площини ми розглядаємо як внутрішню область центрального кута, ми будемо вказувати дугу кола, яка *відповідає даному центральному куту* (тобто міститься всередині нього). На рисунку 59, а центральному куту AOB , позначеному дужкою, відповідає дуга ALB , а на рисунку 59, б — дуга AMB . У випадку, коли промені OA і OB доповняльні, відповідна дуга ANB є півколом (рис. 59, в).

Означення

Градусною мірою дуги кола називається градусна міра відповідного центрального кута.

Градусну міру дуги, як і саму дугу, коротко позначають так: $\cup ALB$ (або $\cup AB$). Наприклад, на рисунку 59, в $\cup ANB = 180^\circ$, тобто градусна міра півкола становить 180° . Очевидно, що градусна міра дуги всього кола становить 360° .

7.2. Вписаний кут

Означення

Вписаним кутом називається кут, вершина якого лежить на колі, а сторони перетинають це коло.

На рисунку 60 зображене вписаний кут ABC . Його вершина B лежить на колі, а сторони перетинають коло в точках A і C . Дуга AC (на рисунку вона виділена) лежить всередині цього кута. У такому випадку кажуть, що вписаний кут ABC *спирається на дугу AC* .

Теорема (про вписаний кут)

Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.

Доведення

□ Нехай у колі з центром O вписаний кут ABC спирається на дугу AC . Доведемо, що

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC. \text{ Розглянемо три випадки роз-}$$

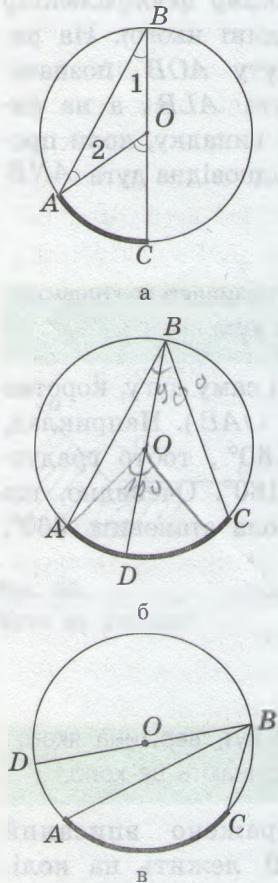


Рис. 61. Вимірювання вписаного кута ABC

міщення центра кола відносно даного вписаного кута (рис. 61, а—в).

1) Нехай центр кола лежить на одній із сторін даного кута (рис. 61, а). У цьому випадку центральний кут AOC є зовнішнім кутом при вершині O рівнобедреного трикутника AOB . За теоремою про зовнішній кут трикутника $\angle AOC = \angle 1 + \angle 2$. А оскільки кути 1 і 2 рівні як кути при основі рівнобедреного трикутника, то $\angle AOC = 2\angle ABC$, тобто

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} \cup AC.$$

2) Нехай центр кола лежить усередині кута ABC (рис. 61, б). Промінь BO ділить кут ABC на два кути. За щойно доведеним $\angle ABD = \frac{1}{2} \cup AD$, $\angle DBC = \frac{1}{2} \cup DC$, отже,

$$\angle ABC = \frac{1}{2} (\cup AD + \cup DC) = \frac{1}{2} \cup AC.$$

3) Аналогічно у випадку, коли центр кола лежить поза вписаним кутом (рис. 60, в),

$$\angle ABC = \frac{1}{2} (\cup DC - \cup AD) = \frac{1}{2} \cup AC.$$

Теорему доведено. ■

Щойно доведену теорему можна сформулювати інакше.

Вписаний кут дорівнює половині центрального кута, який спирається на ту саму дугу.

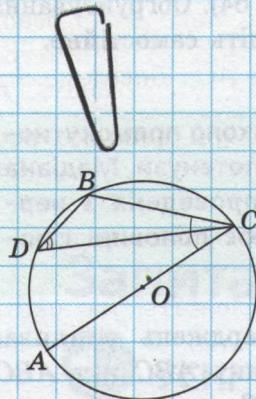


Рис. 62

Задача

Знайдіть кут BDC , якщо $\angle BCA = 50^\circ$ (рис. 62).

Розв'язання

Для того щоб знайти кут BDC , необхідно знайти градусну міру дуги BC , на яку він спирається. Але безпосередньо з даних задачі ми можемо знайти лише градусну міру дуги AB , на яку спирається кут BCA : з теореми про вписаний кут $\angle AB = 2\angle BCA = 100^\circ$. Зазначимо, що дуги AB і BC разом складають півколо, тобто $\angle AB + \angle BC = 180^\circ$, отже, $\angle BC = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$. Тоді за теоремою про вписаний кут $\angle BDC = \frac{1}{2} \angle BC = 40^\circ$.

Відповідь: 40° .

7.3. Висновки теореми про вписаний кут

За кількістю і значущістю висновків теорема про вписаний кут є однією з «найбагатших» геометричних теорем. Сформулюємо найбільш важливі з цих висновків.

Наслідок 1

Вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу, рівні.

Справді, за теоремою про вписаний кут градусна міра кожного з вписаних кутів на рисунку 63 вимірюється половиною дуги AB .

Наслідок 2

Вписаний кут, що спирається на півколо,— прямий, і навпаки: будь-який прямий вписаний кут спирається на півколо.

Справді, оскільки градусна міра півколо дорівнює 180° , то кут ABC , що спирається

Рис. 63. Вписані кути, що спираються на дугу AB , рівні

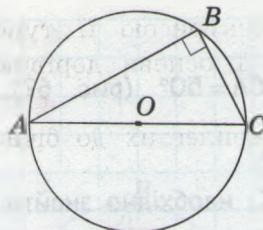
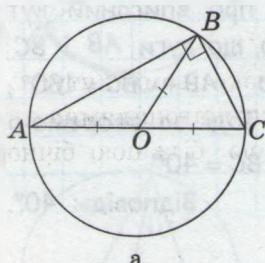
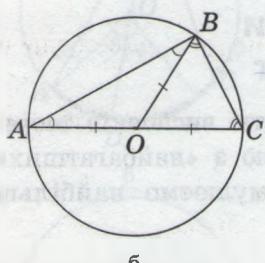


Рис. 64. Вписаний кут, що спирається на півколо, — прямий



а



б

Рис. 65. Прямоугольний трикутник ABC вписаний у коло

на півколо, дорівнює 90° (рис. 64). Обґрунтування оберненого твердження проведіть самостійно.

Наслідок 3

Центром кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є середина гіпотенузи. Медіана прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, дорівнює половині гіпотенузи.

Перше з наведених тверджень випливає з висновку 2. Якщо у трикутнику ABC кут ABC прямий (рис. 65, а), то дуга AC , на яку спирається цей кут, є півколом. Тоді гіпотенуза AC — діаметр описаного кола, тобто її середина — центр кола. Твердження про довжину медіан випливає

з рівності радіусів: $BO = AO = CO = \frac{1}{2} AC$.

Відзначимо ще один цікавий факт: медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, ділить даний трикутник на два рівнобедрені трикутники зі спільною бічною стороною. Із цього, зокрема, випливає, що кути, на які медіана ділить прямий кут, дорівнюють гострим кутам трикутника (рис. 65, б).

Як приклад застосування висновків теореми про вписаний кут розглянемо інше розв'язання тієї самої задачі, яку ми щойно розглянули в п. 7.2.

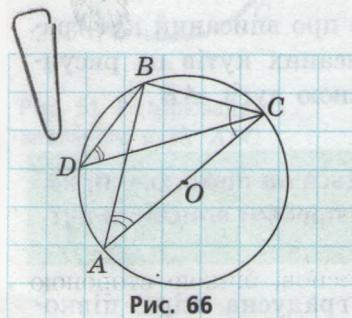


Рис. 66

Задача

Знайдіть кут BDC , якщо $\angle BCA = 50^\circ$ (див. рис. 62).

Розв'язання

Проведемо хорду AB (рис. 66). Оскільки вписаний кут ABC спирається на півколо, то за висновком 2 $\angle ABC = 90^\circ$. Отже, трикутник ABC прямокутний,

$\angle BCA = 50^\circ$, тоді $\angle BAC = 40^\circ$. За висновком 1 кути BAC і BDC рівні, оскільки обидва вони спираються на дугу BC . Отже, $\angle BDC = \angle BAC = 40^\circ$.

Відповідь: 40° .

Запитання і задачі



УСНІ ВПРАВИ

207. Визначте, чи є вписаний кут ABC гострим, прямим або тупим, якщо:

- дуга ABC менша за півколо;
- дуга ABC більша за півколо;
- дуга ABC дорівнює півколу.

208. Сторона вписаного кута проходить через центр кола (див. рис. 61, а). Чи може даний кут бути тупим; прямим?

209. Три футболісти пробивають штрафні удари по воротах із точок A , B і C (рис. 67). У кого з них кут обстрілу воріт найбільший?

210. Чи можуть два вписані кути дорівнювати один одному, якщо вони не спираються на одну дугу?

211. Чи можуть вписані кути ABC і AB_1C не дорівнювати один одному? Наведіть приклад.

212. Чи може:

- кут, сторони якого перетинають коло в кінцях діаметра, бути гострим;
- кут із вершиною на колі, сторони якого перетинають коло в кінцях діаметра, бути гострим?

213. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 10. Чи може висота, проведена до неї, дорівнювати 6? Відповідь обґрунтуйте.

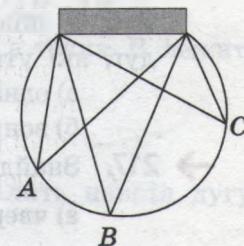


Рис. 67



ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

214. Накресліть коло з центром у точці O і позначте на ньому точки A , B і C .

- Виділіть двома кольорами два кути, утворені променями OA і OC .
- Яким кольором виділено кут, що вдвічі більший за кут ABC ?
- Позначте на колі точку D так, щоб вписані кути ABC і ADC були рівні.

→ **215.** Накресліть коло з центром O і проведіть його діаметр AB .

- Позначте на колі точку C і виміряйте кут ACB . Поясніть отриманий результат.
- Накресліть і виділіть червоним кольором центральний кут, який удвічі більший за кут ABC .



ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

Рівень А

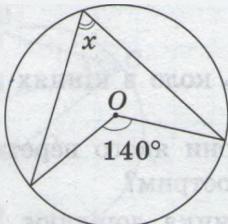
216. У колі побудовано центральний кут. Знайдіть градусні міри дуг, які утворилися, якщо:

- одна з них більша за іншу на 120° ;
- вони відносяться як $2 : 7$.

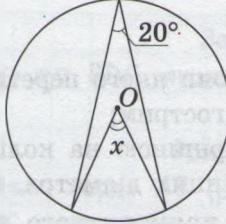
→ **217.** Знайдіть градусну міру дуги, яка складає:

- а) чверть кола; б) третину кола; в) $\frac{5}{18}$ кола.

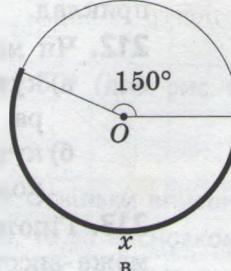
218. За даними рисунка 68, а—в знайдіть градусну міру x (точка O — центр кола).



а



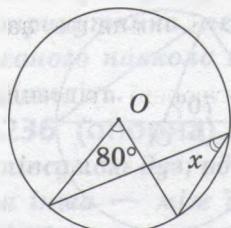
б



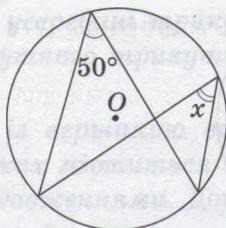
в

Рис. 68

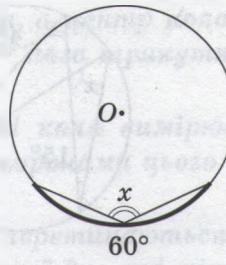
- 219. За даними рисунка 69, а—в знайдіть градусну міру x (точка O — центр кола).



а



б



в

Рис. 69

220. На колі позначені точки A , B , C і D . Знайдіть кут ABC , якщо $\angle ADC = \alpha$. Скільки розв'язків має задача?

- 221. На колі позначені точки A , B і C , причому хорда AC дорівнює радіусу кола. Знайдіть кут ABC . Скільки розв'язків має задача?

222. Трикутник ABC вписаний у коло, центр якого лежить на відрізку AB . Знайдіть:

а) кут B , якщо $\angle A = 65^\circ$;

б) медіану, проведену з вершини C , якщо $AB = 12$ см.

- 223. Відрізок AC — діаметр кола з центром O , а точка B лежить на цьому колі. Знайдіть:

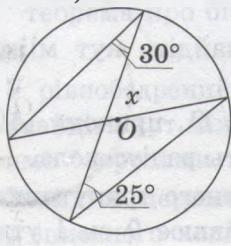
а) кут між хордами BA і BC ;

б) відрізок AC , якщо $BO = 5$ см.

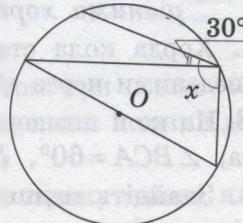
224. Доведіть, що бісектриса вписаного кута ділить навпіл дугу, на яку він спирається.

Рівень Б

225. За даними рисунка 70, а, б знайдіть кут x (точка O — центр кола).



а



б

Рис. 70

- **226.** За даними рисунка 71, а, б знайдіть кут x (точка O — центр кола).

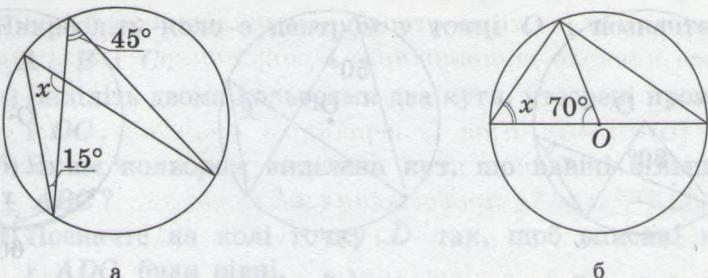


Рис. 71

227. Хорда AC ділить коло на дві дуги, градусні міри яких відносяться як $11 : 7$. Знайдіть кут ABC , якщо точка B лежить на більшій дузі.

228. Знайдіть кути вписаного трикутника, якщо його вершини ділять коло на три дуги, градусні міри яких відносяться як $3 : 4 : 5$.

→ **229.** Сторона рівнобедреного трикутника, вписаного в коло, стягує дугу в 100° . Знайдіть кути трикутника. Скільки розв'язків має задача?

230 (опорна). Кут між хордою і дотичною до кола, проведеною через кінець хорди, вимірюється половиною дуги, яка лежить усередині цього кута. Доведіть.

231 (опорна).

a) Дуги кола, які містяться між двома паралельними хордами, рівні. Доведіть.

b) Рівні хорди стягають дуги з однаковою градусною мірою, і навпаки: дуги з однаковою градусною мірою стягаються рівними хордами. Доведіть.

→ **232.** Хорда кола стягує кут 100° . Знайдіть кут між дотичними, проведеними через кінці цієї хорди.

233. На колі позначено точки A , B і C , причому AC — діаметр кола, $\angle BCA = 60^\circ$, $BC = 4$ см. Знайдіть радіус кола.

→ **234.** Знайдіть менший катет прямокутного трикутника, якщо його медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює 9 см і утворює з гіпотенузою кут 60° .

Рівень В

235 (опорна). Центр кола, описаного навколо гострокутного трикутника, лежить усередині трикутника, а центр кола, описаного навколо тупокутного трикутника,— поза трикутником. Доведіть.

236 (опорна). Кут із вершиною всередині кола вимірюється півсумою дуг, одна з яких міститься між сторонами цього кута, а інша — між їх продовженнями. Доведіть.

237 (опорна). Кут між двома січними, які перетинаються зовні кола, вимірюється піврізницею більшої і меншої дуг, які містяться між його сторонами. Доведіть.

238. Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою і висотою, проведеною до гіпотенузи.

→ **239.** Побудуйте трикутник за стороною, протилежним кутом і висотою, проведеною з вершини цього кута.

240. Знайдіть геометричне місце вершин прямих кутів, сторони яких проходять через кінці відрізка AB .

→ **241.** Знайдіть геометричне місце точок, із яких даний відрізок AB видно під заданим кутом α .

242. Точка A лежить поза даним колом з центром O . Побудуйте дотичну до даного кола, яка проходить через точку A .



ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 8

Теоретичний матеріал

- описане і вписане кола;
- властивість відрізків дотичних;
- теорема про бісектрису кута.

7 клас, § 23

7 клас, п. 21.3, 22.2

Задачі

243. У рівнобедрений трикутник із кутом при основі 40° вписано коло. Знайдіть кут між радіусами, проведеними в точки дотику кола з бічними сторонами трикутника.

244. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, якщо точка дотику вписаного кола ділить бічу сторону на відрізки завдовжки 8 см і 9 см, починаючи від основи.

§ 8. Вписані й описані чотирикутники

8.1. Вписані чотирикутники

Означення

Чотирикутник називається **вписаним у коло**, якщо всі його вершини лежать на цьому колі.

Чотирикутник $ABCD$ на рисунку 72 є вписанім у коло. Інакше кажуть, що коло описане навколо чотирикутника.

Як відомо, навколо будь-якого трикутника можна описати коло. Для чотирикутника це можна зробити не завжди. Доведемо властивість і ознаку вписаного чотирикутника.

Теорема (про вписаний чотирикутник)

- 1) Сума протилежних кутів вписаного чотирикутника дорівнює 180° (властивість вписаного чотирикутника).
- 2) Якщо сума протилежних кутів чотирикутника дорівнює 180° , то навколо нього можна описати коло (ознака вписаного чотирикутника).

Доведення

\square 1) *Властивість.* Нехай чотирикутник $ABCD$ вписаний у коло (рис. 72). За теоремою

про вписаний кут $\angle A = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$, $\angle C = \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$.

Отже, $\angle A + \angle C = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C + \angle A + \angle D) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$. Аналогічно доводимо, що $\angle B + \angle D = 180^\circ$.

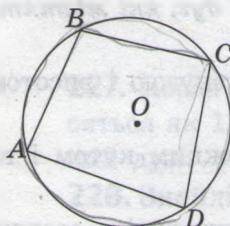


Рис. 72. Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло

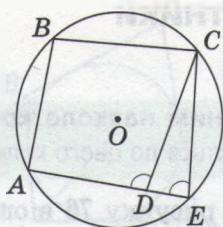


Рис. 73. До доведення від супротивного ознаки вписаного чотирикутника

2)* **Ознака.** Нехай у чотирикутнику $ABCD$ $\angle B + \angle D = 180^\circ$. Опишемо коло навколо трикутника ABC і доведемо від супротивного, що вершина D не може лежати ані всередині цього кола, ані поза ним. Нехай точка D лежить усередині кола, а точка E — точка перетину променя AD з дугою AC (рис. 73). Тоді чотирикутник $ABCE$ — вписаний. За умовою $\angle B + \angle D = 180^\circ$, а за щойно доведеною властивістю вписаного чотирикутника $\angle B + \angle E = 180^\circ$, тобто $\angle D = \angle E$. Але кут D чотирикутника $ABCD$ — зовнішній кут трикутника CDE , і за теоремою про зовнішній кут трикутника він має бути більший за кут E . Отже, ми отримали суперечність, тобто точка D не може лежати всередині кола. Аналогічно можна довести, що точка D не може лежати поза колом. Тоді точка D лежить на колі, тобто навколо чотирикутника $ABCD$ можна описати коло. Теорему доведено. ■

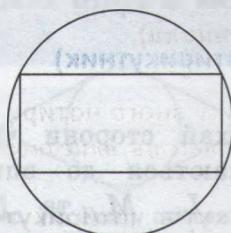


Рис. 74. Прямокутник, вписаний у коло

Наслідок 1

Навколо будь-якого прямокутника можна описати коло.

Якщо паралелограм вписаний у коло, то він є прямокутником.

Прямокутник, вписаний у коло, зображенено на рисунку 74.

Наслідок 2

Навколо рівнобедреної трапеції можна описати коло.

Якщо трапеція вписана в коло, то вона рівнобедрена.

Рівнобедрена трапеція, вписана в коло, зображена на рисунку 75.

Приклади розв'язування задач про вписані чотирикутники подано в п. 8.4.

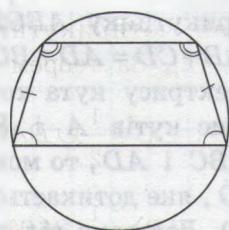


Рис. 75. Рівнобедрена трапеція, вписана в коло

8.2. Описані чотирикутники

Означення

Чотирикутник називається **описаним навколо кола**, якщо всі його сторони дотикаються до цього кола.

Чотирикутник $ABCD$ на рисунку 76 є описаним навколо кола. Інакше кажуть, що коло вписане в чотирикутник.

Виявляється, що не в будь-який чотирикутник можна вписати коло. Доведемо відповідні властивість і ознаку.

Теорема (про описаний чотирикутник)

- 1) В описаному чотирикутнику суми протилежних сторін рівні (**властивість описаного чотирикутника**).
- 2) Якщо в чотирикутнику суми протилежних сторін рівні, то в нього можна вписати коло (**ознака описаного чотирикутника**).

Доведення

□ 1) **Властивість.** Нехай сторони чотирикутника $ABCD$ дотикаються до вписаного кола в точках K, L, M та N (рис. 76). За властивістю відрізків дотичних $AK = AN, BK = BL, CL = CM, DM = DN$.

З урахуванням позначень на рисунку, $AB + CD = a + b + c + d = AD + BC$.

2)* **Ознака.** Нехай у чотирикутнику $ABCD$ з найменшою стороною AB $AB + CD = AD + BC$. Оскільки за теоремою про бісектрису кута точки O (точка перетину бісектрис кутів A і B) рівновіддалена від сторін AB, BC і AD , то можна побудувати коло з центром O , яке дотикається до цих трьох сторін (рис. 77, а). Доведемо від су-противного, що це коло дотикається також до сторони CD .

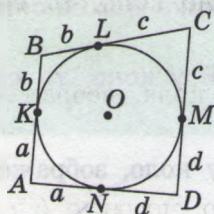
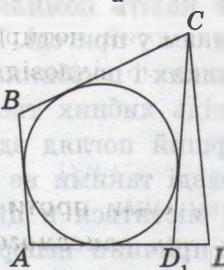
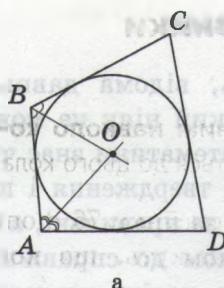


Рис. 76. Чотирикутник $ABCD$ описано навколо кола



б

Рис. 77. До доведення
ознаки описаного чотирикутника

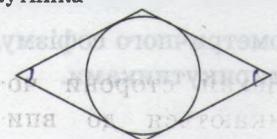


Рис. 78. Ромб, описаний
навколо кола

Припустімо, що це не так. Тоді пряма CD або не має спільних точок із колом, або є січною кола. Розглянемо перший випадок (рис. 77, б). Проведемо через точку C дотичну до кола, яка перетинає сторону AD в точці D_1 . Тоді за властивістю описаного чотирикутника $ABCD_1$ $BC + AD_1 = AB + CD_1$. Але за умовою $BC + AD = AB + CD$. Віднімаючи від другої рівності першу, маємо: $AD - AD_1 = CD - CD_1$, тобто $DD_1 = CD - CD_1$, що суперечить нерівності трикутника для трикутника CD_1D .

Таким чином, наше припущення хибне. Аналогічно можна довести, що пряма CD не може бути січною кола. Отже, коло дотикається до сторони CD , тобто чотирикутник $ABCD$ описаний. Теорему доведено. ■

Зauważення. Нагадаємо, що в даній теоремі розглядаються лише опуклі чотирикутники.

Наслідок

У будь-який ромб можна вписати коло.

Якщо в паралелограмі вписано коло, то він є ромбом.

Ромб, описаний навколо кола, зображенено на рисунку 78.

Задача

У рівнобедрену трапецію з бічною стороною 6 см вписано коло. Знайдіть середину лінію трапеції.

Розв'язання

Нехай $ABCD$ — дана рівнобедрена трапеція з основами AD і BC . За властивістю описаного чотирикутника $AB + CD = AD + BC = 12$ см. Середня лінія трапеції дорівнює $\frac{AD + BC}{2}$, тобто дорівнює 6 см.

Відповідь: 6 см.

8.3*. Геометричні софізми



Софізм — від грецького «софізма» — вигадка, ви-верт, головоломка

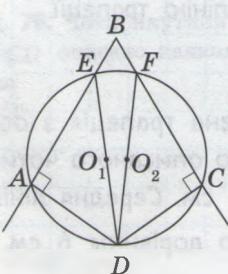


Рис. 79

Багатьом із вас, мабуть, відома давньогрецька байка про Ахіллеса, який ніяк не може наздогнати черепаху. Історія математики знає чимало прикладів того, як хибні твердження і помилкові результати видавалися за правильні, а їх спростування ставало поштовхом до справжніх математичних відкриттів. Але навіть помилки і невдачі можуть стати математикам у пригоді. Ці помилки залишилися в підручниках і посібниках у вигляді **софізмів** — заздалегідь хибних тверджень, доведення яких на перший погляд здаються правильними, але насправді такими не є. Пошук і аналіз помилок, які містяться в цих доведеннях, часто викривають причини непорозумінь у розв'язуванні інших задач. Тому в процесі навчання геометрії софізми інколи є навіть більш повчальними й корисними, ніж «безпомилкові» задачі й доведення.

Розглянемо приклад геометричного софізму, пов'язаного зі вписаними чотирикутниками.

Коло має два центри.

«Доведення»

Позначимо на сторонах довільного кута B точки A і C та проведемо через ці точки перпендикуляри до сторін BA і BC відповідно (рис. 79). Ці перпендикуляри мають перетинатися (адже якщо вони були б паралельні, то паралельними були б і сторони даного кута — обґрунтуйте це самостійно). Позначимо точку перетину перпендикулярів D .

Через точки A , D і C , які не лежать на одній прямій, проведемо коло (це можна зробити, оскільки коло, описане навколо трикутника ADC , існує і є єдиним). Позначимо точки E і F — точки

перетину цього кола зі сторонами кута B . Пря-
мі кути EAD і FCD є вписаними в коло. Отже,
за висновком теореми про вписані кути, відрізки
 DE і DF є діаметрами кола, які мають спільний
кінець D , але не збігаються. Тоді їх середини O_1
і O_2 є двома різними центрами одного кола, тобто
коло має два центри.

Помилка цього «доведення» полягає в непра-
вильності побудов на рисунку 79. У чотирикут-
нику $ABCD$ $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$, тобто
він є вписаним у коло. Це означає, що в ході
побудов коло, проведене через точки A , D і C ,
обов'язково пройде через точку B . У такому разі
відрізки DE і DF збігатимуться з відрізком DB ,
середина якого і є єдиним центром побудованого
коло. Хибність твердження «Коло має два центри»
пропонуємо довести самостійно.

Серед задач до цього і наступних па-
раграфів ви знайдете інші приклади геометрич-
них софізмів і зможете самостійно потренува-
тися в їх спростуванні. Сподіваємось, що до-
свід, якого ви при цьому набудете, допоможе
уникнути подібних помилок під час подальшого
розв'язування задач.

8.4*. Чотирикутник і коло в задачах. Метод допоміжного кола

У ході розв'язуванні задач про кола і чоти-
рикутники іноді доцільно використовувати спе-
ціальні підходи.

Один із них полягає в розгляді вписаного
трикутника, вершини якого є вершинами даного
вписаного чотирикутника.

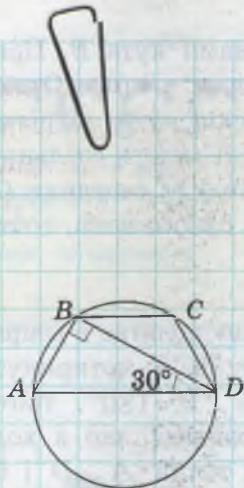


Рис. 80

Задача

Знайдіть периметр рівнобедреної трапеції, діагональ якої перпендикулярна до бічної сторони й утворює з основою кут 30° , якщо радіус кола, описаного навколо трапеції, дорівнює 8 см.

Розв'язання

Нехай дано вписану трапецію $ABCD$, $AD \parallel BC$, $BD \perp AB$, $\angle ADB = 30^\circ$ (рис. 80). Зауважимо, що коло, описане навколо трапеції, є водночас описаним навколо прямокутного трикутника ABD , отже, його центром є середина гіпотенузи AD . Тоді $AD = 2R = 16$ см. Із трикутника ABD $AB = 8$ см як катет, протилежний до кута 30° . Оскільки в прямокутному трикутнику ABD $\angle A = 60^\circ$, то кути при більшій основі трапеції дорівнюють 60° . $\angle ADB = \angle CBD$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AD і BC та січній BD . Отже, в трикутнику BCD два кути рівні, тобто він є рівнобедреним з основою BD , звідки $BC = CD = AB = 8$ см. Тоді $P_{ABCD} = 16 + 8 + 8 + 8 = 40$ (см).

Відповідь: 40 см.

Особливо цікавим і нестандартним є застосування кола (як описаного, так і вписаного) під час розв'язування задач, в умовах яких про коло взагалі не йдесяся.

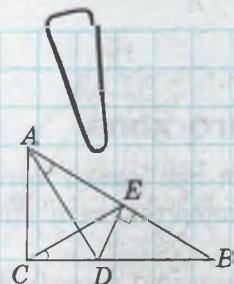


Рис. 81

Задача

Із точки D , яка лежить на катеті BC прямокутного трикутника ABC , проведено перпендикуляр DE до гіпотенузи AB (рис. 81). Доведіть, що $\angle DCE = \angle DAE$.

Розв'язання

У чотирикутнику $ACDE$ $\angle ACD + \angle AED = 180^\circ$, отже, навколо нього можна описати коло. У цьому колі вписані кути DCE і DAE спираються на одну й ту саму дугу, і за наслідком теореми про вписаній кут $\angle DCE = \angle DAE$.

Метод розв'язування задач за допомогою додаткової побудови описаного або вписаного кола називають **методом допоміжного кола**.

Запитання і задачі



УСНІ ВПРАВИ

- 245.** У який прямокутник можна вписати коло? Навколо якого ромба можна описати коло?
- 246.** Чи можна описати коло навколо чотирикутника, який має лише один прямий кут; лише два прямі кути?
- 247.** Чи можна описати коло навколо прямокутної трапеції?
- 248.** Трапеція $ABCD$ ($AD \parallel BC$) описана навколо кола (рис. 82). Як побудувати точку M , щоб трикутник AMD був описаний навколо того самого кола?
- 249.** У трапеції три сторони рівні. Чи можна в таку трапецію вписати коло? Чи можна навколо такої трапеції описати коло?

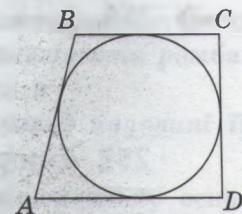


Рис. 82



ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

- 250.** Накресліть коло з центром O і позначте на ньому точки A , B , C і D так, щоб при їхньому послідовному сполученні утворився вписаний чотирикутник $ABCD$. Виміряйте кути A і B цього чотирикутника. Користуючись властивостями вписаного чотирикутника, обчисліть градусні міри кутів C і D . Перевірте отримані результати вимірюванням.

- 251. Накресліть коло з центром O і проведіть до нього чотири дотичні так, щоб при їхньому попарному перетині утворився описаний чотирикутник $ABCD$. Виміряйте довжини сторін AB , BC і CD цього чотирикутника. Користуючись властивостями описаного чотирикутника, обчисліть довжину сторони AD . Перевірте отриманий результат вимірюванням.



ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

Рівень А

252. Визначте, чи можна описати коло навколо чотирикутника $ABCD$, якщо кути A , B , C і D дорівнюють відповідно:

- 90° , 90° , 20° , 160° ;
- 5° , 120° , 175° , 60° .

253. Знайдіть невідомі кути:

- вписаного чотирикутника, якщо два його кути дорівнюють 46° і 125° ;
- вписаної трапеції, якщо один із її кутів дорівнює 80° ;
- вписаного чотирикутника, діагоналі якого точкою перетину діляться навпіл.

→ 254. Знайдіть невідомі кути:

- вписаного чотирикутника $ABCD$, якщо кути A і C рівні, а кут D дорівнює 50° ;
- вписаної трапеції, якщо сума двох з них дорівнює 230° .

255 (опорна). Центр кола, описаного навколо прямокутника, є точкою перетину його діагоналей. Доведіть.

256. Із точки C , що лежить усередині гострого кута A , проведено перпендикуляри CB і CD до сторін кута. Доведіть, що навколо чотирикутника $ABCD$ можна описати коло.

→ 257. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$. Доведіть, що навколо цього чотирикутника можна описати коло.

258. Знайдіть периметр:

- описаного чотирикутника, три послідовні сторони якого дорівнюють 7 см, 9 см і 8 см;
- описаної трапеції, бічні сторони якої дорівнюють 3 см і 11 см.

- 259. Рівнобедрена трапеція описана навколо кола. Знайдіть:
- бічну сторону трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 7 см;
 - середню лінію трапеції, якщо її периметр дорівнює 16 см.

260. Радіус кола, вписаного у квадрат, дорівнює 3 см. Знайдіть периметр квадрата.

Рівень Б

261. Чотирикутник $ABCD$ вписаний у коло, центр якого лежить на стороні AD . Знайдіть кути чотирикутника, якщо $\angle ACB = 20^\circ$, $\angle DBC = 10^\circ$.

- 262. Знайдіть кути трапеції, якщо центр кола, описаного навколо неї, лежить на більшій основі, а кут між діагоналями дорівнює 70° .

263. У трикутнику ABC висоти AA_1 і CC_1 перетинаються в точці D . Доведіть, що точки A_1, B, C_1, D лежать на одному колі.

- 264. Якщо бісектриси кутів чотирикутника, перетинаючись, утворюють чотирикутник, то навколо утвореного чотирикутника можна описати коло. Доведіть.

265 (опорна).

- Центр кола, вписаного в ромб, є точкою перетину його діагоналей, а радіус кола дорівнює половині висоти ромба. Доведіть.
- Радіус кола, вписаного в трапецію, дорівнює половині її висоти. Доведіть.

266. Рівнобедрені трикутники ABC і ADC мають спільну основу AC (точки B і D лежать по різні боки від прямої AC). Доведіть, що в чотирикутник $ABCD$ можна вписати коло.

- 267. Сторони чотирикутника дорівнюють 4 м, 9 м, 8 м і 5 м. Назвіть пари протилежних сторін цього чотирикутника, якщо в нього можна вписати коло.

268. Діагональ ромба, що виходить із вершини кута 60° , дорівнює 24 см. Знайдіть радіус кола, вписаного в ромб.

- 269. Знайдіть середню лінію прямокутної трапеції, в якій більша бічна сторона дорівнює 10 см, а радіус вписаного кола дорівнює 3 см.

270. Середня лінія рівнобедреного трикутника, паралельна основі, ділить даний трикутник на трапецію і трикутник із периметром 24 см. Основа даного трикутника дорівнює 12 см. Доведіть, що в отриману трапецію можна вписати коло.

→ **271.** Із точки A , що лежить поза колом з центром O , проведені дотичні AB і AC до цього кола (B і C — точки дотику). Доведіть, що в чотирикутник $ABOC$ можна вписати коло.

Рівень В

272 (опорна). Якщо трапеція $ABCD$ ($AD \parallel BC$) описана навколо кола з центром O , то:

- точка O — точка перетину бісектрис кутів трапеції;
- трикутники AOB і COD прямокутні.

Доведіть.

→ **273.** Якщо сторону чотирикутника, що сполучає дві його вершини, видно з двох інших вершин під рівними кутами, то навколо цього чотирикутника можна описати коло. Доведіть.

274. З вершини тупого кута ромба $ABCD$ проведено висоти BM і BN , причому відрізок MN вдвічі менший за діагональ BD . Знайдіть кути ромба.

→ **275.** На гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC поза трикутником побудовано квадрат $ABDE$, діагоналі якого перетинаються в точці K . Знайдіть кут ACK .

276. Знайдіть помилку в «доведенні» геометричного софізму:
зовнішній кут трикутника дорівнює внутрішньому куту,
не суміжному з ним.

«Доведення»

Розглянемо чотирикутник $ABCD$, у якому $\angle B + \angle D = 180^\circ$ (рис. 83). Через точки A , B і C проведемо коло, яке перетне сторони AD і CD в деяких точках E і F . Сполучивши точки E і C , отримуємо чотирикутник $ABCE$, вписаний в дане коло.

За властивістю вписаного чотирикутника $\angle B + \angle E = 180^\circ$.

Але за умовою $\angle B + \angle D = 180^\circ$, отже, $\angle D = \angle E$. Це означає, що кут CED , який є зовнішнім кутом трикутника CDE ,

дорівнює внутрішньому куту CDE цього трикутника, тобто зовнішній кут трикутника дорівнює внутрішньому куту, не суміжному з ним.

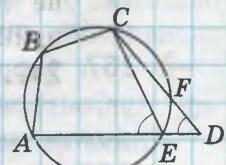


Рис. 83

- 277. Знайдіть помилку в «доведенні» геометричного софізму:
у колі хорда, яка не проходить через центр, дорівнює діаметру.

«Доведення»

Нехай AB — діаметр кола з центром O (рис. 84). Проведемо через точку A довільну хорду AC і позначимо її середину — точку D . Проведемо через точки B і D хорду BE і сполучимо точки E і C .

У трикутниках ADB і CDE кути при вершині D рівні як вертикальні, $\angle BAD = \angle CED$ як вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу BC , а $AD = CD$ за побудовою. Отже, ці трикутники рівні за стороною і двома кутами, звідки $AB = EC$, тобто діаметр кола дорівнює хорді, яка не проходить через центр кола.

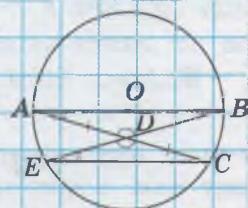


Рис. 84

278. Побудуйте ромб за діагоналлю і радіусом вписаного кола.
→ 279. Побудуйте рівнобедрену трапецію за бічною стороною і радіусом вписаного кола.



ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 9

Теоретичний матеріал

- медіана, бісектриса і висота трикутника; 7 клас, § 12, 23
- описане і вписане кола для трикутника.

Задачі

280. Один із кутів трикутника дорівнює 60° . Під яким кутом перетинаються бісектриси двох інших його кутів?
281. Один із кутів трикутника дорівнює 60° . Під яким кутом перетинаються висоти, проведені до сторін цього кута?

§ 9*. Визначні точки трикутника

9.1. Точка перетину медіан

У сьомому класі під час вивчення вписаного й описаного кіл трикутника розглядалися дві його визначні точки — точка перетину бісектрис (інакше її називають *інцентром* трикутника) і точка перетину серединних перпендикулярів до сторін.

Розглянемо ще дві визначні точки трикутника.

Теорема (про точку перетину медіан трикутника)

Медіани трикутника перетинаються в одній точці і діляться нею у відношенні $2:1$, починаючи від вершини трикутника.

Доведення

□ Нехай у трикутнику ABC проведено медіани AD , BF і CE (рис. 85). Доведемо, що вони перетинаються в деякій точці O , причому $AO:OD = BO:OF = CO:OE = 2:1$.

Нехай O — точка перетину медіан AD і CE , точки K і M — середини відрізків AO і CO відповідно. Відрізок ED — середня лінія трикутника ABC , і за властивістю середньої лінії трикутника $ED \parallel AC$, $ED = \frac{1}{2}AC$. Крім того, KM — середня лінія трикутника AOC , і за тією самою властивістю $KM \parallel AC$, $KM = \frac{1}{2}AC$. Отже, в чотирикутнику $KEDM$ дві сторони паралельні й рівні. Таким чином, $KEDM$ — паралелограм, і його діагоналі KD і EM точкою перетину діляться навпіл. Отже, $AK = KO = OD$,

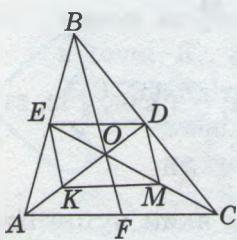


Рис. 85. Медіани трикутника перетинаються в одній точці

$CM = MO = OE$, тобто точка O ділить медіани AD і CE у відношенні $2:1$.

Аналогічно доводимо, що і третя медіана BF точкою перетину з кожною з медіан AD і CE ділиться у відношенні $2:1$. А оскільки така точка поділу для кожної з медіан єдина, то всі три медіани перетинаються в одній точці. ■

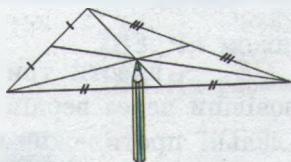


Рис. 86. Точка перетину медіан — центр мас трикутника

Точку перетину медіан трикутника інакше називають *центроїдом*, або *центром мас* трикутника. У доречності такої назви можна переконатися, провівши експеримент: виріжте з картону довільний трикутник, проведіть у ньому медіани і спробуйте втримати трикутник у рівновазі, поклавши його на голку або гострий олівець у точці перетину медіан (рис. 86).



Задача

Якщо в трикутнику дві медіани рівні, то він рівнобедрений. Доведіть.

Розв'язання

Нехай у трикутнику ABC медіани AD і CE рівні і перетинаються в точці O (рис. 87).

Розглянемо трикутники AOE і COD . Оскільки точка O ділить кожну з рівних медіан AD і CE у відношенні $2:1$, то $AO = CO$, $EO = DO$. Крім того, $\angle AOE = \angle COD$ як вертикальні. Отже, $\triangle AOE \cong \triangle COD$ за першою ознакою. Звідси випливає, що $AE = CD$.

Але за означенням медіані ці відрізки — половини сторін AB і CB . Отже, $AB = CB$, тобто трикутник ABC рівнобедрений.

