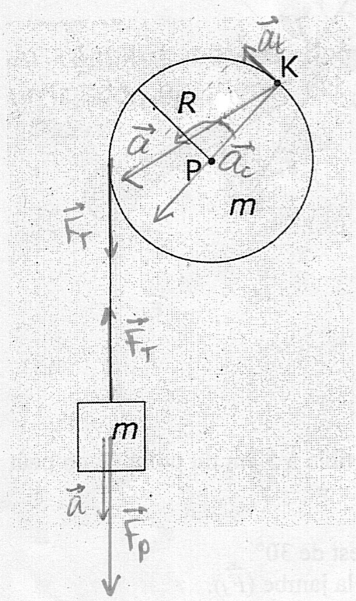
Dynamique de rotation : exercices - corrigé

Exercice 1 : Une corde de masse négligeable est enroulée autour d'un cylindre plein de masse *m* et de rayon *R*. Il peut tourner sans frottements autour de son axe P.
Une masse (*m* également) est attachée à l'extrémité libre de la corde et la déroule en faisant tourner le cylindre. La masse suspendue part sans vitesse initiale.
Calculez et dessinez les accélérations tangentielle, centripète et totale du point K après que la masse suspendue ait chuté d'une hauteur *h* = 2*R*. *Prendre 1cm → 1g.*



masse : $F_p - F_T = m\cdot a_t$

poulie : $R\cdot F_T = I\cdot\alpha = \frac{1}{2}mR^2\cdot\frac{a_t}{R}$

$\hookrightarrow F_T = \frac{m\cdot a_t}{2}$

$$\Rightarrow \cancel{m}g - \frac{1}{2}\cancel{m}\cdot a_t = \cancel{m}a_t \Rightarrow a_t = \frac{2}{3}g$$

conservation énergie :

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\cdot\omega^2$$

$$\cancel{m}g2R = \frac{1}{2}\left(\cancel{m}v^2 + \frac{1}{2}\cancel{m}R^2\cdot\frac{v^2}{R^2}\right) = \frac{3}{4}v^2$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{8gR}{3}} \qquad \Rightarrow a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{8g}{3} = \frac{8}{3}g$$

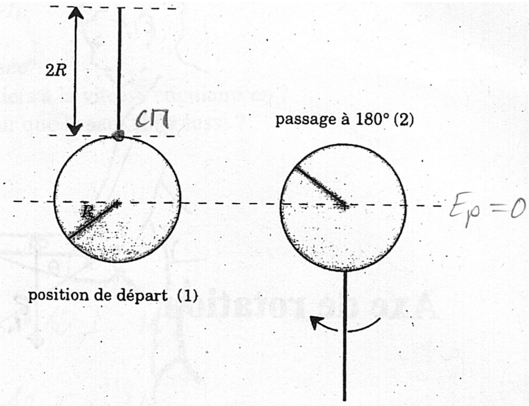
$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} = \sqrt{\frac{64}{9}g^2 + \frac{4}{9}g^2} = \frac{\sqrt{68}}{3}\cdot g \cong 2{,}75g$$

Exercice 2 : Une sculpture particulièrement moderne est constituée d'un disque de masse *m* et de rayon *R* = 15 cm auquel est fixée une tige mince de masse *m* et de longueur *L* = 2*R*. L'œuvre étant dans un plan vertical, elle peut tourner librement (sans frottements) autour d'un axe horizontal passant par le centre du disque, perpendiculairement à son plan.

a) Exprimez le moment d'inertie de la sculpture par rapport à son axe de rotation en fonction de *m* et *R*.

b) Déterminez la position du centre de masse du système et indiquez-le clairement sur le dessin.

c) Etant maintenue en position instable (1), le système est libérée et pivote alors autour de l'axe. Calculez la vitesse du centre de masse lorsque le solide passe en position (2).



a) $I_s = I_d + I_b$

$$= \frac{1}{2} mR^2 + \frac{1}{12} m(2R)^2 + m(2R)^2 = \frac{1}{2} mR^2 + \frac{1}{3} mR^2 + 4mR^2 = \frac{29}{6} mR^2$$

b) Par rapport au centre du disque :

$$x_{CM} = \frac{m \cdot x_d + m \cdot x_b}{2m} = \frac{0 + 2R}{2} = R$$

c) Conservation de l'énergie : $E_{P_1} = E_{C_2} + E_{P_2}$

$$2mgR = \frac{1}{2} I_s \cdot \omega^2 - 2mgR$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{8mgR}{I_s}} = \frac{8\cancel{m}gR}{\frac{29}{6}\cancel{m}R^2} = \sqrt{\frac{48g}{29R}}$$

$$v_{CM} = \omega \cdot R = \sqrt{\frac{48}{29} gR} \cong 1{,}56 \text{ m/s}$$

Exercice 3 : Une meule est constituée d'un disque de 10 cm de rayon et de 3 cm d'épaisseur uniforme, fait d'une matière dont la masse volumique est de 3500 kg/m^3. Sa vitesse angulaire "de croisière" est de 2400 tours par minute.

a) Calculer le couple (moment résultant de deux forces parallèles, de même intensité, mais de sens opposés) que le moteur doit fournir, à la mise en marche, si la vitesse de croisière est atteinte en 3 secondes.

$$I = \frac{1}{2} m r^2 \quad \text{avec} \quad m = \rho \cdot V = \rho \cdot \pi r^2 \cdot e \quad \Rightarrow \quad I = \frac{1}{2} \rho \cdot \pi \cdot e \cdot r^4$$

$$\Gamma = I \cdot \alpha \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_c - 0}{\Delta t} = \frac{\omega_c}{\Delta t} \quad \text{avec} \quad \omega_c = \frac{2400 \cdot 2\pi}{60} = 80\pi$$

$$\Rightarrow \Gamma = \frac{1}{2} \rho \cdot \pi \cdot e \cdot r^4 \cdot \frac{80\pi}{\Delta t} = \frac{40 \rho \cdot \pi^2 \cdot e \cdot r^4}{\Delta t} \cong \underline{\underline{1,38\ N \cdot m}}$$

b) Un outil est appuyé contre la meule avec une force normale de 10 N. Le coefficient de frottement valant 0,7, calculer le couple que le moteur doit fournir pour maintenir la vitesse de croisière.

$$\text{vitesse constante} \Rightarrow \vec{\Gamma}_R = 0$$

$$\Rightarrow \Gamma = r \cdot \mu \cdot F_n = \underline{\underline{0,7\ N \cdot m}}$$

c) A un moment donné, le moteur s'arrête, l'outil restant appuyé contre le disque. Calculer le nombre de tours que le disque va encore faire avant de s'immobiliser.

$$\Gamma_R = r \cdot \mu \cdot F_n = 0,7\ N \cdot m$$

$$\Gamma_R = I \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\Gamma_R}{I} = \frac{2\Gamma_R}{\rho \pi \cdot e \cdot r^4} \cong 42,4\ \text{rad}/s^2$$

$$\Delta\theta = \omega_m \cdot \Delta t = \frac{\omega_c}{2} \cdot \frac{\omega_c}{\alpha} = \frac{\omega_c^2}{2\alpha} \cong 744\ \text{rad} \Rightarrow \sim \underline{\underline{118\ \text{tours}}}$$

$$\frac{\cancel{\omega_0}^{0} + \omega_c}{2} \qquad \frac{\Delta\omega}{\alpha} = \frac{\omega_c - \cancel{\omega_0}^{0}}{\alpha}$$

5,92 s