



实变函数

实变函数作业

组织：Shandong University

时间：2024.3.1

版本：1

自定义：信息



目录

第 1 章 集合及其基数	1
1.1 集合及其运算	1
1.2 集合的基数	3
1.3 可数集合	3
1.4 不可数集合	4
1.5 上课思考题	5
第 2 章 n 维空间的点集	6
2.1 聚点, 内点, 边界点, Bolzano–Weierstrass 定理	6
2.2 开集, 闭集与完备集	6
2.3 p 进位表数法	9
2.4 一维开集, 闭集, 完备集的构造	9
2.5 点集间的距离	10
2.6 课后思考题	11
第 3 章 测度理论	12
3.1 开集的体积	12
3.2 点集的外测度	12

第 1 章 集合及其基数

本文档已发布于 <https://github.com/Niohuruhal/HA-CRP>

1.1 集合及其运算

1. 证明 $(B - A) \cup A = B$ 的充要条件是 $A \subset B$

证明 充分性: 若 $A \subset B$, 则 $(B - A) \cup A = (B \cap A^c) \cup A = B$.

必要性易证.

2. 证明 $A - B = A \cap B^c$

证明

$$\begin{aligned}x \in A - B &\Leftrightarrow x \in A \text{ 且 } x \notin B \\&\Leftrightarrow x \in A \text{ 且 } x \in B^c \\&\Leftrightarrow x \in A \cap B^c\end{aligned}$$

3. 证明定理 4 中的 (3),(4). 定理 6(De.Morgen 公式) 中的第二式和定理 9

证明 定理 4(3)

$$\begin{aligned}x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda} &\Rightarrow x \in A_{\lambda} \subset B_{\lambda} (\lambda \in \Lambda) \\&\Rightarrow x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_{\lambda}\end{aligned}$$

同理:

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_{\lambda} \supset C$$

定理 4(4)

$$\begin{aligned}x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A_{\lambda} \cup B_{\lambda}) &\Leftrightarrow (\exists \lambda \in \Lambda) x \in A_{\lambda} \text{ 或者 } B_{\lambda} \\&\Leftrightarrow x \in \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda} \right) \cup \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_{\lambda} \right)\end{aligned}$$

定理 6: 如果 $\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda} \right)^c$ 不是空集, 那么 $x \in \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda} \right)^c$, 则 $x \in S$ 且 $x \notin \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda}$, 因而对于 $\exists \lambda \in \Lambda$, 有 $x \notin A_{\lambda}$, 所以有

$$x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda}^c$$

反之亦然. 定理 9: 由于 $A_n \subset A_{n+1}$, 得 $\bigcap_{k=m}^{\infty} A_k = A_m$ 则

$$\begin{aligned}\lim_n A_n &= \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{i=m}^{\infty} A_i \\&= \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\end{aligned}$$

4. 证明 $(A - B) \cup B = (A \cup B) - B$ 的充要条件是 $B = \emptyset$

证明 充分性: 若 $B = \emptyset$, 则 $(A - B) \cup B = A - B = A = (A \cup B) - B$. 必要性: 若 $(A - B) \cup B = (A \cup B) - B$ 则 $A \cap B^c \cup B = (A \cup B) \cap B^c$ 则 $B = \emptyset$

5. 设 $S = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{A} = \{\{1, 2\} \{3, 4\}\}$, 求 $\mathcal{F}(\mathcal{A})$, 又如果 $S = \{\frac{1}{n}; n = 1, 2, 3, \dots\}$, $\mathcal{A}_0 = \{\{\frac{1}{n}; n \text{ 为奇数}\}\}$, $\mathcal{A}_1 = \{\{1\} \{\frac{1}{3}\} \dots \{\frac{1}{2i+1}\} \dots\}$ 问 $\mathcal{F}(\mathcal{A}_0)$ 和 $\mathcal{F}(\mathcal{A}_1)$ 是什么?