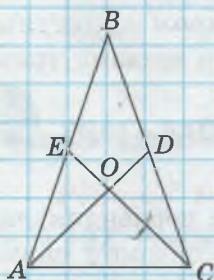


Рис. 87

9.2. Точка перетину висот

Теорема (про точку перетину висот трикутника)

Висоти трикутника (або їх продовження) перетинаються в одній точці.

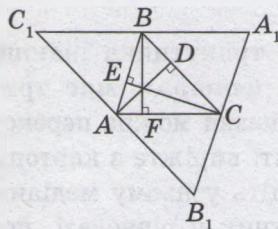


Рис. 88. Висоти трикутника ABC перетинаються в одній точці

Доведення

□ Нехай AD , BF і CE — висоти трикутника ABC (рис. 88). Провівши через вершини трикутника прямі, паралельні протилежним сторонам, дістанемо трикутник $A_1B_1C_1$, сторони якого перпендикулярні до висот трикутника ABC . За побудовою чотирикутники C_1BCA і B_1ABC — паралелограми, звідки $C_1A = BC$ і $BC = AB_1$. Отже, точка A — середина відрізка B_1C_1 . Аналогічно доводимо, що B — середина A_1C_1 і C — середина A_1B_1 .

Таким чином, висоти AD , BF і CE лежать на серединних перпендикулярах до сторін трикутника $A_1B_1C_1$, які перетинаються в одній точці за наслідком теореми про коло, описане навколо трикутника. ■

Точку перетину висот (або їх продовжень) інакше називають *ортогоцентром* трикутника.

Таким чином, визначними точками трикутника є:

- точка перетину бісектрис — центр кола, вписаного в трикутник;
- точка перетину серединних перпендикулярів до сторін — центр кола, описаного навколо трикутника;
- точка перетину медіан — ділить кожну з медіан у відношенні $2 : 1$, починаючи від вершини трикутника;
- точка перетину висот (або їх продовжень).

Запитання і задачі



УСНІ ВПРАВИ

282. Які з визначних точок трикутника можуть лежати поза трикутником?

283. Чи може ортоцентр трикутника збігатися з його вершиною?

284. Як розміщені визначні точки в рівносторонньому трикутнику?



ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

285. Накресліть трикутник ABC , проведіть його медіани AD і CE . Позначте точку O — точку їх перетину.

- Виміряйте довжини відрізків AO , OD і CO . Користуючись теоремою про точку перетину медіан трикутника, обчисліть наближено довжину відрізка OE . Перевірте отриманий результат вимірюванням.
- Проведіть промінь BO і позначте точку F , у якій він перетинає сторону AC . У якому відношенні ця точка ділить сторону AC ?

→ **286.** Накресліть трикутник ABC , проведіть його висоти AD і CE . Позначте точку O — точку перетину цих висот (або їх продовжень). Проведіть промінь BO . Під яким кутом він перетинає пряму AC ? Чому?



ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

Рівень А

287. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику всі чотири визначні точки лежать на одній прямій. Яка це пряма?

288. У трикутнику точка перетину медіан збігається з ортоцентром. Доведіть, що даний трикутник — рівносторонній.

→ **289.** Точка перетину медіан трикутника ділить одну з медіан на відрізки, різниця яких становить 3 см. Знайдіть довжину цієї медіани.

Рівень Б

290. Точка H — ортоцентр трикутника ABC . Доведіть, що точка A — ортоцентр трикутника HBC .

291. Точки D, E, F — середини сторін трикутника ABC . Доведіть, що точка перетину медіан трикутника DEF збігається з точкою перетину медіан трикутника ABC .

→ **292.** Дано паралелограм $ABCD$. Доведіть, що точки перетину медіан трикутників ABC і CDA лежать на діагоналі BD і ділять її на три рівні частини.

Рівень В

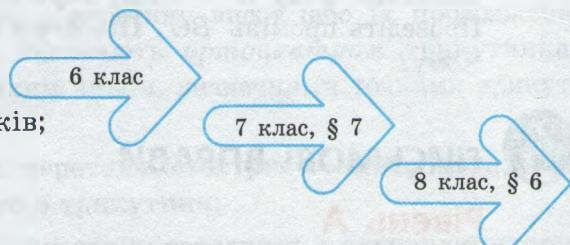
293. Відстань від центра кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника, до його основи дорівнює 5 см, а радіус цього кола дорівнює 7 см. Знайдіть довжини відрізків, на які точка перетину медіан ділить медіану, проведену до основи.

294. Побудуйте трикутник за трьома медіанами.

→ **295.** Центр кола, описаного навколо трикутника, є ортоцентром трикутника, утвореного середніми лініями даного трикутника. Доведіть.

**ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 10****Теоретичний матеріал**

- пропорції;
- рівність трикутників;
- теорема Фалеса.

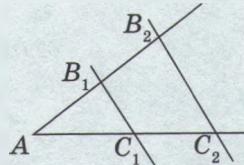
**Задачі**

296. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle B = 90^\circ$) через середину катета AB проведено пряму, паралельну медіані BM . Знайдіть довжини відрізків, на які ця пряма ділить гіпотенузу, якщо $BM = 6$ см.

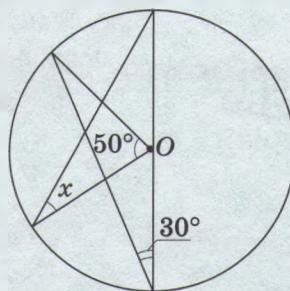
297. Знайдіть x з пропорції: а) $5,4 : x = 2,7 : 7,2$; б) $\frac{x+1}{144} = \frac{25}{60}$.

Задачі для підготовки до контрольної роботи № 2

- У рівнобедреній трапеції протилежні кути відносяться як $2 : 7$. Знайдіть кути трапеції.
- За даним рисунком знайдіть AB_1 , якщо $B_1C_1 \parallel B_2C_2$, $AC_1 = C_1C_2$, $AB_2 = 12$ см.



- Середня лінія відтинає від даного трикутника трикутник, периметр якого дорівнює 17 см. Знайдіть периметри даного трикутника і трикутника, утвореного його середніми лініями.
- У рівнобедреній трапеції з кутом 45° відрізки, що сполучають середину більшої основи з вершинами тупих кутів, перпендикулярні до бічних сторін. Знайдіть середню лінію трапеції, якщо її менша основа дорівнює 4 см.
- За даними рисунка знайдіть кут x .



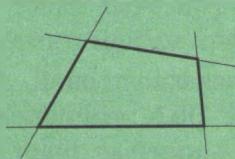
- У рівнобедрену трапецію вписано коло, яке ділить бічну сторону на відрізки у відношенні $9 : 16$. Знайдіть довжини цих відрізків, якщо середня лінія трапеції дорівнює 50 см.

Підсумки

ПІДСУМКОВИЙ ОГЛЯД РОЗДІЛУ 1

ЧОТИРИКУТНИК

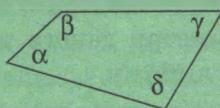
Опуклий чотирикутник



Неопуклий чотирикутник



Теорема про суму кутів чотирикутника



Сума кутів чотирикутника дорівнює 360° :

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$$

ПАРАЛЕЛОГРАМ



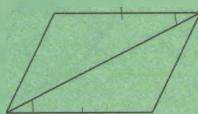
Паралелограмом називається чотирикутник, протилежні сторони якого попарно паралельні

Властивості паралелограма



Протилежні сторони паралелограма рівні

Ознаки паралелограма



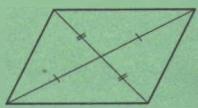
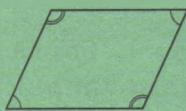
Якщо дві протилежні сторони чотирикутника паралельні й рівні, то цей чотирикутник — паралелограм



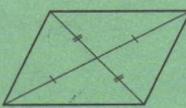
Якщо протилежні сторони чотирикутника попарно рівні, то цей чотирикутник — паралелограм



Протилежні кути паралелограма рівні



Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл



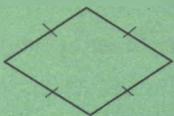
Якщо протилежні кути чотирикутника попарно рівні, то цей чотирикутник — паралелограм

Якщо діагоналі чотирикутника точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник — паралелограм

ВІДИ ПАРАЛЕЛОГРАМІВ



Прямоутником називається паралелограм, у якого всі кути прямі

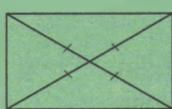


Ромбом називається паралелограм, у якого всі сторони рівні



Квадратом називається прямоутник, у якого всі сторони рівні

Властивість прямоутника

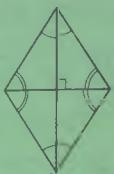


Діагоналі прямоутника рівні

Ознака прямоутника



Якщо всі кути чотирикутника рівні, то цей чотирикутник є прямоутником

Властивості ромба

Діагоналі ромба перпендикулярні і ділять його кути навпіл

Ознака ромба

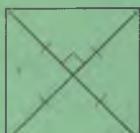
Якщо всі сторони чотирикутника рівні, то цей чотирикутник є ромбом

Властивості квадрата

Усі сторони квадрата рівні, а протилежні сторони паралельні



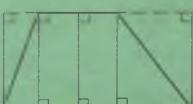
Усі кути квадрата прямі



Діагоналі квадрата рівні, перпендикулярні, є бісектрисами його кутів і точкою перетину діляться навпіл

ТРАПЕЦІЯ

Трапецією називається чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші не паралельні.



Висотою трапеції називається спільний перпендикуляр до прямих, що містять її основи



Прямокутною трапецією називається трапеція, у якій одна з бічних сторін перпендикулярна до основ



Рівнобедrenoю трапецією називається трапеція, у якій бічні сторони рівні

Властивість рівнобедреної трапеції

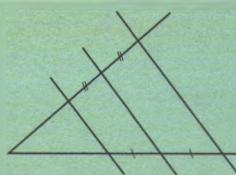
У рівнобедреній трапеції кути при основі рівні

Ознака рівнобедреної трапеції

Якщо в трапеції кути при основі рівні, то така трапеція рівнобедрена



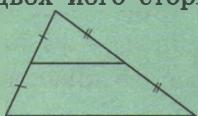
ТЕОРЕМА ФАЛЕСА



Паралельні прямі, які перетинають сторони кута і відтинають на одній із них рівні відрізки, відтинають рівні відрізки і на іншій стороні

СЕРЕДНІ ЛІНІЇ ТРИКУТНИКА І ТРАПЕЦІЇ

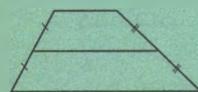
Середньою лінією трикутника називається відрізок, що сполучає середини двох його сторін



Властивість середньої лінії трикутника

Середня лінія трикутника паралельна одній із його сторін і дорівнює половині цієї сторони

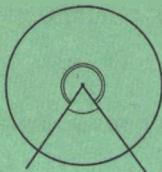
Середньою лінією трапециї називається відрізок, що сполучає середини бічних сторін трапеції



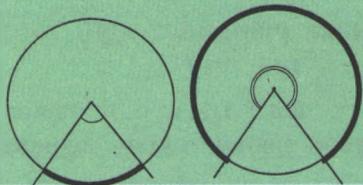
Властивість середньої лінії трапециї

Середня лінія трапециї паралельна основам і дорівнює їх півсумі

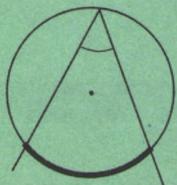
КУТИ В КОЛІ



Центральним кутом у колі називається кут із вершиною в центрі кола



Градусною мірою дуги кола називається градусна міра відповідного центрального кута



Вписаним кутом називається кут, вершина якого лежить на колі, а сторони перетинають це коло.

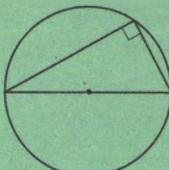
Теорема про вписаний кут

Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається

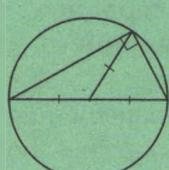
Наслідки теореми про вписаний кут



Вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу, рівні

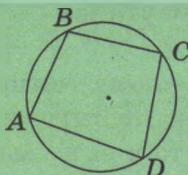


Вписаний кут, що спирається на півколо, прямий, і навпаки: будь-який прямий вписаний кут спирається на півколо



Центром кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є середина гіпотенузи. Медіана прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, дорівнює половині гіпотенузи

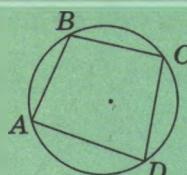
ВПИСАНІ ЧОТИРИКУТНИКИ



Чотирикутник називається *вписаним у коло*, якщо всі його вершини лежать на цьому колі

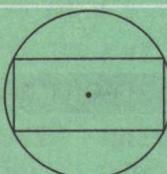
Властивість вписаного чотирикутника

Сума протилежних кутів вписаного чотирикутника дорівнює 180°



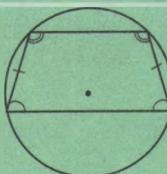
Ознака вписаного чотирикутника

Якщо сума протилежних кутів чотирикутника дорівнює 180° , то навколо нього можна описати коло



Якщо паралелограм вписаний у коло, то він є прямокутником

Навколо будь-якого прямокутника можна описати коло



Якщо трапеція вписана в коло, то вона рівнобедрена

Навколо рівнобедреної трапеції можна описати коло

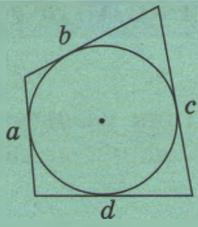
ОПИСАНІ ЧОТИРИКУТНИКИ



Чотирикутник називається *описаним навколо кола*, якщо всі його сторони дотикаються до цього кола

Властивість описаного чотирикутника

В описаному чотирикутнику суми протилежних сторін рівні

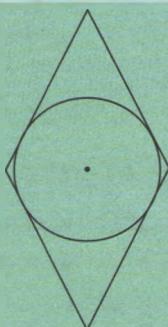


$$a + c = b + d$$

Ознака описаного чотирикутника

Якщо в опуклому чотирикутнику суми протилежних сторін рівні, то в нього можна вписати коло

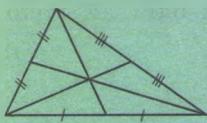
Якщо в паралелограм вписано коло, то він є ромбом



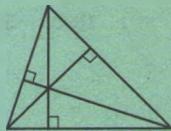
У будь-який ромб можна вписати коло

ВИЗНАЧНІ ТОЧКИ ТРИКУТНИКА

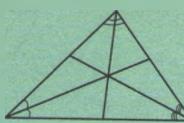
Точка перетину медіан (центр мас)



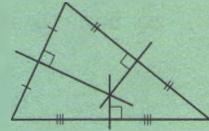
Точка перетину висот або їх продовження (ортогоцентр)



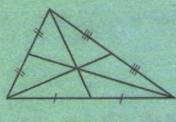
Точка перетину бісектрис (інцентр) — центр вписаного кола



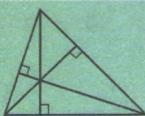
Точка перетину серединних перпендикулярів — центр описаного кола



Теорема про точку перетину медіан трикутника
Медіани трикутника перетинаються в одній точці і діляться нею у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини трикутника



Теорема про точку перетину висот трикутника
Висоти трикутника (або їх продовження) перетинаються в одній точці





КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ I

1. Накресліть опуклий чотирикутник $ABCD$. Назвіть його сторони і діагоналі. Сформулюйте і доведіть теорему про суму кутів опуклого чотирикутника.
2. Дайте означення паралелограма. Сформулюйте і доведіть властивості паралелограма.
3. Сформулюйте і доведіть ознаки паралелограма.
4. Дайте означення прямокутника. Сформулюйте і доведіть властивості прямокутника.
5. Дайте означення ромба. Сформулюйте і доведіть властивості ромба.
6. Дайте означення квадрата. Назвіть властивості квадрата.
7. Дайте означення трапеції. Назвіть окремі види трапецій, які вам відомі. Які властивості вони мають?
8. Сформулюйте і доведіть теорему Фалеса.
9. Дайте означення середньої лінії трикутника. Сформулюйте і доведіть властивість середньої лінії трикутника.
10. Дайте означення середньої лінії трапеції. Сформулюйте і доведіть властивість середньої лінії трапеції.
11. Дайте означення центрального кута в колі. Як пов'язана градусна міра дуги кола з градусною мірою відповідного центрального кута?
12. Дайте означення вписаного кута. Сформулюйте і доведіть теорему про вписаний кут.
13. Сформулюйте наслідки теореми про вписаний кут.
14. Дайте означення чотирикутника, вписаного в коло. Сформулюйте і доведіть властивість вписаного чотирикутника. Сформулюйте ознаку вписаного чотирикутника.
15. Дайте означення чотирикутника, описаного навколо кола. Сформулюйте і доведіть властивість описаного чотирикутника. Сформулюйте ознаку описаного чотирикутника.



ДОДАТКОВІ ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ І

298. Якщо в опуклому чотирикутнику не всі кути рівні, то хоча б один із них гострий. Доведіть.

299. Знайдіть кути паралелограма, якщо один із них дорівнює сумі двох інших. Чи може такий паралелограм бути ромбом; квадратом?

300. Діагональ квадрата $ABCD$ дорівнює 7 см. Пряма, яка проходить через точку A перпендикулярно до діагоналі AC , перетинає прямі BC і CD в точках E і F . Знайдіть EF .

301. Знайдіть кути трикутника, якщо дві його середні лінії перпендикулярні й рівні.

302. Доведіть, що відрізки, які сполучають середини протилежних сторін чотирикутника, точкою перетину діляться навпіл.

303. Основи прямокутної трапеції дорівнюють 8 см і 12 см, а тупий кут трапеції втричі більший за гострий. Знайдіть висоту трапеції.

304. Пряма, що проходить через вершину тупого кута трапеції, ділить її на ромб і рівносторонній трикутник. Знайдіть середню лінію трапеції, якщо її периметр дорівнює 60 см.

305. У трикутнику ABC висота BH ділить сторону AC на відрізки $AH = 2$ см, $HC = 6$ см. Відрізок AM — медіана трикутника ABC , відрізок MD — висота трикутника AMC . Знайдіть відрізки AD і DC .

306. Дано трапецію, яка є вписана в коло й описаною навколо кола. Знайдіть:

- кути трапеції, якщо сума трьох із них дорівнює 300° ;
- сторони трапеції, якщо її периметр дорівнює 16 см.

307. За рисунком 89 доведіть:

- властивість середньої лінії трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$);
- якщо в чотирикутнику $ABCD$ відрізок, що сполучає середини сторін AB і CD , дорівнює півсумі сторін AD і BC , то $ABCD$ — трапеція або паралелограм.

308. Якщо діагоналі рівнобедреної трапеції перпендикулярні, то її висота дорівнює півсумі основ. Доведіть.

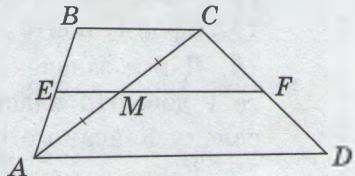


Рис. 89

Задачі підвищеної складності

309. Пряма проходить через вершину B паралелограма $ABCD$. Вершини A і C віддалені від цієї прямої на відстані a і c відповідно. Знайдіть відстань від точки D до даної прямої. Розгляньте два випадки.

310. Точки M і N — середини сторін BC і CD паралелограма $ABCD$. Доведіть, що точка перетину прямих BN і DM лежить на діагоналі AC .

311. Діагоналі опуклого чотирикутника $ABCD$ перпендикулярні. Через середини сторін AB і AD проведені прямі, перпендикулярні до протилежних сторін CD і BC відповідно. Доведіть, що точка перетину цих прямих належить прямій AC .

312. Доведіть, що бісектриси кутів при бічній стороні трапеції перетинаються на її середній лінії.

313. Через точку площини проведено три прямі так, що кут між будь-якими двома з них дорівнює 60° . Доведіть, що основи перпендикулярів, проведених із будь-якої точки площини до цих прямих, є вершинами рівностороннього трикутника.

314. Відрізки AB і AC — відрізки дотичних до кола, проведених з точки A . Доведіть, що центр кола, вписаного в трикутник ABC , лежить на даному колі.

315. Знайдіть кути рівнобедrenoї трапеції, у якій бічна сторона дорівнює меншій основі, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони.

316. Дано гострокутний трикутник ABC і точку M таку, що $BM \perp AB$, $CM \perp AC$. Доведіть, що точка M лежить на колі, описаному навколо трикутника ABC .

317. Якщо сума кутів при основі трапеції дорівнює 90° , то відрізок, що сполучає середини основ трапеції, дорівнює їх піврізниці.

а) Доведіть дане твердження.

б) Сформулюйте і доведіть обернене твердження.

Історична довідка

Переважна більшість теоретичних положень, пов'язаних із чотирикутником, була відома ще в Давній Греції. Наприклад, паралелограм згадується в роботах **Евкліда** під назвою «паралельнолінійна площа». Більшість властивостей чотирикутників були встановлені на практиці і тільки згодом доведені теоретично.



Фалес Мілетський

Одним із творців ідеї геометричного доведення по праву визнано давньогрецького вченого **Фалеса Мілетського** (бл. 625–547 рр. до н. е.). Його вважали першим серед славетних «семи мудреців» Еллади. Механік і астроном, філософ і громадський діяч, Фалес значно збагатив тогочасну науку. Саме він познайомив греків із досягненнями єгиптян у геометрії та астрономії. За свідченням історика Геродота, Фалес передбачив затміння Сонця, що сталося 28 травня 585 р. до н. е. Він дав перші уявлення про електрику і магнетизм. Досягнення Фалеса в геометрії не вичерпуються теоремою, що має його ім'я.

Стверджують, що Фалес відкрив теорему про вертикальні кути, довів рівність кутів при основі рівнобедреного трикутника, обґрутував, що кут, який спирається на півколо, прямий, і першим описав коло навколо прямокутного трикутника. Фалесу приписують і доведення другої ознаки рівності трикутників, на основі якої він створив далекомір для визначення відстані до кораблів на морі.

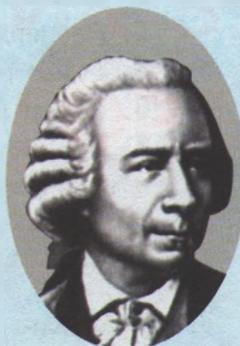


У молоді роки Фалес побував у Єгипті. За легендою, він здивував єгипетських жерців, вимірювши висоту піраміди Хеопса за допомогою подібності трикутників (про неї – у наступному розділі).

Вивчаючи визначні точки трикутника, неможливо не згадати імена ще кількох учених.

Теорему про перетин висот трикутника довів у XV столітті німецький математик **Регіомонтан** – на його честь цю теорему іноді називають задачею Регіомонтана.

Видатний німецький учений **Леонард Ейлер** (1707–1783), який установив зв'язок між визначними точками трикутника, був унікальною історичною постатью свого часу. Геометрія і механіка, оптика і балістика, астрономія і теорія музики, математична фізика і суднобудування – ось далеко не повний перелік галузей, які він збагатив своїми відкриттями. Перу Ейлера належать понад 800 наукових праць, причому за статистичними підрахунками він робив у середньому один винахід за тиждень! Людина надзвичайної широти інтересів, Ейлер був академіком Берлінської і Санкт-Петербурзької академій наук і істотно впливув на розвиток світової науки. Недарма французький математик П. Лаплас, розмірковуючи про вчених свого покоління, стверджував, що Ейлер – «учитель усіх нас».



Леонард Ейлер



М. В. Остроградський

Серед українських математиків вагомий внесок у дослідження властивостей чотирикутників зробив **Михайліо Васильович Остроградський** (1801–1862). Цей видатний учений, професор Харківського університету, здобув світове визнання завдяки роботам з математичної фізики, математичного аналізу, аналітичної механіки. Талановитий педагог і методист, Остроградський створив «Підручник з елементарної геометрії», який, зокрема, містив низку цікавих і складних задач на побудову вписаних і описаних чотирикутників і обчислення їх площ.



ТЕМАТИКА ПОВІДОМЛЕНЬ ТА РЕФЕРАТІВ ДО РОЗДІЛУ I

- 1.** Дельтоїд і його властивості.
- 2.** Побудова опуклих чотирикутників.
- 3.** Фалес Мілетський і давньогрецька наука.
- 4.** Леонард Ейлер — унікальна постать світової науки.
- 5.** Геометричні місця точок, пов'язані з колом.
- 6.** Точки Ейлера. Коло дев'яти точок. Теорема Фейєрбаха.
- 7.** Додаткові відомості про вписані й описані чотирикутники. Теорема Симпсона.
- 8.** Особливі види трикутників (ортогоцентричний, педальний, різницевий, трикутник Наполеона).

РЕКОМЕНДОВАНІ ДЖЕРЕЛА ІНФОРМАЦІЇ

- 1.** Математична хрестоматія. Т. 1, 2.— К.: Рад. шк., 1970.
- 2.** Глейзер Г. И. История математики в школе. VII—VIII кл.— М.: Просвещение, 1982.
- 3.** Бевз Г. П. Геометрія трикутника.— К.: Генеза, 2005.
- 4.** Бевз Г. П. Геометрія чотирикутника.— Х.: Основа, 2003.
- 5.** Бевз Г. П. Геометрія кіл.— Х.: Основа, 2004.
- 6.** Кушнір І. А. Повернення втраченої геометрії.— К.: Факт, 2000.
- 7.** Кушнір І. А. Трикутник і тетраедр у задачах.— К.: Рад. шк., 1991.
- 8.** Прасолов В. В. Задачи по геометрии. Ч. 1, 2.— М.: Наука, 1986.
- 9.** Шарыгин И. Ф. Геометрия: 9—11 кл.: От учебной задачи к творческой.— М.: Дрофа, 1996.
- 10.** Никулин А. В., Кукуш А. Г., Татаренко Ю. С. Геометрия на плоскости (Планиметрия).— Мин.: Полупурри, 1996.
- 11.** Інтернет-бібліотека МЦНМО. <http://ilib.mirror0.mccme.ru/>



ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ. ТЕОРЕМА ПІФАГОРА

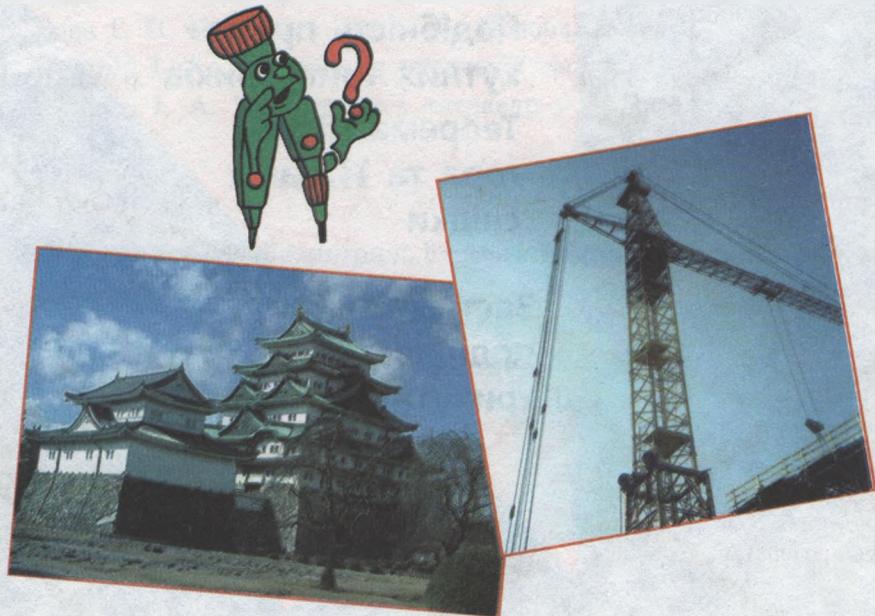
- Подібні трикутники
 - Ознаки подібності трикутників
 - Подібність прямокутних трикутників
 - Теорема Піфагора та її наслідки
-
- Застосування подібності трикутників

Геометрія володіє двома скарбами: один із них — це теорема Піфагора, а другий — поділ відрізка в середньому і крайньому відношенні... Перший можна порівняти з мірою золота, а другий більше нагадує коштовний камінь.

Йоганн Кеплер,
німецький астроном і математик

У цьому розділі ви почнете знайомство з подібністю фігур. Відношення подібності є однією з найважливіших характеристик евклідової геометрії. Прояви подібності часто зустрічаються і в повсякденному житті. Наприклад, авіамоделі літаків подібні до реальних машин, а репродукції класичних картин подібні до оригіналів.

В основі теорії подібності лежить узагальнення теореми Фалеса. Завдяки властивостям подібних трикутників встановлюється чимало важливих геометричних співвідношень. Зокрема, за допомогою подібності буде доведена славетна теорема Піфагора. Щоправда, таке доведення не є класичним, адже за часів Піфагора деякі геометричні факти, які ми будемо розглядати, ще не були відкриті. Але сьогодні навіть звичайний школяр може оволодіти знаннями, невідомими великому Піфагорові.



§ 10. Подібні трикутники

10.1. Узагальнена теорема Фалеса

Пригадаємо деякі поняття, пов'язані з діленням і пропорціями, які знадобляться для подальших міркувань.

Відношенням відрізків завдовжки a і b називається частка їх довжин, тобто число $\frac{a}{b}$.

Інакше кажучи, відношення $\frac{a}{b}$ вказує, скільки разів відрізок b і його частини вкладаються у відрізку a . Дійсно, якщо відрізок b прийняти за одиницю вимірювання, то дане відношення дорівнюватиме довжні відрізка a .

Відрізки завдовжки a і c **пропорційні** відрізкам завдовжки b і d , якщо $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Наприклад, відрізки завдовжки 8 см і 12 см пропорційні відрізкам 10 см і 15 см, оскільки $\frac{8}{10} = \frac{12}{15} = 0,8$.

Сформулюємо узагальнення теореми Фалеса для нерівних відрізків, які відтинаються паралельними прямыми на сторонах кута.

Теорема (про пропорційні відрізки)

Паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на сторонах цього кута пропорційні відрізки: $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$, або $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

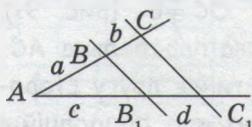


Рис. 90. Паралельні прямі відтинають на сторонах кута пропорційні відрізки

Твердження теореми ілюструє рисунок 90. Наведемо міркування, на яких ґрунтуються доведення цієї теореми. Відношення $\frac{AB}{BC}$ вказує, скільки разів відрізок BC вкладається у відрізку AB , а відношення $\frac{A_1B_1}{B_1C_1}$ — скільки разів

відрізок B_1C_1 вкладається у відрізку AB_1 . Теорема Фалеса встановлює відповідність між процесами вимірювання відрізків AB і AB_1 . Справді, прямі, паралельні BB_1 , «переводять» рівні відрізки на одній стороні кута в рівні відрізки на іншій стороні: відрізок AB «переходить» у відрізок AB_1 , деята частина відрізка AB — у деяту частину відрізка AB_1 і т.д. Тому, якщо відрізок BC вкладається у відрізку AB n разів, то відрізок B_1C_1 вкладається у відрізку AB_1 також n разів.

Повне доведення цієї теореми подано в Додатку 1.

Зауваження. Оскільки $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то

$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$, тобто $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$, і висновок даної

теореми можна записати у вигляді $\frac{AC}{AB} = \frac{AC_1}{AB_1}$.

На таку рівність ми також будемо посилатися як на теорему про пропорційні відрізки.

Задача

Дано відрізки a , b , c . Побудуйте відрізок $x = \frac{bc}{a}$.

Розв'язання

Побудуємо довільний нерозгорнутий кут O і відкладемо на одній його стороні відрізки $OA = a$ і $AB = b$, а на іншій стороні — відрізок $OC = c$ (рис. 91). Проведемо пряму AC і пряму, яка паралельна AC , проходить через точку B і перетинає другу сторону кута в точці D . За теоремою про пропорційні

відрізки $\frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CD}$, звідки $CD = \frac{AB \cdot OC}{OA} = \frac{b \cdot c}{a}$. Отже,

відрізок CD — шуканий.

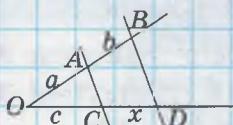


Рис. 91

Зазначимо, що величина x є четвертим членом пропорції $a:b=c:x$. Тому побудований відрізок називають **четвертим пропорційним відрізком**.

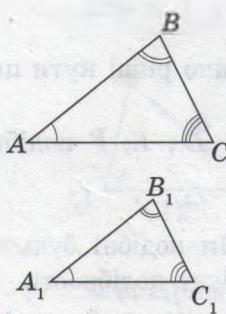


Рис. 92. Подібні трикутники

10.2. Означення подібних трикутників

Рівні фігури можна уявити як фігури, що мають однакову форму й однакові розміри. Але в повсякденному житті часто зустрічаються речі, які мають однакову форму, але різні розміри: наприклад, чайне блюдце і тарілка, однакові моделі взуття різних розмірів тощо. У геометрії фігури однакової форми прийнято називати подібними. Наприклад, подібними один до одного є будь-які два квадрати, будь-які два кола. Введемо спочатку поняття подібних трикутників.

Означення

Два трикутники називаються **подібними**, якщо кути одного з них відповідно дорівнюють кутам іншого і відповідні сторони цих трикутників пропорційні.

На рисунку 92 зображені подібні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$. Подібність цих трикутників коротко позначають так: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. У цьому записі, як і в записі рівності трикутників, назви трикутників будемо впорядковувати так, щоб вершини рівних кутів указувались у порядку відповідності. Це означає:

якщо $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, то $\angle A = \angle A_1$,

$$\angle B = \angle B_1, \quad \angle C = \angle C_1, \quad \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k.$$

Число k , що дорівнює відношенню відповідних сторін подібних трикутників, називають **кофіцієнтом подібності**.

**Опорна задача**

Відношення периметрів подібних трикутників дорівнює коефіцієнту подібності. Доведіть.

Розв'язання

Нехай $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ з коефіцієнтом подібності k . Це означає, що $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$, тобто $AB = kA_1B_1$, $BC = kB_1C_1$, $AC = kA_1C_1$. Маємо:

$$\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = \frac{kA_1B_1 + kB_1C_1 + kA_1C_1}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = \frac{kP_{A_1B_1C_1}}{P_{A_1B_1C_1}} = k.$$

Зазначимо також, що відношення відповідних лінійних елементів (медіан, бісектрис, висот тощо) подібних трикутників дорівнює коефіцієнту подібності. Доведіть це самостійно.

Запитання і задачі**УСНІ ВПРАВИ**

318. Відомо, що $\triangle ABC \sim \triangle KMN$. Назвіть відповідно рівні кути цих трикутників.

319. Трикутник ABC і трикутник з вершинами D , E , F подібні, причому $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FD} = \frac{AC}{ED}$. Закінчіть запис $\triangle ABC \sim \triangle \dots$.

320. Чи рівні будь-які два подібні трикутники? Чи подібні будь-які два рівні трикутники? Назвіть відповідний коефіцієнт подібності.

321. Чи можуть бути подібними прямокутний і тупокутний трикутники?

322. Два трикутники подібні з коефіцієнтом 0,25. У скільки разів сторони одного трикутника більші за відповідні сторони іншого?



ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

323. Накресліть трикутник ABC . Позначте на стороні AB точку D так, щоб $AD : DB = 2 : 1$. Проведіть через точку D пряму, паралельну стороні AC , і позначте точку E — точку перетину цієї прямої зі стороною BC . Виміряйте відрізок BE та обчисліть довжину відрізка EC за теоремою про пропорційні відрізки. Перевірте отриманий результат вимірюванням.

→ **324.** Накресліть трикутник ABC і проведіть у ньому середню лінію DE , паралельну AC . Назвіть подібні трикутники, які утворилися на рисунку.



ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

Рівень А

325. Визначте, чи є відрізки завдовжки a і b пропорційними відрізкам c і d , якщо:

- $a = 8$ см, $b = 24$ см, $c = 4$ см, $d = 12$ см;
- $a = 9$ см, $b = 14$ см, $c = 7$ см, $d = 18$ см.

326. На рисунку 93 $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. За даними рисунка знайдіть x і y .

→ **327.** На рисунку 94 $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. За даними рисунка знайдіть x і y .

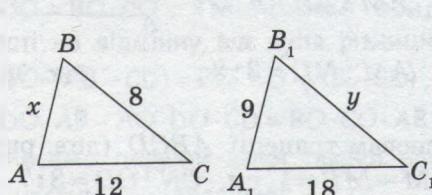


Рис. 93

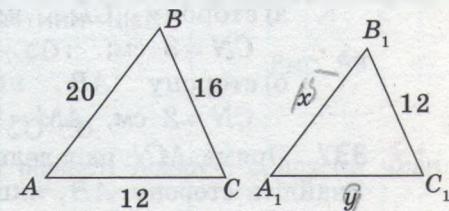


Рис. 94

328. Пряма KM паралельна стороні AC трикутника ABC (рис. 95). Знайдіть відрізок MC , якщо:

- $AK = 2$ см, $KB = 6$ см, $BM = 9$ см;
- $AK : KB = 2 : 3$, $BC = 10$ см.

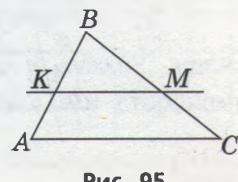


Рис. 95

- **329.** Пряма KM паралельна стороні AC трикутника ABC (див. рис. 95). Знайдіть відрізок AB , якщо $AK = 6$ см, $BK : KC = 4 : 3$.
- 330.** Відомо, що $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Знайдіть:
- кут C , якщо $\angle A = 45^\circ$, $\angle E = 110^\circ$;
 - кут F , якщо $\angle B = 80^\circ$, $\angle A = \angle C$.
- **331.** Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо в подібному йому трикутнику різниця найбільшого і найменшого кутів дорівнює 70° .
- 332.** Сторони трикутника дорівнюють 2,5 см, 4 см і 5 см. Знайдіть сторони трикутника, подібного даному, якщо:
- його периметр дорівнює 46 см;
 - його найменша сторона дорівнює найбільшій стороні даного трикутника.
- **333.** Сторони трикутника дорівнюють 16 см, 12 см і 10 см. Знайдіть периметр трикутника, подібного даному, якщо його найбільша сторона дорівнює 8 см.
- 334.** Доведіть за означенням, що будь-які два рівносторонні трикутники подібні.
- **335.** Доведіть від супротивного, що тупокутний і рівносторонній трикутники не можуть бути подібними.

Рівень Б

- 336.** Пряма MN паралельна основам трапеції $ABCD$ (рис. 96). Знайдіть:

- сторону CD , якщо $AM : AB = 4 : 5$, $CN = 3$ см;
- сторону AB , якщо $AM : ND = 3 : 2$, $CN = 2$ см, $AM = 9$ см.

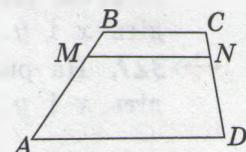
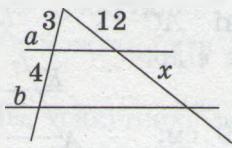


Рис. 96

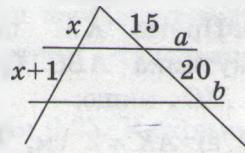
- **337.** Пряма MN паралельна основам трапеції $ABCD$ (див. рис. 96). Знайдіть сторону AB , якщо $AM - MB = 1$ см, $CN : CD = 3 : 7$.

- 338.** За даними рисунка 97, а, б знайдіть x , якщо $a \parallel b$.



а

Рис. 97



б

339. Відомо, що $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, причому $\angle D = 70^\circ$, $\angle B = 55^\circ$. Доведіть, що $AB = AC$.

→ **340.** Відомо, що $\triangle ABC \sim \triangle KMN$, причому $\angle A + \angle M = 90^\circ$. Доведіть, що AB — найбільша сторона трикутника ABC .

341. Доведіть, що трикутник з вершинами в серединах сторін даного трикутника подібний даному. Чому дорівнює коефіцієнт подібності?

→ **342.** У трикутнику ABC точки D і E — середини сторін AB і BC відповідно. Доведіть, що $\triangle ABC \sim \triangle DBE$, і знайдіть коефіцієнт подібності.

Рівень В

343. Кожен із двох нерівних, але подібних трикутників має сторони завдовжки 12 см і 18 см. Знайдіть невідомі сторони цих трикутників.

→ **344.** Трикутники зі сторонами a , b , c і b , c , d подібні. Доведіть, що коефіцієнт подібності не може дорівнювати 2.

345. Знайдіть помилку в «доведенні» геометричного софізму: *відрізки паралельних прямих, що містяться між сторонами кута, рівні*.

«Доведення»

Нехай AB і CD — відрізки паралельних прямих, які перетинають сторони кута O (рис. 98). За теоремою про пропорційні відрізки $\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO}$, або

$AO \cdot DO = BO \cdot CO$. Помножимо обидві частини цієї рівності на відмінну від нуля різницю $AB - CD$:

$$AO \cdot DO \cdot (AB - CD) = BO \cdot CO \cdot (AB - CD),$$

$$AO \cdot DO \cdot AB - AO \cdot DO \cdot CD = BO \cdot CO \cdot AB - BO \cdot CO \cdot CD.$$

Перенесемо перший член правої частини рівності ліворуч, а другий член лівої частини — праворуч:

$$AO \cdot DO \cdot AB - BO \cdot CO \cdot AB = AO \cdot DO \cdot CD - BO \cdot CO \cdot CD, \text{ або}$$

$$(AO \cdot DO - BO \cdot CO) \cdot AB = (AO \cdot DO - BO \cdot CO) \cdot CD.$$

Розділивши обидві частини останньої рівності на вираз у дужках, маємо $AB = CD$, тобто відрізки паралельних прямих, що містяться між сторонами кута, рівні.

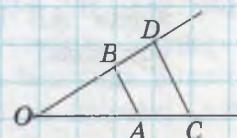


Рис. 98

346. Діагональ AC ділить трапецію $ABCD$ ($AD \parallel BC$) на два подібні трикутники ABC і ACD . Знайдіть AC , якщо $BC = 4$ см, $AD = 9$ см.

