**Exercice 1 :** (5pts)

***Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles et soient $a$, $b$ et $y$ trois paramètres réels différents de 0 et 1 tels que la loi du couple $(X,Y)$ soit donnée par le tableau suivant :***

| $X \backslash Y$ | $y$ | ***0*** | ***1*** |
|---|---|---|---|
| ***0*** | $1/4$ | $a$ | $1/8$ |
| ***1*** | $1/5$ | $b$ | $1/10$ |

***1)***

***a) Déterminer $a$ et $b$ de manière que $X$ et $Y$ soient indépendantes.***

On a :

| $X \backslash Y$ | $y$ | 0 | 1 | $\mathrm{P}_X(i)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $1/4$ | $a$ | $1/8$ | $3/8 + a$ |
| 1 | $1/5$ | $b$ | $1/10$ | $3/10 + b$ |
| $\mathrm{P}_Y(j)$ | $9/20$ | $a+b$ | $9/40$ | 1 |

avec la condition : $\sum_{(i,j)\in X(\Omega)xY(\Omega)} \mathrm{P}_{X,Y}(i,j) = 1$ qui donne $a + b = 1 - 27/40 = 13/40$ . (*) .............. 0.5pt

et pour que $X$ et $Y$ soient indépendantes, on doit vérifier que :

$$\forall (i,j) \in X(\Omega)\times Y(\Omega),\quad \mathrm{P}_{X,Y}(i,j) = \mathrm{P}_X(i)\times \mathrm{P}_Y(j)$$ ................................ 0.5pt

i.e. vérifier les six équations :

$$\begin{cases} (3/8 + a)\times 9/20 = 1/4 & (*)' \\ (3/10 + b)\times 9/20 = 1/5 \\ (3/8 + a)(a+b) = a \\ (3/10 + b)(a+b) = b \\ (3/8 + a)\times 9/40 = 1/8 \\ (3/10 + b)\times 9/40 = 1/10 \end{cases}$$

D'après (*)' on trouve : $a = 1/9(5 - 27/8) = 13/72$ ........................ 0.5pt

D'après (*) on trouve : $b = 13/40 - 13/72 = 13/90$ ........................ 0.5pt

en vérifiant bien que les cinq autres équations sont bien satisfaites pour les valeurs de $a$ et $b$ trouvées.

***b) Quelles seraient alors les lois conditionnelles de $X$ pour les différentes valeurs de $Y$ ?***

*$X$ et $Y$ sont indépendantes alors*

*Pour $j \in \{y,0,1\} = Y(\Omega)$ , puisque $\mathrm{P}_Y(j) \neq 0$ on aura : $\forall i \in X(\Omega)$ , $\mathrm{P}_{X/Y=j}(j) = \mathrm{P}_X(i)$*

*i.e.* $\mathrm{P}_{X/Y} = \mathrm{P}_X$ ........................................ 1pt

**2) On suppose dans cette question que $a = \frac{1}{5}$ .**

- ***Déterminer la valeur de $y$ telle que la covariance de $X$ et $Y$ soit nulle.***

$a = \frac{1}{5}$ donc $b = \frac{13}{40} - \frac{1}{5} = \frac{1}{8}$ (d'après(*)) ......................... 0.25pt

$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X) \times E(Y)$

tels que :

$$\begin{cases} E(X) = \frac{3}{10} + b = \frac{17}{40} & \text{.........................................................}0.25pt \\ E(Y) = (\frac{9}{20})y + \frac{9}{40} & \text{.........................................................}0.25pt \\ E(XY) = \frac{y}{5} + \frac{1}{10} & \text{.........................................................}0.25pt \end{cases}$$

$Cov(X,Y) = \frac{y}{5} + \frac{1}{10} - \frac{17}{40}(\frac{9y}{2à} + \frac{9}{40}) = \frac{160-153}{800} y + \frac{160-153}{1600}$ ............0.25$pt$

$Cov(X,Y) = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$ ....................................................0.25$pt$

- ***Les variables $X$ et $Y$ sont-elles alors indépendantes ? Commenter ce cas.***

D'après la question (1.a), $X$ et $Y$ ne sont indépendantes que si $a = \frac{13}{72}$ et $b = \frac{13}{90}$ .
Dans le cas de cette question $a = \frac{1}{5}$ et $b = \frac{1}{8}$ , $X$ et $Y$ ne sont donc pas indépendantes malgré que $Cov(X,Y) = 0$ . 0.5pt
On sait que $X$ et $Y$ sont indépendantes alors $Cov(X,Y) = 0$ , la réciproque n'est pas toujours vraie.

**<u>Exercice 2</u> :** (7pts) **[les parties A et B sont indépendantes]**

***Soient la v.a.r $X \to U_{]0,1[}$ (de loi uniforme sur l'intervalle ]0,1[) et $Y = -2\log X$ (logarithme népérien).***

***A)***

***a) Déterminer la densité de probabilité $f_Y$ de $Y$ .***

Soit $h : ]0,1[ \to ]0,+\infty[$

$x \to -2\log x$

$h$ st bijective $\begin{cases} h \text{ est continue et strictement croissante} \\ h'(x) = \frac{-2}{x} < 0 \end{cases}$ ...............0.25$pt$

et on a : $h^{-1}(x) = e^{-\frac{y}{2}} \in ]0,1[, \forall y \in ]0,+\infty[$ .