证明

$$\mathcal{F}(\mathcal{A}) = \{\emptyset, S, A\}$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{A}_0) = \left\{ S, \emptyset, A, \mathcal{A}_0 = \left\{ \left\{ \frac{1}{n}; n \text{ 为偶数} \right\} \right\} \right\}$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{A}_1) = \{S, \emptyset, A_1, A_2\}$$

其中 A_1 指的是 $\mathcal{A}_0 = \left\{ \left\{ \frac{1}{n}; n \text{ 为偶数} \right\} \right\}$ 的包含 $\left\{ \frac{1}{n}; n \text{ 为偶数} \right\}$ 全体子集, A_2 指的是 $\left\{ \left\{ \frac{1}{n}; n \text{ 为偶数} \right\} \right\} \cap \left\{ \left\{ \frac{1}{n}; n \text{ 为奇数} \right\} \right\}$ 的全体子集

6. 对于 S 的子集 A , 定义 A 的示性函数为

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \quad (1.1)$$

证明: 如果 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ 是 S 的子集序列, 则

$$\varphi_{\liminf_n A_n}(x) = \liminf_n \varphi_{A_n}(x) \quad \varphi_{\limsup_n A_n}(x) = \limsup_n \varphi_{A_n}(x)$$

证明 不妨令 $\varphi_{\liminf_n A_n}(x) = 1$, 不失一般性, 从而有 $x \in \liminf_n A_n$, 根据定义可知, 只有有限多个 n , 使得 $x \notin A_n$. 因此, $\varphi_{A_n}(x)$ 只有有限个 0 值, 因此 $\liminf_n \varphi_{A_n}(x) = 1$ 故 $\varphi_{\liminf_n A_n}(x) = \liminf_n \varphi_{A_n}(x)$.

证明 $\varphi_{\limsup_n A_n}(x) = \limsup_n \varphi_{A_n}(x)$ 过程同上:

$$\begin{aligned} \varphi_{\limsup_n A_n}(x) = 1 &\Leftrightarrow \text{有无穷多个 } n, \text{ 使得 } x \in A_n \\ &\Leftrightarrow \varphi_{A_n}(x) = 1 \text{ 有无穷多个 } n \\ &\Leftrightarrow \limsup_n \varphi_{A_n}(x) = 1 \end{aligned}$$

7. 设 $f(x)$ 是定义于 E 上的实函数, n 为一常数, 证明

$$\begin{aligned} E[x; f(x) > a] &= \bigcup_{n=1}^{\infty} E[x; f(x) \geq a + \frac{1}{n}] \\ E[x; f(x) \geq a] &= \bigcap_{n=1}^{\infty} E[x; f(x) > a - \frac{1}{n}] \end{aligned}$$

证明

$$\begin{aligned} E[x; f(x) > a] &\Leftrightarrow \exists n \geq 0 \quad f(x) \geq a + \frac{1}{n} \\ &\Leftrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E[x; f(x) \geq a + \frac{1}{n}] \\ E[x; f(x) \geq a] &\Leftrightarrow \forall n \geq 0 \quad f(x) \geq a - \frac{1}{n} \\ &\Leftrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} E[x; f(x) > a - \frac{1}{n}] \end{aligned}$$

8: 如果实函数序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 E 上收敛于 $f(x)$, 则对于任意常数 a , 都有

$$\begin{aligned} E[x; f(x) \leq a] &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \liminf_n E[x; f_n(x) \leq a + \frac{1}{k}] \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \liminf_n E[x; f_n(x) < a + \frac{1}{k}] \end{aligned}$$

证明 由于

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \liminf_n E[x; f_n(x) \leq a + \frac{1}{k}] \supset \bigcap_{k=1}^{\infty} \liminf_n E[x; f_n(x) < a + \frac{1}{k}]$$

所以问题转化为: 证明:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \liminf_n E[x; f_n(x) \leq a + \frac{1}{k}] \subset E[x; f(x) \leq a] \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} \liminf_n E[x; f_n(x) < a + \frac{1}{k}]$$

证明左式:

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \liminf_n E[x; f_n(x) \leq a + \frac{1}{k}] &\rightarrow \forall k \geq 1 \exists m > 0 n \geq m f_n(x) \leq a + \frac{1}{k} \\ &\rightarrow \forall k \geq 1 f(x) \leq a + \frac{1}{k} \quad (n \rightarrow \infty) \\ &\rightarrow x \in E[x; f(x) \leq a] \quad (\text{令 } k \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