→ **347.** Діагональ AC трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) дорівнює стороні CD і ділить трапецію на два подібні трикутники ABC і ACD . Знайдіть периметр трапеції, якщо $AB = 9$ см, $CD = 12$ см.



ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 11

Теоретичний матеріал

- ознаки рівності трикутників;
- трапеція.

7 клас, § 8, 10, 13

8 клас, § 5

Задачі

348. Через вершину трикутника проведено пряму, яка ділить даний трикутник на два рівні трикутники. Визначте вид даного трикутника. Чи може така пряма розділити трикутник на два нерівні, але подібні трикутники? Висловіть припущення.

349. Діаметр AC перетинає хорду BD в точці K , яка ділить хорду навпіл. Доведіть рівність трикутників ABC і ADC . Чи можуть хорди AB і CD бути паралельними, якщо точка K не є центром кола?

§ 11. Ознаки подібності трикутників

11.1. Подібність трикутників за двома кутами

Для встановлення подібності двох трикутників, як і для встановлення їх рівності, не обов'язково перевіряти всі співвідношення сторін і кутів згідно з означенням — достатньо перевірити лише деякі з них. Які саме? Відповідь на це запитання дають три ознаки подібності трикутників.

Теорема (ознака подібності трикутників за двома кутами)

Якщо два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам другого трикутника, то такі трикутники подібні.

Доведення

□ Нехай дано трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, в яких $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 99). Доведемо подібність цих трикутників. Із теореми про суму кутів трикутника очевидно випливає, що $\angle C = \angle C_1$. Відкладемо на промені AB відрізок AB_2 , що дорівнює A_1B_1 , і проведемо пряму B_2C_2 , паралельну BC . Тоді $\angle B = \angle B_2$ як відповідні кути при паралельних прямих, тому $\triangle AB_2C_2 \sim \triangle A_1B_1C_1$ за другою ознакою, звідки $AC_2 = A_1C_1$. За теоремою про пропорційні відрізки

$\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2}$, отже, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$. Аналогічно доводимо, що $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$. Таким чином, за означенням подібних трикутників $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Теорему доведено. ■

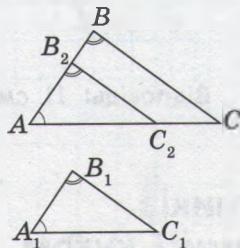


Рис. 99. До доведення подібності трикутників за двома кутами

**Задача**

Точка перетину діагоналей трапеції ділить одну з них на відрізки завдовжки 4 см і 7 см. Менша основа трапеції дорівнює 8 см. Знайдіть середню лінію трапеції.

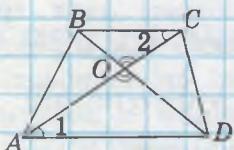


Рис. 100

Розв'язання

Нехай у трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) діагоналі перетинаються в точці O , $BC = 8$ см (рис. 100). Розглянемо трикутники AOD і COB . У них кути при вершині O рівні як вертикальні, $\angle 1 = \angle 2$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AD і BC та січній AC . Отже, $\triangle AOD \sim \triangle COB$ за двома кутами. Звідси випливає, що $\frac{BC}{AD} = \frac{BO}{DO}$. Оскільки за умовою $BC < AD$,

то $BO < DO$, отже, $BO = 4$ см, $DO = 7$ см. Тоді

$$AD = \frac{BC \cdot DO}{BO} = \frac{8 \cdot 7}{4} = 14 \text{ (см)}.$$

Середня лінія трапеції дорівнює півсумі її основ,

$$\text{тобто } \frac{8 + 14}{2} = 11 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 11 см.

11.2. Подібність трикутників за двома сторонами і кутом між ними

Теорема (ознака подібності трикутників за двома сторонами і кутом між ними)

Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого трикутника і кути, утворені цими сторонами, рівні, то такі трикутники подібні.

Доведення

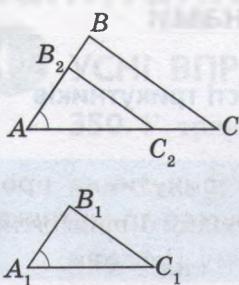


Рис. 101. До доведення подібності трикутників за двома сторонами і кутом між ними

□ Нехай дано трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, в яких $\angle A = \angle A_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ (рис. 101). Доведемо подібність цих трикутників. Відкладемо на промені AB відрізок AB_2 , що дорівнює A_1B_1 , і проведемо пряму B_2C_2 , паралельну BC . Тоді $\angle B = \angle B_2$ як відповідні кути при паралельних прямих, тому $\triangle AB_2C_2 \sim \triangle ABC$ за двома кутами. Звідси $\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2}$, а оскільки $AB_2 = A_1B_1$ і $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, то $A_1C_1 = AC_2$. Тоді $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ за першою ознакою рівності трикутників, отже, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ за двома кутами. Теорему доведено. ■

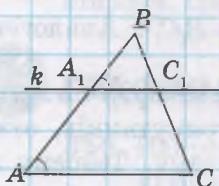


Рис. 102

Задача

Пряма, яка перетинає сторони BA і BC трикутника ABC , ділить кожну з них у відношенні $m:n$, починаючи від вершини B . Доведіть, що ця пряма паралельна AC .

Розв'язання

Нехай пряма k перетинає сторони BA і BC трикутника ABC в точках A_1 і C_1 відповідно (рис. 102).

Оскільки за умовою задачі $\frac{BA_1}{A_1A} = \frac{BC_1}{C_1C} = \frac{m}{n}$, то $\frac{BA_1}{BA} = \frac{BC_1}{BC} = \frac{m}{m+n}$. Тоді трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні за двома сторонами і кутом між ними. Із подібності трикутників випливає, що $\angle BAC_1 = \angle A$. Але ці кути є відповідними при прямих k і AC та січній AB . Отже, $k \parallel AC$ за ознакою паралельності прямих.

11.3. Подібність трикутників за трьома сторонами

Теорема (ознака подібності трикутників за трьома сторонами)

Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трем сторонам другого трикутника, то такі трикутники подібні.

Доведення

□ Нехай у трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \quad (\text{рис. 103}). \text{ Доведемо подібність}$$

цих трикутників. Як і в попередніх теоремах, відкладемо на промені AB відрізок AB_2 , що дорівнює A_1B_1 , і проведемо пряму B_2C_2 , паралельну BC . Тоді $\angle B = \angle B_2$ як відповідні кути при паралельних прямих, тому $\triangle AB_2C_2 \sim \triangle ABC$

за двома кутами. Звідси $\frac{AB}{AB_2} = \frac{BC}{B_2C_2} = \frac{AC}{AC_2}$, а ос-

кільки $AB_2 = A_1B_1$, то $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_2C_2}$. Враховуючи,

що $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$, маємо $B_2C_2 = B_1C_1$. Analogічно доводимо, що $AC_2 = A_1C_1$. Тоді $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ за третьою ознакою рівності трикутників, отже, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ за двома кутами. Теорему дово-денено. ■

Отже, для доведення всіх трьох ознак подібності трикутників використано один і той самий підхід, а кожна з ознак подібності спирається на певну ознакою рівності трикутників.

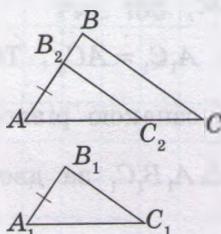


Рис. 103. До доведення подібності трикутників за трьома сторонами

Запитання і задачі



УСНІ ВПРАВИ

350. У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k$. Яку рівність

необхідно додати до умови, щоб можна було довести подібність цих трикутників? Назвіть усі можливі варіанти відповіді.

351. Дано трикутники ABC і KMN , в яких $\frac{AB}{KM} = \frac{BC}{MN} = \frac{AC}{MK}$.

Назвіть кут трикутника KMN , що дорівнює куту C . Чому ці кути рівні?

352. Дано трикутники ABC і KMN , в яких $\frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NK}$ і $\angle B = \angle N$.

Назвіть кут трикутника ABC , що дорівнює куту M . Чому ці кути рівні?

353. Чи можуть бути подібними:

- а) прямокутний і рівнобедрений трикутники;
- б) прямокутний і рівносторонній трикутники;
- в) трикутник із кутом 50° і трикутник із кутом 100° ;
- г) трикутник із кутом 60° і трикутник із кутом 120° ?

354. Чи подібні рівнобедрені трикутники, якщо вони мають:

- а) по рівному гострому куту;
- б) по рівному тупому куту?

355. Два подібні трикутники мають спільний кут. Чи обов'язково їх сторони, протилежні цьому куту, паралельні? Наведіть контрприклад.



ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

356. Накресліть трапецію і проведіть її діагоналі.

а) Виділіть кольором подібні трикутники, які утворилися на рисунку. За якою ознакою можна довести їх подібність?

б) Виміряйте довжини відрізків однієї діагоналі, на які вона ділиться точкою перетину діагоналей. Виміряйте довжину однієї з основ трапеції і обчисліть довжину другої основи, користуючись подібністю трикутників. Перевірте отриманий результат вимірюванням.

→ 357. Нарисуйте трикутник і проведіть пряму, яка паралельна одній з його сторін і перетинає дві інші сторони.

а) Виділіть кольором подібні трикутники, які утворилися на рисунку. За якою ознакою можна довести їх подібність?

б) Виміряйте кути, під якими дана пряма перетинає сторони трикутника, і знайдіть усі кути даного трикутника.



ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

Рівень А

358. На рисунку 104, а—в знайдіть подібні трикутники і доведіть їх подібність.

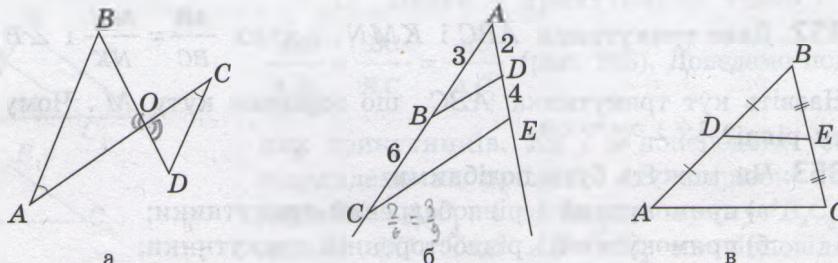


Рис. 104

→ 359. За даними рисунка 105, а—в доведіть подібність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$.

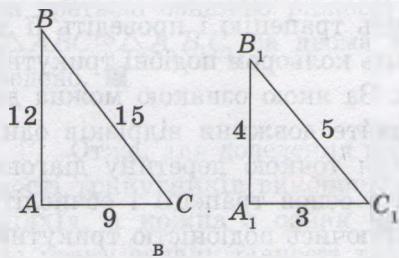
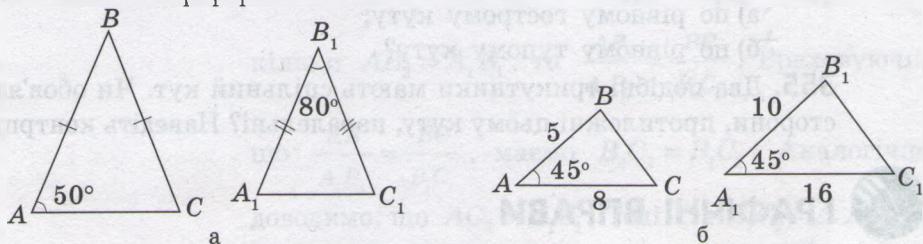


Рис. 105

360. Визначте відстань на місцевості від точки A до недосяжної точки B (рис. 106), якщо $CA = 60$ м, $CB = 90$ м, $CD = 20$ м, $CE = 30$ м, $DE = 40$ м. Приведіть необхідні доведення.

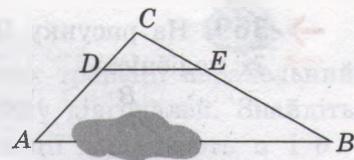


Рис. 106

361. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці O .

- Доведіть, що $\triangle AOD \sim \triangle BOC$.
- Знайдіть AD , якщо $BC = 4$ см, $OB = 6$ см, $OA = 9$ см.

→ **362.** Діагоналі трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) перетинаються в точці O .

- Доведіть, що $\triangle AOD \sim \triangle COB$.
- Знайдіть BC , якщо $AD = 16$ см, $AO : OC = 4 : 3$.

363. Визначте, чи подібні трикутники зі сторонами:

- 3, 4, 6 і 9, 15, 18;
- 2, 3, 3 і 8, 12, 12.

364. Два рівнобедрені трикутники мають рівні кути при основах. Основа одного трикутника дорівнює 8 см, а бічна сторона 6 см. Знайдіть периметр другого трикутника, якщо його основа дорівнює 4 см.

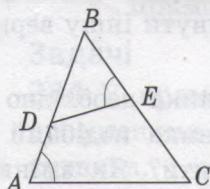
→ **365.** Два рівнобедрені трикутники мають рівні кути, протилежні основам. Периметри цих трикутників дорівнюють відповідно 15 см і 10 см. Знайдіть сторони другого трикутника, якщо бічна сторона першого трикутника дорівнює 6 см.

366. Доведіть, що будь-які два рівнобедрені прямокутні трикутники подібні.

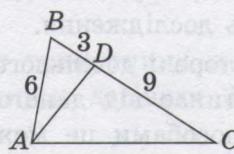
→ **367.** Доведіть, що відношення відповідних середніх ліній подібних трикутників дорівнює коефіцієнту подібності.

Рівень Б

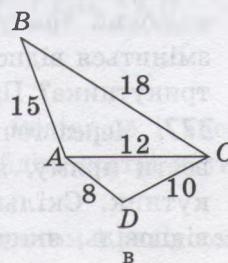
368. На рисунку 107, а—в знайдіть подібні трикутники і доведіть їх подібність.



а



б



в

Рис. 107

→ **369.** На рисунку 108, а—в знайдіть подібні трикутники і доведіть їх подібність.

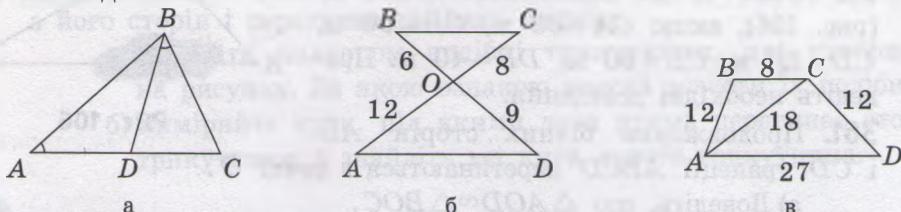


Рис. 108

370. У трикутник ABC вписано ромб $AKLM$ (рис. 109). Знайдіть периметр ромба, якщо $BK = 4$ см, $MC = 9$ см.

371. Діагоналі трапеції точкою перетину діляться у відношенні $3 : 7$. Знайдіть основи трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 10 см.

→ **372.** У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC кут B дорівнює 36° , AD — бісектриса трикутника. Доведіть, що $\triangle ABC \sim \triangle CAD$.

373. На одній стороні нерозгорнутого кута O відкладені відрізки $OA = 9$ см і $OB = 12$ см, а на іншій стороні — відрізки $OC = 6$ см і $OD = 18$ см. Чи подібні трикутники OAC і OBD ? Чи подібні трикутники OBC і ODA ?

374. Доведіть, що відношення відповідних медіан подібних трикутників дорівнює коефіцієнту подібності.

→ **375.** Доведіть, що відношення відповідних бісектрис подібних трикутників дорівнює коефіцієнту подібності.

376. Через вершину найбільшого кута різностороннього трикутника необхідно провести пряму, яка відтинає від даного трикутника подібний трикутник. Скількома способами це можна зробити? Як зміниться відповідь, якщо в умові задачі замість довільного трикутника розглянути прямокутний? Проведіть дослідження.

→ **377.** Через точку на стороні довільного трикутника необхідно провести пряму, яка відтинає від даного трикутника подібний трикутник. Скількома способами це можна зробити? Як зміниться відповідь, якщо в умові задачі замість довільного трикутника розглянути прямокутний? Проведіть дослідження.

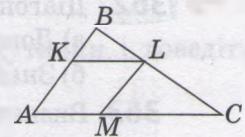


Рис. 109

Рівень В

378. Відрізок із кінцями на бічних сторонах трапеції паралельний її основам і проходить через точку перетину діагоналей. Знайдіть довжину цього відрізка, якщо основи трапеції дорівнюють a і b .

→ **379.** У трапеції через точку, яка ділить бічу сторону у відношенні $m:n$, починаючи від меншої основи, проведено пряму, паралельну основам. Знайдіть довжину відрізка цієї прямої, що міститься всередині трапеції, якщо її основи дорівнюють a і b ($a < b$).

380 (опорна). Пряма, яка проходить через точку перетину діагоналей трапеції і точку перетину продовжень її бічних сторін, ділить основи трапеції навпіл. Доведіть.

→ **381.** Відрізок MN має кінці на сторонах AB і AC трикутника ABC і паралельний стороні BC . Доведіть, що медіана трикутника, проведена із вершини A , ділить цей відрізок навпіл.

382. Через деяку вершину рівнобедреного трикутника проведено пряму, яка ділить даний трикутник на два нерівні рівнобедрені трикутники, один із яких подібний до даного. Знайдіть кути трикутника. Скільки розв'язків має задача?

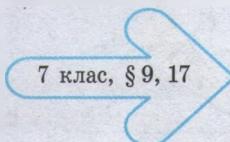
→ **383.** Через точку всередині довільного трикутника необхідно провести пряму, яка відтинає від даного трикутника подібний трикутник. Скількома способами це можна зробити? Проведіть дослідження. Узагальніть у вигляді дослідження результати розв'язування задач № 376, 377, 382 і 383.



ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 12

Теоретичний матеріал

- перпендикуляр до прямої;
- прямокутний трикутник.



Задачі

384. У прямокутному трикутнику кут між медіаною і висотою, проведеними до гіпотенузи, дорівнює 20° . Знайдіть гострі кути трикутника.

385. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і радіусом описаного кола.

§ 12. Подібність прямокутних трикутників

12.1. Ознаки подібності прямокутних трикутників

Ознаки подібності прямокутних трикутників є висновками відповідних ознак подібності довільних трикутників. Найбільш важливою ознакою подібності прямокутних трикутників є така.

Якщо два прямокутні трикутники мають по рівному гострому куту, то такі трикутники подібні.

Дійсно, оскільки в прямокутному трикутнику один кут прямий, ця ознака випливає з ознаки подібності трикутників за двома кутами.

Інші ознаки подібності прямокутних трикутників сформулюйте і доведіть самостійно (задачі 395, 413).



Задача

У трикутнику ABC з гострим кутом B проведено висоти AA_1 і CC_1 (рис. 110). Доведіть, що $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle ABC$.

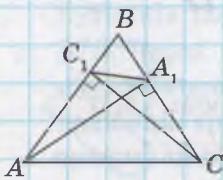


Рис. 110

Розв'язання

Розглянемо прямокутні трикутники ABA_1 і CBC_1 . Вони мають спільний гострий кут B , отже, подібні. Із цього випливає, що відповідні катети і гіпотенузи цих трикутників пропорційні, тобто $\frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA}{BC}$.

Розглянемо тепер трикутники A_1BC_1 і ABC . Вони також мають спільний кут B , а за щойно доведеним сторони, прилеглі до цього кута, пропорційні. Отже, $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle ABC$ за двома пропорційними сторонами і кутом між ними.

12.2. Пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику

Подібність трикутників дозволяє встановити низку співвідношень між довжинами деяких відрізків у трикутнику і колі (такі співвідношення називають *метричними*). Спочатку введемо декілька допоміжних понять.

Число x називається **середнім пропорційним** між числами a і b , якщо $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$, тобто $x^2 = ab$.

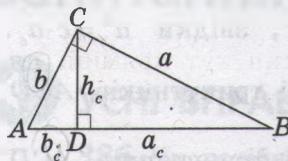


Рис. 111. Пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику

У прямокутному трикутнику ABC з катетами $BC=a$ і $AC=b$ та гіпотенузою $AB=c$ проведемо висоту CD і позначимо її h_c (рис. 111). Відрізки AD і DB , на які ця висота ділить гіпотенузу, називають **проекціями катетів на гіпотенузу**. Проекції катетів a і b на гіпотенузу c позначають a_c і b_c відповідно.

Теорема (метричні співвідношення в прямокутному трикутнику)

У прямокутному трикутнику:

1) висота, проведена до гіпотенузи, є середнім пропорційним між проекціями катетів на гіпотенузу:

$$h_c^2 = a_c \cdot b_c;$$

2) катет є середнім пропорційним між гіпотенузою і його проекцією на гіпотенузу:

$$a^2 = c \cdot a_c \text{ і } b^2 = c \cdot b_c;$$

3) висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює добутку катетів, поділеному на гіпотенузу:

$$h_c = \frac{ab}{c}.$$

Доведення

□ За ознакою подібності прямокутних трикутників $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ (ці трикутники мають спільний гострий кут A), $\triangle CBD \sim \triangle ABC$ (ці трикутники мають спільний гострий кут C) і $\triangle ACD \sim \triangle CBD$ (гострі кути цих трикутників дорівнюють гострим кутам трикутника ABC).

Із подібності трикутників CBD і ACD маємо: $\frac{BD}{CD} = \frac{CD}{AD}$, або $\frac{a_c}{h_c} = \frac{h_c}{b_c}$, звідки $h_c^2 = a_c \cdot b_c$.

Із подібності трикутників CBD і ABC маємо: $\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}$, або $\frac{a_c}{a} = \frac{a}{c}$, звідки $a^2 = c \cdot a_c$.

Аналогічно з подібності трикутників ACD і ABC дістанемо $b^2 = c \cdot b_c$.

І нарешті, з подібності трикутників ACD і ABC маємо: $\frac{CD}{AC} = \frac{BC}{AB}$, або $\frac{h_c}{b} = \frac{a}{c}$, звідки $h_c = \frac{ab}{c}$.

Теорему доведено. ■

У ході доведення теореми ми встановили цікавий факт: *висота прямокутного трикутника ділить його на два подібні трикутники, кожен із яких подібний даному трикутнику.* Серед усіх видів трикутників таку властивість має лише прямокутний.

Задача

Знайдіть периметр прямокутного трикутника, в якому катет дорівнює 15 см, а його проекція на гіпотенузу дорівнює 9 см.

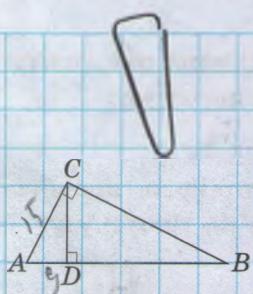


Рис. 112

Розв'язання

Нехай у трикутнику ABC $\angle C = 90^\circ$, $CD \perp AB$, $AC = 15$ см, $AD = 9$ см (рис. 112).

За метричним співвідношенням у трикутнику ABC $AC^2 = AB \cdot AD$, тобто $15^2 = 9AB$, звідки $AB = 25$ см, тоді $DB = AB - AD = 16$ см. За співвідношенням $BC^2 = AB \cdot BD$ маємо: $BC = \sqrt{25 \cdot 16} = 20$ (см). Отже, $P_{ABC} = 15 + 20 + 25 = 60$ (см).

Відповідь: 60 см.

Запитання і задачі



УСНІ ВПРАВИ

386. Чи подібні два прямокутні трикутники, якщо:

- а) вони мають спільний кут;
- +б) вони мають спільний гострий кут;
- +в) один із них має кут 20° , а інший — кут 70° ;
- г) один із них має кут 50° , а катет другого вдвічі менший за гіпотенузу?

387. Чи може висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, бути меншою за кожну з проекцій катетів на гіпотенузу; дорівнювати проекції катета на гіпотенузу?

388. Відрізки a_c і b_c — проекції катетів a і b прямокутного трикутника на гіпотенузу. Порівняйте:

- а) a і b , якщо $a_c < b_c$;
- б) a_c і b_c , якщо $a > b$.

389. Чи можуть бути подібними нерівні прямокутні трикутники зі спільною гіпотенузою; зі спільним катетом?

390. Для побудови четвертого пропорційного відрізка $x = \frac{ab}{c}$ учень запропонував побудувати прямокутний трикутник із катетами a і b та гіпотенузою c і провести в ньому висоту h_c , яка дорівнюватиме x . Інший учень стверджує, що цей спосіб хибний. Хто з учнів правий?



ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

391. Накресліть прямокутний трикутник і проведіть його висоту з вершини прямого кута. Виділіть кольором проекції катетів на гіпотенузу і виміряйте їх довжини. Користуючись метричними співвідношеннями, обчисліть наближене:

- довжину проведеної висоти;
- довжини катетів.

Перевірте отримані результати вимірюванням.

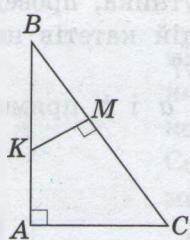
392. Накресліть прямокутний трикутник ABC з гіпотенузою AB . Позначте на катеті AC точку M і проведіть до гіпотенузи перпендикуляр MN . Із точки N проведіть до катета AC перпендикуляр NK . Назвіть три трикутники, подібні трикутнику ABC , і запишіть їх подібність.



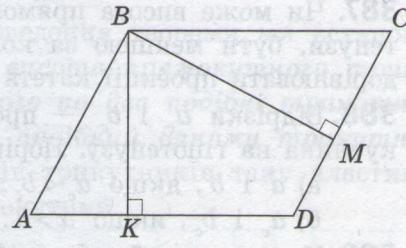
ПИСЬМОВІ ВПРАВИ¹

Рівень А

393. На рисунку 113, а, б знайдіть подібні трикутники і доведіть їх подібність.



а



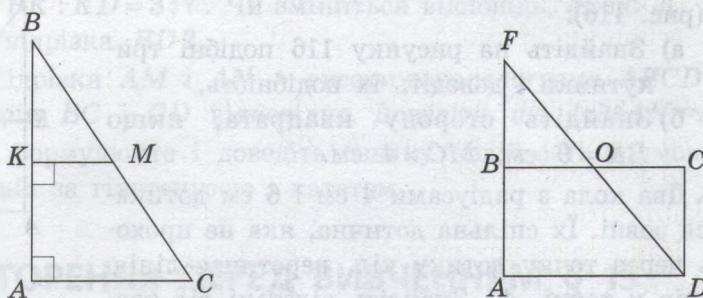
б

$ABCD$ — паралелограм

Рис. 113

¹ Усі задачі параграфів 12—14 можуть бути розв'язані без застосування формули коренів квадратного рівняння. Відповідні задачі, які розв'язуються за допомогою квадратних рівнянь, подаються наприкінці розділу в рубриці «Додаткові задачі».

- **394.** На рисунку 114, а, б знайдіть подібні трикутники і доведіть їх подібність.



$ABCD$ — прямокутник

а

б

Рис. 114

- 395.** Сформулюйте і доведіть ознаку подібності прямокутних трикутників за двома катетами.

396. Спостерігач, що перебуває в точці A , бачить кінець жердини B і верхню точку вежі D , причому точки A , B і D розміщені на одній прямій (рис. 115). Визначте висоту вежі, якщо $BC = 4$ м, $AC = 6$ м, $AE = 90$ м.

- **397.** Висота дерева дорівнює 9,2 м, а довжина тіні людини, зрист якої 1,8 м, дорівнює 2,7 м. Знайдіть довжину тіні дерева.

- 398.** У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведено висоту CD (див. рис. 111). Знайдіть:

- CD , якщо $AD = 4$ см, $DB = 25$ см;
- AC і BC , якщо $AB = 50$ см, $AD = 18$ см.

- **399.** Знайдіть периметр прямокутного трикутника, висота якого ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 4,5 см і 8 см.

- 400.** Доведіть, що відношення відповідних висот подібних трикутників дорівнює коефіцієнту подібності.

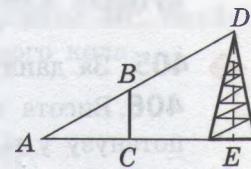


Рис. 115

Рівень Б

401. У прямокутний трикутник вписано квадрат (рис. 116).

- Знайдіть на рисунку 116 подібні трикутники і доведіть їх подібність.
- Знайдіть сторону квадрата, якщо $BK = 9$ см, $MC = 4$ см.

402. Два кола з радіусами 4 см і 6 см дотикаються зовні. Їх спільна дотична, яка не проходить через точку дотику кіл, перетинає лінію центрів у точці A . Знайдіть відстані від точки A до центрів кіл.

→ **403.** Відрізки BK і BM — висоти паралелограма $ABCD$, проведені з вершини кута B до сторін AD і CD відповідно. Знайдіть BK , якщо $BM = 4$ см, $AD : CD = 2 : 3$.

404. Доведіть, що проекції катетів на гіпотенузу прямокутного трикутника відносяться як квадрати катетів: $\frac{a_c}{b_c} = \frac{a^2}{b^2}$.

→ **405.** За даними рисунка 111 виразіть a_c та b_c через a , b і c .

406. Висота прямокутного трикутника дорівнює 24 см і ділить гіпотенузу у відношенні 9 : 16. Знайдіть катети трикутника.

→ **407.** Точка C ділить діаметр кола AB на відрізки $AC = 10$ см і $CB = 8$ см. Відрізок CD — перпендикуляр до AB . Визначте розміщення точки D відносно даного кола, якщо $CD = 9$ см.

408. Перпендикуляр, проведений із середини основи рівнобедреного трикутника до бічної сторони, ділить її на відрізки завдовжки 2,25 см і 4 см. Знайдіть висоту трикутника, проведену до бічної сторони.

→ **409.** Точка дотику кола, вписаного в ромб, ділить сторону ромба на відрізки завдовжки 20 см і 5 см. Знайдіть висоту ромба.

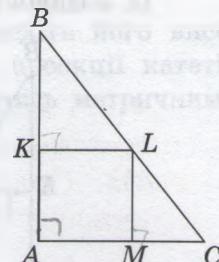


Рис. 116

Рівень В

410. Висота паралелограма, проведена з вершини тупого кута, ділить сторону у відношенні 1 : 7. У якому відношенні ця висота ділить діагональ паралелограма?

- **411.** У паралелограмі $ABCD$ перпендикуляр AK , проведений до діагоналі BD , перетинає сторону BC в точці M . Знайдіть $BM : MC$, якщо $BK : KD = 3 : 7$. Чи зміниться відповідь, якщо K — довільна точка відрізка BD ?
- 412.** Відрізки AM і AN — висоти паралелограма $ABCD$, проведенні до сторін BC і CD відповідно. Доведіть, що $\triangle MAN \sim \triangle ABC$.
- **413.** Сформулюйте і доведіть ознаку подібності прямокутних трикутників за гіпотенузою і катетом.



ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 13

Теоретичний матеріал

- прямокутний трикутник;
- співвідношення між сторонами трикутника.

7 клас, § 17, 18

Задачі

- 414.** Висота прямокутного трикутника ділить гіпотенузу у відношенні $1 : 4$. У скільки разів ця висота менша за гіпотенузу?
- 415.** Гострий кут прямокутного трикутника дорівнює 36° . Знайдіть кути, під якими катети видно із центра описаного кола.

§ 13. Теорема Піфагора та її висновки

13.1. Теорема Піфагора

Сформулюємо і доведемо одну з найважливіших теорем геометрії — теорему Піфагора.

Теорема (Піфагора)

У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Доведення

□ Згідно з доведеними метричними співвідношеннями в прямокутному трикутнику з катетами a і b та гіпотенузою c (рис. 117) $a^2 = c \cdot a_c$, $b^2 = c \cdot b_c$.

Додаючи ці рівності почленно, маємо: $a^2 + b^2 = c \cdot a_c + c \cdot b_c = c \cdot (a_c + b_c) = c^2$. Теорему доведено. ■

Співвідношення між катетами і гіпотенузою прямокутного трикутника було відоме ще задовго до Піфагора. Але саме Піфагоріві вдалося довести його, спираючись на поняття площин (до цього доведення ми повернемось у наступному розділі). Усього ж нині відомо понад 150 способів доведення теореми Піфагора. З деякими з них ви зможете познайомитися в п. 18.3.

Доведення, яке ми розглянули, є по суті алгебраїчним. Власне, важливість теореми Піфагора полягає, зокрема, в тому, що вона значно розширює можливості застосування алгебри в геометрії. За її допомогою можна знайти будь-яку

Рис. 117. До доведення теореми Піфагора



сторону прямокутного трикутника, знаючи дві інші сторони. Наприклад, якщо $a=5$, $b=12$, то $c=\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$. Якщо $c=17$, $b=15$, то $a=\sqrt{17^2-15^2}=\sqrt{(17+15)(17-15)}=\sqrt{32\cdot 2}=\sqrt{64}=8$.

Теорема Піфагора дозволяє використовувати для розв'язування геометричних задач й інші алгебраїчні прийоми, наприклад складання рівнянь.

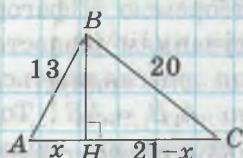


Рис. 118

Задача

Сторони трикутника дорівнюють 13 см, 20 см і 21 см. Знайдіть висоту трикутника, проведену до найбільшої сторони.

Розв'язання

Нехай BH — висота трикутника ABC , в якому $AB=13$ см, $BC=20$ см, $AC=21$ см (рис. 118). Оскільки AC — найбільша сторона трикутника, то точка H лежить на цій стороні (доведіть це самостійно). Приймемо довжину відрізка AH за x , тоді $HC=(21-x)$ см. За теоремою Піфагора з прямокутного трикутника ABH $BH^2=AB^2-AH^2$, тобто $BH^2=13^2-x^2$, а з прямокутного трикутника BCH $BH^2=BC^2-CH^2$, тобто $BH^2=20^2-(21-x)^2$. Прирівнюючи два вирази для BH^2 , маємо:

$$169-x^2=400-(21-x)^2;$$

$$169-x^2=400-441+42x-x^2;$$

$$42x=210;$$

$$x=5.$$

Таким чином, $AH=5$ см.

Тоді з трикутника ABH за теоремою Піфагора $BH=\sqrt{13^2-5^2}=12$ (см).

Відповідь: 12 см.

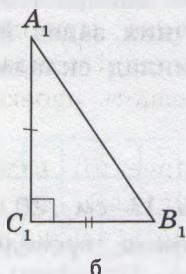
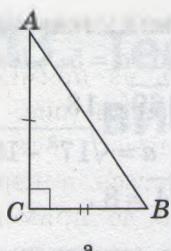


Рис. 119. До доведення теореми, оберненої до теореми Піфагора



Рис. 120. Єгипетський трикутник

єгипетськими трикутниками. Узагалі, трійки чисел a , b , c , для яких справджується рівність $a^2 + b^2 = c^2$, прийнято називати *піфагоровими трійками*, а трикутники, довжини сторін яких є піфагоровими трійками, — *піфагоровими трикутниками*. Спробуйте самостійно скласти декілька піфагорових трійок чисел (допоможе в цьому розв'язання задачі № 443).

13.2. Теорема, обернена до теореми Піфагора

Поряд із теоремою Піфагора не менш важливою є обернена теорема. Цю теорему можна розглядати як ознаку прямокутного трикутника.

Теорема (обернена до теореми Піфагора)

Якщо сума квадратів двох сторін трикутника дорівнює квадрату третьої сторони, то такий трикутник прямокутний:

якщо $AC^2 + BC^2 = AB^2$, то $\angle C = 90^\circ$.

Доведення

□ Нехай у трикутнику ABC (рис. 119, а) $AC^2 + BC^2 = AB^2$. Доведемо, що кут C прямий. Розглянемо прямокутний трикутник $A_1B_1C_1$ з прямим кутом C_1 , у якому $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$ (рис. 119, б). За теоремою Піфагора $A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + B_1C_1^2$, а з урахуванням рівностей двох сторін трикутників, що розглядаються, $A_1B_1^2 = AC^2 + BC^2 = AB^2$, тобто $A_1B_1 = AB$. Тоді $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$ за трьома сторонами, звідки $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$. ■

З доведеної теореми, зокрема, випливає, що трикутник зі сторонами 3, 4 і 5 є прямокутним: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Про це знали ще давні єгиптяни: для побудови прямих кутів на місцевості вони ділили мотузку на 12 рівних частин, зв'язували її кінці, а потім за допомогою кілків натягували її так, щоб дістати прямокутний трикутник (рис. 120). Саме тому прямокутні трикутники зі сторонами, пропорційними числам 3, 4 і 5, називають

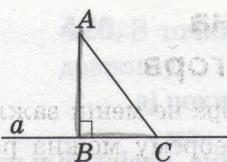


Рис. 121. Перпендикуляр і похила

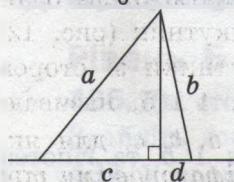
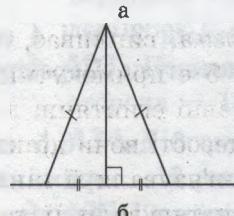
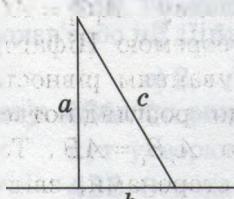
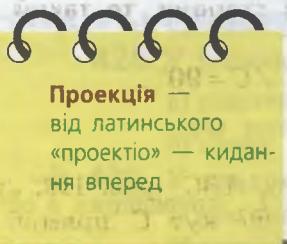


Рис. 122. Властивості похилих

13.3. Перпендикуляр і похила

Нехай точка A не лежить на прямій a , AB — перпендикуляр до цієї прямої (рис. 121). Будь-який відрізок, який сполучає точку A з точкою прямої a , і не збігається з перпендикуляром, називають **похилою** до прямої a . На рисунку 121 відрізок AC — похила до прямої a , точка C — основа похилого. При цьому відрізок BC прямої a , обмежений основами перпендикуляра і похилого, називають **проекцією похилого** AC на дану пряму.

Поняття похилого та її проекції взаємопов'язані з поняттям перпендикуляра до прямої: неможливо вказати проекцію даної похилого, не побудувавши перпендикуляра. Очевидно, що перпендикуляр і похила, проведені з однієї точки, разом із проекцією похилого утворюють прямокутний трикутник, у якому похила є гіпотенузою.

Сформулюємо властивості перпендикуляра, похилих і проекцій.

Нехай з однієї точки до прямої проведено перпендикуляр і похилі. Тоді:

- 1) будь-яка похила більша за перпендикуляр і більша за свою проекцію на дану пряму (рис. 122, а);
- 2) рівні похилі мають рівні проекції, і навпаки: якщо проекції двох похилих рівні, то рівні й самі похилі (рис. 122, б);
- 3) більша похила має більшу проекцію, і навпаки: з двох похилих більша та, яка має більшу проекцію (рис. 122, в).

Усі ці властивості випливають з теореми Піфагора (самостійно поясніть чому). Але деякі з них можна також дістати і з інших властивостей прямокутного трикутника.

Запитання і задачі



УСНІ ВПРАВИ

416. Квадрат гіпотенузи прямокутного трикутника удвічі більший за квадрат катета. Чому дорівнюють гострі кути трикутника?

417. Яку градусну міру має найбільший кут трикутника зі сторонами 6, 8 і 10? Чому?

418. Сторони паралелограма дорівнюють 3 см і 4 см, а діагональ 5 см. Визначте вид паралелограма.

419. У трикутнику ABC $\angle A = 90^\circ$. Назвіть:

- похилу до прямої AB , проведену з точки C ;
- проекцію похилої BC на пряму AC .

420. Відрізки a_1 і a_2 — проекції похилих l_1 і l_2 , проведених з однієї точки до однієї прямої. Порівняйте:

- l_1 і l_2 , якщо $a_1 < a_2$;
- a_1 і a_2 , якщо $l_1 = l_2$.

421. Дві похилі до однієї прямої мають рівні проекції. Чи обов'язково ці похилі рівні?

422. Скільки рівних похилих до даної прямої можна провести з точки, яка не лежить на цій прямій?



ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

423. Накресліть прямокутний трикутник із катетами 3 см і 4 см. Обчисліть за теоремою Піфагора довжину його гіпотенузи. Перевірте отриманий результат вимірюванням.

424. Побудуйте трикутник зі сторонами 2,5 см, 6 см і 6,5 см. Виміряйте найбільший кут трикутника. Обґрунтуйте отриманий результат за допомогою теореми, оберненої до теореми Піфагора.



ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

Рівень А

425. У прямокутному трикутнику з катетами a і b та гіпотенузою c знайдіть:

- c , якщо $a = 7$, $b = 24$;
- b , якщо $a = \sqrt{17}$, $c = 9$;
- a , якщо $b = 3\sqrt{3}$, $c = 6$.

426. З точки до прямої проведено перпендикуляр і похилу. Знайдіть довжину:

- похилої, якщо її проекція дорівнює 9 см, а перпендикуляр має довжину 40 см;
- перпендикуляра, якщо похила та її проекція дорівнюють відповідно 29 см і 20 см.

→ **427.** У прямокутнику знайдіть:

- діагональ, якщо сторони дорівнюють 10 см і 24 см;
- периметр, якщо діагональ дорівнює 10 см, а одна із сторін 6 см.

428. У рівнобедреному прямокутному трикутнику знайдіть:

- гіпотенузу, якщо катет дорівнює 4 см; $2\sqrt{2}$ см; a см;
- катет, якщо гіпотенуза дорівнює 10 см; $\sqrt{2}$ см; c см.

→ **429.** У квадраті знайдіть:

- діагональ, якщо сторона дорівнює a ;
- сторону, якщо діагональ дорівнює d .

430. Визначте, чи є прямокутним трикутник зі сторонами:

- 4, 5, 6;
- 5, 12, 13;
- 2, $\sqrt{7}$, $\sqrt{13}$;
- 6, 8, $\sqrt{10}$.

→ **431.** Сторони трикутника дорівнюють 12 см, 16 см і 20 см. Який кут утворює з найменшою стороною бісектриса найбільшого кута?

432. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 16 см. Знайдіть периметр трикутника, якщо його бісектриса, проведена до основи, дорівнює 6 см.

