ESI : avril 2018. **Contrôle intermédiaire [PRST2]** Durée : 1H30

Exercice 1 : (4pts)

Considérons le domaine Δ de IR^2 définie par : $[0, \ \pi/2] \times [0, \ \pi/2]$.

Le couple (X, Y) a pour fonction de densité :

$$f(x,y) = \begin{cases} \cos x . \cos y & sur \quad \Delta \\ \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1. Quelle est la densité de X et celle de Y ?
2. Calculer $E(X), V(X), E(Y)$ et $V(Y)$.
3. Quelle est la matrice de $Var - Cov$ du couple (X,Y) .

Exercice 2 : (4pts)

a) Soient X , Y et Z des variables aléatoires telles que :
$V(X) = 1$, $V(Y) = 4$, $V(Z) = 9$, $Cov(X,Y) = \frac{1}{2}$, $Cov(X,Z) = 0$ et $Cov(Y,Z) = -\frac{1}{2}$.
Calculer $Var\left(X - \frac{1}{2}Y + \frac{1}{3}Z \right)$

b) On prend **40** observations indépendantes de la variable aléatoire X ; soit N le nombre d'observations plus grandes que **1**.
Utiliser le théorème limite pour calculer la probabilité $P(N < 5)$ si X suit la loi normale centrée et réduite.

Exercice 3 : (4pts)

Soient X_1 , X_2 ~~et X_3~~ trois variables aléatoires indépendantes de même loi $N(0,1)$.
Déterminer (en justifiant) la loi de probabilité des variables aléatoires suivantes :

$$U = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(X_2 - X_1) \ , \quad U' = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(X_1 + X_2) \ , \quad V = \frac{(X_1 + X_2)^2}{(X_1 - X_2)^2} \quad \text{et} \quad W = \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{(X_1 - X_2)^2}} \ .$$

[**Indication** : U et U' sont indépendantes]

Exercice 4 : (3pts)

Soit une variable aléatoire X ayant pour moyenne m et variance σ^2 .
Pour un échantillon de taille n de X :

a) Calculer (avec démonstration) l'espérance de la v.a T_n telle que :

$$T_n = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

b) Vérifier que T_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de σ^2 .

c) En déduire un estimateur T_n' sans biais de σ^2 .

d) Est-ce-que $\sqrt{T_n'}$ est un estimateur sans biais de σ ?

BONNE CHANCE

Corrigé C.I _ PRST 2 _ Avril 2018

Ex1 : (4pts)

1) on remarque que X et Y sont indépendantes car :

$$f(x,y) = \left(\cos x \cdot \mathbb{1}_{[0,\frac{\pi}{2}]}(x)\right) \times \left(\cos y \cdot \mathbb{1}_{[0,\frac{\pi}{2}]}(y)\right).$$

de plus $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 1$

donc on aura :

$$f_X(x) = \cos x \cdot \mathbb{1}_{[0,\frac{\pi}{2}]}(x)$$ 0,5

et $$f_Y(y) = \cos y \cdot \mathbb{1}_{[0,\frac{\pi}{2}]}(y).$$ 0,5

2) $E(X) = E(Y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx = \frac{\pi}{2} - 1$ (par parties) 1

$E(X^2) = E(Y^2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \, dx = \frac{\pi^2}{4} - 2$

$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = \frac{\pi^2}{4} - 2) - (\frac{\pi}{2} - 1)^2 = \pi - 3.$ 1

3) $(\mathrm{Var}-\mathrm{Cov})(X,Y) = \begin{pmatrix} \pi-3 & 0 \\ 0 & \pi-3 \end{pmatrix}$ car $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ X et Y indépendantes 1

Ex2 : (4pts)

a) $\mathrm{Var}(X - \frac{1}{2}Y + \frac{1}{3}Z) =$

$= V(X) + \frac{1}{4}V(Y) + \frac{1}{9}V(Z) + 2\times(1)\times(-\frac{1}{2})\,\mathrm{Cov}(X,Y) +$ 2

$+ 2\times(1)\times(\frac{1}{3})\,\mathrm{Cov}(X,Z) + 2\times(-\frac{1}{2})(\frac{1}{3})\,\mathrm{Cov}(Y,Z)$

$= 1 + 1 + 1 - \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{6} = 8/3.$

b) $P(X>1) = 1 - P(X \leq 1) \simeq 0,159$.

on considère : succès = observation plus grands que 1.

N est le nombre de succès par 40 observations indépendants

donc $N \rightsquigarrow \mathcal{B}(40\,;\,0,159)$.

1

D'après thm limite centrale, en approximant la loi $\mathcal{B}(n\,;p)$ par la $\mathcal{N}(np, \sqrt{npq})$., $p = 0,159$, $n = 40$.

on a :

$$P(N<5) = P\left(\frac{N-40(0,159)}{\sqrt{40(0,159)(0,841)}} < \frac{5-40(0,159)}{\sqrt{40(0,159)(0,841)}}\right)$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{5-40(0,159)}{\sqrt{40(0,159)(0,841)}}\right)$$

$$\simeq \Phi(-0,804) \simeq 1 - \Phi(0,804) \simeq 0,212$$

1

EX3 : (4 pts)

U et U' sont des combinaisons linéaire de lois normales

donc U et U' sont normalement distribuées.

$E(U) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(E(X_2) - E(X_1)) = 0$.

$V(U) = \frac{1}{2}\left(V(X_1) + V(X_2)\right)$ car X_1, X_2 indépendants

$= \frac{1}{2}(1+1) = 1$.

$$\boxed{U \rightsquigarrow \mathcal{N}(0\,;1)}$$

1

de même :

$$E(U') = 0 \quad \text{et } V(U') = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

$$\boxed{U' \rightsquigarrow N(0;1)}$$ 1

- on montre que,

$$V = \frac{U'^2}{U^2}$$ tq U et U' sont independants (d'après l'indication)

et $U'^2 \rightsquigarrow \chi^2(1)$ (le carré d'une $N(0,1)$).

$U^2 \rightsquigarrow \chi^2(1)$

donc $\boxed{V \rightsquigarrow F(1,1)}$ 1

- on montre que,

$$W = \frac{U'}{\sqrt{U^2}}$$ tq U et U' independants

$U' \rightsquigarrow N(0,1)$

$U^2 \rightsquigarrow \chi^2(1)$ 1

donc $\boxed{W \rightsquigarrow st(1)}$.

Ex 4 : (3 pts)

a) en developpant

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \sum_{1}^{n}(X_i - m)^2 - n(\overline{X} - m)^2.$$

Demonstration vue en Cours

on trouvera,

$$E(T_n) = \frac{n \cdot V(X_1)}{n} - V(\bar{X}_n)$$

$$V(X_1) = \sigma^2 \text{ et } V(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

d'où $\boxed{E(T_n) = \sigma^2 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n} \cdot \sigma^2}$

1

b) $E(T_n) = \frac{n-1}{n} \cdot \sigma^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sigma^2$

0,5

T_n est un estimateur biaisé mais asymptotiquement sans biais.

c) Si on pose $T_n' = \frac{n}{n-1} \cdot T_n$

on aura, $E(T_n') = \frac{n}{n-1} \cdot E(T_n) = \sigma^2$.

1

$$T_n' = \frac{n}{n-1} \cdot T_n = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{1}^{n} (X_n - \bar{X}_n)^2$$

est un estimateur sans biais de σ^2

d) $\sqrt{T_n'}$ n'est pas un estimateur sans biais de σ.

$$E(\sqrt{T_n'}) \neq \sqrt{E(T_n')}$$

0,5