证明右式:

$$x \in E[x; f(x) \leq a] \rightarrow \forall k > 0 f(x) < a + \frac{1}{k}$$

引入:

$$f_n(x) < a + \frac{1}{k}$$

这是因为: $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛为 $f(x)$. 所以有: $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \liminf_n E[x; f_n(x) < a + \frac{1}{k}]$

得证

1.2 集合的基数

1. 用解析式给出 $(-1, 1)$ 和 $-\infty, \infty$ 之间的一个 1-1 对应

证明

$$f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

2. 证明只要 $a < b$ 就有 $(a, b) \sim (0, 1)$

证明

$$f(x) = \frac{x - b}{a - b}$$

易证上述解析式是既单又满的.

3 证明平面上的任何不带圆周的圆上的点所作的点集都是和整个平面上的点所作的点集对等的, 进而证明平面上的任何非空的开集中的点所作的点集和整个平面上的点所作的点集对等

证明 首先: 平面内任何圆周所围成的区域均可变换为以原点为中心的圆周围成的区域, 其次引入极坐标 (r, θ) , 所以有解析式

$$f((r, \theta)) = \left(\tan\left(\frac{\pi r}{2a}\right), \theta\right)$$

所以平面上的任何不带圆周的圆上的点所作的点集都是和整个平面上的点所作的点集对等的. 因为开集具有内点, 所以根据 **Bernstein** 定理易证: 平面上的任何非空的开集中的点所作的点集和整个平面上的点所作的点集对等.

1.3 可数集合

1. 证明平面上坐标为有理数的点构成一可数集合.

证明 根据定理: $\mathbb{Q}^2 \sim \mathbb{Q} \sim c$

2. 以数直线上互不相交的开区间为元素的任意集合至多含有可数多个元素

证明 记该集合为

$$A = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n), \dots\}$$

由于开区间互不相交, 则 $a_i \neq a_j$, 因此 A 到 \mathbb{Q} 有一一对应, 得证

3. 所有系数为有理数的多项式组成一可数集合

证明 记 P_n 为 n 次多项式, 根据定理, \mathbb{Q}^{n+1} 为可数集合, 则 P_n 为可数集 (P_n 中的系数组成 \mathbb{Q}^n) 记所有系数为有理数的多项式的集合为 A 则

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_n$$

得证

4. 如果 $f(x)$ 是 $-\infty, \infty$ 上的单调函数, 则 $f(x)$ 的不连续点最多有可数多个

证明 记 $f(x)$ 的不连续点为 $\{a_i (i \in \mathbb{N})\}$, 因为 $f(x)$ 是单调函数, 从而得到一组互不相交的开区间, 由题 2 可知: $f(x)$ 的不连续点最多有可数多个

5. 设 A 是一无穷集合, 证明必有 $A^* \subset A$ 使得 $A^* \sim A$ 且 $A - A^*$ 可数

证明 由于 A 是无穷集合, 那么有一个可数子集 A' 记 $A^* = A - A'$, 由于 A' 是可数集合且 A^* 是无穷集合, 从而 $A = A^* \cup A' \sim A^*$

6. 若 A 为一可数集合, 则 A 的所有有限子集构成的集合也是可数集合

证明 记 $A_n \subset A$ 为有 n 个元素的集合. 则 A_n 是可数集. 从而

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \text{ 是可数集}$$

7. 若 A 是由非蜕化的开区间组成的不可数无穷集合, 则有 $\delta > 0$, 使 A 中有无穷多个区间的长度大于 δ .

证明 (反证法): A 中有有限多个区间的长度大于 δ , 因此 A 中有无穷多个区间小于 δ . 记如下符号:

$$B_n : \left\{ x; |x| > \frac{1}{n} \right\} \quad \text{存在 } N, n > N$$

可知 B_n 是可数集, 因此

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_n \text{ 是可数集}$$

所以, 矛盾!