→ **433.** Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 36 см, а бічна сторона — 13 см. Знайдіть медіану трикутника, проведену до основи.

434. Діагоналі паралелограма дорівнюють 16 см і 30 см, а сторона — 17 см. Доведіть, що даний паралелограм є ромбом.

→ **435.** Знайдіть периметр ромба з діагоналями 10 м і $2\sqrt{11}$ м.

Рівень Б

436. Дві сторони прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть довжину третьої сторони. Скільки розв'язків має задача?

437. У прямокутному трикутнику знайдіть невідомі сторони, якщо:

- катети відносяться як 3 : 4, а гіпотенуза дорівнює 45 см;
- висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює 12 см, а проекція одного з катетів на гіпотенузу має довжину 16 см.

→ **438.** У прямокутному трикутнику знайдіть невідомі сторони, якщо:

- катет і гіпотенуза відносяться як $12 : 13$, а другий катет дорівнює 10 см;
- проекції катетів на гіпотенузу дорівнюють 18 см і 32 см.

439. У рівносторонньому трикутнику знайдіть:

- висоту, якщо сторона дорівнює 6 см; $2\sqrt{3}$ см; a см;
- сторону, якщо висота дорівнює 1 см; $3\sqrt{3}$ см; h см.

440. Знайдіть висоту ромба, якщо вона ділить сторону на відрізки завдовжки 6 см і 4 см, починаючи від вершини гострого кута.

✓ → **441.** Висота рівнобедреного трикутника ділить бічну сторону на відрізки завдовжки 1 см і 12 см, починаючи від основи. Знайдіть основу трикутника.

442. Сторони трикутника дорівнюють 15 см, 20 см і 25 см. Знайдіть медіану і висоту, проведені до найбільшої сторони.

→ **443.** Якщо m і n — натуральні числа, то числа $2mn$, $m^2 - n^2$ і $m^2 + n^2$ складають піфагорову трійку. Доведіть.

444. Основи рівнобедrenoї трапеції дорівнюють 8 см і 18 см, а висота 12 см. Знайдіть периметр трапеції. Чи можна вписати в неї коло?

→ **445.** Основи прямокутної трапеції дорівнюють 21 см і 28 см, а більша бічна сторона — 25 см. Знайдіть периметр трапеції. Чи можна вписати в неї коло?

446. З точки до прямої проведено перпендикуляр завдовжки 8 см і дві похилі з довжинами 10 см і 17 см. Знайдіть відстань між основами похилих. Скільки розв'язків має задача?

447. Знайдіть висоту, проведену до найбільшої сторони трикутника зі сторонами:

- 15, 41 і 52;
- 10, 17 і 21.

→ **448.** З точки до прямої проведено перпендикуляр і дві похилі, різниця довжин яких складає 8 см. Знайдіть довжину перпендикуляра, якщо проекції похилих дорівнюють 8 см і 20 см.

449. Точка кола віддалена від кінців діаметра на 15 см і 20 см. Знайдіть відстань від даної точки до діаметра.

→ **450.** На колі позначено точки A , B і C так, що $AB = 9$ см, $BC = 40$ см, $AC = 41$ см. Знайдіть радіус кола.

Рівень В

451. Два кола з радіусами 4 см і 9 см дотикаються зовні. Знайдіть відстань між точками дотику спільної дотичної до даних кіл.

→ **452.** Два кола дотикаються зовні. Відстані від точки дотику A цих кіл до точок B і C дотику даних кіл з їх спільною зовнішньою дотичною дорівнюють відповідно 5 см і 12 см. Знайдіть BC .

453. Діагоналі трапеції взаємно перпендикулярні і дорівнюють 1 м і $\sqrt{3}$ м. Знайдіть середню лінію трапеції.

→ **454.** Медіана і висота, проведені до гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнюють відповідно 25 см і 24 см. Знайдіть радіус кола, вписаного в трикутник.

455. Доведіть, що квадрат висоти рівнобедреної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює добутку її основ.

→ **456.** Якщо діагоналі чотирикутника перпендикулярні, то суми квадратів довжин його протилежних сторін рівні. Доведіть. Сформулюйте і доведіть "обернене твердження".



ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 14

Теоретичний матеріал

- дотична до кола;
- геометричні місця точок.

7 клас, § 20, 22

Задачі

457. На катеті AB прямокутного трикутника ABC ($\angle A = 90^\circ$) позначена точка K . Відрізок KM — перпендикуляр до гіпотенузи BC , причому $KM = AK$. Доведіть, що CK — бісектриса трикутника ABC .

458. У гострокутному трикутнику ABC $AB > BC$, BD — висота трикутника. Порівняйте довжини відрізків AD і DC . Чи зміниться відповідь, якщо BD — бісектриса трикутника? Висловіть припущення.

§ 14. Застосування подібності трикутників

14.1. Властивість бісектриси трикутника

Теорема (властивість бісектриси трикутника)

Бісектриса трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні двом іншим сторонам.

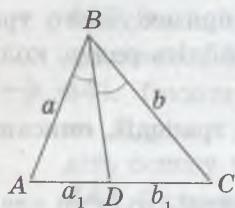


Рис. 123. Властивість бісектриси трикутника

За даними рисунка 123 це означає, що

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b}.$$

Доведення

□ Нехай BD — бісектриса трикутника ABC . Доведемо, що $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$.

У випадку, коли $AB = BC$, твердження теореми очевидне, оскільки бісектриса BD водночас є медіаною. Розглянемо випадок, коли $AB \neq BC$.

Проведемо перпендикуляри AE і CF до прямої BD (рис. 124). Прямокутні трикутники ADE і CDF подібні, оскільки їх гострі кути при вершині D рівні як вертикальні. Із подібності цих трикутників маємо: $\frac{AE}{CF} = \frac{AD}{DC}$. З ін-

шого боку, прямокутні трикутники ABE і CBF також подібні, оскільки мають рівні гострі кути

при вершині B . Звідси випливає, що $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{CF}$.

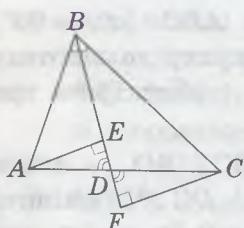


Рис. 124. До доведення властивості бісектриси трикутника

Порівнюючи цю рівність із попередньою, отримуємо: $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$, що й треба було довести. ■



Задача

Знайдіть периметр прямокутного трикутника, якщо його бісектриса ділить гіпотенузу на відрізки завдовжкі 15 см і 20 см.

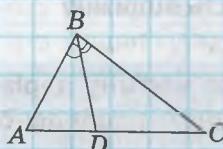


Рис. 125

Розв'язання

Нехай BD — бісектриса прямокутного трикутника ABC з гіпотенузою AC , $AD=15$ см, $DC=20$ см (рис. 125). За властивістю бісектриси трикутника $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$, тобто $AB:BC = 15:20 = 3:4$. Тоді, якщо

$$AB = 3x \text{ см}, \text{ то } BC = 4x \text{ см}, \text{ і за теоремою Піфагора маємо:}$$

$$(3x)^2 + (4x)^2 = 35^2,$$

$$25x^2 = 1225;$$

$$x = 7.$$

Отже, $AB = 21$ см, $BC = 28$ см, $AC = 35$ см, тоді $P_{ABC} = 84$ см.

Відповідь: 84 см.

14.2*. Метричні співвідношення в колі

Теорема (про пропорційність відрізків хорд)

Добутки відрізків хорд, що перетинаються, рівні.

За даними рисунка 126 це означає, що $AM \cdot BM = CM \cdot DM$.

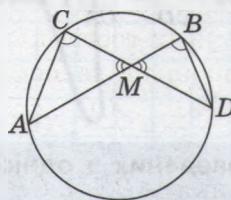


Рис. 126. До доведення пропорційності відрізків хорд

Доведення

□ Нехай хорди AB і CD перетинаються в точці M . Проведемо хорди AC і BD . Трикутники ACM і DBM подібні за двома кутами: $\angle C = \angle D$ як вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу, а кути при вершині M рівні як вертикальні. Із подібності трикутників випливає,

$$\text{що } \frac{AM}{DM} = \frac{CM}{BM}, \text{ тобто } AM \cdot BM = CM \cdot DM. \blacksquare$$

Теорема (про пропорційність відрізків січної і дотичної)

Добуток січної на її зовнішню частину дорівнює квадрату відрізка дотичної, проведеної з тієї самої точки.

За даними рисунка 127 це означає, що $CB \cdot CA = CD^2$.

Доведення

□ Нехай з точки C до кола проведено січну, яка перетинає коло в точках A і B , і дотичну CD (D — точка дотику). Проведемо хорди AD і BD . Трикутники BCD і DCA подібні за двома кутами: вони мають спільний кут C , а кути CBD і CDA обидва вимірюються половиною дуги AD (див. опорну задачу № 230). Отже, з подібності трикутників маємо $\frac{CB}{CD} = \frac{CD}{CA}$, тобто $CB \cdot CA = CD^2$. ■

Наслідок

Добутки відрізків січних, проведених з однієї точки до кола, рівні.

За даними рисунка 128 це означає, що $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

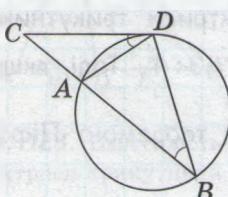


Рис. 127. До доведення пропорційності відрізків січної і дотичної

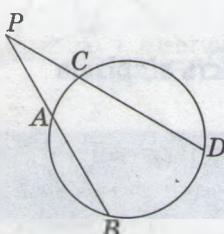


Рис. 128. Пропорційність відрізків січних

14.3*. Метод подібності

Подібність трикутників дає ключ до розв'язання задач на доведення й обчислення, які містять співвідношення між добутками деяких відрізків. Для цього відповідні рівності перетворюють на пропорції, завдяки яким можна довести подібність відповідних трикутників.

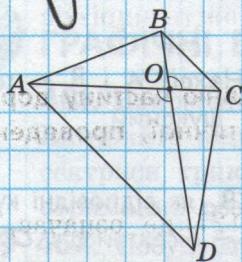


Рис. 129

Задача

Діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O . $AO \cdot BO = CO \cdot DO$.

Розв'язання

Перепишемо дану рівність у вигляді пропорції $\frac{BO}{CO} = \frac{DO}{AO}$. Елементи цієї пропорції є відповідними сторонами трикутників BOC і DOA (рис. 128). Оскільки $\angle BOC = \angle DOA$ як вертикальні, то ці трикутники подібні за двома пропорційними сторонами й кутом між ними, тому $\angle CBO = \angle ADO$. Але кути CBO і ADO внутрішні різносторонні при прямих CB і AD та січній BD . Отже, за ознакою паралельності прямих $BC \parallel AD$.

Подібність трикутників може використовуватись не тільки як інструмент геометричних доведень чи обчислень, але й як засіб для розв'язування задач на побудову. Метод подібності для розв'язування задач на побудову полягає в побудові допоміжної фігури, подібної шуканій.



Задача

Побудуйте трикутник за двома кутами і бісектрисою, проведеною з вершини третього кута.

Розв'язання

Аналіз

Звернемо увагу на те, що два дані кути (нехай вони дорівнюють α і β) визначають форму шуканого трикутника, а довжина даної бісектриси (нехай вона

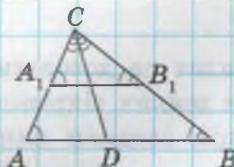


Рис. 130

дорівнює l) — його розміри. При цьому шуканий трикутник буде подібним будь-якому трикутнику з кутами α і β . Звідси випливає план побудови: будуємо спочатку довільний трикутник з кутами α і β , проводимо в ньому бісектрису та, користуючись подібністю трикутників, будуємо шуканий трикутник (рис. 130).

Побудова

1. Побудуємо трикутник A_1B_1C , у якому $\angle A_1 = \alpha$, $\angle B_1 = \beta$.
2. Побудуємо бісектрису кута C .
3. Відкладемо на побудованій бісектрисі відрізок $CD = l$.
4. Проведемо через точку D пряму, паралельну A_1B_1 . Нехай A і B — точки її перетину зі сторонами кута C . Трикутник ABC шуканий.

Доведення

Оскільки за побудовою $AB \parallel A_1B_1$, то $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ як відповідні кути при паралельних прямих. Отже, в трикутнику ABC CD — бісектриса і $CD = l$ за побудовою, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.

Дослідження

Задача має єдиний розв'язок за умови $\alpha + \beta < 180^\circ$ і жодного, якщо $\alpha + \beta \geq 180^\circ$.

Отже, під час розв'язування задач на побудову методом подібності варто дотримуватись такого плану.

1. Виділити з умов задачі ті, що визначають форму шуканої фігури.
2. Побудувати за цими даними фігуру, подібну шуканій.
3. Використовуючи умови задачі, які визначають розміри шуканої фігури, побудувати цю фігуру.

Серед задач на побудову, пов'язаних із подібністю, однією з найбільш цікавих є задача поділу відрізка на дві частини так, щоб одна з них була середнім пропорційним між другою частиною і всім відрізком. Такий поділ відрізка називають поділом у середньому і крайньому відношенні, або золотим перерізом. Докладніше про такий поділ ви можете дізнатися в Додатку 2.

Запитання і задачі



УСНІ ВПРАВИ

459. Бісектриса трикутника ділить протилежну сторону у відношенні $1 : 2$. Чи можуть кути, прилеглі до цієї сторони, бути рівними? Чому?

460. Чи може бісектриса рівнобедреного трикутника ділити бічну сторону у відношенні $2 : 1$, починаючи від основи? Якій теоремі це суперечить?



ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

461. Накресліть трикутник ABC і проведіть його бісектрису BD . Виміряйте відрізки AB , AD і DC . За допомогою властивості бісектриси трикутника обчисліть довжину сторони BC . Перевірте отриманий результат вимірюванням.

→ **462.** Побудуйте трикутник ABC зі сторонами $AB = 6$ см, $BC = 7$ см, $AC = 8$ см. Позначте на стороні BC точку D так, щоб $BD = 3$ см. Сполучіть точки A і D . Виміряйте кути BAD і CAD . Обґрунтуйте отриманий результат.



ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

Рівень А

463. Відрізок BD — бісектриса трикутника ABC . Знайдіть:

- AB , якщо $BC = 8$ см, $AD = 3$ см, $DC = 2$ см;
- AD і DC , якщо $AB = 9$ см, $BC = 6$ см, $AC = 10$ см.

464. Бісектриса рівнобедреного трикутника ділить бічну сторону на відрізки завдовжки 2 см і 4 см, починаючи від основи трикутника. Знайдіть основу трикутника.

→ **465.** Відрізок BD — бісектриса трикутника ABC . Знайдіть сторони трикутника, якщо $AD = 8$ см, $DC = 12$ см, а периметр трикутника дорівнює 45 см.

466. Бісектриса прямокутного трикутника ділить гіпотенузу на відрізки, різниця яких дорівнює 5 см. Знайдіть сторони трикутника, якщо відношення катетів дорівнює $3 : 4$.

- 467. Бісектриса прямокутного трикутника ділить його катет на відрізки завдовжки 4 см і 5 см. Знайдіть периметр трикутника.

Рівень Б

468. Бісектриса кута при основі рівнобедреного трикутника ділить висоту, проведену до основи, на відрізки завдовжки 16,5 см і 27,5 см. Знайдіть відрізки, на які ця бісектриса ділить бічну сторону трикутника.
- 469. Бічна сторона рівнобедреного трикутника відноситься до основи як 5 : 6. Бісектриса кута при основі ділить висоту, проведену до основи, на відрізки, різниця яких дорівнює 4 см. Знайдіть периметр трикутника.
470. У результаті перетину двох хорд одна з них ділиться на відрізки завдовжки 6 см і 16 см, а друга — у відношенні 3 : 2. Знайдіть довжину другої хорди.
- 471. У результаті перетину хорди з діаметром кола хорда ділиться на відрізки завдовжки 3 см і 4 см, а діаметр — у відношенні 1 : 3. Знайдіть радіус кола.
472. Січна, проведена з точки A , перетинає коло в точках B і C , причому $AB = 4$ см, $BC = 5$ см. Знайдіть довжину відрізка дотичної, проведеної до кола з точки A .
- 473. З точки поза колом, віддаленої від найближчої точки кола на 24 см, проведено дотичну до кола. Знайдіть радіус кола, якщо відрізок дотичної дорівнює 36 см.

Рівень В

474. Катет прямокутного трикутника дорівнює 18 см. Точка на цьому катеті віддалена від гіпотенузи й іншого катета на 8 см. Знайдіть периметр трикутника.
- 475. Точка на катеті прямокутного трикутника рівновіддалена від другого катета й гіпотенузи. Перпендикуляр, проведений із даної точки до гіпотенузи трикутника, ділить її на відрізки 3 см і 12 см. Знайдіть периметр трикутника.
476. У трикутнику ABC для висоти CD і відрізків AD і BD , на які вона ділить сторону AB , місце співвідношення $CD^2 = AD \cdot BD$. Доведіть, що кут ACB прямий.
- 477. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC до сторони BC проведено висоту AD . Доведіть, що $2DC \cdot BC = AC^2$.

478. Побудуйте трикутник:

- за двома кутами і висотою, проведеною з вершини третього кута;
- за кутом, бісектрисою цього кута і відношенням сторін, які утворюють даний кут.

→ **479.** Побудуйте трикутник за двома кутами і бісектрисою, проведеною з вершини меншого з них.



ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 15

Теоретичний матеріал

- означення трикутника;
- сума кутів трикутника;
- чотирикутник і його елементи.

7 клас, § 7, 16

8 клас, § 1

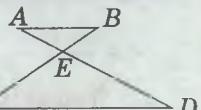
Задачі

480. Доведіть, що периметр паралелограма більший за суму довжин його діагоналей.

481. Два кути трикутника дорівнюють 10° і 70° . Знайдіть кут між висотою і бісектрисою, проведеними з вершини третього кута.

Задачі для підготовки до контрольної роботи № 3

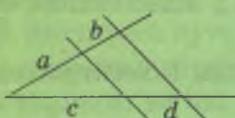
- За рисунком доведіть подібність трикутників ABE і DCE , якщо $AB \parallel CD$.
- Периметр прямокутника дорівнює 34 см, а одна із сторін 5 см. Знайдіть діагональ прямокутника.
- Сторони трикутника пропорційні числам 21, 20 і 29. Доведіть, що даний трикутник прямокутний.
- Із точки до прямої проведено перпендикуляр і дві похилі зважки 17 см і 10 см. Проекції похилих відносяться як 2 : 5. Знайдіть довжину перпендикуляра.
- У прямокутному трикутнику бісектриса ділить гіпотенузу на відрізки 15 см і 20 см. На які відрізки ділить гіпотенузу висота трикутника?
- У колі проведено дві рівні хорди, що перетинаються. Доведіть, що відрізки першої хорди відповідно дорівнюють відрізкам другої хорди.



Підсумки

ПІДСУМКОВИЙ ОГЛЯД РОЗДІЛУ II

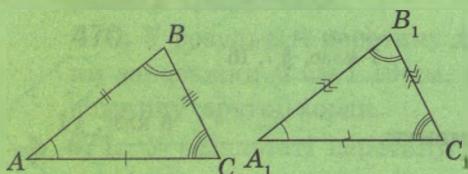
ТЕОРЕМА ПРО ПРОПОРЦІЙНІ ВІДРІЗКИ



Паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на сторонах цього кута пропорційні відрізки:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

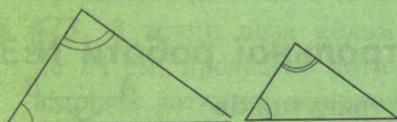
ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ



Два трикутники називаються *подібними*, якщо кути одного з них відповідно дорівнюють кутам іншого і відповідні сторони цих трикутників пропорційні

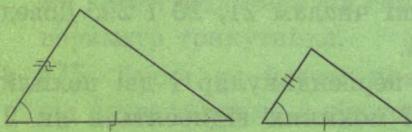
ОЗНАКИ ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

Ознака подібності трикутників за двома кутами



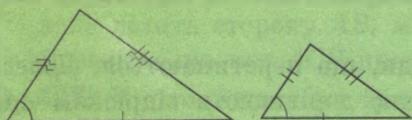
Якщо два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам другого трикутника, то такі трикутники подібні

Ознака подібності трикутників за двома сторонами і кутом між ними



Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого трикутника і кути, утворені цими сторонами, рівні, то такі трикутники подібні

Ознака подібності трикутників за трьома сторонами



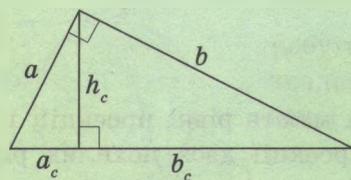
Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трем сторонам другого трикутника, то такі трикутники подібні

ОЗНАКА ПОДІБНОСТІ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ



Якщо два прямокутні трикутники мають по рівному гострому куту, то такі трикутники подібні

МЕТРИЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ В ПРЯМОКУТНОМУ ТРИКУТНИКУ



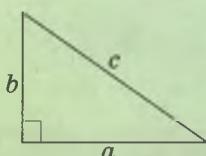
Висота, проведена до гіпотенузи, є середнім пропорційним між проекціями катетів на гіпотенузу: $h_c^2 = a_c \cdot b_c$

Катет є середнім пропорційним між гіпотенузою і його проекцією на гіпотенузу: $a^2 = c \cdot a_c$ і $b^2 = c \cdot b_c$

Висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює добутку катетів, поділеному на гіпотенузу: $h_c = \frac{ab}{c}$

ТЕОРЕМА ПІФАГОРА ТА ЇЇ НАСЛІДКИ

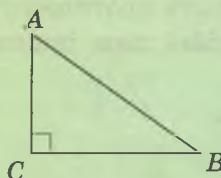
Теорема Піфагора



У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Теорема, обернена до теореми Піфагора



Якщо сума квадратів двох сторін трикутника дорівнює квадрату третьої сторони, то такий трикутник прямокутний:

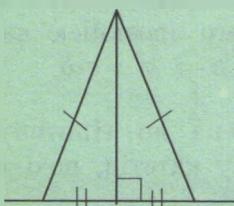
якщо $AC^2 + BC^2 = AB^2$, то $\angle C = 90^\circ$

ПЕРПЕНДИКУЛЯР І ПОХИЛА

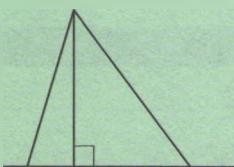


Нехай з однієї точки до прямої проведено перпендикуляр і похилі. Тоді:

- будь-яка похила більша за перпендикуляр і більша за свою проекцію на дану пряму;

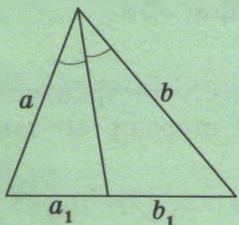


- рівні похилі мають рівні проекції, і навпаки: якщо проекції двох похилих рівні, то рівні й самі похилі



- більша похила має більшу проекцію, і навпаки: з двох похилих більша та, яка має більшу проекцію

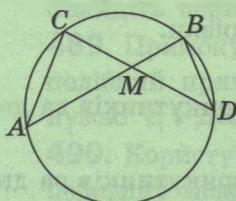
ВЛАСТИВІСТЬ БІСЕКТРИСИ ТРИКУТНИКА



Бісектриса трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні двом іншим сторонам:

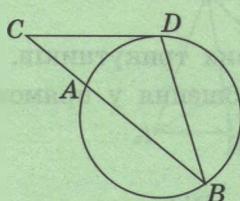
$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b}$$

МЕТРИЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ У КОЛІ



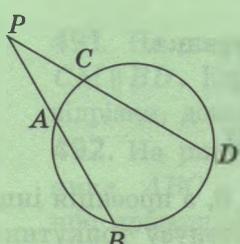
Добутки відрізків хорд, що перетинаються, рівні:

$$AM \cdot BM = CM \cdot DM$$



Добуток січної на її зовнішню частину дорівнює квадрату відрізка дотичної, проведеної з тієї самої точки:

$$CB \cdot CA = CD^2$$



Добутки відрізків січних, проведених з однієї точки до кола, рівні:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$



КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ II

1. Сформулюйте теорему про пропорційні відрізки.
2. Дайте означення подібних трикутників.
3. Сформулюйте і доведіть ознаку подібності трикутників за двома кутами.
4. Сформулюйте і доведіть ознаку подібності трикутників за двома сторонами й кутом між ними.
5. Сформулюйте і доведіть ознаку подібності трикутників за трьома сторонами.
6. Сформулюйте ознаки подібності прямокутних трикутників.
7. Сформулюйте і доведіть метричні співвідношення у прямокутному трикутнику.
8. Сформулюйте і доведіть теорему Піфагора.
9. Сформулюйте теорему, обернену до теореми Піфагора.
10. Сформулюйте властивості перпендикуляра та похилих, проведених з однієї точки до прямої.
11. Сформулюйте властивість бісектриси трикутника.



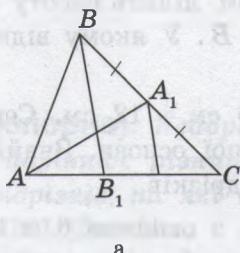
ДОДАТКОВІ ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ II

- 482.** Катет прямокутного трикутника дорівнює 6, а проекція іншого катета на гіпотенузу дорівнює 5. Знайдіть гіпотенузу трикутника.
- 483.** Периметр прямокутника дорівнює 46 см, а діагональ — 17 см. Знайдіть сторони прямокутника.
- 484.** Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника з периметром 16 см, якщо медіана, проведена до основи, дорівнює 4 см.
- 485.** Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 25 см. Знайдіть катети трикутника, якщо висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює 12 см.
- 486.** Периметр трикутника дорівнює 27 см. Обчисліть його сторони, якщо бісектриса ділить одну з них на відрізки завдовжки 4 см і 5 см.
- 487.** Периметр рівнобедrenoї трапеції дорівнює 1 м, а різниця основ складає 14 см. Знайдіть радіус кола, вписаного в трапецію.

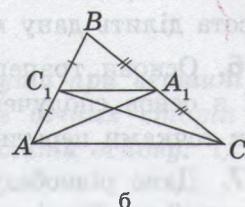
488. Катет прямокутного трикутника дорівнює 32 см. Точка, що лежить на цьому катеті, віддалена від кінців гіпотенузи на 25 см. Знайдіть периметр трикутника.

489. Прямокутний трикутник із катетами a і b та гіпотенузою c подібний прямокутному трикутнику з катетами a_1 і b_1 та гіпотенузою c_1 . Доведіть, що $aa_1 + bb_1 = cc_1$.

490. Користуючись рисунками 131, а, б, доведіть теорему про точку перетину медіан трикутника ще двома способами.



а



б

Рис. 131

491. На рисунку 132 відрізок BD — бісектриса трикутника ABC , $CM \parallel BD$. Користуючись цим рисунком і теоремою про пропорційні відрізки, доведіть властивість бісектриси трикутника.

492. На рисунку 133 CM — бісектриса зовнішнього кута трикутника ABC , $BD \parallel CM$. Користуючись цим рисунком і теоремою про пропорційні відрізки, доведіть, що $AM : BM = AC : BC$.

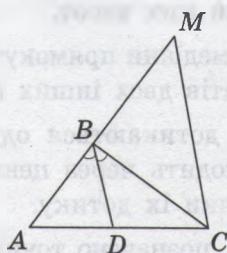


Рис. 132

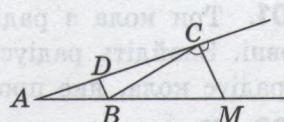


Рис. 133

493. Побудуйте трикутник за кутом, медіаною, проведеною з його вершини, і відношенням сторін, прилеглих до даного кута.

Задачі підвищеної складності

494. У трикутнику ABC на сторонах BC і AC позначені точки A_1 і B_1 , відповідно. Відрізки AA_1 і BB_1 перетинаються в точці O . Знайдіть:

- а) $AO : A_1O$, якщо $AB_1 : B_1C = 2 : 1$, $BA_1 = A_1C$;
- б) $BA_1 : A_1C$, якщо $AO : OA_1 = 4 : 1$, $AB_1 : B_1C = 2 : 1$;
- в) $BA_1 : A_1C$ і $AB_1 : B_1C$, якщо $AO : OA_1 = 4 : 1$, $BO : OB_1 = 7 : 4$.

495. У трикутнику ABC медіана AM ділить висоту BH у відношенні $3 : 1$, починаючи від вершини B . У якому відношенні дана висота ділить дану медіану?

496. Основи трапеції дорівнюють 6 см і 12 см. Середини кожної з основ сполучені з кінцями іншої основи. Знайдіть відстань між точками перетину проведених відрізків.

497. Дано рівнобедрений трикутник з основою 6 м і бічною стороною 9 м. Відрізки якої довжини треба відкласти від вершини на бічних сторонах, щоб при сполученні їх кінців отримати трикутник із периметром 16 м, подібний до даного?

498. Основи трапеції дорівнюють a і b ($a < b$). Через точку перетину продовжень бічних сторін проведено пряму, паралельну основам. Знайдіть довжину відрізка цієї прямі, що міститься між продовженнями діагоналей.

499. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 36 см, а бічна сторона — 54 см. До бічних сторін проведено висоти. Знайдіть довжину відрізка, кінцями якого є основи цих висот.

500. Доведіть, що квадрат найменшої медіани прямокутного трикутника в 5 разів менший за суму квадратів двох інших медіан.

501. Три кола з радіусами 1, 2 і 3 дотикаються одне до одного зовні. Знайдіть радіус кола, яке проходить через центри цих кіл, і радіус кола, яке проходить через точки їх дотику.

502. Усередині прямокутника $ABCD$ позначено точку M , причому $MA = a$, $MB = b$, $MC = c$. Знайдіть MD .

503. Знайдіть геометричне місце точок, сума квадратів відстаней від яких до даних точок A і B стала.

504 (теорема Птолемея). Добуток діагоналей вписаного чотирикутника дорівнює сумі добутків двох пар його протилежних сторін: $d_1 \cdot d_2 = ac + bd$ (рис. 134). Доведіть.

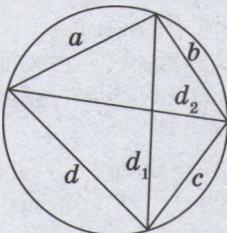


Рис. 134

505 (опорна). Квадрат бісектриси кута при вершині трикутника дорівнює різниці між добутком бічних сторін і добутком відрізків, на які ця бісектриса ділить основу: $l_c^2 = ab - mn$ (рис. 135). Доведіть.

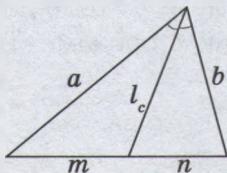


Рис. 135

Історична довідка



Евклід

Теорії подібності трикутників присвячений шостий розділ «Начал» **Евкліда**. Цікаво, що, наприклад, у геометрії Лобачевського не існує подібних трикутників, які не були б рівними. Виявляється, що аксіома паралельних прямих в евклідовій геометрії рівносильна припущення про існування подібних, але нерівних трикутників.

Центральне місце в евклідовій геометрії посідає теорема Піфагора. **Піфагор Самоський** (бл. 580–500 рр. до н. е.) тривалий час прожив у Єгипті та Вавилоні, потім оселився в місті

Кротон (грецький колонії на південній Італії) і заснував так званий піфагорійський союз. Вважається, що саме від піфагорійців іде слово «математика» (грецьке «матема» означає «наука», «пізнання»). Властивості трикутника зі сторонами 3, 4 і 5 були відомі давнім єгиптянам і китайським ученим. Піфагор почав досліджувати інші прямокутні трикутники із ціличисловими сторонами. Розглянувши рівнобедрений





Піфагор

прямокутний трикутник з одиничними катетами, він побачив, що довжина його гіпотенузи не виражається цілим числом — так було відкрито ірраціональні числа. Згодом Піфагору вдалося довести, що сума площ квадратів, побудованих на катетах прямокутного трикутника, дорівнює площі квадрата, побудованого на гіпотенузі — саме так виглядала теорема Піфагора в класичному формулуванні. За легендою, на честь свого відкриття він приніс богам у жертву сто биків.

Сьогодні достеменно невідомо, які з відкриттів піфагорійців належать самому Піфагорові, а які — його учням. Узагалі, школа Піфагора існувала достатньо закрито і відокремлено від громади. Це породило ненависть до піфагорійців, і школа була розгромлена, а сам він мусив утекти і в дорозі був убитий. Після смерті Піфагора його учні розбрелися по всій Греції і почали поширювати його вчення, яке дійшло і до наших днів.



Піфагорійський союз був одночасно і філософською школою, і науковим товариством, і релігійним братством, і навіть політичною партією. Дослідження піфагорійців охоплювали й арифметику, і філософію, і музику, і астрономію.



ТЕМАТИКА ПОВІДОМЛЕНЬ ТА РЕФЕРАТІВ ДО РОЗДІЛУ II

1. Піфагор Самоський — учений, філософ, громадський діяч.
2. Архімед і його здобутки в геометрії. Задачі про арбелос.
3. Пропорційні відрізки в трапеції.
4. Теореми Чеви і Менелая та їх наслідки.
5. «Золотий переріз» в архітектурі й мистецтві.
6. Прикладне застосування подібності трикутників. Пропорційний циркуль.

РЕКОМЕНДОВАНІ ДЖЕРЕЛА ІНФОРМАЦІЇ

1. Математична хрестоматія. Т. 1, 2.— К.: Рад. шк., 1970.
2. Глейзер Г. И. История математики в школе. VII—VIII кл.— М.: Просвещение, 1982.
3. Бевз Г. П. Геометрія трикутника.— К.: Генеза, 2005.
4. Бевз Г. П. Геометрія кіл.— Х.: Основа, 2004.
5. Кушнір І. А. Повернення втраченої геометрії.— К.: Факт, 2000.
6. Литцман В. Теорема Пифагора.— М.: Физматгиз, 1960.
7. Еленський ІІ. По следам Пифагора.— М.: Детгиз, 1961.
8. Філіпповський Г. Б., Білецький Ю. О. Фігури на піску.— Х.: Основа, 2003.
9. Прасолов В. В. Задачи по геометрии. Ч. 1.— М.: Наука, 1986.
10. Шарыгин И. Ф. Геометрия 7—9.— М.: Дрофа, 1997.
11. Нikuлин А. В., Кукуш А. Г., Татаренко Ю. С. Геометрия на площині (Планиметрия).— Мн.: Попурри, 1996.
12. Інтернет-бібліотека МЦНМО. <http://ilib.mirror0.mccme.ru/>



МНОГОКУТНИКИ. ПЛОЩІ МНОГО- КУТНИКІВ

- Означення многокутника
- Площа многокутника. Площі прямокутника й паралелограма
- Площі трикутника і трапеції
- Застосування площ

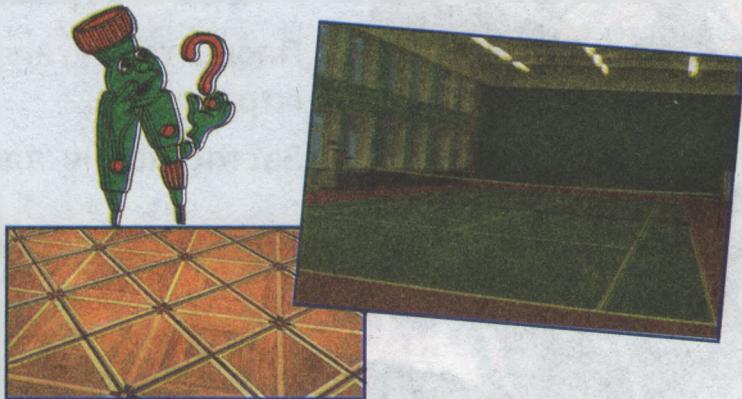
Математика, відокремлюючи лінію від площини і площа від тіла, стверджує, що реальне лише тіло, а лінія і площа — абстракції.

Олександр Герцен,
російський письменник

До цього часу в теоремах і задачах розглядалися лише числові характеристики окремих елементів геометричних фігур — довжини сторін, градусні міри кутів тощо. На відміну від них площа характеризує фігуру в цілому, тобто залежить як від її форми, так і від розмірів.

У повсякденному житті ми маємо справу з площами кожного дня — вимірюємо наші помешкання і присадибні ділянки, лісові масиви і сільськогосподарські угіддя. Обчисленням площ займалися і на уроках математики в молодших класах. Проте дати строгое з наукової точки зору означення площи не така вже й проста річ, і відповідна математична теорія була створена значно пізніше від багатьох відомих теорем.

У цьому розділі ми узагальнимо відомості про многокутники і їх площи. Завдяки цьому ваш математичний багаж поповниться чималою кількістю нових формул, які необхідно знати і вміти застосовувати. З цього приводу дамо вам таку пораду: засвоїти будь-яку формулу значно простіше, якщо зрозуміти і запам'ятати спосіб її отримання. Більш того, відкриємо вам маленьку професійну таємницю: іноді навіть фахівці-математики не запам'ятають певні формули, а виводять їх подумки в разі необхідності. І буде дуже добре, якщо такої математичної ерудиції вдасться набути і вам.



§ 15. Означення многокутника

15.1. Ламана і многокутник

У попередніх розділах розглядалися означення трикутника і чотирикутника. Для означення многокутника з довільним числом сторін введемо поняття ламаної.

Означення

Ламаною називається фігура, яка складається з точок A_1, A_2, \dots, A_n , послідовно сполучених відрізками.

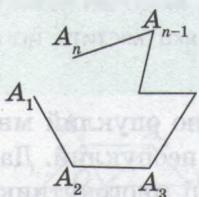


Рис. 136. Ламана

На рисунку 136 зображено ламану $A_1A_2\dots A_n$. Точки A_1, A_2, \dots, A_n називаються **вершинами ламаної**, а відрізки $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ — **ланками ламаної**.

Ламана називається **простою**, якщо вона не має самоперетинів.

Ламана називається **замкненою**, якщо її кінці збігаються.

Очевидно, що проста замкнена ламана $A_1A_2A_3$ являє собою трикутник, а проста замкнена ламана $A_1A_2A_3A_4$, ланки якої не лежать на одній прямій, — чотирикутник. Саме ці спостереження і обґрунтують таке означення.

Означення

Многокутником називається проста замкнена ламана, сусідні ланки якої не лежать на одній прямій.

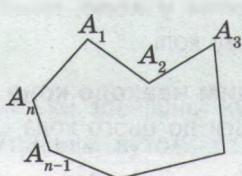


Рис. 137. Многокутник

У цьому випадку вершини ламаної є **вершинами многокутника**, а її ланки — **сторонами многокутника**. На рисунку 137 зображено

многокутник $A_1A_2\dots A_n$, який має n вершин (і, відповідно, n сторін). Такий многокутник називають **n -кутником**.

Означення

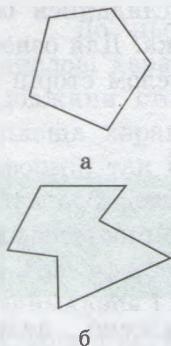


Рис. 138. Опуклий і неопуклий многокутники

Периметром многокутника називається сума довжин усіх його сторін.

Діагоналлю многокутника називається відрізок, що сполучає дві несусідні вершини.

Многокутник називається **опуклим**, якщо він лежить по один бік від будь-якої прямої, яка містить його сторону.

На рисунку 138, а зображене опуклий многокутник, а на рисунку 138, б — неопуклий. Далі будемо розглядати лише опуклі многокутники.

Означення

Кутом (внутрішнім кутом) опуклого многокутника при даній вершині називається кут між сторонами, що сходяться в цій вершині.

Зовнішнім кутом опуклого многокутника при даній вершині називається кут, суміжний з його внутрішнім кутом при цій вершині.

Будь-який внутрішній кут опуклого многокутника менший за 180° .

Означення

Многокутник називається **вписаним у коло**, якщо всі його вершини лежать на цьому колі.

Многокутник називається **описаним навколо кола**, якщо всі його сторони дотикаються до цього кола.

На рис. 139, а зображене вписаний многокутник, а на рис. 139, б — описаний.

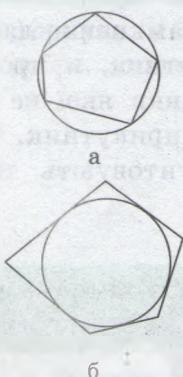


Рис. 139. Вписаний і описаний многокутники

15.2. Сума кутів опуклого многокутника

Як ви знаєте, сума кутів трикутника дорівнює 180° , а сума кутів чотирикутника — 360° . Неважко передбачити, що сума кутів опуклого многокутника має залежати від кількості його сторін. Ця залежність виражається такою теоремою.

Теорема (про суму кутів опуклого n -кутника)

Сума кутів опуклого n -кутника дорівнює $180^\circ(n - 2)$.

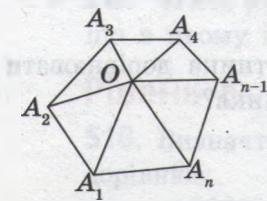


Рис. 140. До доведення теореми про суму кутів опуклого n -кутника

Доведення

□ Нехай дано опуклий n -кутник $A_1A_2\dots A_n$ (рис. 140). Позначимо всередині нього довільну точку O і сполучимо її з вершинами A_1 , A_2 , A_3 , ..., A_n . При цьому утворюється n трикутників. Звернемо увагу на те, що сума кутів даного многокутника дорівнює сумі кутів цих трикутників без суми кутів при вершині O . Оскільки сума кутів цих трикутників при вершині O складає 360° , то шукана сума кутів многокутника дорівнює $180^\circ \cdot n - 360^\circ$, тобто $180^\circ(n - 2)$. ■

Задача

Доведіть, що сума зовнішніх кутів опуклого n -кутника, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360° .