D'après le théorème de changement de variable (voir Cours ch4)

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{f_X(h^{-1}(y))}{\left|h'(h^{-1}(y))\right|} & si\ y \in ]0,+\infty[ \\ 0 & si\ non \end{cases} \qquad \text{...............}0.25pt$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & si\ y \in ]0,+\infty[ \\ 0 & si\ non \end{cases} \qquad \text{...............}1pt$$

On a donc $f_Y(y) = \frac{1}{2}.e^{-\frac{y}{2}} 1_{IR_+^*}(y)$ .

**b) Donner l'appellation de la loi de $Y$, sa fonction de répartition $F_Y$ , son espérance et sa variance.**

D'après l'expression de la densité de probabilité de la V.a $Y$, on voit bien qu'il s'agit de la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/2$ . ……………………………………………………………0.5pt……………………………………………………

D'où (Cours Ch6) $\begin{cases} F_Y(y) = (1-e^{-\frac{y}{2}})1_{IR_+^*}(y) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1pt \\ E(Y) = 2 = \left(\frac{1}{1/2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0.5pt. \\ V(Y) = 4 = \left(\frac{1}{(1/2)^2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0.5pt \end{cases}$

**B) On définit la v.a.r $Z$ par $Z = [T]+1$ telle que $T$ de densité de probabilité $f_T(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}.I_{IR_+}(x)$ .**

**([.] désigne la partie entière)**

**1) Calculer la loi de probabilité de la v.a $Z$ .**

$Z(\Omega) = \{1,2,\ldots\} = IN^*$, 0.5pt

Or d'après l'équivalence des évènements suivants :

$\forall k \in IN^*, \quad (Z = k) = ([T]+1 = k) = ([T] = k-1) = (k-1 \le T < k).$

$$\forall k \in IN^*, \quad P_Z(k) = P(Z = k) = P(k-1 \le T < 1)$$

D'où

$$= F_T(k) - F_T(k-1) \qquad avec\, F_T = F_Y\,[QuestionA(b)] \,.$$

$$= e^{-\frac{1}{2}(k-1)} - e^{-\frac{1}{2}k}$$

1pt

**2) Laquelle des lois usuelles correspond la loi de $Z$ ?**

On a : . $\forall k \in IN^*, \quad P_Z(k) = e^{-\frac{1}{2}(k-1)}(1-e^{-\frac{1}{2}}) = (e^{-\frac{1}{2}})^{k-1}.(1-e^{-\frac{1}{2}}) = (1-(1-e^{-\frac{1}{2}}))^{k-1}.(1-e^{-\frac{1}{2}})$

En posant $p = 1-e^{-\frac{1}{2}}$ d'où $1-p = q = e^{-\frac{1}{2}}$ , on aura : $\forall k \in IN^*, \quad P_Z(k) = q^{k-1}.p$

On remarque que c'est l'expression de la loi géométrique de paramètre $p = 1-e^{-\frac{1}{2}}$ 0.5pt

**3) Donner la fonction génératrice de $Z$ , son espérance et sa variance.**

$Z \to \mathcal{G}(p), \quad p = 1-e^{-\frac{1}{2}}$ on trouve (Cours Ch6) en remplaçant par la valeur de $p$ , $p = 1-e^{-\frac{1}{2}}$

$$\begin{cases} G_Z(t) = \dfrac{pe^t}{1-qe^t} \qquad 0 < qe^t < 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0.5pt \\ E(Z) = \frac{1}{p} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0.25pt. \\ V(Y) = \frac{1-p}{p^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0.25pt \end{cases}$$

**<u>Exercice 3</u> :** (3pts) **[les parties A et B sont indépendantes]**

**A.** ***Calculer $V(X.Y)$ si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires indépendantes et normalement distribuées de lois respectivement $N(-1;1)$ et $N(2;4)$.***

En utilisant le théorème3 du chapitre5 : $h$ et $g$ deux fonctions définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ à valeurs réelles.
Si $X$ et $Y$ sont indépendantes alors $E(h(X).g(Y)) = E(h(X)).E(g(Y))$ .
On aura donc

$$\begin{aligned} V(XY) &= E((XY)^2) - (E(XY))^2 \\ &= E(X^2Y^2) - (E(X)E(Y))^2 \\ &= E(X^2)E(Y^2) - (E(X))^2(E(Y))^2 \\ &= (V(X) + (E(X))^2)(V(Y) + (E(Y))^2) - (E(X))^2(E(Y))^2 \text{.........................} 1pt \\ &= (1 + (-1)^2)(2^2 + 2^2) - (-1)^2.2^2 = 12 \text{..................................................} 0.5pt \end{aligned}$$

**B.** ***Soient $X_1$, $X_2$ et $X_3$ des variables aléatoires indépendantes dont la matrice Variance-Covariance du vecteur $(X_1, X_2, X_3)$ est :***

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

***Après la simplification dans l'écriture de cette matrice, calculer $\sigma(W)$ en fonction des $c_{ij}$ tel que :***

$$W = 3X_1 + 2X_2 - X_3.$$

$X_1$, $X_2$ ***et*** $X_3$ indépendantes, la matrice variance-covariance est diagonale,

c'est-à-dire $\begin{cases} \forall i \neq j, \quad c_{ij} = 0 = \text{cov}(X_i, X_j) \quad \textit{indépendance} \\ \qquad\qquad \textit{et} \\ c_{ii} = V(X_i) \quad \textit{pour} \quad i = 1,2,3 \end{cases}$ ..................0.5pt

D'où $V(W) = 3^2V(X_1) + 2^2V(X_2) + (-1)^2V(X_3) = 9c_{11} + 4c_{22} + c_{33}$
(toutes les covariances sont nulles)

Enfin $\sigma(W) = \sqrt{9c_{11} + 4c_{22} + c_{33}}$ ......................................................................1pt