8. 如果空间中的长方形

$$I = \{(x, y, z); a_1 < x < a_2, b_1 < y < b_2, c_1 < z < c_2\}$$

中的 $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 (a_1 < a_2, b_1 < b_2, c_1 < c_2)$ 都是有理数, 则称 I 为有理长方体, 证明全体有理长方体构成一个可数集合

证明 存在如下的一一对应:

$$i: I \rightarrow \mathbb{Q}^6 \quad i(I) = (a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2)$$

由于定理: \mathbb{Q}^6 是可数集. 得证.

1.4 不可数集合

1. 证明 $[0, 1]$ 上的全体无理数构成一不可数无穷集合

证明 (反证法): 若 $[0, 1]$ 上的全体无理数构成一可数集 A . 那么 $[0, 1] = A \cup \mathbb{Q}$ 从而 $[0, 1]$ 为可数集, 矛盾!

2. 证明全体代数数构成一可数集合, 进而证明必存在超越数.

证明 由于全体代数数的集合 A 和整系数多项式组成的集合有一一对应, 所以全体代数数构成一个可数集合. 同时 (反证法): 若不存在超越数, 那么 \mathbb{R} 是可数集, 矛盾!

3. 证明如果 a 实可数基数, 则 $2^a = c$

证明 一方面, 引入示性函数

$$\varphi_A(n) = \begin{cases} 1, & n \in A \\ 0, & n \notin A \end{cases} \quad (1.2)$$

所以对于正整数集的任意子集 A , 考虑 A 的示性函数可知:

$$0. \prod_{n=1}^{\infty} \varphi_A(n) \in (0, 1)$$

上述映射是正整数集到 $(0, 1)$ 的单射所以 $2^a \geq c$ 另一方面, 对于 $\forall x \in (0, 1)$, 考虑 $(0, 1)$ 中的有理数集 Q_0 的子集 $A_x = \{r; r \leq x, r \in Q_0\}$, 那么上述映射是 $(0, 1)$ 的幂集到 Q_0 的单射, 因此 $c \leq 2^a$ 根据 Bernstein 定理可得: $2^a = c$

4. 证明如果 $\overline{A \cup B} = c$, 则 $\overline{A}, \overline{B}$ 中至少一个为 c

证明 (反证法): 根据连续统假设, 作如下反证法. 如果 $\overline{A}, \overline{B}$ 均是可数集, 那么矛盾显然

改正: 作 $\varphi: A \cup B \rightarrow [0, 1]^2$ 是双射

- Cases1: φ 与 $\{x\} \times [0, 1]$ 都相交

$$\overline{\varphi(A)} \geq c \quad \overline{A}$$

- Cases2 存在某 $\{x\} \times [0, 1] \quad x \in [0, 1]$ $\varphi(A)$ 与之不交.

$$\varphi(B) \supset [0, 1]$$

从而可知

$$\overline{B} \geq c$$

5. 设 F 是 $[0, 1]$ 上全体实函数所构成的集合, 证明 $\overline{F} = 2^c$

证明 考虑 $A \subset [0, 1]$ 的示性函数 1.2

$$\varphi_A(n) = \begin{cases} 1, & n \in A \\ 0 & n \notin A \end{cases}$$

$\varphi_A \in F$, 从而 $\overline{F} \geq 2^c$ 其次, 由于 $(x, f(x)) x \in R$ 是 R^2 的子集因此 $\overline{F} \leq 2^c$ 所以 $\overline{F} = 2^c$

1.5 上课思考题

如果集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in (0,1)}$ 满足 $\overline{A} = c$ 那么

$$\overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1)} A_\alpha} = c$$

证明 不妨令 A_i 为空交集列, 不失一般性 (因为空交集列的基数大于一般的集合列) 考虑 $\bigcup_{\alpha \in (0,1)} A_\alpha \rightarrow (\alpha, A_\alpha)$.

