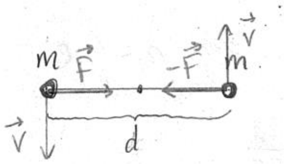
Dynamique de rotation : exercices - corrigé

<u>Exercice 1 :</u> Deux cosmonautes ayant chacun une masse de 120 kg (tenues comprises) sont liés par une corde de 20 m de masse négligeable. Le système est en rotation avec une période T_1 de 20 secondes. En tirant sur la corde, ils se rapprochent jusqu'à ce que leur distance ne soit plus que de 4 m.

a) Avec quelle force les cosmonautes doivent-ils se tenir à la corde ?
b) En tirant sur la corde, ils se rapprochent jusqu'à ce que leur distance ne soit plus que de 5 m. Calculez l'augmentation d'énergie cinétique de rotation du système.
c) D'où vient cette énergie ? *Réponse avec des phrases !*

a) $F = m\cdot a_c = m\cdot\frac{v^2}{r} = m\cdot\omega^2\cdot r = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\cdot\frac{d}{2} = \frac{2\pi^2\cdot m\cdot d}{T^2} \cong \underline{\underline{88{,}8\,N}}$



$$\vec{L} = 2\vec{r}\wedge m\vec{v} = 2\,\frac{d}{2}\cdot m\cdot\omega\cdot\frac{d}{2} = 2m\left(\frac{d}{2}\right)^2\cdot\omega$$

b) Moment cinétique conservé $\Rightarrow$ $L_1 = L_2$

$$\cancel{2m}\left(\frac{d_1}{\cancel{2}}\right)^2\cdot\omega_1 = \cancel{2m}\left(\frac{d_2}{\cancel{2}}\right)^2\cdot\omega_2$$

$$\hookrightarrow \omega_2 = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2\omega_1 = 9\,\omega_1$$

$$\Delta E_c = E_{c_2} - E_{c_1} = \frac{1}{2}I_2\,\omega_2^2 - \frac{1}{2}I_1\,\omega_1^2$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}m\left(\frac{d_2}{2}\right)^2\cdot(9\omega_1)^2 - \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}m\left(\frac{d_1}{2}\right)^2\cdot\omega_1^2 = m\,\omega_1^2\left(\frac{81}{4}d_2^2 - \frac{1}{4}d_1^2\right)$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \Rightarrow \Delta E_c = m\cdot\frac{4\pi^2}{T_1^2}\left(\frac{81}{\cancel{4}}d_2^2 - \frac{1}{\cancel{4}}d_1^2\right) = \frac{\pi^2\cdot m}{T_1^2}\left(81\,d_2^2 - d_1^2\right) \cong \underline{\underline{5330\ J}}$$

c) Les cosmonautes tirent sur leur bras pour se rapprocher ; ils exercent donc une force dans la même direction que leur déplacement. Ils effectuent donc un travail mécanique positif qui augmente leur énergie.

Exercice 2 : Une étoile (*que l'on supposera sphérique et de masse volumique homogène*) a une masse $m = 2 \cdot 10^{30}$ kg et un rayon $R_1 = 7 \cdot 10^8$ m. Elle tourne sur elle-même avec une période $T_1 = 25{,}4$ jours. A la fin de son évolution, cette étoile va se contracter sous l'action des forces de gravitation, sans perte de masse significative, et devenir un petit astre très dense de rayon $R_2 = 2 \cdot 10^4$ m.

a) Calculez la nouvelle période de rotation T_2.
b) Calculez le rapport des énergies cinétiques de rotation après et avant la contraction (Ec_2/Ec_1).
c) Calculez l'accélération gravitationnelle à la surface de l'astre contracté.
d) Cette accélération est-elle suffisante pour que la matière ne soit pas éjectée à l'équateur de l'astre ? *Comparez-la à l'accélération centripète à l'équateur.*

a) $I_{\text{étoile}} = \frac{2}{5} m R^2$

Conservation $\vec{L} \Rightarrow L_1 = L_2$

$$I_1 \cdot \omega_1 = I_2 \cdot \omega_2 \qquad \text{avec } \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \quad , T_1 \cong 2{,}19 \cdot 10^6 \text{ s}$$

$$\frac{2}{5} m R_1^2 \cdot \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2}{5} m R_2^2 \cdot \frac{2\pi}{T_2} \Rightarrow T_2 = \frac{R_2^2}{R_1^2} \cdot T_1 \cong \underline{\underline{1{,}79 \cdot 10^{-3} \text{ s}}}$$

b) $$\frac{Ec_2}{Ec_1} = \frac{\frac{1}{2} I_2 \cdot \omega_2^2}{\frac{1}{2} I_1 \cdot \omega_1^2} = \frac{\frac{2}{5} m R_2^2 \cdot \frac{4\pi^2}{T_2^2}}{\frac{2}{5} m R_1^2 \cdot \frac{4\pi^2}{T_1^2}} = \frac{T_1^2 \cdot R_2^2}{T_2^2 \cdot R_1^2} = \frac{\frac{R_1^4}{R_2^4} T_2^2 \cdot R_2^2}{T_2^2 \cdot R_1^2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} \cong \underline{\underline{1{,}23 \cdot 10^9}}$$

c) $$g = \frac{Gm}{R_2^2} \cong \underline{\underline{3{,}34 \cdot 10^{11} \text{ m/s}^2}}$$

d) $$a_c = \omega_2^2 \cdot R_2 = \frac{4\pi^2}{T_2^2} \cdot R_2 \cong 2{,}46 \cdot 10^{11} \text{ m/s}^2$$

$g > a_c \Rightarrow$ Oui, g est assez grande pour éviter que la matière de l'étoile ne soit éjectée à l'équateur à cause de la rotation.