Розв'язання

Оскільки зовнішній кут многокутника за означенням є суміжним із відповідним внутрішнім кутом, то сума цих двох кутів дорівнює 180° . Таким чином, сума всіх внутрішніх і зовнішніх кутів дорівнює $180^\circ \cdot n$. Щоб отримати суму зовнішніх кутів, віднімемо від цієї суми суму внутрішніх кутів: $180^\circ \cdot n - 180^\circ(n - 2) = 360^\circ$.

Запитання і задачі



УСНІ ВПРАВИ

506. Скільки діагоналей виходить з однієї вершини семикутника?

507. Чи може діагональ шестикутника ділити його:

- на два трикутники;
- на два чотирикутники;
- на трикутник і п'ятикутник?

508. Діагональ відтинає від п'ятикутника чотирикутник. Який вид має частина, що лишилася?

509. Чи може опуклий п'ятикутник мати чотири гострі кути; чотири прямі кути; чотири тупі кути?

510. Чи можуть чотири кути опуклого п'ятикутника дорівнювати відповідно чотирьом кутам опуклого чотирикутника?



ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

511. Накресліть опуклий п'ятикутник.

- Проведіть усі діагоналі п'ятикутника. Скільки діагоналей виходить з однієї вершини?
- Яка фігура утворилася при попарному перетині діагоналей?
- Виміряйте кути п'ятикутника і обчисліть їх суму. Перевірте отриманий результат, користуючись відповідною теоремою.

→ **512.** Накресліть опуклий шестикутник.

- Проведіть червоним кольором діагональ, яка ділить даний шестикутник на два чотирикутники. Скільки існує таких діагоналей?
- Проведіть синім кольором діагональ, яка ділить даний шестикутник на трикутник і п'ятикутник. Установіть залежність між кількістю кутів опуклого многокутника і сумарною кількістю кутів многокутників, на які він ділиться діагоналлю.



ПІСЬМОВІ ВПРАВИ

Рівень А

513. Знайдіть суму кутів опуклого:

- а) шестикутника; б) дванадцятикутника.

514. Визначте кількість сторін опуклого многокутника, сума кутів якого дорівнює:

- а) 540° ; б) 900° ; в) 1260° .

→ **515.** Усі кути опуклого восьмикутника рівні. Знайдіть їх градусну міру.

516. Два кути опуклого п'ятикутника прямі, а решта три рівні. Знайдіть їх градусну міру.

→ **517.** П'ять кутів опуклого шестикутника дорівнюють 120° . Доведіть, що в цьому шестикутнику всі кути рівні.

Рівень Б

518. Визначте, чи існує опуклий многокутник, сума кутів якого дорівнює:

- а) 1620° ; б) 1350° ; в) 1980° .

У випадку ствердної відповіді вкажіть кількість його сторін.

519. Діагональ ділить опуклий многокутник на п'ятикутник і чотирикутник. Визначте вид даного многокутника і знайдіть суму його кутів.

→ **520.** Три кути опуклого многокутника дорівнюють 80° , а решта — по 160° . Визначте кількість сторін многокутника.

521. Визначте кількість сторін опуклого многокутника, кожен кут якого дорівнює:

- а) 60° ; б) 108° ; в) 120° .

→ **522.** Усі кути опуклого многокутника прямі. Доведіть, що він є прямокутником.

Рівень В

523. Визначте кількість діагоналей n -кутника.

524. Доведіть, що опуклий многокутник не може мати більше ніж три гострі кути.

→ 525. У рівносторонньому п'ятикутнику кути при одній стороні прямі. Знайдіть решту кутів.

526 (опорна). Довжина будь-якої сторони многокутника менша за суму довжин решти сторін. Доведіть.

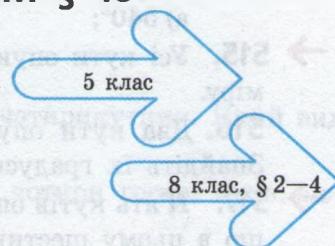
→ 527. Периметр опуклого многокутника дорівнює 20 см. Чи може його діагональ дорівнювати 10 см? Відповідь обґрунтуйте.



ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 16

Теоретичний матеріал

- площі прямокутника і квадрата;
- паралелограм і його види.



Задачі

528. Через середину сторони AB паралелограма $ABCD$ проведено пряму, перпендикулярну до прямої BC . Доведіть рівність трикутників, утворених цією прямою, відрізками сторони AB та прямими BC і AD .

529. Доведіть, що сума висот паралелограма менша за його периметр.

§ 16. Площа многокутника. Площі прямокутника і паралелограма

16.1. Поняття площини многокутника

Поняття площини добре зрозуміле на рівні повсякденного досвіду: ми вимірюємо площину спортивного майданчика або садової ділянки, розраховуємо за площею кількість шпалер або килимового покриття для ремонту кімнати і т. д. Спробуємо надати уявленням про площину певну математичну строгості.

Домовимось, що під площею многокутника ми будемо розуміти площину його внутрішньої області, тобто скінченої частини площини, обмеженої многокутником. Як і у випадку вимірювання довжин відрізків, вимірювання площ ґрунтуються на порівнянні даної фігури з фігурою, площу якої прийнято за одиницю вимірювання. За одиницю вимірювання площ приймають площину квадрата, сторона якого дорівнює одиниці вимірювання відрізків.

Наприклад, якщо за одиницю вимірювання відрізків прийнято 1 мм, 1 см або 1 м, то за одиницю вимірювання площ приймають площину квадрата зі стороною 1 мм, 1 см або 1 м. Площа такого квадрата називається квадратним міліметром (мм^2), квадратним сантиметром (см^2) або квадратним метром (м^2) відповідно. З курсу математики відомі й інші одиниці площини: ар (площа квадрата зі стороною 10 м), гектар (площа квадрата зі стороною 100 м) тощо.

При обраній одиниці вимірювання площа кожного многокутника виражається додатним



числом, яке показує, скільки разів одиниця вимірювання площи і її частини вкладаються в даному многокутнику. Зазвичай площа позначається буквою S .

Для визначення наближеного значення площини можна використовувати палетку — прозору плівку з квадратною сіткою (рис. 141). Наклавши її на дану фігуру, площину визначають звичайним підрахунком кількості одиничних квадратів, які вмістилися в цій фігурі. Однак на практиці застосовувати такий спосіб незручно. Тому для визначення площини многокутника зазвичай вимірюють лише деякі пов'язані з ним відрізки, а потім обчислюють площину за відповідними формулами. Виведення цих формул ґрунтуються на властивостях площин, які ми зараз розглянемо.

Перш за все зазначимо, що коли два многокутники рівні, то одиниця вимірювання площини і її частини вкладаються в кожному з них однакову кількість разів, тобто має місце така властивість.

1. Рівні многокутники мають рівні площини.

Далі, нехай многокутник складається з декількох частин — інших многокутників, які не мають спільних внутрішніх точок (рис. 142). Якщо ці частини мають площини S_1 , S_2 , S_3 , то площа всього многокутника дорівнює їх сумі: $S = S_1 + S_2 + S_3$. У цьому полягає друга властивість площин.

2. Якщо многокутник складений із кількох многокутників, то його площа дорівнює сумі площ цих многокутників.

Третя властивість площин пов'язана з одиницею їх вимірювання.

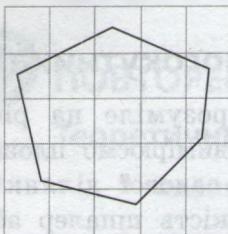


Рис. 141. Вимірювання площини за допомогою палетки

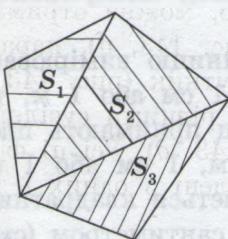


Рис. 142. Площа многокутника дорівнює сумі площ його частин

§ 16. Площа многокутника. Площі прямокутника і паралелограма

3. Площа квадрата зі стороною, що дорівнює одиниці довжини, дорівнює одиниці площин.

Три щойно наведені властивості називають **аксіомами площин**.

Отже, **площа многокутника** — це додатна величина, числове значення якої задовільняє аксіоми площин.

Із цього, зокрема, випливає, що **кожний многокутник має певну площину, яка однозначно визначається в заданих одиницях вимірювання**.

Означення

Дві фігури називаються **рівновеликими**, якщо вони мають рівні площини.

Очевидно, що за першою аксіомою площин будь-які два рівні многокутники рівновеликі. Однак не будь-які два рівновеликі многокутники рівні.

Якщо розглянути два рівні прямокутні трикутники (рис. 143, а), то, прикладаючи їх рівними сторонами один до одного, можна отримати рівнобедрений трикутник (рис. 143, б), паралелограм (рис. 143, в), прямокутник (рис. 143, г) або чотирикутник із попарно рівними сусідніми сторонами — дельтоїд (рис. 143, д). Усі ці фігури **рівноскладені**, тобто складені з одних і тих самих многокутників.

За другою аксіомою площин усі утворені таким способом фігури мають рівні площини. Отже, **будь-які рівноскладені многокутники рівновеликі**. Цікаво, що має місце й обернене твердження (теорема Больяї—Гервіна): **будь-які два рівновеликі многокутники рівноскладені** (наводимо цей факт без доведення).

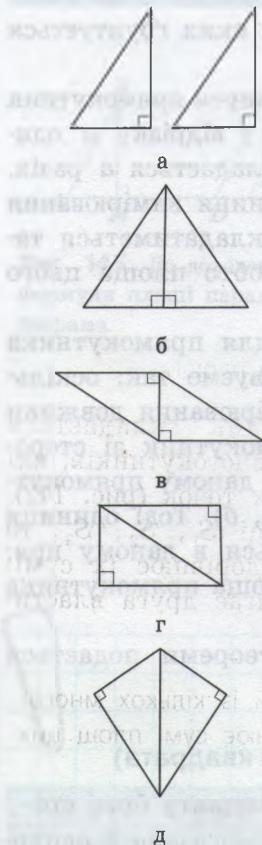


Рис. 143. Рівноскладені многокутники

16.2. Площа прямокутника

Найпростішою фігурою з точки зору обчислення площи є прямокутник.

Теорема (формула площи прямокутника)

Площа прямокутника дорівнює добутку його сусідніх сторін:

$$S = ab,$$

де a і b — сторони прямокутника.

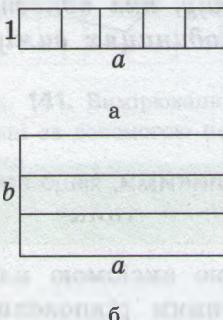


Рис. 144. До обґрунтування формулі площи прямокутника

Наведемо міркування, на яких ґрунтуються доведення цієї теореми.

Спочатку необхідно розглянути прямокутник зі сторонами 1 і a . Оскільки у відрізку a одиниця вимірювання довжини вкладається a разів, то в цьому прямокутнику одиниця вимірювання площи (одиничний квадрат) вкладатиметься також a разів (рис. 144, а), тобто площа цього прямокутника дорівнює a .

У загальному випадку для прямокутника зі сторонами a і b розмірковуємо так: оскільки у відрізку b одиниця вимірювання довжини вкладається b разів, то прямокутник зі сторонами 1 і a вкладатиметься в даному прямокутнику також b разів (рис. 144, б). Тоді одиниця вимірювання площи вкладається в даному прямокутнику ab разів, тобто площа прямокутника дорівнює ab .

Повне доведення цієї теореми подається в Додатку 1.

Наслідок (формула площи квадрата)

Площа квадрата дорівнює квадрату його сторони:

$$S = a^2,$$

де a — сторона квадрата.

16.3. Площа паралелограма

За допомогою формулі площини прямокутника можна довести формулу площини для довільного паралелограма.

Теорема (формула площини паралелограма)

Площа паралелограма дорівнює добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони:

$$S = ah,$$

де a — сторона паралелограма, h_a — проведена до неї висота.

Доведення

□ Нехай $ABCD$ — даний паралелограм, який не є прямокутником (рис. 145). Проведемо до його висоти BH та CF і доведемо, що $S_{ABCD} = AD \cdot BH$. Чотирикутник $ABCF$ є прямокутною трапецією, площу якої можна обчислити двома способами — як суму площ паралелограма $ABCD$ і трикутника DCF або як суму площ прямокутника $HBCF$ і трикутника ABH : $S_{ABCF} = S_{ABCD} + S_{DCF} = S_{HBCF} + S_{ABH}$. Трикутники ABH і DCF рівні за гіпотенузою і катетом ($AB = DC$ як протилежні сторони паралелограма, $BH = CF$ як відстані між паралельними прямими). Отже, ці трикутники мають рівні площини. Тоді площини паралелограма $ABCD$ і прямокутника $HBCF$ також рівні, тобто $S_{ABCD} = BC \cdot BH = AD \cdot BH$. Теорему доведено. ■

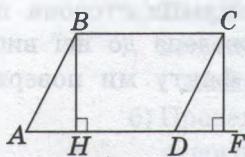


Рис. 145. До доведення формулі площини паралелограма

Задача

Площа паралелограма дорівнює 36 см^2 , а довжини його висот 3 см і 4 см. Знайдіть периметр паралелограма.

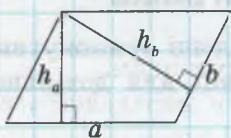


Рис. 146

Розв'язання

Нехай дано паралелограм із площею $S = 36 \text{ см}^2$ і висотами $h_a = 3 \text{ см}$ і $h_b = 4 \text{ см}$ (рис. 146). Оскільки

$S = a \cdot h_a = b \cdot h_b$, то $a = \frac{S}{h_a}$, тобто $a = 36 : 3 = 12 \text{ (см)}$,

$a \cdot b = \frac{S}{h_b}$, тобто $b = 36 : 4 = 9 \text{ (см)}$. Отже, периметр паралелограма дорівнює $(12 + 9) \cdot 2 = 42 \text{ (см)}$.

Відповідь: 42 см.

Розв'язуючи цю задачу, неважко помітити цікаву закономірність: чим більша сторона паралелограма, тим менша проведена до неї висота. До обґрунтування цього факту ми повернемось у § 18.

Запитання і задачі



УСНІ ВПРАВИ

530. Площі двох многокутників рівні. Чи означає це, що самі многокутники також рівні?

531. Два прямокутники мають рівні периметри. Чи є вони рівновеликими?

532. Через середини двох протилежних сторін паралелограма проведено пряму. В якому відношенні вона ділить площу паралелограма?

533. Визначте, які з даних тверджень правильні:

- якщо діагоналі двох квадратів рівні, то ці квадрати рівновеликі;
- два рівновеликі прямокутники рівні;
- два рівновеликі квадрати рівні.

534. Сторона квадрата дорівнює меншій стороні прямокутника. Яка з цих фігур має більшу площину?



ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

- 535.** Накресліть паралелограм, який не є прямокутником.
- Проведіть із вершини тупого кута висоту паралелограма. Виміряйте цю висоту і сторону, до якої вона проведена, і обчисліть площину паралелограма.
 - Розріжте паралелограм по висоті. Які фігури ви отримали?
 - Прикладіть отримані фігури одна до одної так, щоб утворився прямокутник. Чи дорівнює площа прямокутника площині паралелограма?
- **536.** На клітчастому папері накресліть паралелограм.
- Підрахуйте приблизну кількість клітинок, які містяться всередині паралелограма. Обчисліть площину однієї клітинки і знайдіть наближене значення площині паралелограма.
 - Проведіть необхідні вимірювання і обчисліть площину паралелограма за відповідною формулою. Порівняйте отримані результати.



ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

Рівень А

- 537.** Накресліть прямокутник $ABCD$ і побудуйте паралелограм AB_1C_1D , рівновеликий даному прямокутнику.

- **538.** Виріжте з паперу два рівні рівнобедрені трикутники і складіть з них:

- ромб;
- паралелограм, відмінний від ромба.

Порівняйте площині складених фігур.

- 539.** Знайдіть площину прямокутника $ABCD$, якщо:

- $AB = 9$ см, $BC = 4$ см;
- $AB : BC = 5 : 7$, $P_{ABCD} = 48$ см;
- $AD = 12$ см, $AC = 13$ см.

- **540.** Сторони прямокутника дорівнюють 9 см і 25 см. Знайдіть периметр квадрата, рівновеликого даному прямокутнику.

541. Діагональ квадрата дорівнює $12\sqrt{2}$ м. Знайдіть площеу квадрата.

→ **542.** Площа квадрата дорівнює 32 см^2 . Знайдіть його периметр.

543. Площа прямокутника дорівнює 128 см^2 . Знайдіть сторони прямокутника, якщо одна з них удвічі більша за іншу.

544. У паралелограмі зі стороною a , проведеною до неї висотою h_a і площею S знайдіть:

- S , якщо $a = 10 \text{ см}$, $h_a = 6 \text{ см}$;
- a , якщо $S = 48 \text{ см}^2$, $h_a = 4 \text{ см}$;
- h_a , якщо $S = 120 \text{ см}^2$, $a = 24 \text{ см}$.

→ **545.** Діагональ паралелограма дорівнює 15 см і перпендикулярна до його сторони. Знайдіть площеу паралелограма, якщо інша його сторона дорівнює 17 см .

546. Сторони паралелограма дорівнюють 12 см і 16 см . Знайдіть його висоти, якщо площа паралелограма дорівнює 96 см^2 .

→ **547.** Сторона паралелограма і проведена до неї висота дорівнюють відповідно 16 см і 9 см . Знайдіть сторону квадрата, рівновеликого даному паралелограму.

Рівень Б

548. Частину стіни, яка має форму прямокутника розмірами $2,25 \text{ м}$ на $1,8 \text{ м}$, необхідно покрити кахелем. Скільки плиток для цього знадобиться, якщо плитка має форму квадрата зі стороною 15 см ?

549. Бісектриса кута прямокутника ділить його сторону на відрізки завдовжки 3 см і 4 см . Знайдіть площеу прямокутника. Скільки розв'язків має задача?

→ **550.** Сторони прямокутника відносяться як $5 : 12$. Знайдіть площеу прямокутника, якщо його діагональ дорівнює 26 см .

551. Знайдіть площеу паралелограма, якщо:

- його периметр дорівнює 42 см , а довжини висот становлять 6 см і 8 см ;
- його сторона дорівнює 5 см , а висота, проведена з вершини тупого кута, ділить іншу сторону на відрізки завдовжки 4 см і 6 см ;
- його сторони дорівнюють 8 см і 10 см , а гострий кут — 30° .

→ 552. Знайдіть площу паралелограма, якщо:

а) його діагональ перпендикулярна до сторони, а висота, проведена з вершини тупого кута, ділить іншу сторону на відрізки завдовжки 4 см і 9 см;

б) його сторони дорівнюють $4\sqrt{2}$ см і 8 см, а гострий кут — 45° .

553. Площа і периметр ромба дорівнюють відповідно 24 см^2 і 24 см. Знайдіть висоту ромба.

554. Діагоналі ромба дорівнюють 16 см і 30 см. Знайдіть площу чотирикутника, вершинами якого є середини сторін даного ромба.

→ 555. Висота ромба з тупим кутом 150° дорівнює 5 см. Знайдіть площу ромба.

556. На діагоналі квадрата як на стороні побудовано інший квадрат. Доведіть, що його площа вдвічі більша за площу даного квадрата.

→ 557. Точка, що лежить на діагоналі квадрата, віддалена від двох його сторін на 180 см і 2,2 м. Знайдіть площу квадрата.

Рівень В

558. Сторони паралелограма дорівнюють 12 см і 16 см, а одна з висот — 15 см. Знайдіть площу паралелограма.

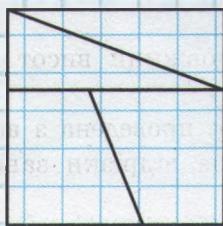
→ 559. Висоти паралелограма дорівнюють 12 см і 16 см, а кут між ними — 30° . Знайдіть площу паралелограма.

560. Знайдіть помилку в «доведенні» геометричного софізму:

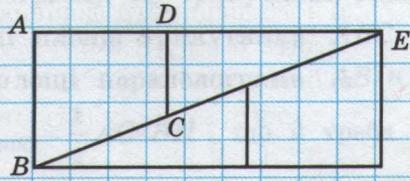
$$64 \text{ см}^2 = 65 \text{ см}^2.$$

«Доведення»

Розріжемо квадрат зі стороною 8 см так, як показано на рисунку 147, а. Перекладаючи отримані частини в іншому порядку (рис. 147, б), отримаємо прямокутник зі сторонами 13 см і 5 см. Квадрат і прямокутник є рівноскладеними, тобто мають бути рівновеликими. Але очевидно, що площа квадрата дорівнює 64 см^2 , а площа прямокутника — 65 см^2 , тобто $64 \text{ см}^2 \neq 65 \text{ см}^2$.



а



б

Рис. 147

561. Діагональ ромба ділить його висоту на відрізки завдовжки 13 см і 5 см. Знайдіть площу ромба.

→ **562.** Знайдіть площу ромба, якщо його висота і менша діагональ дорівнюють відповідно 12 см і 13 см.



ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 17

Теоретичний матеріал

- відстань між паралельними прямими;
- трапеція.

7 клас, § 15

8 клас, § 5

Задачі

563. У рівнобедреній трапеції бісектриса тупого кута паралельна бічній стороні. Знайдіть кути трапеції. На які многокутники дана бісектриса ділить трапецію?

564. У паралелограмі $ABCD$ діагональ BD є висотою, $\angle A = 45^\circ$, $AD = 4$ см. Знайдіть площі трикутників ABC і BCD .



§ 17. Площі трикутника і трапеції

17.1. Площа трикутника

Теорема (формула площини трикутника)

Площа трикутника дорівнює половині добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a,$$

де a — сторона трикутника, h_a — проведена до неї висота.

Доведення

□ Нехай BH — висота трикутника ABC (рис. 148). Доведемо, що $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH$.

Проведемо через вершини B і C прямі, паралельні сторонам трикутника, і позначимо точку їх перетину D . Таким чином, ми «додбудували» трикутник ABC до паралелограма $ABDC$, в якому відрізок BH також є висотою, проведеною до сторони AC .

За формулою площини паралелограма $S_{ABDC} = AC \cdot BH$. Трикутники ABC і DCB рівні за трьома сторонами (в них сторона BC спільна, $AB = DC$ і $AC = DB$ як протилежні сторони паралелограма). Ці трикутники мають рівні площини. Тоді площа трикутника ABC складає половину площини паралелограма $ABDC$, тобто

$S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABDC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH$, що й треба було довести. ■

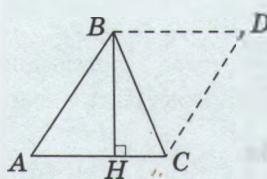


Рис. 148. До доведення формулі площини трикутника

Наслідок 1

Площа прямокутного трикутника дорівнює половині добутку його катетів:

$$S = \frac{1}{2}ab,$$

де a і b — катети прямокутного трикутника.

Справді, в прямокутному трикутнику висота, проведена до катета, збігається з іншим катетом.

Наслідок 2

Площа ромба дорівнює половині добутку його діагоналей:

$$S = \frac{1}{2}d_1d_2,$$

де d_1 і d_2 — діагоналі ромба.

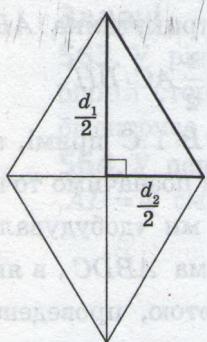


Рис. 149. До обчислення площи ромба

Справді, діагоналі ділять ромб на чотири рівні прямокутні трикутники з катетами $\frac{1}{2}d_1$ і $\frac{1}{2}d_2$ (рис. 149). Користуючись попереднім наслідком, маємо:

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}d_1 \cdot \frac{1}{2}d_2 = \frac{1}{2}d_1d_2.$$

Наслідок 3

Площа рівностороннього трикутника зі стороною a обчислюється за формулою

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Обґрунтуйте цей наслідок самостійно.

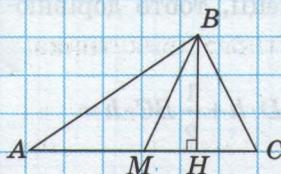


Рис. 150

Опорна задача

Медіана ділить трикутник на два рівновеликі трикутники. Доведіть.

Розв'язання

Нехай BM — медіана трикутника ABC (рис. 150). Проведемо висоту BH трикутника ABC . Цей відрізок буде водночас висотою трикутника ABM , проведеною до сторони AM , і висотою трикутника MBC , проведеною до сторони MC . Враховуючи рівність відрізків AM і MC , маємо:

$$S_{ABM} = \frac{1}{2} AM \cdot BH = \frac{1}{2} MC \cdot BH = S_{MBC}.$$

Ця задача має цікаві узагальнення:

якщо висоти двох трикутників рівні, то відношення площ трикутників дорівнює відношенню їх основ;

якщо основи двох трикутників рівні, то відношення площ трикутників дорівнює відношенню їх висот.

Доведіть ці твердження самостійно.

17.2. Площа трапеції

Часто для обчислення площині деякого многокутника його розбивають на декілька трикутників і знаходять шукану площину як суму площ цих трикутників. Саме такий підхід можна застосувати для виведення формули площині трапеції.

Теорема (формула площині трапеції)

Площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ на висоту:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h,$$

де a і b — основи трапеції, h — висота трапеції.

Доведення

□ Нехай дано трапецію $ABCD$ з основами AD і BC та висотою h . Діагональ AC ділить її на два трикутники ABC і ACD (рис. 151). Проведемо висоти цих трикутників AH і CF . Обидві вони є висотами трапеції, тобто дорівнюють h . Маємо:

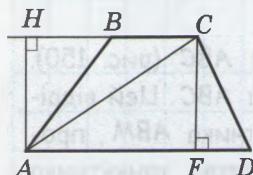


Рис. 151. До доведення формули площи трапеції

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{ACD} + S_{ABC} = \frac{1}{2} AD \cdot h + \frac{1}{2} BC \cdot h = \\ &= \frac{AD + BC}{2} \cdot h = \frac{a + b}{2} \cdot h. \end{aligned}$$

Теорему доведено. ■

Наслідок

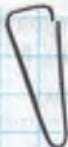
Площа трапеції дорівнює добутку середньої лінії на висоту.

17.3*. Розв'язування задач на обчислення площ

Розв'язування задач на обчислення площ многокутників найчастіше зводиться до пошуку величин окремих елементів фігур, що розглядаються, і подальшого застосування відповідних формул площ.

У багатьох задачах поряд із суто геометричними прийомами розв'язування (додаткові побудови, застосування рівності фігур тощо) використовуються і методи алгебри (складання рівнянь або систем рівнянь на основі метричних співвідношень між елементами фігури).

У ході розв'язування особливу увагу слід звертати на те, чи однозначно дані задачі визначають взаємне розміщення елементів фігури.

**Задача**

Знайдіть площу трапеції, в якій одна з основ ділить 24 см, висота 12 см, а бічні сторони 13 см і 20 см.

Розв'язання

Нехай BH і CF — висоти даної трапеції, проведенні з кінців основи BC до іншої основи. Нехай $BC = 24$ см, $BH = CF = 12$ см. Найпростіше добудувати трапецію $ABCD$ так, щоб точки H і F лежали на основі AD . Але цей варіант — лише один із можливих, адже умова задачі не вказує, чи належать точки H і F відрізку AD . Оскільки з точки поза даною прямою можна провести до цієї прямії дві рівні похилі заданої довжини, то кожну з бічних сторін трапеції можна побудувати двома способами (рис. 152, а—г): $AB = A_1B = 13$ см, $CD = CD_1 = 20$ см. Отже, дану трапецію за умовою задачі можна побудувати чотирма різними способами.

За побудовою чотирикутник $HBCF$ є прямокутником, звідки $HF = BC = 24$ см.

Далі розглянемо чотири випадки.

1) Для трапеції $ABCD$ (рис. 152, а): з трикутника ABH за теоремою Піфагора $AH = 5$ см, аналогічно з трикутника DCF $DF = 16$ см; тоді $AD = AH + HF + FD = 45$ см,

$$S_{ABCD} = \frac{24 + 45}{2} \cdot 12 = 414 \text{ (см}^2\text{)}.$$

2) Для трапеції A_1BCD (рис. 152, б): з трикутника A_1BH за теоремою Піфагора $A_1H = 5$ см, аналогічно з трикутника DCF $DF = 16$ см;

тоді $A_1D = HF + FD - A_1H = 35$ см,

$$S_{ABCD} = \frac{24 + 35}{2} \cdot 12 = 354 \text{ (см}^2\text{)}.$$

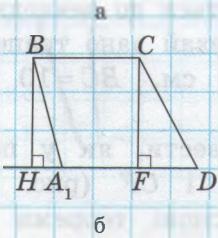
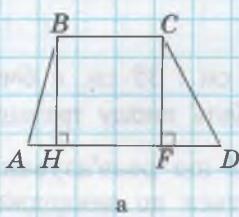


Рис. 152. Див. також с. 178

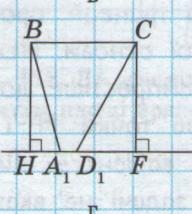
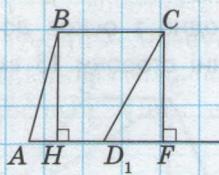


Рис. 152. Закінчення

3) Для трапеції $ABCD_1$ (рис. 152, в): з трикутника ABH за теоремою Піфагора $AH = 5$ см, аналогічно з трикутника D_1CF $D_1F = 16$ см; тоді $AD_1 = AH + HF - D_1F = 13$ см,

$$S_{ABCD} = \frac{24 + 13}{2} \cdot 12 = 222 \text{ (см}^2\text{)}.$$

4) Для трапеції A_1BCD_1 (рис. 152, г): з трикутника A_1BH за теоремою Піфагора $A_1H = 5$ см, аналогічно з трикутника D_1CF $D_1F = 16$ см; тоді $A_1D_1 = HF - A_1H - D_1F = 3$ см, тобто точки H , A_1 , B , F розміщені на прямій у вказаному порядку.

$$S_{ABCD} = \frac{24 + 3}{2} \cdot 12 = 162 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь: 414 см^2 , або 354 см^2 , або 222 см^2 , або 162 см^2 .

Щойно розглянута задача наочно демонструє одну з причин, з яких у процесі розв'язування геометричної задачі може виникати багатоваріантність. Але навіть якщо такої ситуації не виникає, взаємне розміщення елементів фігур потребує обґрунтування.

Задача

Основи трапеції дорівнюють 10 см і 35 см, а бічні сторони — 15 см і 20 см. Знайдіть площину трапеції.

Перш за все зазначимо, що розв'язування даної задачі фактично зводиться до знаходження висоти трапеції. Отже, нехай дано трапецію $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AB = 15$ см, $BC = 10$ см, $CD = 20$ см, $AD = 35$ см.

Природно було б провести, як у попередній задачі, висоти BH і CF (рис. 153) і скласти рівняння на основі теореми Піфагора, застосованої до трикутників ABH і DCF : $15^2 - x^2 = 20^2 - (25 - x)^2$. Таке розв'язання

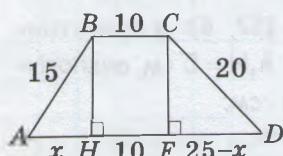


Рис. 153

дозволить отримати правильну відповідь, але не буде повним, адже належність точок H і F відрізу AD треба обґрунтовувати. Спробуємо уникнути необхідності такого обґрунтування, застосувавши для розв'язування іншу додаткову побудову.

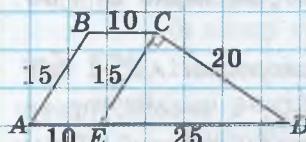


Рис. 154

Розв'язання

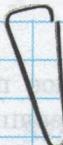
Проведемо через вершину C пряму CE , паралельну AB (рис. 154). Оскільки за побудовою $ABCE$ – паралелограм, то $CE = AB = 15$ см, $AE = BC = 10$ см, отже, $ED = 35 - 10 = 25$ (см). Сторони трикутника ECD пропорційні числам 3, 4, 5, отже, за теоремою, оберненою до теореми Піфагора, він є прямокутним з гіпотенузою ED . За формулою $h = \frac{ab}{c}$ знаходимо висоту цього трикутника, яка відно-

час є висотою трапеції: $h = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12$ (см). Отже,

$$S = \frac{10 + 35}{2} \cdot 12 = 270 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь: 270 см².

Як бачимо, цей спосіб набагато більш раціональний, зокрема, з точки зору обчислень. Розглянемо ще одну задачу, для розв'язування якої використовується додаткова побудова.



Задача

Діагоналі трапеції дорівнюють 30 см і 40 см і перетинаються під прямим кутом. Знайдіть площу трапеції.

Неважко переконатися, що будь-які спроби використати алгебраїчний підхід у цій задачі призводять до досить громіздких обчислень. Основна

складність полягає в тому, що дані відрізки не є сторонами одного трикутника. Спробуємо «вправити» цю ситуацію.

Розв'язання

Нехай дано трапецію $ABCD$, в якій $AD \parallel BC$, $AC \perp BD$, $AC = 30$ см, $BD = 40$ см.

Проведемо через вершину C пряму CF , паралельну діагоналі BD (рис. 155). Зрозуміло, що за побудовою кут ACF буде прямим, тобто трикутник ACF прямокутний із гіпотенузою AF . З іншого боку, $DBCF$ — паралелограм, звідки $DF = BC$, $CF = BD = 40$ см.

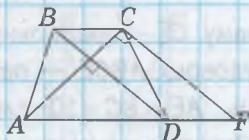


Рис. 155

Звернемо увагу на те, що трикутники ABC і DCF рівновеликі, оскільки $DF = BC$, а висоти, проведенні до цих сторін, є висотами трапеції. Таким чином, $S_{ABCD} = S_{ACD} + S_{ABC} = S_{ACD} + S_{DCF} = S_{ACF}$, тобто шукана площа трапеції дорівнює площи трикутника ACF , яка дорівнює півдобрутку його катетів:

$$S = \frac{30 \cdot 40}{2} = 600 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь: 600 см².

Запитання і задачі



УСНІ ВПРАВИ

565. Площа трикутника ABC дорівнює S . Чому дорівнює площа паралелограма $ABCD$, три вершини якого збігаються з вершинами даного трикутника?

566. За якою формулою доцільно обчислювати площу прямокутного трикутника, якщо відомі:

- довжини гіпотенузи і проведеної до неї висоти;
- довжини двох катетів?

567. Два рівновеликі трикутники мають рівні висоти. Чи означає це, що основи даних трикутників також рівні?

568. Дві рівновеликі трапеції мають рівні висоти. Чи означає це, що основи даних трапецій також відповідно рівні?

569. Чи може діагональ трапеції ділити її на два рівновеликі трикутники? Відповідь обґрунтуйте.



ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

570. Накресліть гострокутний трикутник і проведіть у ньому висоту. Проведіть необхідні вимірювання і обчисліть:

а) площину даного трикутника;

б) площі трикутників, на які даний трикутник ділиться висотою.

→ **571.** Накресліть трапецію і проведіть у ній діагональ. Проведіть необхідні вимірювання і обчисліть:

а) площину даної трапеції;

б) площі трикутників, на які дана трапеція ділиться діагоналлю.



ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

Рівень А

572. За даними рисунка 156 знайдіть площину трикутника ABC .

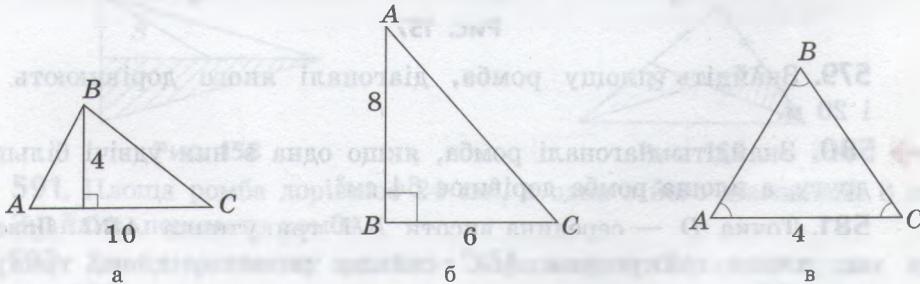


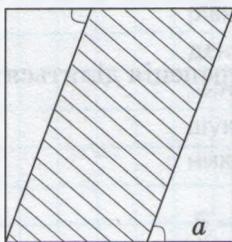
Рис. 156

573. Знайдіть площину:

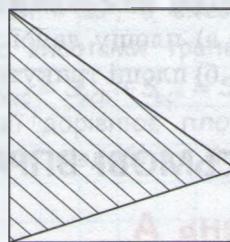
а) рівнобедреного трикутника з основою 10 см і бічною стороною 13 см;

б) трикутника ABC , в якому $AB = 17$ см, а висота BH ділить сторону AC на відрізки $AH = 8$ см і $HC = 2$ см.

- 574. Знайдіть площу:
- прямокутного трикутника з гіпотенузою 20 см і катетом 12 см;
 - гострокутного трикутника ABC з висотою $AH = 4$ см, якщо $BH = 2$ см, $\angle C = 45^\circ$.
575. Площа трикутника дорівнює 150 см^2 . Знайдіть периметр трикутника, якщо його висоти дорівнюють 15 см, 12 см і 20 см.
- 576. Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його площа дорівнює 20 см^2 , а висота, проведена з вершини прямого кута, — 4 см.
577. На рисунку 157, а дано одиничний квадрат. Знайдіть площу заштрихованої фігури.
578. На рисунку 157, б дано одиничний квадрат. Знайдіть площу заштрихованої фігури.



а



б

Рис. 157

579. Знайдіть площу ромба, діагоналі якого дорівнюють 8 м і 20 м.
- 580. Знайдіть діагоналі ромба, якщо одна з них удвічі більша за другу, а площа ромба дорівнює 64 см^2 .
581. Точка D — середина висоти BH трикутника ABC . Доведіть, що площа трикутника ADC складає половину площини трикутника ABC .
- 582. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O . Доведіть, що трикутники AOB і AOD рівновеликі.
583. Знайдіть площу трапеції, якщо:
- її основи дорівнюють 4 см і 10 см, а висота 6 см;
 - висота трапеції і її середня лінія дорівнюють 8 см.

584. Основи рівнобедреної трапеції дорівнюють 8 см і 16 см, а гострі кути 45° . Знайдіть площу трапеції.

→ **585.** Основи прямокутної трапеції дорівнюють 6 см і 10 см, а більша бічна сторона — 5 см. Знайдіть площу трапеції.

Рівень Б

586. Знайдіть площу:

- трикутника ABC з висотою BH , якщо $AB = 13$ см, $BC = 15$ см, $BH = 12$ см, а точка H лежить на відрізку AC ;
- прямокутного трикутника, гіпотенуза якого ділиться висотою на відрізки завдовжки 9 см і 4 см;
- рівностороннього трикутника з висотою $2\sqrt{3}$ см.

→ **587.** Знайдіть площу:

- рівнобедреного трикутника з периметром 16 см і висотою завдовжки 4 см, проведеною до основи;
- прямокутного трикутника з гіпотенузою 20 см і відношенням катетів $3 : 4$.

588. Бісектриса прямокутного трикутника ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 15 см і 20 см. Знайдіть площу трикутника.

589. За даними рисунка 158 виразіть через S площу заштрихованої фігури.

→ **590.** За даними рисунка 159 виразіть через S площу заштрихованої фігури.

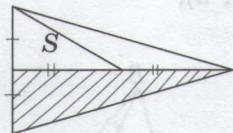


Рис. 158

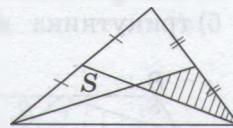


Рис. 159

591. Площа ромба дорівнює 24 см^2 , а одна з його діагоналей 8 см. Знайдіть периметр ромба.

→ **592.** Знайдіть площу ромба з периметром 24 см і тупим кутом 150° .

593. Доведіть, що медіани трикутника, перетинаючись, ділять даний трикутник на шість рівновеликих трикутників.

594. Через вершину A трикутника ABC проведено пряму, паралельну BC . Доведіть, що всі трикутники з основою BC і вершиною на даній прямій рівновеликі.

→ **595.** Доведіть, що діагоналі ділять паралелограм на чотири рівновеликі трикутники.

596. Знайдіть площу:

- рівнобедреної трапеції з основами 15 см і 39 см, у якій діагональ перпендикулярна до бічної сторони;
- прямокутної трапеції з бічними сторонами 12 см і 13 см, діагональ якої є бісектрисою гострого кута.

→ **597.** Знайдіть площу рівнобедреної трапеції з основами 14 см і 50 см та діагоналлю 40 см.

Рівень В

598. Побудуйте трикутник, рівновеликий даній трапеції.

→ **599.** Побудуйте паралелограм, рівновеликий даному трикутнику.

600. Площа опуклого чотирикутника з перпендикулярними діагоналями дорівнює половині добутку діагоналей. Доведіть.

601. Через вершину A паралелограма $ABCD$ проведіть дві прямі, які ділять паралелограм на три рівновеликі частини.

→ **602.** У трикутнику ABC медіани AA_1 , BB_1 і CC_1 перетинаються в точці O . Визначте, яку частину площи трикутника ABC складає:

- площа трикутника AOC ;
- площа чотирикутника BA_1OC_1 .

603. За даними рисунка 160 знайдіть площу:

- заштрихованої фігури (рис. 160, а);
- трикутника ABC (рис. 160, б).

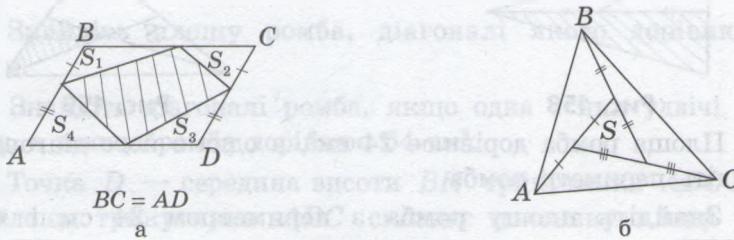


Рис. 160

604. Знайдіть площу рівнобедреної трапеції з бічною стороною 10 см, описаної навколо кола з радіусом 4 см.

→ **605.** Бічні сторони і висота трапеції дорівнюють відповідно 25 см, 30 см і 24 см. Знайдіть площу трапеції, якщо бісектриси її тупих кутів перетинаються на більшій основі.



ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 18

Теоретичний матеріал

- середня лінія трикутника;
- подібність трикутників.

8 клас, § 6, п. 6.2

8 клас, § 10, 11

Задачі

606. Точки D, E, F — середини сторін AB, BC і AC трикутника ABC відповідно. Користуючись рівністю трикутників, доведіть, що площа трикутника DBE складає третину площи трапеції $ADEC$.

607. У трапеції $ABCD$ основи BC і AD дорівнюють 2 см і 8 см відповідно. Діагоналі трапеції перетинаються в точці O . Знайдіть відношення:

a) $\frac{CO}{AC}$;

b) $\frac{OD}{BD}$;

в) відрізків, на які точка O ділить висоту трапеції;

г) площ трикутників BOC і AOD (висловіть припущення).

§ 18. Застосування площ

18.1. Відношення площ подібних трикутників

Теорема (про відношення площ подібних трикутників)

Відношення площ подібних трикутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.

Доведення

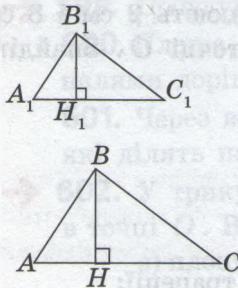


Рис. 161. До доведення теореми про відношення площ подібних трикутників

□ Нехай $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ з коефіцієнтом k , тобто $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$. Доведемо, що $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2$.

Проведемо в даних трикутниках висоти BH і B_1H_1 (рис. 161). Прямоугальні трикутники ABH і $A_1B_1H_1$ подібні, оскільки $\angle A = \angle A_1$. Це означає, що $\frac{BH}{B_1H_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = k$, тобто $BH = kB_1H_1$. Враховуючи, що $AC = kA_1C_1$, маємо:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{0,5AC \cdot BH}{0,5A_1C_1 \cdot B_1H_1} = \frac{0,5 \cdot kA_1C_1 \cdot kB_1H_1}{0,5A_1C_1 \cdot B_1H_1} = k^2. \blacksquare$$

Задача

Середня лінія відтинає від даного трикутника трикутник із площею 8 см^2 . Знайдіть площу даного трикутника.

Розв'язання

Нехай A_1C_1 — середня лінія трикутника ABC , паралельна стороні AC (рис. 162), $S_{A_1BC_1} = 8 \text{ см}^2$. Трикутники ABC і A_1BC_1 подібні за двома сторонами

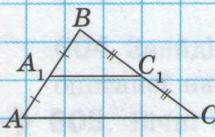


Рис. 162

і кутом між ними, причому $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = 2$. Тоді

за доведеною теоремою $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = 4$, тобто

$$S_{ABC} = 4S_{A_1B_1C_1}, \text{ звідки } S_{ABC} = 4 \cdot 8 = 32 \text{ (см}^2\text{).}$$

Відповідь: 32 см².

18.2. Метод площ

Поняття площин і формулі її обчислення можуть застосовуватися навіть у тих задачах, в умовах яких про площину взагалі не йдеться. Розглянемо такий приклад.

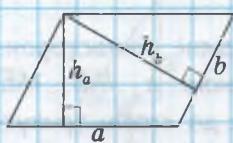


Рис. 163

Задача

Сторони паралелограма дорівнюють 16 см і 12 см. Висота паралелограма, проведена до більшої сторони, дорівнює 3 см. Знайдіть висоту, проведенню до меншої сторони.

Розв'язання

Нехай дано паралелограм зі сторонами $a = 16$ см і $b = 12$ см, до яких проведено висоти $h_a = 3$ см і h_b , довжину якої необхідно знайти (рис. 163).

За формулою площини паралелограма $S = a \cdot h_a = b \cdot h_b$, звідки $h_b = \frac{S}{b} = \frac{a \cdot h_a}{b}$.

$$\text{Таким чином, } h_b = \frac{16 \cdot 3}{12} = 4 \text{ (см).}$$

Відповідь: 4 см.

У ході розв'язування цієї задачі площа паралелограма визначалася двома різними способами. Оскільки площа многокутника незалежно від способу її обчислення визначається однозначно,

то отримані вирази прирівнювалися, завдяки чому вдалося зв'язати відомі величини із шуканою. Такий метод, заснований на використанні площин як допоміжної величини, називається *методом допоміжної площини*, або просто *методом площини*.

Зазначимо, що з формул площини паралелограма $S = a \cdot h_a = b \cdot h_b$ і площини трикутника $S = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$ випливає важливе твердження:

у паралелограмі (трикутнику) більшою є висота, проведена до меншої сторони, меншою — висота, проведена до більшої сторони.

Метод площин використовується як у задачах на обчислення, так і для доведення тверджень.

Задача

Сума відстаней від точки, взятої всередині рівностороннього трикутника, до його сторін не залежить від вибору точки і дорівнює висоті трикутника. Доведіть.

Розв'язання

Нехай точка M лежить усередині рівностороннього трикутника ABC зі стороною a , MD , ME і MF — відстані від даної точки до сторін трикутника (рис. 164). Сполучимо точку M з вершинами трикутника. Площа трикутника ABC дорівнює сумі площ трикутників AMB , BMC і AMC , у яких відрізки MD , ME і MF є висотами. Маємо:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} a \cdot h &= \frac{1}{2} a \cdot MD + \frac{1}{2} a \cdot ME + \frac{1}{2} a \cdot MF = \\ &= \frac{1}{2} a (MD + ME + MF).\end{aligned}$$

Звісно $MD + ME + MF = h$, тобто сума відстаней, що розглядаються, дорівнює висоті трикутника і не залежить від вибору точки M .

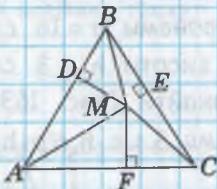


Рис. 164

18.3*. Інші доведення теореми Піфагора

Історично виникнення і доведення теореми Піфагора пов'язані з обчисленням площ. Тому в класичному формулюванні цієї теореми йдеться не про квадрати сторін прямокутного трикутника, а про площині відповідних фігур:

площа квадрата, побудованого на гіпотенузі прямокутного трикутника, дорівнює сумі площ квадратів, побудованих на його катетах.

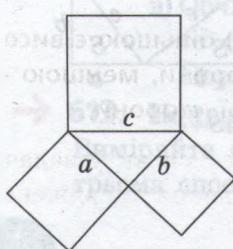


Рис. 165. «Піфагорові штаны»

Рисунок 165, який наочно втілює це формулювання, став своєрідним символом геометрії і серед гімназистів позаминулого століття отримав назву «Піфагорові штаны». Жартівливий віршик «Пифагоровы штаны на все стороны равны» російські школярі запам'ятували на все життя.

Доведемо теорему Піфагора за допомогою площ.

Доведення

□ Нехай дано прямокутний трикутник із катетами a і b та гіпотенузою c (рис. 166, а). Добудуємо його до квадрата зі стороною $a+b$ так, як показано на рисунку 166, б. Площа цього квадрата дорівнює $(a+b)^2$. Побудований квадрат складається із чотирьох рівних прямокутних трикутників із площею $\frac{1}{2}ab$ і чотирикутника зі сторонами завдовжки c , який є квадратом (доведіть це самостійно). Отже, маємо:

$$S = (a+b)^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + c^2;$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2,$$

тобто $a^2 + b^2 = c^2$. Теорему доведено. ■

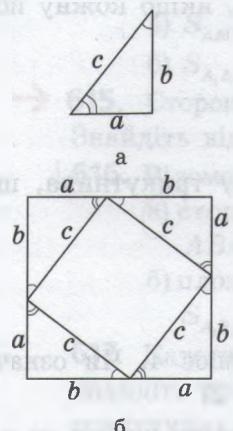
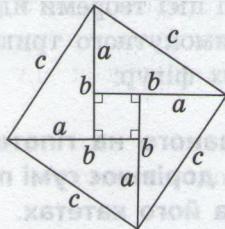


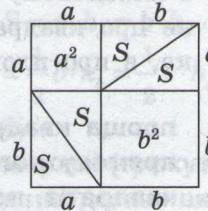
Рис. 166. До доведення теореми Піфагора за допомогою площ (див. також с. 190)

На рисунках 166, в, г показано інші способи доведення теореми Піфагора за допомогою площ. У трактатах індійського математика XII ст. Бхаскарі один із них супроводжувався лише одним словом: «Дивись!» Загалом же нині відомо понад 150 різних способів доведення цієї славетної теореми. Але кожен із вас може винайти і свій власний спосіб.



$$c^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + (b-a)^2$$

в



$$4S + a^2 + b^2 = 4S + c^2$$

г

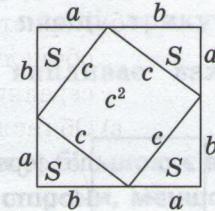


Рис. 166. Закінчення

Запитання і задачі



УСНІ ВПРАВИ

608. Визначте, як зміниться площа трикутника, якщо кожну його сторону:

- а) збільшити в 4 рази;
- б) зменшити в 3 рази;
- в) зменшити в n разів.

609. Визначте, як треба змінити кожну сторону трикутника, щоб його площа:

- а) зменшилася у 25 разів;
- б) збільшилася в 49 разів;
- в) збільшилася в n^2 разів.

610. Відношення площ двох трикутників дорівнює 4. Чи означає це, що дані трикутники подібні з коефіцієнтом 2?

611. У трикутнику зі сторонами a , b і c проведено висоти до цих сторін h_a , h_b і h_c відповідно. Порівняйте:

- а) сторони трикутника, якщо $h_a < h_b < h_c$;
- б) висоти трикутника, якщо $c < a < b$;
- в) сторони a і c , якщо $a < b$, $h_b > h_c$.



ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

612. Накресліть прямокутний трикутник і проведіть у ньому середню лінію, паралельну одному з катетів.

- Виміряйте катети даного трикутника й обчисліть його площе.
- Користуючись теоремою про площи подібних трикутників, обчисліть площу трикутника, який відтинається від даного середньою лінією.
- Обчисліть площу трикутника, що відтинається від даного середньою лінією, вимірювши його гіпотенузу і висоту. Порівняйте отримані результати.

→ **613.** Накресліть довільний трикутник і проведіть його висоти. Виміряйте сторони й висоти трикутника та обчисліть його площу трьома способами. Порівняйте отримані результати.



ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

Рівень А

614. Відомо, що $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, причому $\frac{AB}{A_1B_1} = 3$. Знайдіть:

- S_{ABC} , якщо $S_{A_1B_1C_1} = 9 \text{ см}^2$;
- $S_{A_1B_1C_1}$, якщо $S_{ABC} = 9 \text{ см}^2$.

→ **615.** Сторони рівносторонніх трикутників дорівнюють 2 см і 6 см. Знайдіть відношення їх площ.

✓ **616.** Відомо, що $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Знайдіть:

- сторону A_1B_1 , якщо $S_{ABC} = 24 \text{ см}^2$, $S_{A_1B_1C_1} = 6 \text{ см}^2$, $AB = 8 \text{ см}$;
- площу трикутника ABC , якщо $BC = 2 \text{ см}$, $B_1C_1 = 6 \text{ см}$, $S_{A_1B_1C_1} = 18 \text{ см}^2$.

617. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть площу трикутника, утвореного середніми лініями даного трикутника.

→ **618.** Знайдіть площу трикутника, якщо трикутник, утворений середніми лініями даного трикутника, має площу 5 см^2 .

619. Висоти трикутника дорівнюють 21 см, 28 см і 60 см. Знайдіть периметр трикутника, якщо його найбільша сторона дорівнює 1 м.

620. Дві сторони трикутника дорівнюють 12 см і 18 см. Знайдіть висоту, проведену до меншої з них, якщо висота, проведена до більшої сторони, дорівнює 4 см.

→ **621.** Висоти паралелограма дорівнюють 6 см і 4 см, а менша сторона — 8 см. Знайдіть периметр паралелограма.

622. Користуючись методом площ, доведіть, що в рівнобедреному трикутнику висоти, проведені до бічних сторін, рівні.

→ **623.** Доведіть методом площ, що трикутник із рівними висотами є рівностороннім.

Рівень Б

624. Два трикутники подібні з коефіцієнтом 3, причому площа одного з них на 24 см^2 більша за площею іншого. Знайдіть площі цих трикутників.

625. Площі двох подібних трикутників дорівнюють 75 м^2 і 300 м^2 . Периметр першого трикутника дорівнює 54 м. Знайдіть периметр другого трикутника.

→ **626.** Відповідні сторони двох подібних трикутників відносяться як 2 : 3. Площа другого трикутника дорівнює 81 см^2 . Знайдіть площа першого трикутника.

627. На плані земельна ділянка має форму трикутника з площею $2,5 \text{ см}^2$. Знайдіть площа ділянки, якщо масштаб плану 1 : 1000.

628. Периметр паралелограма дорівнює 56 см. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його висоти дорівнюють 6 см і 8 см.

629. Діагоналі ромба дорівнюють 30 см і 40 см. Користуючись методом площ, знайдіть висоту ромба.

→ **630.** Знайдіть катети прямокутного трикутника, якщо вони відносяться як 3 : 4, а висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює 12 см.

631. Доведіть методом площ, що паралелограм із рівними висотами є ромбом.

→ **632.** Доведіть методом площ метричне співвідношення у прямокутному трикутнику: $h_c = \frac{ab}{c}$.

Рівень В

633. Пряма, паралельна стороні трикутника, ділить його на дві рівновеликі частини. У якому відношенні ця пряма ділить дві інші сторони трикутника?

→ **634.** Побудуйте пряму, паралельну стороні трикутника, яка ділить площу трикутника у відношенні 9 : 16.

635. Доведіть, що сторони трикутника обернено пропорційні його висотам: $a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}$.

→ **636.** Сума відстаней від точки основи рівнобедреного трикутника до його бічних сторін не залежить від вибору точки. Доведіть.



ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 19

Теоретичний матеріал

- прямокутний трикутник;
- подібність прямокутних трикутників.

7 клас, § 17

8 клас, § 12

Задачі

637. У прямокутному трикутнику ABC $\angle A = 30^\circ$, BM — медіана, проведена до гіпотенузи. Доведіть, що трикутник MBC — рівносторонній.

638. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, в якому бічна сторона дорівнює 12,6 см, а медіана, проведена до основи, — 6,3 см.

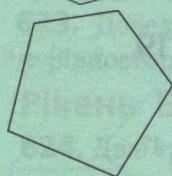
Задачі для підготовки до контрольної роботи № 4

1. Визначте кількість сторін опуклого многокутника, сума кутів якого дорівнює 1080° .
2. Площа квадрата дорівнює 144 см^2 . Знайдіть площину прямокутника, ширина якого менша за сторону квадрата на 2 см, а довжина більша за сторону квадрата вдвічі.
3. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона відноситься до основи як $5 : 6$. Знайдіть площину трикутника, якщо висота, проведена до основи, дорівнює 8 см.
4. Знайдіть кути ромба, якщо його висота дорівнює 5 см, а площа — 50 см^2 .
5. Висоти даного паралелограма дорівнюють 15 см і 18 см. Знайдіть висоти рівновеликого паралелограма, сторони якого втричі більші за відповідні сторони даного паралелограма.
6. Доведіть, що площа трапеції з бічною стороною c і радіусом вписаного кола r обчислюється за формулою $S = 2cr$.

Підсумки

ПІДСУМКОВИЙ ОГЛЯД РОЗДІЛУ III

МНОГОКУТНИК

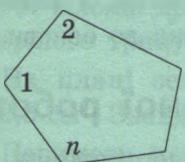


Многокутником називається проста замкнена ламана, сусідні ланки якої не лежать на одній прямій.

Многокутник називається **опуклим**, якщо він лежить по один бік від будь-якої прямої, яка містить його сторону

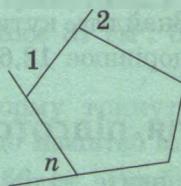
Сума кутів многокутника

Сума кутів опуклого n -кутника дорівнює $180^\circ(n - 2)$.



$$\angle 1 + \angle 2 + \dots + \angle n = 180^\circ(n - 2)$$

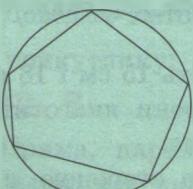
Сума зовнішніх кутів опуклого n -кутника, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360° .



$$\angle 1 + \angle 2 + \dots + \angle n = 360^\circ$$

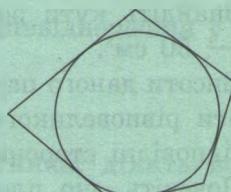
Вписаний многокутник

Многокутник називається **вписаним у коло**, якщо всі його вершини лежать на цьому колі



Описаний многокутник

Многокутник називається **описаним навколо кола**, якщо всі його сторони дотикаються до цього кола



ПЛОЩІ МНОГОКУТНИКІВ

Аксіоми площі

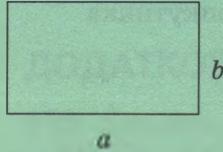
1. Рівні многокутники мають рівні площи.
2. Якщо многокутник складений із кількох многокутників, то його площа дорівнює сумі площ цих многокутників.
3. Площа квадрата зі стороною, що дорівнює одиниці довжини, дорівнює одиниці площі.

Дві фігури називаються *рівновеликими*,
якщо вони мають рівні площи

Фігура

Формула площі

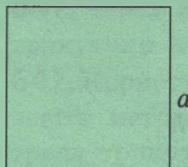
Прямоугольник



$$S = ab,$$

де a і b — сторони прямокутника

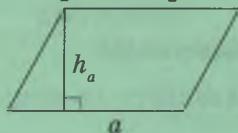
Квадрат



$$S = a^2,$$

де a — сторона квадрата

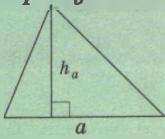
Паралелограм



$$S = ah_a,$$

де a — сторона паралелограма,
 h_a — проведена до неї висота

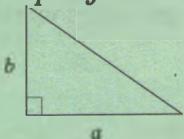
Трикутник



$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a,$$

де a — сторона трикутника,
 h_a — проведена до неї висота

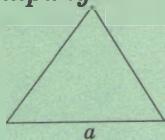
**Прямокутний
трикутник**



$$S = \frac{1}{2} ab,$$

де a і b — катети прямокутного трикутника

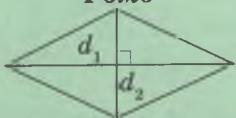
**Рівносторонній
трикутник**



$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4},$$

де a — сторона трикутника

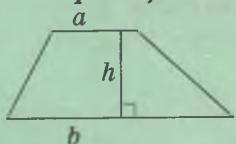
Ромб



$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2,$$

де d_1 і d_2 — діагоналі ромба

Трапеція



$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h,$$

де a і b — основи трапеції,
 h — висота трапеції

Теорема про відношення площ подібних трикутників

Відношення площ подібних трикутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності



КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ III

1. Дайте означення многокутника. Який многокутник називається опуклим?
2. Дайте означення описаного многокутника, вписаного многокутника.
3. Сформулюйте і доведіть теорему про суму кутів опуклого многокутника.
4. Назвіть аксіоми площ. За якими формулами обчислюються площині прямокутника і квадрата?
5. Доведіть формулу площині паралелограма.
6. Доведіть формулу площині трикутника. Запишіть формулі площині прямокутного трикутника, рівностороннього трикутника, ромба.
7. Доведіть формулу площині трапеції.
8. Сформулюйте і доведіть теорему про відношення площин подібних трикутників.



ДОДАТКОВІ ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ III

- 639.** Доведіть, що серед усіх паралелограмів із даними сторонами найбільшу площину має прямокутник.
- 640.** Паралелограм і трикутник рівновеликі і мають спільну сторону. Порівняйте їх висоти, проведені до цієї сторони.
- 641.** Через вершину трикутника проведіть дві прямі, які ділять трикутник на три рівновеликі частини.
- 642.** Користуючись рисунком 167, доведіть методом площин властивість бісектриси трикутника.
- 643.** Основи трапеції відносяться як $2 : 3$, а її площа дорівнює 50 см^2 . Знайдіть площини:

- двох трикутників, на які дана трапеція ділиться діагоналлю;
- чотирьох трикутників, на які дана трапеція ділиться діагоналями.

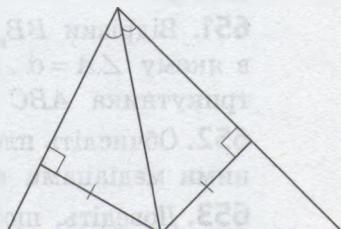


Рис. 167

644 (опорна). Діагоналі ділять трапецію на чотири трикутники, два з яких рівновеликі, а площині двох інших відносяться як квадрати основ. Доведіть.

645. Якщо діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O , причому $S_{AOB} = S_{COD}$, то $ABCD$ — паралелограм або трапеція. Доведіть.

646. Дві сторони трикутника дорівнюють 25 см і 40 см, а висота, проведена до третьої сторони, дорівнює 24 см. Знайдіть площу трикутника. Скільки розв'язків має задача?

647. Дано трикутник ABC . Побудуйте:

- рівнобедрений трикутник з основою AB , рівновеликий трикутнику ABC ;
- прямокутний трикутник з гіпотенузою AB , рівновеликий трикутнику ABC . У якому випадку це зробити неможливо?

648. Розріжте рівнобедрену трапецію на три частини, з яких можна скласти прямокутник.

Задачі підвищеної складності

649. Висоти трикутника дорівнюють 12, 15 і 20. Доведіть, що даний трикутник прямокутний.

650. Доведіть, що площа прямокутного трикутника дорівнює добутку відрізків, на які точка дотику вписаного кола ділить гіпотенузу.

651. Відрізки BB_1 і CC_1 — висоти гострокутного трикутника ABC , в якому $\angle A = \alpha$. Знайдіть площу трикутника AB_1C_1 , якщо площа трикутника ABC дорівнює S .

652. Обчисліть площу трикутника за двома взаємно перпендикулярними медіанами m_a і m_b .

653. Доведіть, що:

- площа описаної прямокутної трапеції дорівнює добутку її основ;
- висота описаної рівнобедленої трапеції є середнім пропорційним її основ.

654. Доведіть, що для трикутника зі сторонами a , b і c та площею S справджується нерівність $S < \frac{ab + bc + ac}{6}$.

655. Сторони трикутника DEF дорівнюють медіанам трикутника ABC . Доведіть, що $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{3}{4}$.

656. У трапеції $ABCD$ з основами AD і BC діагоналі перетинаються в точці O . Знайдіть площу трапеції, якщо $S_{BOC} = S_1$, $S_{AOD} = S_2$.

657. Доведіть, що площа трапеції $ABCD$ дорівнює добутку бічної сторони AB на перпендикуляр, проведений із середини M другої бічної сторони CD до прямої AB .

658. Усередині трикутника ABC обрано точку M так, що трикутники AMB , BMC і AMC рівновеликі. Доведіть, що M — точка перетину медіан трикутника ABC .

Історична довідка

Обчислення площ многокутників є першою серед тих практичних задач, яким геометрія як наука завдячує своєю появою. Однак не завжди уявлення про вимірювання площ було таким, яким воно є сьогодні.

Наприклад, стародавні єгиптяни брали за площину будь-якого трикутника половину добутку двох його сторін. Так само п'ять століть тому вимірювали площину трикутника і в Давній Русі. Для площини чотирикутника, який не є квадратом, у Вавилоні використовували формулу добутку півсум його протилежних сторін.

У середні віки для обчислення площини трикутника зі стороною і проведеною до неї висотою, які виражаються цілим числом n , брали суму членів натурального ряду від 1 до n , тобто число $\frac{n(n+1)}{2}$.

До речі, у той час знали і правильну формулу площини цього трикутника $\frac{n^2}{2}$.





Архімед

Її обґрунтував середньовічний математик **Герберт**, який у X столітті навіть певний час посідав престол Римського Папи під іменем Сильвестра II.

Давні вавилоняни ще чотири тисячі років тому вміли правильно обчислювати площину квадрата, прямокутника, трапеції. Чимало формул площ і об'ємів, з якими ви познайомитеся в старших класах, відкрив знаменитий грецький учений **Архімед** (бл. 287–212 рр. до н. е.). І все це при тому, що в давні часи навіть не було алгебраїчної символіки!



Сьогодні, володіючи значно ширшими можливостями застосування алгебри в геометрії, в багатьох задачах ми маємо змогу дати куди більш прості й зрозумілі розв'язання, ніж це було можливо в давнину.



ТЕМАТИКА ПОВІДОМЛЕНЬ ТА РЕФЕРАТІВ ДО РОЗДІЛУ I

1. Як вимірювали в давнину? (З історії вимірювання площ.)
2. Способи доведення теореми Піфагора.
3. Ділення площ і перетворення рівновеликих фігур.
4. Метод площ у геометричних доведеннях і задачах.
5. Площі і рівноскладені фігури в математичних головоломках.

РЕКОМЕНДОВАНІ ДЖЕРЕЛА ІНФОРМАЦІЇ

1. Математична хрестоматія. Т. 1, 2.— К.: Рад. шк., 1970.
2. Глейзер Г. И. История математики в школе. VII—VIII кл.— М.: Просвещение, 1982.
3. Болтянский В. Г. Равновеликие и равносоставленные фигуры.— М.: ГИТТЛ, 1956.
4. Перельман Я. И. Занимательная геометрия.— М.: Физматгиз, 1959.
5. Кушнір І. А. Повернення втраченої геометрії.— К.: Факт, 2000.
6. Литцман В. Теорема Пифагора.— М.: Физматгиз, 1960.
7. Гарднер М. Математические головоломки и развлечения.— М.: Оникс, 1994.
8. Прасолов В. В. Задачи по геометрии. Ч. 1, 2.— М.: Наука, 1986.
9. Шарыгин И. Ф. Геометрия: 9—11 кл.: От учебной задачи к творческой.— М.: Дрофа, 1996.
10. Інтернет-бібліотека МЦНМО. <http://ilib.mirror0.mccme.ru/>



РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

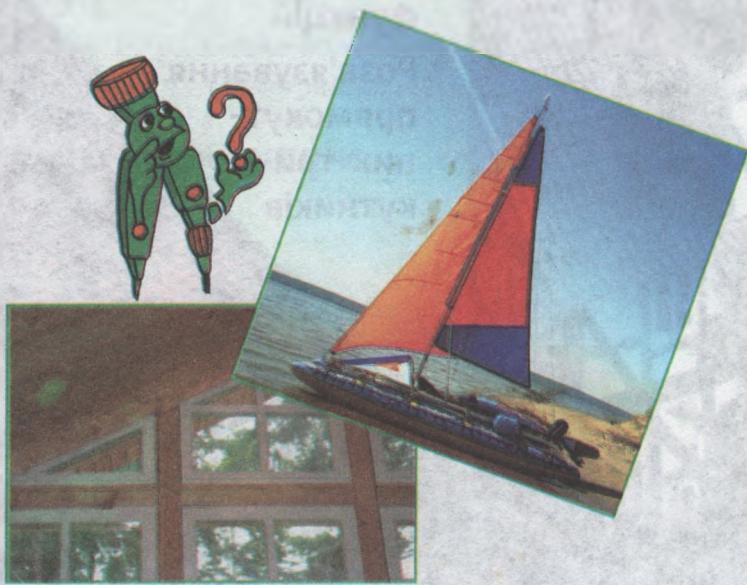
- Тригонометричні функції гострого кута
- Обчислення значень тригонометричних функцій
- Розв'язування прямокутних трикутників

Заняття геометрією непомітно приводить
людський розум до винаходів.

Дені Дідро,
французький філософ

У цьому розділі ви навчитеся розв'язувати прямокутні трикутники, тобто знаходити їх невідомі сторони й кути за відомими. Необхідні для цього теоретичні знання можна почерпнути з розділу математики, спорідненого як з геометрією, так і з алгеброю — з *тригонометрії*. Власне, саме слово «тригонометрія» в перекладі з грецької означає «вимірювання трикутників». Тому відношення сторін прямокутного трикутника, з якими ви познайомитеся далі, отримали назву *тригонометричних функцій*.

Співвідношення, які будуть застосовуватися в цьому розділі, повною мірою можна вважати проявом подібності трикутників. Узагалі, подібність трикутників, теорема Піфагора і площа — це ті три кити, на яких тримається геометрія многокутника. Саме встановлення взаємозв'язків між цими теоретичними фактами і становить основний зміст курсу геометрії у восьмому класі.



§ 19. Тригонометричні функції гострого кута

19.1. Синус, косинус і тангенс

Як уже було доведено, всі прямокутні трикутники, які мають по рівному гострому куту, подібні. Властивість подібності обумовлює не тільки рівність відношень пропорційних сторін цих трикутників, але й рівність відношень між катетами і гіпотенузою кожного з цих трикутників. Саме ці відношення і будуть предметом нашої подальшої уваги.

Нехай дано прямокутний трикутник з катетами a і b , гіпотенузою c і гострим кутом α (рис. 168).

Означення

Синусом гострого кута α прямокутного трикутника (позначається $\sin \alpha$) називається відношення протилежного катета до гіпотенузи:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}.$$

Косинусом гострого кута α прямокутного трикутника (позначається $\cos \alpha$) називається відношення прилеглого катета до гіпотенузи:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}.$$

Тангенсом гострого кута α прямокутного трикутника (позначається $\operatorname{tg} \alpha$) називається відношення протилежного катета до прилеглого:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}.$$

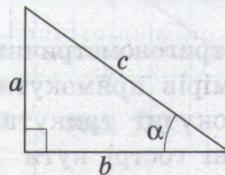


Рис. 168. До означень тригонометричних функцій кута α



Синус — латинський переклад арабського слова «джайб» — пазуха, виріз сукні. Це слово, у свою чергу, походить від індійського «джива» — тягтива лука, хорда. Саме так синус називали в давньоіндійських математичних трактатах.



Косинус — від латинського «комплементарі синус» — додатковий синус.

Тангенс — у перекладі з латинської «адитивний»

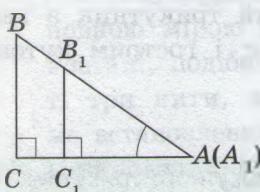


Рис. 169. Значення тригонометричних функцій кута A не залежать від розмірів трикутника

Окрім синуса, косинуса і тангенса, розглядають також **котангенс** гострого кута α прямокутного трикутника (позначається $\operatorname{ctg} \alpha$), який дорівнює відношенню прилеглого катета до протилежного:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Оскільки катет прямокутного трикутника менший за гіпотенузу, то **синус і косинус гострого кута менші за одиницю**.

Покажемо, що значення тригонометричних функцій не залежать від розмірів прямокутного трикутника. Нехай прямокутні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ мають рівні гострі кути A і A_1 (рис. 169). Ці трикутники подібні, звідки

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}, \text{ або, за основною властивістю пропорції, } \frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1}.$$

Права і ліва частини цієї рівності за означенням дорівнюють синусам гострих кутів A і A_1 відповідно. Маємо:

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1} = \sin A_1,$$

тобто синус кута A не залежить від вибору трикутника. Аналогічні міркування можна провести і для інших тригонометричних функцій (зробіть це самостійно). Таким чином, **тригонометричні функції гострого кута залежать тільки від величини кута**.

Розмірковуючи у «зворотному напрямку», отримуємо ще один важливий факт: якщо значення деякої тригонометричної функції для гострих кутів A і A_1 рівні, то $\angle A = \angle A_1$. Інакше кажучи, **кожному значенню тригонометричної функції відповідає єдиний гострий кут**.

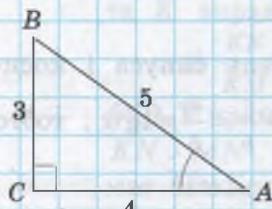


Рис. 170

Задача

Знайдіть синус, косинус і тангенс найменшого кута єгипетського трикутника.

Розв'язання

Нехай у трикутнику ABC $\angle C = 90^\circ$, $AB = 5$, $BC = 3$, $AC = 4$ (рис. 170). Оскільки в трикутнику найменший кут лежить проти найменшої сторони, то кут A — найменший кут трикутника ABC .

За означенням $\sin A = \frac{BC}{AB}$, тобто $\sin A = \frac{3}{5} = 0,6$;

$\cos A = \frac{AC}{AB}$, тобто $\cos A = \frac{4}{5} = 0,8$; $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$, тобто

$$\operatorname{tg} A = \frac{3}{4} = 0,75.$$

Відповідь: 0,6; 0,8; 0,75.

19.2. Тригонометричні тотожності

Виведемо спiввiдношення (тотожностi), що виражають залежнiсть мiж тригонометричними функцiями одного кута.

Теорема (основна тригонометрична тотожнiсть)

Для будь-якого гострого кута α

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Доведення

□ За означенням синуса і косинуса гострого кута прямокутного трикутника (див. рис. 168) маємо:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c} \right)^2 + \left(\frac{b}{c} \right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2}.$$

За теоремою Піфагора чисельник цього дробу дорiвнює c^2 , тобто $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. ■

Наслідок

Для будь-якого гострого кута¹ α

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}, \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

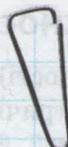
Доведемо ще кілька тригонометричних тодіжностей.

Безпосередньо з означення синуса і косинуса маємо: $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$, тобто

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Аналогічно доводиться, що $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

Звідси випливає, що $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$.

**Задача**

Знайдіть косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника, синус якого дорівнює 0,8.

Розв'язання

Нехай для гострого кута α $\sin \alpha = 0,8$. Тоді

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}, \quad \text{тобто} \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - 0,8^2} = \\ = \sqrt{0,36} = 0,6.$$

$$\text{Оскільки } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \text{ то } \operatorname{tg} \alpha = \frac{0,8}{0,6} = \frac{4}{3}.$$

Відповідь: 0,6; $\frac{4}{3}$.

¹ Нагадаємо, що за означенням тригонометричні функції гострого кута є додатними числами.

Запитання і задачі



УСНІ ВПРАВИ

659. За рисунком 171 визначте, яка тригонометрична функція кута K виражається дробом:

$$\text{а) } \frac{KN}{KM}; \quad \text{б) } \frac{MN}{KN}; \quad \text{в) } \frac{MN}{KM}.$$

660. У прямокутному трикутнику KMN (рис. 171) $KN > MN$. Який із гострих кутів трикутника має більший синус; більший косинус; більший тангенс?

661. Чи може синус гострого кута прямокутного трикутника дорівнювати $0,99$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{5} - 2$?

662. Чи може добуток синуса і косинуса одного кута дорівнювати одиниці? А добуток тангенса і котангенса?

663. Чи може тангенс гострого кута прямокутного трикутника дорівнювати $\sqrt{2}$; $0,01$; 100 ?

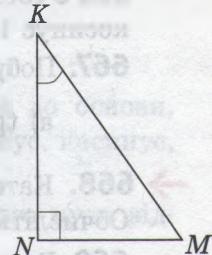


Рис. 171



ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

664. Накресліть гострий кут. Позначте на одній стороні кута дві точки і проведіть із них перпендикуляри до іншої сторони кута.

а) Виміряйте сторони прямокутних трикутників, що утворилися, і обчисліть двома способами синус побудованого кута. Порівняйте отримані результати.

б) Обчисліть косинус побудованого кута двома способами — за означенням і за основною тригонометричною тотожністю. Порівняйте отримані результати.

→ **665.** Накресліть гострий кут. Позначте на різних сторонах кута дві точки і проведіть із них перпендикуляри до іншої сторони кута.

а) Виміряйте сторони прямокутних трикутників, що утворилися, і обчисліть двома способами синус і косинус побудованого кута. Порівняйте отримані результати.

б) Обчисліть тангенс побудованого кута двома способами — за означенням і за відповідною тригонометричною тотожністю. Порівняйте отримані результати.



ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

Рівень А

666. Накресліть за допомогою транспортира прямокутний трикутник з гострим кутом 40° . Виміряйте його сторони й обчисліть синус, косинус і тангенс цього кута.

667. Побудуйте прямокутний трикутник ABC , у якому:

a) $\operatorname{tg} A = \frac{5}{6}$; b) $\sin A = \frac{2}{3}$.

→ **668.** Катети прямокутного трикутника дорівнюють 8 см і 15 см. Обчисліть синус, косинус і тангенс найменшого кута трикутника.

669. Визначте, чи можуть синус і косинус одного кута відповідно дорівнювати:

a) $\frac{1}{2}$ і $\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\frac{1}{3}$ і $\frac{3}{4}$.

670. Знайдіть:

a) $\sin \alpha$, якщо $\cos \alpha = \frac{12}{13}$;

b) $\cos \alpha$, якщо $\sin \alpha = \frac{1}{2}$;

b) $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $\sin \alpha = \frac{15}{17}$.

→ **671.** Знайдіть $\operatorname{tg} \alpha$, якщо:

a) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$; b) $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.

672. Спростіть вирази:

a) $1 - \cos^2 \alpha$; b) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha$;

b) $1 + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$.

→ **673.** Спростіть вирази:

a) $1 - \sin^2 \alpha$; b) $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha}$;

b) $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha}$.

Рівень Б

674. Побудуйте кут 75° . За допомогою додаткових побудов і вимірювань знайдіть синус, косинус, тангенс і котангенс цього кута.

675. Побудуйте гострий кут α , якщо:

a) $\sin \alpha = \frac{5}{8}$;

b) $\cos \alpha = \frac{3}{4}$.

→ **676.** Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює 5 см, а довжина основи 24 см. Знайдіть синус, косинус, тангенс і котангенс кута при основі трикутника.

677. Визначте, чи можуть тангенс і котангенс одного кута відповідно дорівнювати:

a) 0,4 і 2,5;

b) 1,1 і 0,9;

c) $\sqrt{5} + 2$ і $\sqrt{5} - 2$.

678 (опорна). Доведіть, що

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \text{i} \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

679. Знайдіть значення тригонометричних функцій гострого кута A , якщо:

a) $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

b) $\cos A = 0,28$;

c) $\operatorname{tg} A = 2$.

→ **680.** Знайдіть:

a) $\operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\sin \alpha = 0,5$; b) $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

681. Спростіть вирази:

a) $\frac{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)}{\sin \alpha}$; b) $\cos \alpha - \cos \alpha \sin^2 \alpha$;

c) $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha - \cos^2 \alpha$.

→ **682.** Спростіть вирази:

a) $\frac{\cos \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha}$;

b) $\sin \alpha \cos \alpha \operatorname{ctg} \alpha + \sin^2 \alpha$;

c) $\cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 \alpha$.

Рівень В

683. Доведіть, що для будь-якого гострого кута A $\operatorname{tg} A > \sin A$.

→ **684.** Доведіть, що для будь-якого гострого кута A $\cos A < \operatorname{ctg} A$.

685. Спростіть вирази:

a) $\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha - \cos^2 \alpha};$

b) $\operatorname{tg}^2 \alpha (1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha);$

b) $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}.$

→ **686.** Спростіть вирази:

a) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2;$

b) $\frac{1}{\sin \alpha} - \cos \alpha \operatorname{ctg} \alpha;$

b) $\frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha}{\cos^2 \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha.$

**ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 20****Теоретичний матеріал**

- нерівність трикутника;
- теорема Піфагора.

7 клас, § 18

7 клас, § 13

Задачі

687. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 120° . Знайдіть бічну сторону трикутника, якщо медіана, проведена до основи, менша за неї на 8 см.

688. Катет прямокутного трикутника дорівнює 5 см, а медіана, проведена до іншого катета, дорівнює 13 см. Знайдіть площу даного трикутника.

§ 20. Обчислення значень тригонометричних функцій

20.1. Формули доповнення

Тригонометричні тотожності, які ми розглянули, встановлюють взаємозв'язок між різними тригонометричними функціями одного кута. Спробуємо встановити зв'язок між функціями двох гострих кутів прямокутного трикутника.

Теорема (формули доповнення)

Для будь-якого гострого кута α

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha.$$

Доведення

□ Розглянемо прямокутний трикутник ABC з гіпотенузою AB (рис. 172). Якщо $\angle A = \alpha$, то $\angle B = 90^\circ - \alpha$. Виразивши синуси і косинуси гострих кутів трикутника, маємо:

$$\begin{aligned} \sin B &= \frac{AC}{AB}, \quad \cos A = \frac{AC}{AB}, \quad \text{тобто} \\ \sin(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin A &= \frac{BC}{AB}, \quad \cos B = \frac{BC}{AB}, \quad \text{тобто} \\ \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha. \end{aligned}$$

Теорему доведено. ■

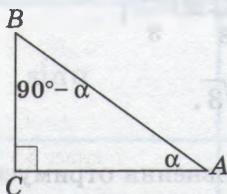


Рис. 172. До доведення формул доповнення

Наслідок

Для будь-якого гострого кута α

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha, \quad \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha.$$

Зауважимо, що назва «формули доповнення», як і назва «косинус», у якій префікс «ко-» означає «додатковий», пояснюється тим, що косинус є синусом кута, який доповнює даний кут до 90° . Analogічно пояснюється і назва «котангенс».