Exercice 4 : Un satellite artificiel gravite autour de la Terre sur une orbite elliptique possédant un demi-grand axe $a = 2R_T$ et une excentricité $e = 0{,}5$.

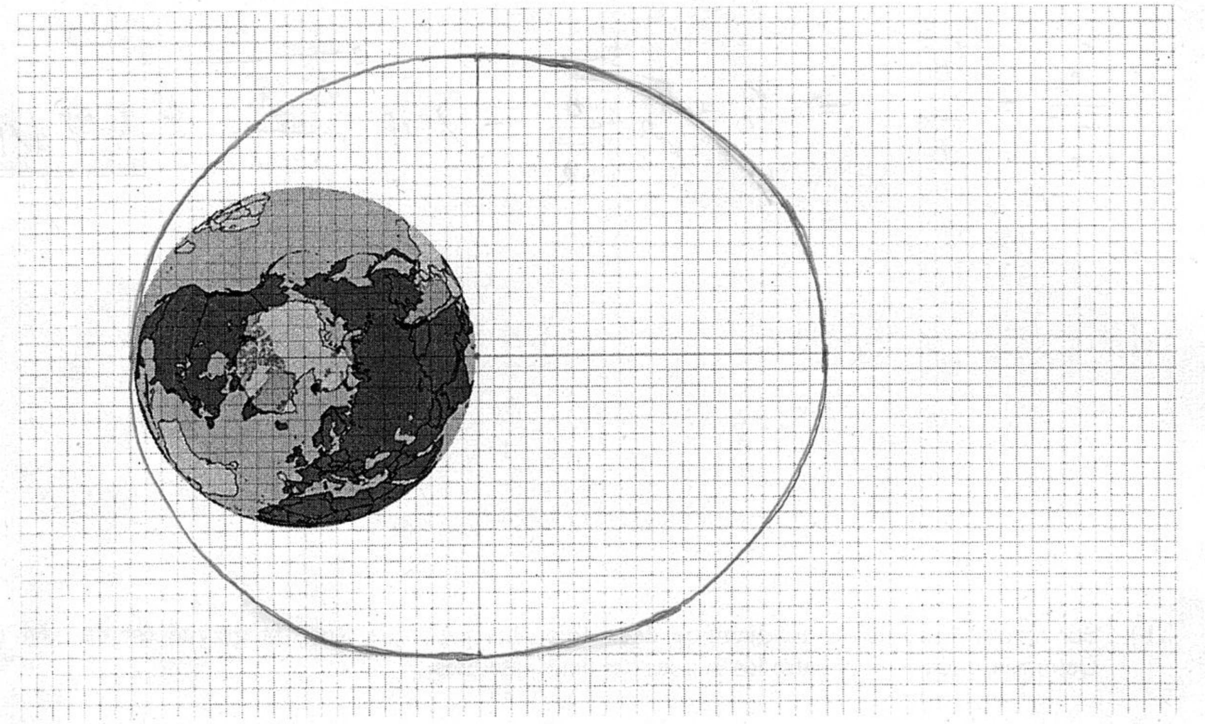
a) Calculez la distance au périgée r_P, la distance à l'apogée r_A et le demi-petit axe b de l'ellipse. Puis complétez le dessin ci-dessous en esquissant le mieux possible la trajectoire du satellite autour de la Terre.

a) $e = \frac{c}{a} \Rightarrow c = e \cdot a = R_T$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{3} \cdot R_T$

$r_p = a - c = R_T$

$r_A = 2a - r_p = 3R_T$



b) Déterminez la vitesse du satellite lors de son passage au périgée.

b) Conservation du moment cinétique : $L_p = L_A$

$R_T \cdot \cancel{m} V_p = 3\cancel{R_T} \cdot \cancel{m} V_A \Rightarrow V_A = \frac{V_p}{3}$

Conservation de l'énergie mécanique : $Em_p = Em_A$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} V_p^2 - \frac{G\cancel{m}\Pi}{R_T} = \frac{1}{2} \cancel{m} V_A^2 - \frac{G\cancel{m}\Pi}{3R_T}$$

$$V_p^2 - \frac{2G\Pi}{R_T} = \left(\frac{V_p}{3}\right)^2 - \frac{2G\Pi}{3R_T}$$

$$9V_p^2 - \frac{18G\Pi}{R_T} = V_p^2 - \frac{6G\Pi}{R_T}$$

$$8V_p^2 = \frac{12G\Pi}{R_T} \Rightarrow V_p = \sqrt{\frac{3G\Pi}{2R_T}} \cong \underline{9680 \ m/s}$$