20.2. Значення тригонометричних функцій кутів $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$

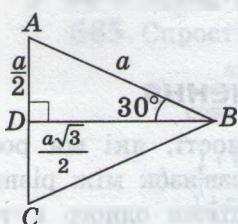


Рис. 173. До обчислення тригонометричних функцій кута 30°

Обчислимо значення тригонометричних функцій кута 30° . Для цього в рівносторонньому трикутнику ABC зі стороною a проведемо висоту BD , яка є також бісектрисою і медіаною (рис. 173). У трикутнику ABD $\angle D = 90^\circ$,

$\angle B = 30^\circ$, $AB = a$, $AD = \frac{a}{2}$, і за теоремою Піфагора $BD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Маємо:

$$\sin 30^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{\frac{a}{2}}{a} : a = \frac{1}{2};$$

$$\cos 30^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} : a = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{AD}{BD} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} : \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{BD}{AD} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} : \frac{a}{2} = \sqrt{3}.$$

За допомогою формул доповнення отримуємо значення тригонометричних функцій кута 60° :

$$\sin 60^\circ = \sin(90^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 60^\circ = \cos(90^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ - 30^\circ) = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3};$$

$$\operatorname{ctg} 60^\circ = \operatorname{ctg}(90^\circ - 30^\circ) = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Для обчислення значень тригонометричних функцій кута 45° розглянемо рівнобедрений прямокутний трикутник ABC з катетами

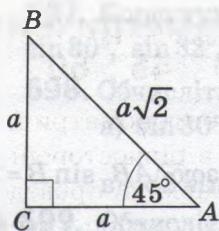


Рис. 174. До обчислення тригонометричних функцій кута 45°

$AC = BC = a$ (рис. 174). За теоремою Піфагора $AB = a\sqrt{2}$. Маємо:

$$\sin 45^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a} = 1;$$

$$\operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{a} = 1.$$

Подамо значення тригонометричних функцій кутів 30° , 45° , 60° у вигляді таблиці.

Функція	Кут α		
	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Значення тригонометричних функцій інших кутів можна обчислити за допомогою калькулятора або спеціальних таблиць (див. Додаток 3).

Запитання і задачі



УСНІ ВПРАВИ

689. У прямокутному трикутнику ABC з гіпотенузою AB $\sin B = a$. Чому дорівнює косинус кута A ?

690. Чи можуть синус і косинус гострого кута прямокутного трикутника дорівнювати один одному? У якому випадку?

691. У прямокутному трикутнику ABC з гіпотенузою AB $\tg A > \tg B$. Чи може один із цих тангенсів дорівнювати одиниці?

692. Кути α і β — гострі кути прямокутного трикутника. Знайдіть добуток $\tg \alpha \cdot \tg \beta$.



ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

693. Накресліть прямокутний трикутник.

- Виміряйте катет і гіпотенузу трикутника й обчисліть їх відношення.
- Виділіть червоним кольором кут, синус якого знайдено, і синім кольором — кут, косинус якого знайдено.

→ **694.** Накресліть рівносторонній трикутник і проведіть його висоту. Проведіть необхідні вимірювання й обчисліть значення тригонометричних функцій кутів 30° і 60° . Порівняйте отримані результати з табличними.



ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

Рівень А

695. Знайдіть гострий кут x , якщо:

- $\sin x = \cos 36^\circ$; б) $\cos x = \sin 82^\circ$;
- $\tg x = \sqrt{3}$; г) $\cos x = \sin x$.

→ **696.** Знайдіть гострий кут x , якщо:

- $\cos x = \sin 50^\circ$; б) $\sin x = 0,5$;
- $\tg x = 1$.

697. Користуючись калькулятором або таблицями, знайдіть $\sin 80^\circ$, $\sin 32^\circ$, $\cos 18^\circ$, $\cos 54^\circ$, $\tg 65^\circ$, $\tg 10^\circ$.

698. Обчисліть:

a) $\sin 30^\circ + \tg 45^\circ$;

b) $\cos 30^\circ \cdot \tg 60^\circ$;

c) $\sqrt{2} \sin 45^\circ - \cos 60^\circ$.

→ **699.** Обчисліть:

a) $\sqrt{3} \cos 30^\circ - \cos 60^\circ$;

b) $\cos 45^\circ \cdot \sin 45^\circ$;

c) $\sin 60^\circ \cdot \tg 30^\circ$.

700. Кути A і B — гострі кути прямокутного трикутника.

Знайдіть:

a) $\sin B$ і $\cos B$, якщо $\cos A = 0,6$;

b) $\cos A$ і $\tg A$, якщо $\sin B = 0,5$.

→ **701.** Знайдіть:

a) $\cos \alpha$ і $\sin \alpha$, якщо $\sin(90^\circ - \alpha) = 0,8$;

b) $\tg(90^\circ - \alpha)$, якщо $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Рівень Б

702. Знайдіть гострий кут x , якщо:

a) $\tg x = \ctg 22^\circ$;

b) $\cos(90^\circ - x) = 0,5$.

→ **703.** Знайдіть гострий кут x , якщо:

a) $\ctg x = \tg 14^\circ$;

b) $\tg x = \ctg x$.

704. Кути A і B — гострі кути прямокутного трикутника.

Знайдіть:

a) $\tg A$, якщо $\sin B = \frac{1}{\sqrt{5}}$;

b) $\sin B$, якщо $\ctg A = \sqrt{3}$;

c) $\sin^2 A + \sin^2 B$.

→ **705.** Знайдіть:

a) $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ і $\tg \alpha$, якщо $\tg(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{3}$;

b) $\cos^2 \alpha + \cos^2(90^\circ - \alpha)$.

706. Сума косинусів гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює b . Знайдіть суму синусів цих кутів.

Рівень В

707 (опорна). Під час збільшення гострого кута синус і тангенс цього кута зростають, а косинус і котангенс спадають.

Доведіть.

→ **708.** Порівняйте:

- a) $\sin 23^\circ$ і $\cos 65^\circ$; б) $\tg 36^\circ$ і $\ctg 64^\circ$.

709. Обчисліть значення виразу $\tg 15^\circ \cdot \tg 30^\circ \cdot \tg 45^\circ \cdot \tg 60^\circ \cdot \tg 75^\circ$.

→ **710.** Доведіть, що $\tg 1^\circ \cdot \tg 2^\circ \cdots \cdot \tg 88^\circ \cdot \tg 89^\circ = 1$.

**ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 21****Теоретичний матеріал**

- прямокутний трикутник;
- тригонометричні функції гострого кута.

7 клас, § 17

7 клас, § 19

Задачі

711. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до бічної сторони, дорівнює 6 см. Знайдіть площину трикутника, якщо кут при його основі дорівнює 75° .

712. Знайдіть площину рівнобедреного прямокутного трикутника, найменша висота якого дорівнює a .

§ 21. Розв'язування прямокутних трикутників

21.1. Знаходження невідомих сторін прямокутного трикутника

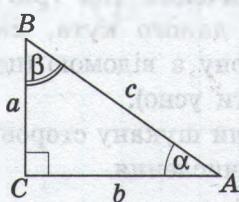


Рис. 175. Співвідношення між сторонами й кутами прямокутного трикутника

Нехай дано прямокутний трикутник із катетами a і b , гіпотенузою c і гострими кутами α і β (рис. 175).

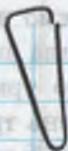
Знаючи градусну міру кута α і довжину будь-якої зі сторін трикутника, ми маємо змогу знайти обидві інші його сторони. Правила знаходження невідомих сторін прямокутного трикутника безпосередньо випливають з означень тригонометричних функцій і можуть бути узагальнені у вигляді довідкової таблиці.

Шукана сторона	Правило знаходження	Формула
Протилежний катет	Катет, протилежний до кута α , дорівнює: <ul style="list-style-type: none"> добутку гіпотенузи на $\sin \alpha$; добутку прилеглого катета на $\operatorname{tg} \alpha$. 	$a = c \sin \alpha$ $a = b \operatorname{tg} \alpha$
Прилеглий катет	Катет, прилеглий до кута α , дорівнює: <ul style="list-style-type: none"> добутку гіпотенузи на $\cos \alpha$; відношенню протилежного катета до $\operatorname{tg} \alpha$. 	$b = c \cos \alpha$ $b = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}$
Гіпотенуза	Гіпотенуза дорівнює: <ul style="list-style-type: none"> відношенню протилежного катета до $\sin \alpha$; відношенню прилеглого катета до $\cos \alpha$. 	$c = \frac{a}{\sin \alpha}$ $c = \frac{b}{\cos \alpha}$

Зауважимо, що для знаходження невідомих сторін прямокутного трикутника можна використовувати і $\operatorname{ctg}\alpha$ (відповідні правила і формули отримайте самостійно).

Запам'ятувати зміст довідкової таблиці не обов'язково. Для знаходження невідомої сторони прямокутного трикутника можна діяти за таким планом.

1. Вибрати формулу означення тієї тригонометричної функції даного кута, яка пов'язує шукану сторону з відомою (цей етап можна виконувати усно).
2. Виразити з цієї формулі шукану сторону.
3. Провести необхідні обчислення.



Задача

У прямокутному трикутнику з гіпотенузою 12 м знайдіть катет, прилеглий до кута 60° .

Розв'язання

Нехай у прямокутному трикутнику (див. рис. 175) $\alpha = 60^\circ$, $c = 12$ м. Знайдемо катет b .

Оскільки $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, то $b = c \cos\alpha$, тобто
 $b = 12 \cos 60^\circ = 6$ (м).

Відповідь: 6 м.

21.2. Приклади розв'язування прямокутних трикутників

Розв'язати трикутник — це означає знайти його невідомі сторони й кути за відомими сторонами й кутами.

Прямокутний трикутник можна розв'язати за стороною і гострим кутом або за двома сторонами. Розглянемо приклади конкретних задач

на розв'язування прямокутних трикутників, користуючись позначеннями рисунка 175. При цьому домовимось округляти значення тригонометричних функцій до тисячних, довжини сторін до сотих, а градусні міри кутів до одиниць.

Задача 1

Розв'яжіть прямокутний трикутник за гіпотенузою $c = 10$ і гострим кутом $\alpha = 50^\circ$.

Розв'язання

Оскільки сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90° , то $\beta = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$.

Оскільки $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, то $a = c \sin \alpha$, тобто

$$a = 10 \sin 50^\circ \approx 10 \cdot 0,766 = 7,66.$$

Оскільки $\cos \alpha = \frac{b}{c}$, то $b = c \cos \alpha$, тобто

$$b = 10 \cos 50^\circ \approx 10 \cdot 0,643 = 6,43.$$

Задача 2

Розв'яжіть прямокутний трикутник за катетом $a = 6$ і гострим кутом $\beta = 22^\circ$.

Розв'язання

Оскільки сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90° , то $\alpha = 90^\circ - 22^\circ = 68^\circ$.

Оскільки $\cos \beta = \frac{a}{c}$, то $c = \frac{a}{\cos \beta}$, тобто

$$c = \frac{6}{\cos 22^\circ} \approx \frac{6}{0,927} = 6,47.$$

Оскільки $\tg \beta = \frac{b}{a}$, то $b = a \tg \beta$, тобто

$$b = 6 \tg 22^\circ \approx 6 \cdot 0,404 \approx 2,42.$$

Задача 3

Розв'яжіть прямокутний трикутник за гіпотенузою $c = 13$ і катетом $a = 5$.

Розв'язання

За теоремою Піфагора $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, тобто $b = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.

Оскільки $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, то $\sin \alpha = \frac{5}{13} \approx 0,385$, звідки

$$\alpha \approx 23^\circ.$$

Оскільки сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90° , то $\beta \approx 90^\circ - 23^\circ = 67^\circ$.

Задача 4

Розв'яжіть прямокутний трикутник за катетами $a = 8$ і $b = 15$.

Розв'язання

За теоремою Піфагора $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, тобто $c = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$.

Оскільки $\tg \alpha = \frac{a}{b}$, то $\tg \alpha = \frac{8}{15} \approx 0,533$, звідки

$$\alpha \approx 28^\circ.$$

Оскільки сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90° , то $\beta \approx 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ$.

Окремі кроки розв'язування задач 1—4 можна проводити іншими способами. Але слід зауважити, що у випадку, коли одна з двох сторін трикутника знайдена наближено, застосовувати теорему Піфагора для знаходження третьої сторони недоречно.

21.3. Прикладні задачі

Розглянемо приклади застосування розв'язування трикутників у практичних задачах.

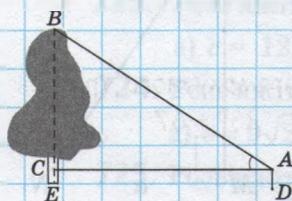


Рис. 176

Задача

Знайдіть висоту даного предмета (рис. 176).

Розв'язання

На певній відстані від даного предмета оберемо точку A і вимірюємо кут BAC .

Оскільки у прямокутному трикутнику ABC $\tg A = \frac{BC}{AC}$, то $BC = AC \tg A$.

Для визначення висоти предмета необхідно додати до BC висоту AD приладу, за допомогою якого вимірювався кут. Отже, $BE = AC \tg A + AD$.

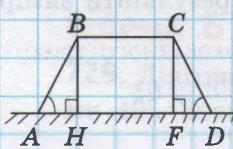


Рис. 177

Задача

Насип шосейної дороги (рис. 177) має ширину 60 м у верхній частині і 68 м у нижній частині. Знайдіть висоту насипу, якщо кути нахилу укосів до горизонту дорівнюють 60° .

Розв'язання

Розглянемо рівнобедрену трапецію $ABCD$, у якій $AD \parallel BC$, $AD = 68$ м, $BC = 60$ м, $\angle A = \angle D = 60^\circ$.

Проведемо висоти BH і CF . Оскільки $BC = HF$ і $AH = FD$ (доведіть це самостійно), то $AH = FD = (68 - 60) : 2 = 4$ (м).

У трикутнику ABH $\angle H = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, $AH = 4$ м.

Оскільки $\tg A = \frac{BH}{AH}$, то $BH = AH \tg A$, тобто

$$BH = 4 \tg 60^\circ = 4\sqrt{3} \approx 6,93 \text{ (м)}.$$

Відповідь: $\approx 6,93$ м.

Запитання і задачі



УСНІ ВПРАВИ

713. Чи можна розв'язати прямокутний трикутник за двома сторонами; за двома кутами?

714. У прямокутному трикутнику KMN (рис. 178) відомі катет MN і кут K . Виразіть через них другий катет і гіпотенузу трикутника.

715. Користуючись рисунком 178, визначте, які з даних тверджень правильні:

a) $KN = \frac{MN}{\sin \alpha}$;

б) $MK = KN \sin \alpha$;

в) $KN = MN \operatorname{tg} \alpha$;

г) $MN = \frac{KM}{\operatorname{ctg} \alpha}$.

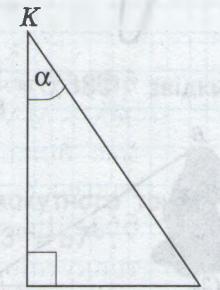


Рис. 178



ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

716. Накресліть прямокутний трикутник і виміряйте в ньому гіпотенузу і гострий кут. Розв'яжіть даний трикутник. Перевірте отримані результати вимірюванням.

→ **717.** Накресліть прямокутний трикутник і виміряйте його катети. Розв'яжіть даний трикутник. Перевірте отримані результати вимірюванням.



ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

Рівень А

718. У прямокутному трикутнику катет завдовжки 7 см є прилеглим до кута 60° . Знайдіть гіпотенузу трикутника.

719. У прямокутному трикутнику гіпотенузя дорівнює 20 см, а синус одного з кутів дорівнює 0,6. Знайдіть катети трикутника.

- 720. У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює 8 см, а один із катетів — $4\sqrt{2}$ см. Знайдіть гострі кути трикутника.
721. Розв'яжіть прямокутний трикутник¹ за гіпотенузою і гострим кутом:
- а) $c = 8$, $\alpha = 30^\circ$; б) $c = 10$, $\alpha = 42^\circ$.
722. Розв'яжіть прямокутний трикутник за катетом і гострим кутом:
- а) $a = 2$, $\beta = 45^\circ$; б) $a = 4$, $\alpha = 18^\circ$.
- 723. Розв'яжіть прямокутний трикутник, якщо:
- а) $c = 12$, $\alpha = 28^\circ$; б) $a = 8$, $\beta = 40^\circ$.
724. Розв'яжіть прямокутний трикутник за гіпотенузою і катетом:
- а) $c = 9\sqrt{2}$, $a = 9$; б) $c = 25$, $a = 24$.
725. Розв'яжіть прямокутний трикутник за двома катетами:
- а) $a = 6\sqrt{3}$, $b = 6$; б) $a = 9$, $b = 40$.
- 726. Розв'яжіть прямокутний трикутник, якщо:
- а) $a = 6$, $c = 10$; б) $a = 5$, $b = \sqrt{11}$.
727. Відрізок BD — висота прямокутного трикутника ABC , проведена до гіпотенузи. Доведіть, що $AD \operatorname{tg} A = DC \operatorname{tg} C$.
- 728. Відрізок BD — висота прямокутного трикутника ABC , проведена до гіпотенузи. Доведіть, що $\frac{BD}{\sin A} = AC \cos A$.

Рівень Б

729. Діагональ прямокутника дорівнює 10, а кут між діагоналями 40° . Знайдіть сторони прямокутника.

730. Синус кута при основі рівнобедреного трикутника дорівнює $\frac{8}{17}$,

а висота, проведена до основи, — 16 см. Знайдіть основу трикутника.

→ 731. Діагоналі ромба дорівнюють 10 см і 24 см. Знайдіть кути ромба.

¹ У задачах 721—726, 738 використовуються позначення рисунка 175.

732. Відрізок BD — висота прямокутного трикутника ABC , проведена до гіпотенузи. Розв'яжіть трикутник ABC , якщо:

a) $BD = 4\sqrt{3}$, $\angle DBC = 60^\circ$; б) $AD = 9$, $\angle C = 10^\circ$.

→ **733.** Відрізок BD — висота прямокутного трикутника ABC , проведена до гіпотенузи. Розв'яжіть трикутник ABC , якщо $BD = 3$, $DC = 4$.

734. Основи прямокутної трапеції дорівнюють 8 і 12, а тупий кут 110° . Знайдіть бічні сторони трапеції.

→ **735.** У рівнобедреній трапеції кут при основі дорівнює 135° , менша основа і бічна сторона дорівнюють відповідно 8 і 10. Знайдіть середину лінію трапеції.

736. Тінь від стовпа заввишки 11 м становить 4,4 м. Виразіть у градусах висоту Сонця над горизонтом.

→ **737.** Знайдіть кут підйому гірського шосе, якщо на відстані 400 м висота підйому становить 28 м.

Рівень В

738. Розв'яжіть прямокутний трикутник за сумою катетів m і гострим кутом α .

→ **739.** Розв'яжіть прямокутний трикутник за різницею гострих кутів ϕ і гіпотенузою c .

740. Висота прямокутного трикутника ділить гіпотенузу у відношенні 1 : 3. Знайдіть гострі кути трикутника.

741. На рисунку 179 показано спосіб вимірювання висоти предмета, основа якого недосяжна. Знайдіть цю висоту, якщо $AB = d$, $\angle CAD = \alpha$, $\angle CBD = \beta$.

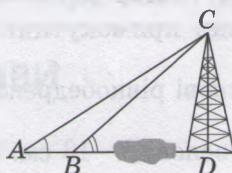


Рис. 179

→ **742.** Катети прямокутного трикутника дорівнюють 30 і 40. Знайдіть кут між медіаною і висотою, проведеними до гіпотенузи.

Задачі для підготовки до контрольної роботи № 4

1. Знайдіть $\sin A$ і $\operatorname{tg} A$, якщо $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. Спростіть вираз $\frac{\cos^2 \alpha}{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)}$.
3. Обчисліть $2\sin 60^\circ + 4\cos 60^\circ - \operatorname{ctg} 30^\circ - 2\operatorname{tg} 45^\circ$.
4. У прямокутному трикутнику катет завдовжки 18 см є протилежним до кута 60° . Знайдіть другий катет і гіпотенузу трикутника.
5. У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює 74 см, а синус одного з кутів $\frac{12}{37}$. Знайдіть периметр трикутника.
6. Більша бічна сторона описаної прямокутної трапеції дорівнює c , а гострий кут дорівнює α . Доведіть, що середня лінія трапеції дорівнює $\frac{c(1 + \sin \alpha)}{2}$.

Підсумки

ПІДСУМКОВИЙ ОГЛЯД РОЗДІЛУ IV

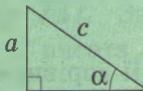
ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ ГОСТРОГО КУТА ПРЯМОКУТНОГО ТРИКУТНИКА

Синус

Синусом

гострого кута α називається відношення протилежного катета до гіпотенузи:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

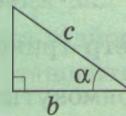


Косинус

Косинусом

гострого кута α називається відношення прилеглого катета до гіпотенузи:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

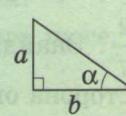


Тангенс

Тангенсом

гострого кута α називається відношення протилежного катета до прилеглого:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

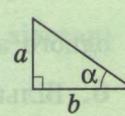


Котангенс

Котангенсом

гострого кута α називається відношення прилеглого катета до протилежного:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$



Тригонометричні тотожності

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Формули доповнення

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

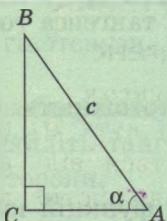
Значення тригонометричних функцій деяких кутів

α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

Задача**Умова****Схема розв'язання****Задача 1**

За гіпотенузою і гострим кутом



Дано:

$$\begin{aligned}AB &= c, \\ \angle A &= \alpha, \\ \angle C &= 90^\circ.\end{aligned}$$

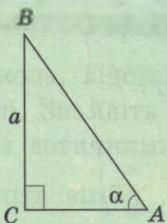
Знайти:

$$\angle B, AC, BC.$$

1. $\angle B = 90^\circ - \alpha$
2. $AC = c \cos \alpha$
3. $BC = c \sin \alpha$

Задача 2

За катетом і гострим кутом



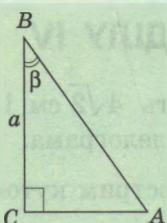
Дано:

$$\begin{aligned}BC &= a, \\ \angle A &= \alpha, \\ \angle C &= 90^\circ.\end{aligned}$$

Знайти:

$$\angle B, AB, AC.$$

1. $\angle B = 90^\circ - \alpha$
2. $AC = \frac{a}{\sin \alpha}$
3. $BC = \frac{a}{\tan \alpha}$



Дано:

$$\begin{aligned}BC &= a, \\ \angle B &= \beta, \\ \angle C &= 90^\circ.\end{aligned}$$

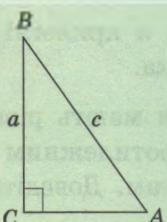
Знайти:

$$\angle A, AC, AB.$$

1. $\angle A = 90^\circ - \beta$
2. $AB = \frac{a}{\cos \beta}$
3. $AC = a \tan \beta$

Задача 3

За гіпотенузою і катетом



Дано:

$$\begin{aligned}BC &= a, \\ AB &= c, \\ \angle C &= 90^\circ.\end{aligned}$$

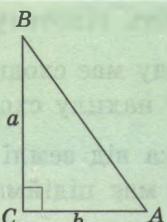
Знайти:

$$AC, \angle A, \angle B.$$

1. $AC = \sqrt{c^2 - a^2}$
2. $\sin A = \frac{a}{c}$
3. $\angle B = 90^\circ - \angle A$

Задача 4

За двома катетами



Дано:

$$\begin{aligned}BC &= a, \\ AC &= b, \\ \angle C &= 90^\circ.\end{aligned}$$

Знайти:

$$AB, \angle A, \angle B.$$

1. $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$
2. $\tan A = \frac{a}{b}$
3. $\angle B = 90^\circ - \angle A$



КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ IV

1. Дайте означення синуса, косинуса і тангенса гострого кута прямокутного трикутника.
2. Доведіть основну тригонометричну тотожність.
3. Доведіть формули доповнення.
4. Назвіть значення тригонометричних функцій кутів 30° , 45° , 60° .
5. Опишіть розв'язування прямокутного трикутника:
 - а) за гіпотенузою і гострим кутом;
 - б) за катетом і гострим кутом;
 - в) за гіпотенузою і катетом;
 - г) за двома катетами.



ДОДАТКОВІ ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ IV

743. Сторони паралелограма дорівнюють $4\sqrt{2}$ см і 8 см, а гострий кут 45° . Знайдіть висоти і площину паралелограма.

744. Радіус кола, вписаного в ромб з гострим кутом α , дорівнює r . Знайдіть сторону і площину ромба.

745. Сторона трикутника дорівнює 10, а прилеглі до неї кути 30° і 45° . Знайдіть інші сторони трикутника.

746. Якщо два прямокутні трикутники мають рівні гіпотенузи, то синуси їх гострих кутів пропорційні протилежним катетам, а косинуси гострих кутів — прилеглим катетам. Доведіть.

747. Бісектриса, проведена з вершини гострого кута α прямокутного трикутника, дорівнює l . Знайдіть гіпотенузу трикутника.

748. Ескалатор Київського метрополітену має сходинки завширшки 40 см і заввишки 30 см. Визначте кут нахилу сходів.

749. За 700 м від точки відриву літака від землі розташовані дерева заввишки 24 м. Під яким кутом має підійматися літак, щоб не зачепити дерев?

Задачі підвищеної складності

- 750.** Доведіть, що катети прямокутного трикутника і висота, проведена до гіпотенузи, пов'язані співвідношенням $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.
- 751.** У рівнобедреному трикутнику косинус кута при вершині дорівнює a . Знайдіть тангенс кута між основою і висотою, проведеною до бічної сторони.
- 752.** У трикутнику ABC $AB = BC$, а висота AE удвічі менша за висоту BD . Знайдіть косинус кута при основі трикутника.
- 753.** Два кола, відстань між центрами яких дорівнює d , дотикаються зовні. Знайдіть радіуси цих кіл, якщо кут між їх спільними зовнішніми дотичними дорівнює 2α .
- 754.** Знайдіть $\sin 75^\circ$.

Історична довідка



Птолемей

Необхідність у розв'язуванні трикутників виникла під час розгляду багатьох практичних задач у зв'язку з потребами географії, астрономії, навігації. Тому елементи тригонометрії з'явилися ще в Давньому Вавилоні, де астрономія набула значного розвитку. У роботі грецького вченого **Птолемея** «Альмагест» (II ст. н.е.), де викладено античну систему світу, містяться елементи сферичної тригонометрії.



У Давній Греції замість синуса кута α розглядали довжину хорди, яка відповідає центральному куту 2α . Дійсно, якщо радіус кола дорівнює одиниці, то $\sin \alpha$ вимірюється половиною такої хорди (перевірте це самостійно). Перші тригонометричні таблиці були складені **Гіппархом** у II столітті н.е.

Синус і косинус як допоміжні величини використовувалися індійськими математиками у V столітті, а тангенс і котангенс уперше з'явилися в роботах арабського математика X ст. **Абу-аль-Вефи**.

Як окремий розділ математики тригонометрія виділилася у творах персидського вченого **Насреддіна Тусі** (1201–1274), а першим із європейців систематичне викладення тригонометрії подав німецький математик і механік **Йоганн Мюллер** (1436–1476), більш відомий під псевдонімом **Регіомонтан**.

Сучасну форму викладення і сучасну символіку тригонометрія набула завдяки **Леонардові Ейлеру** у XVIII столітті.



Регіомонтан

Окрім відомих вам чотирьох тригонометричних функцій іноді розглядаються ще дві:

$$\text{секанс } \left(\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \right)$$

$$\text{і косеканс } \left(\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \right).$$



ТЕМАТИКА ПОВІДОМЛЕНЬ ТА РЕФЕРАТІВ ДО РОЗДІЛУ IV

1. З історії розвитку тригонометрії.
2. Тригонометричні тотожності в трикутнику.
3. Геометричні нерівності, пов'язані з тригонометрією.
4. Застосування тригонометричних функцій під час розв'язування прикладних задач.

РЕКОМЕНДОВАНІ ДЖЕРЕЛА ІНФОРМАЦІЇ

1. Математична хрестоматія. Т. 1, 2.— К.: Рад. шк., 1970.
2. Глейзер Г. И. История математики в школе. VII—VIII кл.— М.: Просвещение, 1982.
3. Сивашинский И. Х. Неравенства в задачах.— М.: Наука, 1967.
4. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум.— М.: Наука, 1970.
5. Кушнір І. А. Повернення втраченої геометрії.— К.: Факт, 2000.
6. Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Рабинович Е. М., Якир М. С. Тригонометрия: Задачник к школьному курсу.— М.: АСТ-ПРЕСС, 1998.
7. Прасолов В. В. Задачи по геометрии. Ч. 1, 2.— М.: Наука, 1986.
8. Шарыгин И. Ф. Геометрия: 9—11 кл.: От учебной задачи к творческой.— М.: Дрофа, 1996.
9. Інтернет-бібліотека МЦНМО. <http://ilib.mirror0.mccme.ru/>

ДОДАТКИ

Додаток 1. Узагальнена теорема Фалеса та площа прямокутника

Під час доведення деяких геометричних теорем використовується процедура поділу відрізка на певну кількість рівних частин. Це дозволяє дати числові оцінки у вигляді нерівностей і за допомогою них отримати суперечність.

У курсі геометрії 8 класу такий підхід доцільно застосувати для доведення двох наведених нижче теорем.

Теорема (узагальнена теорема Фалеса)

Паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на сторонах цього кута пропорційні відрізки.

Доведення

□ За даними рисунка 180 доведемо три формули:

$$1) \frac{AC}{AB} = \frac{AC_1}{AB_1}; \quad 2) \frac{AB}{BC} = \frac{AB_1}{B_1C_1};$$

$$3) \frac{BC}{CD} = \frac{B_1C_1}{C_1D_1}.$$

Доведемо спочатку формулу 1.

Нехай відрізок AC можна поділити на n рівних відрізків так, що одна з точок поділу збігається з точкою B , причому на відрізку AB лежить m точок поділу. Тоді, провівши через точки поділу прямі, паралельні CC_1 , за теоремою Фалеса отримаємо поділ відрізків AC_1 і AB_1

відповідно на n та m рівних відрізків. Отже, $\frac{AC}{AB} = \frac{n}{m} = \frac{AC_1}{AB_1}$, що й треба довести.

Якщо описаний поділ відрізка AC неможливий, то доведемо формулу 1 від супротивного. Нехай $\frac{AC}{AB} \neq \frac{AC_1}{AB_1}$, тобто $AB \neq AC \cdot \frac{AB_1}{AC_1}$.

Розглянемо випадок, коли $AB > AC \cdot \frac{AB_1}{AC_1}$ (інший випадок розгляньте самостійно).

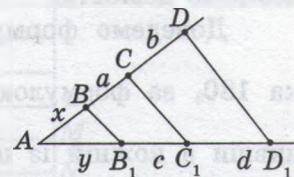


Рис. 180. Узагальнена теорема Фалеса

Відкладемо на відрізку AB відрізок $AP = AC \cdot \frac{AB}{AC_1} < AB$ (рис. 181).

Розіб'ємо відрізок AC на таку кількість рівних відрізків¹, щоб одна з точок поділу X потрапила на відрізок PB . Проведемо через точки поділу прямі, паралельні CC_1 . Нехай пряма, яка проходить через точку X , перетинає промінь AC_1

в точці Y . Тоді за доведеним $\frac{AX}{AC} = \frac{AY}{AC_1}$. Враховуючи, що в цій про-

порції $AX > AP$ і $AY < AB_1$, маємо: $\frac{AP}{AC} < \frac{AB}{AC_1}$, тобто $AP < AC \cdot \frac{AB}{AC_1}$.

Ця нерівність суперечить вибору довжини відрізка AP . Отже, формулу 1 доведено повністю.

Доведемо формулі 2 та 3. Користуючись позначеннями рисунка 180, за формулою 1 маємо $\frac{a+x}{x} = \frac{c+y}{y}$ та $\frac{a+b+x}{a+x} = \frac{c+d+y}{c+y}$. Розділивши в кожній із цих рівностей чисельник на знаменник, отримаємо:

$$1 + \frac{a}{x} = 1 + \frac{c}{y}, \text{ тобто } \frac{a}{x} = \frac{c}{y}; 1 + \frac{b}{a+x} = 1 + \frac{d}{c+y}, \text{ тобто } \frac{b}{a+x} = \frac{d}{c+y}.$$

Звідси $\frac{a}{x} : \frac{b}{a+x} = \frac{c}{y} : \frac{d}{c+y}$, тобто $\frac{a}{b} \cdot \frac{a+x}{x} = \frac{c}{d} \cdot \frac{c+y}{y}$, або $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Таким чином, доведено, що $\frac{a}{x} = \frac{c}{y}$ та $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, тобто формулі 2 та 3 справджаються.

Теорему доведено повністю. ■

З курсу математики 5 класу відомо, що площа прямокутника дорівнює добутку двох його сусідніх сторін. Так, на рисунку 182 дано прямокутник 3×5 , який ділиться на 15 квадратів із площею 1. Отже, за аксіомами площин, його площа дорівнює 15 кв. од., тобто 3×5 кв. од. У такий спосіб легко знайти

¹ Довжина кожного з цих відрізків може дорівнювати, наприклад, $\frac{1}{2}PB$.

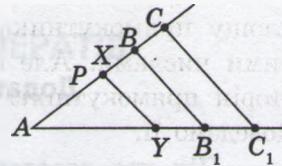


Рис. 181. До доведення узагальненої теореми Фалеса

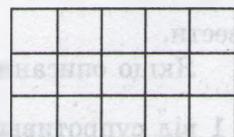


Рис. 182. Прямокутник 3×5

площу прямокутника, у якого довжини сторін виражені будь-якими ціліми числами. Але справедливість цієї формули за умови, що довжини сторін прямокутника не є цілыми числами,— зовсім неочевидна теорема. Доведемо її.

Теорема (формула площи прямокутника)

Площа прямокутника дорівнює добутку його сусідніх сторін:

$S = ab$, де a і b — сторони прямокутника.

Доведення

□ Доведемо спочатку, що площи прямокутників із одним рівним виміром відносяться як довжини інших вимірів.

Нехай прямокутники $ABCD$ та AB_1C_1D мають спільну сторону AD (рис. 183, а).

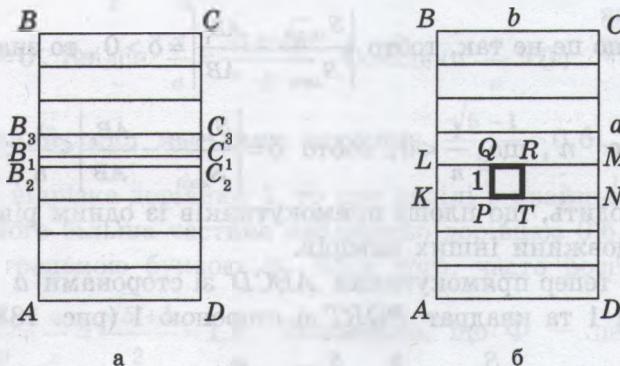


Рис. 183. До доведення формулі площи прямокутника

Розіб'ємо сторону AB на n рівних частин. Нехай на відрізку AB_1 лежить m точок поділу, причому точка поділу B_2 має номер m , а точка B_3 — номер $m+1$. Тоді $AB_2 \leq AB_1 \leq AB_3$, звідки $\frac{m}{n}AB \leq AB_1 \leq \frac{m+1}{n}AB$,

тобто $\frac{m}{n} \leq \frac{AB_1}{AB} \leq \frac{m+1}{n}$, $\frac{m}{n} \leq \frac{AB_1}{AB} \leq \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$.

Тепер проведемо через точки поділу прямі, паралельні AD . Вони розділять прямокутник $ABCD$ на n рівних прямокутників (тобто таких, які суміщаються накладанням). Очевидно, що прямокутник AB_2C_2D міститься всередині прямокутника AB_1C_1D , а прямокутник AB_3C_3D містить прямокутник AB_1C_1D .

Отже, $S_{AB_2C_2D} \leq S_{AB_1C_1D} \leq S_{AB_3C_3D}$.

Маємо: $\frac{m}{n} \cdot S_{ABCD} \leq S_{AB_1C_1D} < \frac{(m+1)}{n} \cdot S_{ABCD}$, $\frac{m}{n} \leq \frac{S_{AB_1C_1D}}{S_{ABCD}} < \frac{m+1}{n}$,

$$\frac{m}{n} \leq \frac{S_{AB_1C_1D}}{S_{ABCD}} \leq \frac{m}{n} + \frac{1}{n}.$$

Порівнюючи вирази для $\frac{AB_1}{AB}$ та $\frac{\frac{S_{AB_1C_1D}}{S_{ABCD}}}{\frac{S_{ABCD}}{S_{ABCD}}} = \frac{S_{AB_1C_1D}}{S_{ABCD}}$, бачимо, що обидва ці відношення містяться між $\frac{m}{n}$ і $\frac{m}{n} + \frac{1}{n}$, тобто відрізняються не більше, ніж на $\frac{1}{n}$ (n — натуральне число). Доведемо від супротивного, що ці відношення рівні.

Дійсно, якщо це не так, тобто $\left| \frac{S_{AB_1C_1D}}{S_{ABCD}} - \frac{AB_1}{AB} \right| = \delta > 0$, то знайдеться таке

натуральне число¹ n , що $\frac{1}{n} < \delta$, тобто $\delta = \left| \frac{S_{AB_1C_1D}}{S_{ABCD}} - \frac{AB_1}{AB} \right| \leq \frac{1}{n} < \delta$. Отримана

суперечність доводить, що площині прямокутників із одним рівним виміром відносяться як довжини інших вимірів.

Розглянемо тепер прямокутники $ABCD$ зі сторонами a і b ; $KLMN$ зі сторонами b і 1 та квадрат $PQRT$ зі стороною 1 (рис. 183, б).

Тоді за доведеним $\frac{S_{KLMN}}{S_{PQRT}} = \frac{b}{1}$, $\frac{S_{ABCD}}{S_{KLMN}} = \frac{a}{1}$. Оскільки $S_{PQRT} = 1$ кв. од.,

то, перемноживши отримані відношення, маємо $S_{ABCD} = ab$.

Теорему доведено. ■

¹ Оберемо $n > \frac{1}{\delta}$, наприклад $n = \left[\frac{1}{\delta} \right] + 1$, де $\left[\frac{1}{\delta} \right]$ — ціла частина дробу $\frac{1}{\delta}$.

Додаток 2. Золотий переріз

Із давніх-давен люди намагалися пізнати світ через пошук гармонії і досконалості. Одним із питань, яким переймалися ще давні греки, було знаходження найкращого співвідношення нерівних частин одного цілого. Таким від часів Піфагора вважали гармонічний поділ, під час якого менша частина відноситься до більшої, як більша частина відноситься до всього цілого. Такий поділ відрізка на частини описано в II книзі «Начал» Евкліда і названо *поділом у крайньому та середньому відношенні*.

Розглянемо поділ відрізка AB точкою C ,

при якому $\frac{AC}{CB} = \frac{CB}{AB}$ (рис. 184). Нехай довжина відрізка AB дорівнює a , а довжина відрізка CB дорів-

нює x . Тоді $\frac{a-x}{x} = \frac{x}{a}$, тобто $x^2 + ax - a^2 = 0$,

$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{x}{a} + 1 = 0$. Звідси $\frac{x}{a} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Оскільки $\frac{x}{a} > 0$,

то геометричний зміст має лише значення $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,6$. Отже, якщо дов-

жина даного відрізка дорівнює 1, то при поділі в крайньому та середньому відношенні його більша частина наближено дорівнює 0,6. Отримане число позначають грецькою буквою ϕ . Крім того, часто розглядають і відно-

шення $\Phi = \frac{1}{\phi} = \frac{a}{x} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,6$. Зазначимо, що Φ — перша буква імені давньогрецького скульптора Фідія, який часто використовував такий поділ у своєму мистецтві (зокрема, у славетній статуй Зевса Олімпійського, яку вважали одним із семи чудес світу).

В епоху Відродження (XV—XVII ст.) інтерес до гармонічного поділу надзвичайно зрос. Видатний учений і митець Леонардо да Вінчі (1452—1519) назвав такий поділ *золотим перерізом*, а його сучасник і співвітчизник, італійський монах-математик Лука Пачолі (1445—1514) — божественною пропорцією. Золотий переріз і близькі до нього пропорційні відношення складали основу композиційної побудови багатьох витворів світового мистецтва, зокрема архітектури Античності й Відродження. Одна з найвельчинніших споруд Давньої Еллади — Парфенон в Афінах (V ст. до н. е.) — містить у собі золоті пропорції (зокрема, відношення висоти і довжини цієї споруди дорівнює ϕ).

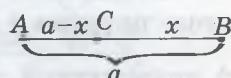


Рис. 184. Поділ відрізка AB у крайньому та середньому відношенні

Отже, дамо означення золотого перерізу.

Означення

Золотим перерізом називається такий поділ величини на дві нерівні частини, при якому менша частина відноситься до більшої, як більша частина відноситься до всього цілого.

Інакше кажучи, золотий переріз — це поділ величини у відношенні ϕ (або Φ).

Побудувати золотий переріз відрізка заданої довжини a за допомогою циркуля і лінійки досить просто: для цього достатньо побудувати прямокутний трикутник із катетами a та $\frac{a}{2}$

і провести дві дуги з вершин гострих кутів так, як показано на рисунку 185. За теоремою про пропорційність відрізків січної та дотичної $AB^2 = AE \cdot AD$. Тоді $\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AD}$. Оскільки

за побудовою $AB = 2OD = ED = a$, то $AE = AD - AB$ і $\frac{AD - AB}{AB} = \frac{AB}{AD} = \phi$ за означенням золотого перерізу.

Отже, $\frac{AE}{AB} = \frac{AC}{AB} = \phi$. Переконатися в правильності побудови також можна за допомогою теореми Піфагора (зробіть це самостійно.)

Із золотим перерізом пов'язують геометричні фігури, при побудові яких використовуються відношення ϕ і Φ . Розглянемо деякі з них.

Рівнобедрений трикутник називається **золотим**, якщо дві його сторони відносяться в золотому перерізі. Доведемо, що трикутник з кутами 36° , 72° , 72° (рис. 186, а) є золотим. Дійсно, нехай у трикутнику ABC $\angle A = \angle C = 72^\circ$, $\angle B = 36^\circ$, AK — бісектриса. Тоді $\angle KAC = 36^\circ$, $\angle AKC = 72^\circ$, $\triangle ABC \sim \triangle CAK$ за двома кутами. Отже,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{KC} = \frac{AC}{BC - BK} = \frac{AC}{AB - AC} = \Phi, \text{ тобто трикутник } ABC \text{ — золотий.}$$

I навпаки: якщо в рівнобедреному трикутнику $A_1B_1C_1$ $\frac{A_1B_1}{A_1C_1} = \frac{C_1B_1}{A_1C_1} = \Phi$,

то такий трикутник подібний до трикутника ABC , тобто має кути 36° , 72° , 72° .

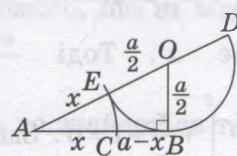


Рис. 185. Побудова золотого перерізу відрізка

Пропонуємо самостійно переконатися, що золотим є також трикутник з кутами 36° , 36° , 108° (рис. 186, б) і інших золотих трикутників не існує.

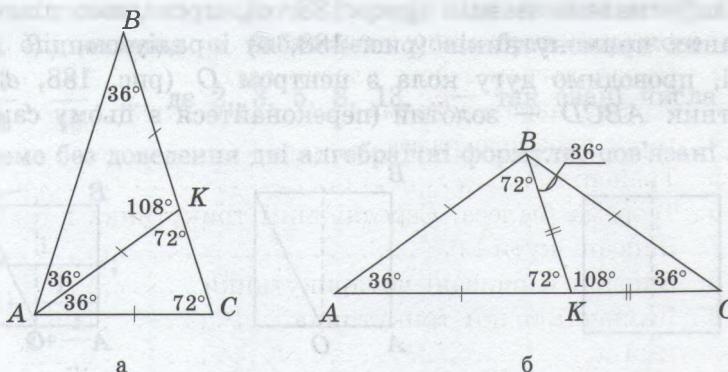


Рис. 186. Золоті трикутники

Золоті трикутники пов'язані з правильним п'ятикутником (тобто опуклим п'ятикутником, що має рівні сторони й рівні кути).

У правильному п'ятикутнику:

- 1) діагональ відноситься до сторони в золотому перерізі;
- 2) точка перетину діагоналей ділить кожну із них у золотому перерізі;
- 3) діагональ ділить іншу на два відрізки, один із яких ділиться в золотому перерізі ще однією діагоналлю.

Згідно з позначеннями рисунка 187 це означає,

що $\frac{CE}{CD} = \frac{CE}{CN} = \frac{CN}{CM} = \Phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$. Для доведення цих

властивостей достатньо помітити, що в правильному

п'ятикутнику всі кути дорівнюють $\frac{360^\circ}{5} = 108^\circ$, отже,

трикутники CDE , CMD , MDN є золотими. Детальні доведення пропонуємо провести самостійно.

Діагоналі правильного п'ятикутника утворюють зірку, яка у давнину вважалася символом досконалості й мала містичний зміст. Піфагорійці називали її пентаграмою й обрали втіленням своєї наукової школи. У наші дні п'ятиконечна зірка — найпоширеніша геометрична фігура на пропорах і гербах багатьох держав (наведіть відповідні приклади з історії та географії).

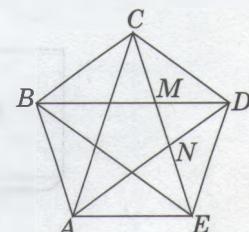


Рис. 187. Правильний п'ятикутник

Прямокутник називається **золотим**, якщо його сторони відносяться в золотому перерізі. Для побудови золотого прямокутника довільний квадрат перегинаємо навпіл (рис. 188, а), проводимо діагональ одного з отриманих прямокутників (рис. 188, б) і радіусом, що дорівнює цій діагоналі, проводимо дугу кола з центром O (рис. 188, в). Отриманий прямокутник $ABCD$ — золотий (переконайтесь в цьому самостійно).

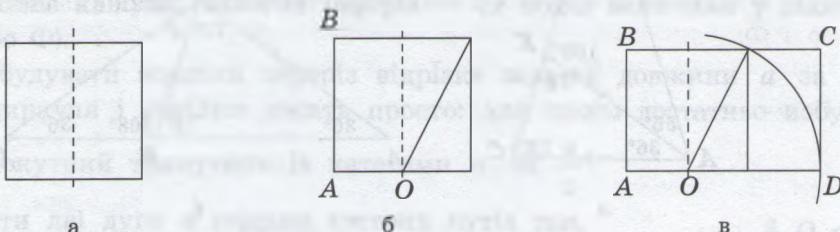


Рис. 188. Побудова золотого прямокутника

Якщо від золотого прямокутника відрізти квадрат зі стороною, що дорівнює меншій стороні прямокутника, то прямокутник, що залишиться, також буде золотим. Дійсно, на рисунку 189, а маємо $\frac{a}{b} = \Phi$, тоді $a - b = b\Phi - b = b(\Phi - 1) = b\varphi$. Необмежено продовжуючи цей процес (рис. 189, б), можна отримати так звані квадрати, що обертаються, і весь даний прямокутник буде складений із таких квадратів.

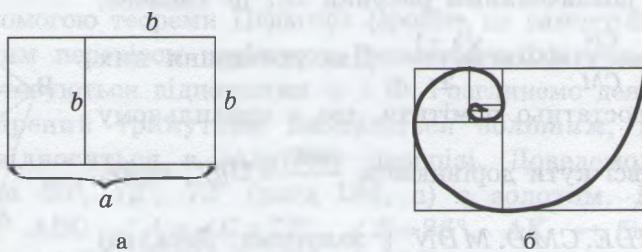


Рис. 189. Побудова золотої спіралі

Через протилежні вершини квадратів проходить так звана **золота спіраль**, яка часто зустрічається в природі. Наприклад, за принципом золотої спіралі розміщується насіння в соняшнику; за золотою спіраллю закручені черепашки равликів, роги



архарів, павутиння окремих видів павуків, і навіть наша Сонячна система, як і деякі інші галактики.

Зазначимо також, що золотий переріз має чимало алгебраїчних властивостей. Відношення ϕ наближено може бути виражене дробами $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \dots$, де $2, 3, 5, 8, 13, \dots$ — так звані числа Фібоначчі¹. Наведемо без доведення дві алгебраїчні формули, пов'язані з числами ϕ і Φ :

$$1) \quad \phi = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}};$$

$$2) \quad \Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{\dots}}}}.$$

Золотий переріз, золоті многокутники і золота спіраль є математичним відображенням ідеальних співвідношень у природі. Недарма великий німецький поет Йоганн Вольфганг Гете вважав їх математичними символами життя і духовного розвитку.

¹ Числа Фібоначчі — це натуральні числа ряду $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$, у якому кожне наступне число, починаючи з третього, дорівнює сумі двох передніх.

Додаток 3. Таблиця значень тригонометричних функцій

Градуси	$\sin \alpha$ $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 45^\circ$	$\operatorname{tg} \alpha$ $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 45^\circ$	$\operatorname{ctg} \alpha$ $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 45^\circ$	$\cos \alpha$ $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 45^\circ$	Градуси
0	0,000	0,000	—	1,000	90
1	0,017	0,017	57,290	1,000	89
2	0,035	0,035	28,636	0,999	88
3	0,052	0,052	19,081	0,999	87
4	0,070	0,070	14,301	0,998	86
5	0,087	0,087	11,430	0,996	85
6	0,105	0,105	9,514	0,995	84
7	0,122	0,123	8,144	0,993	83
8	0,139	0,141	7,115	0,990	82
9	0,156	0,158	6,314	0,988	81
10	0,174	0,176	5,671	0,985	80
11	0,191	0,194	5,145	0,982	79
12	0,208	0,213	4,705	0,978	78
13	0,225	0,231	4,331	0,974	77
14	0,242	0,249	4,011	0,970	76
15	0,259	0,268	3,732	0,966	75
16	0,276	0,287	3,487	0,961	74
17	0,292	0,306	3,271	0,956	73
18	0,309	0,335	3,078	0,951	72
19	0,326	0,344	2,904	0,946	71
20	0,342	0,364	2,747	0,940	70
21	0,358	0,384	2,605	0,934	69
22	0,375	0,404	2,475	0,927	68
23	0,391	0,424	2,356	0,921	67
24	0,407	0,445	2,246	0,914	66
25	0,423	0,466	2,145	0,906	65
26	0,438	0,488	2,050	0,899	64
27	0,454	0,510	1,963	0,891	63
28	0,469	0,532	1,881	0,883	62
29	0,485	0,554	1,804	0,875	61

Продовження таблиці

30	0,500	0,577	1,732	0,866	60
31	0,515	0,601	1,664	0,857	59
32	0,530	0,625	1,600	0,848	58
33	0,545	0,649	1,540	0,839	57
34	0,559	0,675	1,483	0,829	56
35	0,574	0,700	1,428	0,819	55
36	0,588	0,727	1,376	0,809	54
37	0,602	0,754	1,327	0,799	53
38	0,616	0,781	1,280	0,788	52
39	0,629	0,810	1,235	0,777	51
40	0,643	0,839	1,192	0,766	50
41	0,656	0,869	1,150	0,755	49
42	0,669	0,900	1,111	0,743	48
43	0,682	0,933	1,072	0,731	47
44	0,695	0,966	1,036	0,719	46
45	0,707	1,000	1,000	0,707	45
Градуси	$\cos \alpha$ $45^\circ \leqslant \alpha \leqslant 90^\circ$	$\operatorname{ctg} \alpha$ $45^\circ \leqslant \alpha \leqslant 90^\circ$	$\operatorname{tg} \alpha$ $45^\circ \leqslant \alpha \leqslant 90^\circ$	$\sin \alpha$ $45^\circ \leqslant \alpha \leqslant 90^\circ$	Градуси

Значення тригонометричних функцій гострих кутів можна наближено визначати за допомогою спеціальних таблиць. Одну з таких таблиць подано вище.

Таблицю складено з урахуванням формул дополнення. У двох крайніх стовпцях вказано градусні міри кутів (у лівому — від 0° до 45° , у правому — від 45° до 90°). Між цими стовпцями містяться чотири стовпці значень тригонометричних функцій:

- 1-й — синуси кутів від 0° до 45° (або косинуси кутів від 45° до 90°);
- 2-й — тангенси кутів від 0° до 45° (або котангенси кутів від 45° до 90°);
- 3-й — котангенси кутів від 0° до 45° (або тангенси кутів від 45° до 90°);
- 4-й — косинуси кутів від 0° до 45° (або синуси кутів від 45° до 90°).

Розглянемо кілька прикладів застосування даної таблиці.

1) Визначимо $\sin 25^\circ$. Оскільки $0^\circ < 25^\circ < 45^\circ$, знайдемо в крайньому лівому стовпці значення 25 і розглянемо відповідний рядок першого стовпця значень. Куту 25° у ньому відповідає число 0,423. Отже, $\sin 25^\circ \approx 0,423$.

2) Визначимо $\sin 72^\circ$. Оскільки $45^\circ \leq 72^\circ \leq 90^\circ$, знайдемо в крайньому правому стовпці значення 72 і розглянемо відповідний рядок четвертого стовпця значень. Куту 72° у ньому відповідає число 0,951. Отже, $\sin 72^\circ \approx 0,951$.

3) Визначимо кут, синус якого дорівнює 0,839. Для цього в першому або четвертому стовпці значень знайдемо число 0,839. Воно міститься в четвертому стовпці, тобто шуканий кут більший за 45° і менший за 90° . У відповідному рядку правого стовпця значень знаходимо число 57. Отже, шуканий кут наближено дорівнює 57° .

4) Визначимо $\cos 14^\circ$. Оскільки $0^\circ \leq 14^\circ \leq 45^\circ$, знайдемо в крайньому лівому стовпці значення 14 і розглянемо відповідний рядок четвертого стовпця значень. Куту 14° у ньому відповідає число 0,970. Отже, $\cos 14^\circ \approx 0,970$.

5) Визначимо кут, тангенс якого дорівнює 0,7. Для цього в другому або третьому стовпці значень знайдемо число 0,700. Воно міститься в другому стовпці, тобто шуканий кут менший за 45° . У відповідному рядку лівого стовпця значень знаходимо число 35. Отже, шуканий кут наближено дорівнює 35° .

З більшою точністю значення тригонометричних функцій можна визначати за «Чотиризначними математичними таблицями» В. М. Брадіса або за допомогою калькулятора.

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ

Розділ I. Чотирикутники

- 11.** 32 см. **12.** 8 см, 4 см, 4 см, 4 см. **13.** 100° . **14.** 80° , 80° , 100° , 100° .
17. а) Ні; б) так; в) ні. **18.** 5 см, 7 см, 8 см, 10 см. **19.** 36 см. **20.** 60° , 120° , 80° , 100° . **21.** 60° . **25.** 7 дм. **26.** 100° , 100° , 100° , 60° . **41.** 60 см.
42. а) 5 см і 7 см; б) 3 см і 9 см; в) 5 см і 7 см. **43.** а) 110° і 70° ; б) 55° і 125° ; в) 45° і 135° ; г) 75° і 105° . **44.** а) Усі по 90° ; б) 40° і 140° ; в) 70° і 110° ; г) 30° і 150° . **45.** 10 см і 16 см. **48.** Три. **49.** Три. **50.** 3 дм.
51. 22 м. **52.** а) 70° і 110° ; б) 48° і 132° . **53.** а) 50° і 130° ; б) 60° і 120° .
54. 54 см. **55.** 32 см або 34 см. **59.** 12 см. **60.** 42 см або 36 см. **61.** 30° і 150° . **62.** 45° і 135° або всі по 90° . **65.** Ні. **80.** 26 см. **81.** 45° і 135° .
92. Вказівка. Скористайтеся рівністю $2\alpha + 2\beta = 360^\circ$, де α і β — сусідні кути чотирикутника. **93.** Вказівка. На промені AO побудуйте відрізок $OC = AO$ і проведіть через точку C прямі, паралельні сторонам кута.
94. Вказівка. Проведіть прямі MB і MC , паралельні сторонам кута (B і C — точки перетину цих прямих зі сторонами). Промінь MA пройде через середину відрізка BC . **106.** 42 см. **107.** 6 см, 12 см. **108.** 50° .
109. 40° , 50° . **110.** 16 см. **111.** а) 30° , 150° ; б) 60° , 120° . **112.** а) 70° , 110° ; б) 50° , 130° . **113.** 5 м. **114.** 20 см. **117.** 28 см. **118.** 36 см. **119.** 6 см, 10 см.
120. а) 36° , 144° ; б) 30° , 150° . **121.** а) 45° , 135° ; б) 60° , 120° . **122.** 24 см.
123. 36 м. **124.** 6 см. **125.** 8 см. **129.** 30° , 60° . **130.** 60° . **131.** Вказівка. Доведіть окремо рівність висот, проведених до протилежних сторін, і висот, проведених до сусідніх сторін. **136.** б) 50° , 130° . **143.** а) Ні; б) так.
144. Ні; ні. **147.** а) $\angle C = 130^\circ$, $\angle B = 140^\circ$; б) 58° , 122° , 122° ; в) 90° , 90° , 135° , 45° . **148.** а) 68° і 112° ; б) 90° , 90° , 135° , 45° . **149.** 24 см. **150.** 16 см.
152. а) 50° і 130° ; б) 90° , 90° , 110° , 70° . **153.** а) 90° , 90° , 108° , 72° ; б) 60° і 120° . **154.** б) 19 см. **155.** а) 60° і 120° ; б) 20 м. **156.** 75 см. **157.** 35 см.
161. 72° і 108° . **162.** 60° і 120° . **178.** а) 4; б) 8. **179.** 16 см. **180.** 6 см, 8 см і 10 см. **181.** 21 см. **183.** 24 см. **184.** 40 см. **185.** а) 10 см; б) 6 см і 8 см.
186. а) 8 см; б) 2 см і 8 см. **189.** 23 см. **190.** 16 см, 20 см і 24 см. **193.** Сполучити середини сторін відрізками і провести через вершини отриманого трикутника прямі, паралельні його сторонам. **194.** Лінія розрізу є середньою лінією трикутника. **195.** 0,75а. **196.** 34 см. **197.** 9 см. **198.** 9 см, 6 см, 3 см. **201.** 2 см. **202.** Вказівка. Доведіть, що $AMNH$ — паралелограм.

- 203.** 2 см. **206.** 40° , 40° і 100° . **213.** Ні. Висота не більша за медіану, проведену до гіпотенузи. **216.** а) 120° , 240° ; б) 80° , 280° . **217.** а) 90° ; б) 120° ; в) 100° . **218.** а) 70° ; б) 40° ; в) 210° . **219.** а) 40° ; б) 50° ; в) 150° . **220.** α або $180^\circ - \alpha$. **221.** 30° або 150° . **222.** а) 25° ; б) 6 см. **223.** а) 90° ; б) 10 см. **225.** а) 55° ; б) 120° . **226.** а) 120° ; б) 55° . **227.** 70° . **228.** 45° , 60° , 75° . **229.** 50° , 50° , 80° або 50° , 65° , 65° . **232.** 80° . **233.** 4 см. **234.** 9 см. **240.** Коло з діаметром AB без точок A і B . **241.** Рис. 190. **242. Вказівка.** Точка дотику належить колу з діаметром AO . **243.** 80° . **244.** 50 см. **248.** Продовжити бічні сторони до перетину. **249.** Ні; так. **252.** а) Ні; б) так. **253.** а) 134° , 55° ; б) 100° , 80° , 100° ; в) усі по 90° . **254.** а) 90° , 130° , 90° ; б) 115° і 65° . **258.** а) 30 см; б) 28 см. **259.** а) 7 см; б) 4 см. **260.** 24 см. **261.** 70° , 100° , 110° , 80° . **262.** 55° і 125° . **267.** 4 м і 9 м, 8 м і 5 м. **268.** 6 см. **269.** 8 см. **274.** 30° і 150° . **Вказівка.** Опишіть коло навколо чотирикутника $BMDN$. **275.** 45° . **Вказівка.** Опишіть коло навколо чотирикутника $ACBK$. **276. Вказівка.** Спростування аналогічне прикладу, поданому в п. 8.3. **277. Вказівка.** Трикутники ADB і CDE не рівні, оскільки ознаки рівності трикутників за стороною і двома кутами не існує. **280.** 60° . **281.** 60° . **289.** 9 см. **293.** 8 см і 4 см. **294. Вказівка.** На рисунку 191 трикутник ABC шуканий, трикутник AOD допоміжний, $AOCD$ — паралелограм. **296.** 3 см і 9 см. **297.** а) 14,4; б) 59. **299.** 60° і 120° . **300.** 14 см. **301.** 90° , 45° , 45° . **303.** 4 см. **304.** 18 см. **305.** 5 см і 3 см. **306.** а) 60° , 120° ; б) 2 см, 6 см, 4 см, 4 см. **307.** б) **Вказівка.** Продвідіть через точку M середині лінії трикутників ABC і ACD ; доведіть за нерівністю трикутника, що точки E , F і M лежать на одній прямій. **309.** $a+c$ або $|a-c|$. **310. Вказівка.** Медіани трикутника BCD перетинаються в одній точці. **311. Вказівка.** Висоти трикутника з вершинами у серединах відрізків AB , AC і AD перетинаються в одній точці.

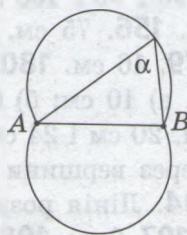


Рис. 190

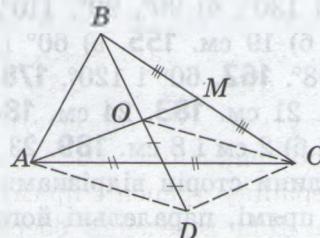


Рис. 191

- 312.** Вказівка. Дані бісектриси при перетині утворюють прямокутний трикутник, у якому відрізок середньої лінії є медіаною. **313.** Вказівка. Доведіть, що вершини шуканого трикутника і точка перетину даних прямих лежать на одному колі. **314.** Вказівка. Скористайтеся опорною задачею про кут між дотичною і хордою (§ 7, № 230). **315.** 60° і 120° . **316.** Вказівка. Доведіть, що чотирикутник $ABMC$ вписаний.

Розділ II. Подібність трикутників. Теорема Піфагора

- 325.** а) Так; б) ні. **326.** 6; 12. **327.** 15; 9. **328.** а) 3 см; б) 4 см. **329.** 14 см. **330.** а) 25° ; б) 50° . **331.** 20° , 70° . **332.** а) 10 см, 16 см, 20 см; б) 5 см, 8 см, 10 см. **333.** 19 см. **336.** а) 15 см; б) 12 см. **337.** 7 см. **338.** а) 16; б) 3. **343.** 8 см і 27 см. **345.** Вказівка. На останньому кроці доведення виконано ділення на нуль. **346.** 6 см. **347.** 46 см. **348.** Рівнобедрений. **349.** Ні. **360.** 120 м. **361.** б) 6 см. **362.** б) 12 см. **364.** 10 см. **365.** 4 см, 4 см, 2 см. **370.** 24 см. **371.** 6 см і 14 см. **373.** Ні; так. **378.** $\frac{2ab}{a+b}$. **379.** $\frac{an+bm}{m+n}$. **382.** 36° , 72° , 72° або 36° , 36° , 108° . **384.** 35° і 55° . **390.** Другий. Трикутник зі стороноами a , b , c може не бути прямокутним або не існувати взагалі. **396.** 60 м. **397.** 13,8 м. **398.** а) 10 см; б) 30 см і 40 см. **399.** 30 см. **401.** б) 6 см. **402.** 20 см і 30 см. **403.** 6 см. **405.** $a_c = \frac{a^2}{c}$, $b_c = \frac{b^2}{c}$. **406.** 30 см і 40 см.

- 407.** Лежить поза колом. **408.** 6 см. **409.** 20 см. **410.** 1 : 8. **411.** 3 : 4. **413.** Вказівка. Скористайтеся додатковою побудовою, яка застосовується для доведення відповідної ознаки рівності прямокутних трикутників. **414.** У 2,5 разу. **415.** 72° , 108° . **426.** а) 41 см; б) 21 см. **427.** а) 26 см; б) 28 см. **431.** 45° . **432.** 36 см. **433.** 12 см. **435.** 24 м. **436.** 10 см або $2\sqrt{7}$ см. **437.** а) 27 см і 36 см; б) 15 см, 20 см, 25 см. **438.** а) 24 см і 26 см; б) 30 см, 40 см, 50 см. **440.** 8 см. **441.** $\sqrt{26}$ см. **442.** 12,5 см і 12 см. **444.** 52 см; так. **445.** 98 см; так. **446.** 9 см або 21 см. **447.** а) 9; б) 8. **448.** 15 см. **449.** 12 см. **450.** 20,5 см. Вказівка. Доведіть, що трикутник ABC прямокутний. **451.** 12 см. **452.** 13 см. Вказівка. Доведіть, що трикутник ABC прямокутний. **453.** 1 м. Вказівка. Проведіть через вершину трапеції пряму, паралельну діагоналі. **454.** 10 см. **456.** Вказівка. Для доведення оберненого твердження проведіть із двох протилежних вершин чотирикутника перпендикуляри до діагоналі і доведіть, що їх основи збігаються. **463.** а) 12 см; б) 6 см і 4 см.

- 464.** 3 см. **465.** 10 см, 15 см, 20 см. **466.** 21 см, 28 см, 35 см. **467.** 36 см. **468.** 25 см і 30 см. **469.** 64 см. **470.** 20 см. **471.** 4 см. **472.** 6 см. **473.** 15 см. **474.** 72 см. *Вказівка.* Доведіть, що дана точка лежить на бісектрисі трикутника. **475.** 36 см. *Вказівка.* Доведіть, що дана точка лежить на бісектрисі трикутника. **476.** *Вказівка.* Доведіть подібність трикутників ACD і CBD . **477.** *Вказівка.* Проведіть висоту BH і доведіть подібність трикутників CAD і CBH . **481.** 30° . **482.** 9. **483.** 8 см і 15 см. **484.** 5 см, 5 см, 6 см. **485.** 15 см і 20 см. **486.** 8 см, 9 см, 10 см. **487.** 12 см. **488.** 96 см. **494.** а) $4 : 1$; б) $1 : 1$; в) $1 : 2$; $4 : 3$. **496.** 4 см.

497. 6 м і 6 м. **498.** $\frac{2ab}{b-a}$. **499.** 28 см. *Вказівка.* Доведіть подібність прямокутних трикутників, які відтинаються від даного трикутника висотами.

501. 2,5 і 1. *Вказівка.* Центри даних кіл є вершинами прямокутного трикутника. **502.** $\sqrt{a^2 + c^2 - b^2}$. *Вказівка.* Проведіть через точку M прямі, паралельні сторонам прямокутника. **503.** Коло з діаметром AB . **504.** *Розв'язання.* У чотирикутнику $ABCD$ $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$, $BD = d_1$, $AC = d_2$ (рис. 192). Побудуємо трикутник ABE , подібний до трикутника DBC ($\angle 1 = \angle 2$ за побудовою, $\angle 3 = \angle 4$ як вписані кути, що спираються на одну дугу), з подібності маємо: $\frac{a}{AE} = \frac{d_1}{c}$, тобто $d_1 \cdot AE = ac$. Аналогічно з подібності трикутників CBE і DBA маємо $\frac{b}{CE} = \frac{d_1}{d}$, тобто $d_1 \cdot CE = bd$. Додамо отримані рівності: $d_1 \cdot AE + d_1 \cdot CE = ac + bd$, тобто $d_1 \cdot d_2 = ac + bd$, що й треба було довести. **505.** *Розв'язання.* Проведемо в трикутнику ABC бісектрису CL і позначимо $BC = a$, $AC = b$, $BL = m$, $AL = n$, $CL = l_c$ (рис. 193).

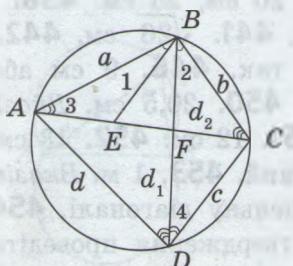


Рис. 192

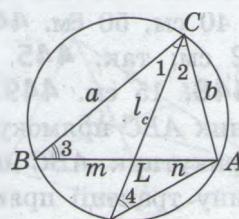


Рис. 193

Опишемо коло навколо даного трикутника і продовжимо бісектрису CL до перетину з колом у точці D . За теоремою про пропорційність хорд маємо $BL \cdot AL = CL \cdot DL$ або $m \cdot n = l_c \cdot (CD - l_c)$. З подібності трикутників BCL і DCA ($\angle 1 = \angle 2$ за означенням бісектриси, $\angle 3 = \angle 4$ як вписані кути, що спираються на одну дугу) маємо: $\frac{BC}{CL} = \frac{CD}{AC}$ або $\frac{a}{l_c} = \frac{CD}{b}$, тобто $CD = \frac{ab}{l_c}$. Підставимо це значення у рівність $m \cdot n = l_c \cdot (CD - l_c)$: $m \cdot n = l_c \cdot \left(\frac{ab}{l_c} - l_c \right)$ або $l_c^2 = ab - mn$, що й треба було довести.

Розділ III. Многокутники. Площі многокутників

- 513.** а) 720° ; б) 1800° . **514.** а) 5; б) 7; в) 9. **515.** 135° . **516.** 120° .
518. а) 11; б) ні; в) 13. **519.** Семикутник; 900° . **520.** 6. **521.** а) 3; б) 5;
 в) 6. **523.** $\frac{n(n-3)}{2}$. **525.** 150° , 60° , 150° . **526.** Вказівка. Скористайтесь нерівністю трикутника. **527.** Ні. Вказівка. Скористайтесь нерівністю трикутника. **539.** а) 36 см^2 ; б) 140 см^2 ; в) 60 см^2 . **540.** 60 см . **541.** 144 м^2 .
542. $16\sqrt{2} \text{ см}$. **543.** 8 см і 16 см. **544.** а) 60 см^2 ; б) 12 см; в) 5 см.
545. 120 см^2 . **546.** 8 см і 6 см. **547.** 12 см. **548.** 180 . **549.** 21 см^2 або 28 см^2 . **550.** 240 см^2 . **551.** а) 72 см^2 ; б) 30 см^2 ; в) 40 см^2 . **552.** а) 78 см^2 ;
 б) 32 см^2 . **553.** 4 см. **554.** 120 см^2 . **555.** 50 см^2 . **557.** 16 м^2 . Вказівка. Доведіть, що сума даних відстаней дорівнює стороні квадрата. **558.** 180 см^2 .
559. 384 см^2 . Вказівка. Даний кут дорівнює гострому куту паралелограма. **560.** Вказівка. Розгляньте відношення катетів прямокутних трикутників ABE і DCE та доведіть, що ці трикутники не є подібними, тобто точка C не лежить на прямій BE . **561.** 351 см^2 . **562.** $202,8 \text{ см}^2$.
563. 60° і 120° ; паралелограм і рівносторонній трикутник. **564.** 8 см^2 .
572. а) 20; б) 24; в) $4\sqrt{3}$. **573.** а) 60 см^2 ; б) 75 см^2 . **574.** а) 96 см^2 ;
 б) 12 см^2 . **575.** 60 см. **576.** 10 см. **577.** $1-a$. **578.** $\frac{1}{2}$. **579.** 80 м^2 .
580. 8 см і 16 см. **583.** а) 42 см^2 ; б) 64 см^2 . **584.** 48 см^2 .
585. 24 см^2 . **586.** а) 84 см^2 ; б) 39 см^2 ; в) $4\sqrt{3} \text{ см}^2$. **587.** а) 12 см^2 ; б) 96 см^2 .
588. 294 см^2 . **589.** 2S. **590.** S. **591.** 20 см. **592.** 18 см^2 . **596.** а) 486 см^2 ;
 б) 186 см^2 . **597.** 768 см^2 . **601.** Вказівка. Шукані прямі ділять сторони BC і CD у відношенні $1:2$, починаючи від вершини C . **602.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{3}$.

603. а) $S_1 + S_2 + S_3 + S_4$; б) $7S$. **604.** 80 см^2 . **605.** 1020 см^2 . **607.** а) $1 : 5$;

б) $4 : 5$; в) $1 : 4$. **614.** а) 81 см^2 ; б) 1 см^2 . **615.** $\frac{1}{9}$. **616.** а) 4 см ; б) 2 см^2 .

617. 6 см^2 . **618.** 20 см^2 . **619.** 210 см . **620.** 6 см . **621.** 40 см . **624.** 27 см^2 і 3 см^2 . **625.** 108 м . **626.** 36 см^2 . **627.** 250 м^2 . **628.** 12 см і 16 см .

629. 24 см . **630.** 15 см і 20 см . **633.** $1 : (\sqrt{2} - 1)$. **634.** Шукана пряма ділить сторони трикутника у відношенні $3 : 2$ або $4 : 1$, починаючи від вершини, протилежної паралельній їй стороні. **638.** 30° , 30° , 120° . **640.** Висота трикутника вдвічі більша. **643.** а) 20 см^2 , 30 см^2 ; б) 8 см^2 , 12 см^2 , 18 см^2 , 12 см^2 . **646.** 468 см^2 або 300 см^2 . **647.** б) Якщо висота, проведена до AB , більша за $\frac{1}{2}AB$. **648. Вказівка.** Розрізи мають проходити через середини бічних сторін перпендикулярно до основ.

649. Вказівка. Застосуйте метод площ і обернену теорему Піфагора. **651.** $S \cos^2 \alpha$. **Вказівка.** Доведіть, що трикутники ABC і AB_1C_1 подібні з коефіцієнтом $\cos \alpha$.

652. $\frac{2}{3}m_a m_b$. **654. Вказівка.** Площа трикутника не перевищує половини добутку двох його сторін. **656.** $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$. **Вказівка.** Доведіть, що площи трикутників AOB і COD дорівнюють $\sqrt{S_1 S_2}$. **657. Вказівка.** Доведіть, що

що $S_{AMB} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Розділ IV. Розв'язування прямокутних трикутників

668. $\frac{8}{17}, \frac{15}{17}, \frac{8}{15}$. **670.** а) $\frac{5}{13}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{15}{8}$. **671.** а) $\frac{4}{3}$; б) $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

672. а) $\sin^2 \alpha$; б) $\sin \alpha$; в) 2. **673.** а) $\cos^2 \alpha$; б) $\frac{1}{\cos \alpha}$; в) $\operatorname{tg} \alpha$.

676. $\frac{5}{13}, \frac{12}{13}, \frac{5}{12}, 2,4$. **679.** а) $\cos A = \frac{1}{2}, \operatorname{tg} A = \sqrt{3}, \operatorname{ctg} A = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

б) $\sin A = 0,96, \operatorname{tg} A = \frac{24}{7}, \operatorname{ctg} A = \frac{7}{24}$; в) $\sin A = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos A = \frac{1}{\sqrt{5}}, \operatorname{ctg} A = \frac{1}{2}$.

680. а) $\sqrt{3}$; б) 1. **681.** а) $\operatorname{ctg}^2 \alpha$; б) $\cos^3 \alpha$; в) $\sin^2 \alpha$. **682.** а) $\sin \alpha$;

б) 1; в) 1. **685.** а) $\operatorname{tg} \alpha$; б) $\sin^2 \alpha$; в) $\operatorname{tg}^2 \alpha$. **686.** а) 2; б) $\sin \alpha$;

- в) 1. **687.** 16 см. **688.** 60 см². **695.** а) 54°; б) 8°; в) 60°; г) 45°.
696. а) 40°; б) 30°; в) 45°. **698.** а) 1,5; б) 1,5; в) 0,5. **699.** а) 1; б) 0,5;
в) 0,5. **700.** а) 0,6 і 0,8; б) 0,5 і $\sqrt{3}$. **701.** а) 0,8 і 0,6; б) 1. **702.** а) 68°; б) 30°.

703. а) 76°; б) 45°. **704.** а) 2; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) 1. **705.** а) $\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\frac{1}{\sqrt{10}}$, 3; б) 1. **706.** б.

709. 1. **711.** 36 см². **712.** a^2 . **718.** 14 см. **719.** 12 см і 16 см. **720.** 45°, 45°.

721. а) $\beta = 60^\circ$, $a = 4$, $b = 4\sqrt{3}$; б) $\beta = 48^\circ$, $a \approx 6,69$, $b \approx 7,43$. **722.** а) $\alpha = 45^\circ$,
 $b = 2$, $c = 2\sqrt{2}$; б) $\beta = 72^\circ$, $c \approx 12,94$, $b \approx 12,31$. **723.** а) $\beta = 62^\circ$, $a \approx 5,63$,
 $b \approx 10,6$; б) $\alpha = 50^\circ$, $c \approx 10,44$, $b \approx 6,71$. **724.** а) $b = 9$, $\alpha = \beta = 45^\circ$; б) $b = 7$,
 $\alpha \approx 74^\circ$, $\beta \approx 16^\circ$. **725.** а) $c = 12$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$; б) $c = 41$, $\alpha \approx 13^\circ$, $\beta \approx 77^\circ$.

726. а) $b = 8$, $\alpha \approx 37^\circ$, $\beta \approx 53^\circ$; б) $c = 6$, $\alpha \approx 56^\circ$, $\beta \approx 34^\circ$. **729.** $\approx 9,40$ і $\approx 3,42$.

730. 60 см. **731.** $\approx 45^\circ$ і $\approx 135^\circ$. **732.** а) $AB = 8$, $BC = 8\sqrt{3}$, $AC = 16$,
 $\angle A = 60^\circ$, $\angle C = 30^\circ$; б) $BC \approx 293,94$, $AB \approx 51,83$, $AC \approx 298,48$, $\angle A = 80^\circ$.

733. $AB = 3,75$, $BC = 5$, $AC = 6,25$, $\angle A \approx 53^\circ$, $\angle C \approx 37^\circ$. **734.** $\approx 10,99$

і $\approx 11,70$. **735.** $8+5\sqrt{2}$. **736.** $\approx 68^\circ$. **737.** $\approx 4^\circ$. **738.** $a = \frac{m}{1+\operatorname{ctg}\alpha}$, $b = \frac{m}{1+\operatorname{tg}\alpha}$,
 $c = \frac{m}{\sin\alpha + \cos\alpha}$, $\beta = 90^\circ - \alpha$. Вказівка. Виразіть дві сторони трикутника че-
рер третю сторону і кут α . **739.** $\alpha = 45^\circ - \frac{\varphi}{2}$, $\beta = 45^\circ + \frac{\varphi}{2}$, $a = c \sin\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$,

$b = c \sin\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)$. **740.** 30° і 60° . **741.** $\frac{d}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta}$. **742.** $\approx 16^\circ$. **743.** 4 см,
 $4\sqrt{2}$ см, 32 см². **744.** $\frac{2r}{\sin\alpha}$, $\frac{4r}{\sin\alpha}$. Вказівка. Проведіть висоту h

і скористайтесь тим, що $h = 2r$. **745.** $5\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$, $10(\sqrt{3}-1)$. Вказів-

ка. Проведіть висоту до даної сторони і складіть рівняння. **747.** $\frac{l \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}$.

748. $\approx 37^\circ$. **749.** Не менше 2° . **751.** $\frac{\sqrt{1-a^2}}{1+a}$. **752.** $\frac{1}{4}$. Вказівка. Доведіть
подібність трикутників ACE і BCD . **753.** $\frac{1}{2}d(1+\sin\alpha)$, $\frac{1}{2}d(1-\sin\alpha)$.

754. $\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$. Вказівка. Побудуйте трикутник із кутами 75° , 45° і 60°
та проведіть його найменшу висоту.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

А

Аксіоми площ 164—165

Б

Бічні сторони трапеції 41, 42

В

Вершини

- ламаної 157
- многокутника 157

Висота

- паралелограма 15
- трапеції 41, 90

Відношення відрізків 103

Відношення площ подібних фігур 103

Властивість

- бісектриси трикутника 136
- прямокутника 31
- рівнобедреної трапеції 42
- середньої лінії трапеції 54
- середньої лінії трикутника 52
- паралелограма 15
- перпендикуляра, похилих
i проекцій 131
- ромба 32

Внутрішня область чотирикутника 8

Г

Градусна міра дуги кола 61

Д

Діагональ

- многокутника 158
- чотирикутника 8

I

Інцентр 82

К

Квадрат 34, 89

Косинус гострого кута прямокутного
трикутника 205

Котангенс гострого кута прямокутного
трикутника 206

Кут

- внутрішній опуклого
многокутника 158
- вписаний 61
- зовнішній опуклого
многокутника 158
- внутрішній опуклого
четирикутника 9
- центральний 60

Л

Ламана

- замкнена 157
- проста 157

М

Метричні співвідношення

в прямокутному трикутнику 121

Многокутник 157

- вписаний у коло 158
- описаний навколо кола 158
- опуклий 158

О

Ознака подібності трикутників

- — — за двома кутами 111
- — — за двома сторонами
i кутом між ними 112
- — — за трьома сторонами 114

Ознака

- прямокутника 31
- рівнобедреної трапеції 43

- Ознаки**
- паралелограма 22
 - подібності прямокутних трикутників 120
 - Ортоцентр 84
 - Основи трапеції 41
 - Основна тригонометрична тотожність 207
- П**
- Паралелограм 14, 88
 - Площа
 - квадрата 166
 - многокутника 165
 - паралелограма 167
 - прямокутника 166
 - трапеції 175
 - трикутника 173 - Подібні трикутники 105
 - Похила 131
 - Проекція похилої 131
 - Пропорційні відрізки 103
 - Пропорційність
 - відрізків січної і дотичної 138
 - відрізків хорд 137 - Прямокутник 31, 89
- Р**
- Рівновеликі фігури 165
 - Розв'язання трикутників 220
 - Ромб 32
- С**
- Середня лінія
 - трапеції 54
 - трикутника 52 - Синус гострого кута прямокутного трикутника 205
 - Сторони
 - многокутника 157
 - чотирикутника 7
- Сума кутів**
- опуклого n -кутника 159
 - чотирикутника 9
- Сусідні**
- вершини чотирикутника 7
 - кути чотирикутника 9
- Т**
- Тангенс гострого кута прямокутного трикутника 205
- Теорема**
- Піфагора 128
 - Фалеса 51
 - обернена до теореми Піфагора 130
- Точка перетину**
- бісектрис трикутника 82
 - висот трикутника 84
 - медіан трикутника 82
- Трапеція** 41
- прямокутна 42
 - рівнобедрена 42
- У**
- Умова**
- необхідна 24
 - достатня 24
 - необхідна і достатня 24
- Ф**
- Формули доповнення 213
- Ц**
- Центроїд 83
- Ч**
- Чотирикутник 7
- вписаний у коло 70
 - описаний навколо кола 72
 - опуклий 8

ЗМІСТ

Передмова	3
Розділ I. Чотирикутники	5
§ 1. Чотирикутник і його елементи	7
§ 2. Паралелограм і його властивості.....	14
§ 3. Ознаки паралелограма	22
§ 4. Види паралелограмів.....	31
§ 5. Трапеція	41
§ 6. Теорема Фалеса. Середні лінії трикутника і трапеції	51
§ 7. Вписані кути	60
§ 8. Вписані й описані чотирикутники	70
§ 9*. Визначні точки трикутника	82
Підсумки	88
Розділ II. Подібність трикутників. Теорема Піфагора.....	101
§ 10. Подібні трикутники	103
§ 11. Ознаки подібності трикутників	111
§ 12. Подібність прямокутних трикутників.....	120
§ 13. Теорема Піфагора та її наслідки	128
§ 14. Застосування подібності трикутників	136
Підсумки	144
Розділ III. Многокутники. Площі многокутників.....	155
§ 15. Означення многокутника	157
§ 16. Площа многокутника. Площі прямокутника й паралелограма	163
§ 17. Площи трикутника і трапеції	173
§ 18. Застосування площ	186
Підсумки	194
Розділ IV. Розв'язування прямокутних трикутників	203
§ 19. Тригонометричні функції гострого кута.....	205
§ 20. Обчислення значень тригонометричних функцій	213
§ 21. Розв'язування прямокутних трикутників.....	219
Підсумки	228
Додатки	235
Відповіді та вказівки	247
Предметний покажчик	254