由于上述映射是一一对应的, 又由于 $\overline{A_\alpha} = \overline{(0,1)} = c$ 从而

$$\overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1)} A_\alpha} = c$$

第2章 n 维空间的点集

2.1 聚点, 内点, 边界点, Bolzano-Weierstrass 定理

1. 证明 $P_0 \in E'$ 的充要条件是对于任意含有 P_0 的邻域 $N(P, \delta)$ 中, 恒有异于 P_0 的点 P_1 属于 E . 而 P_0 为 E 的内点的充分必要条件则是存在含有 P_0 的邻域 $N(P, \delta)$ 使得 $N(P, \delta) \subset E$

证明 充分性显然. 必要性: 若 $P_0 \in E'$ 则 $\forall \delta > 0$ $N(P_0, \delta)$ 中恒有无穷多个点属于 E , 所以对于任意含有 P_0 的邻域 $N(P, \delta)$ 有: $N(P_0, \delta) \cap N(P, \delta) \subset E$. 证明 P_0 为 E 的内点的充分必要条件则是存在含有 P_0 的邻域 $N(P, \delta)$ 使得 $N(P, \delta) \subset E$ 过程同上.

2. 设 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^1$ 是全体实数, E_1 是 $[0, 1]$ 上的全部有理点, 求 $E_1', \overline{E_1}$

证明 由于有理数的稠密性, 所以 $E_1' = [0, 1], \overline{E_1} = [0, 1]$

3. 设 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2$ 是普通的 xy 平面 $E_2 = \{(x, y); x^2 + y^2 < 1\}$, 求 $E_2', \overline{E_2}$

证明 考虑 $\{(x, y); x^2 + y^2 = 1\}$, 由于它的任意邻域包含无穷多个 E_2 中的点, 并且 $\{(x, y); x^2 + y^2 > 1\}$ 是 E_2 的外点. 所以 $\overline{E_2} = E_2' = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$

4. 设 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2$ 是普通的 xy 平面. E_3 函数是

$$y = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

的图形上的点所作成的集合, 求 E_3'

证明 由图 (2.1) 可知 因此 $E' = \{(0, y); -1 \leq y \leq 1\}$

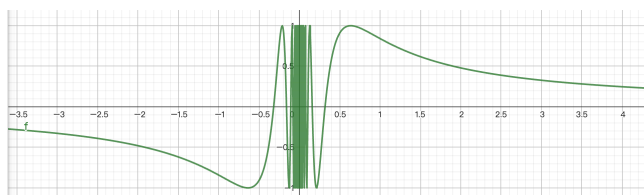


图 2.1

5. 证明当 E 是 \mathbb{R}^n 中的不可数无穷点集时, E' 不可能是有限集.

证明 (反证法): E 的聚点有限, 那么 E 是可数无穷点集 (这是因为如果聚点有限, 那么意味着 $E - E'$ 是孤立点集), 矛盾!

2.2 开集, 闭集与完备集

1. 证明点集 F 为闭集的充要条件是 $\overline{F} = F$

证明 必要性显然, 证明充分性: 若 $\overline{F} = F$ 从而设 $x \in F'$ 则 $x \in F$ 从而 $F' \subset F$, 则 F 为闭集

2 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, \infty)$ 上的实值连续函数, 证明对于任意常数 $a, \{x; f(x) > a\}$ 都是开集, $\{x; f(x) \geq a\}$ 都是闭集

证明 先证根据海涅定理可知: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

所以根据极限定义: $\exists \delta > 0 |x_n - x_0| < \delta \quad \forall \varepsilon > 0$ 有

$$f(x_n) \geq a$$

, 所以对于 $\forall x_1 \in \{x; f(x) \geq a\}$ 是聚点因此 $\{x; f(x) \geq a\}$ 是闭集, 根据 De.morgan 律可知: $\{x; f(x) > a\}$ 是开集

3. 证明任何邻域 $N(P, \delta)$ 都是开集并且 $\overline{N(P, \delta)} = \{P'; \rho(P', P) \leq \delta\}$

证明 对于某一点 a_0 的邻域 $N(a_0, \delta)$. 记某一点 a_1 和 a_0 之间的距离为:

$$\rho(a_1, a_0) = \left(\sum_{i=1}^n (a_{i1} - a_{i2})^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

对于任意点 a_1 属于上述的邻域都有 $\delta_0 = \rho(a_1, a_0) < \delta$ 因此有

$$N(a_1, \delta_0) \subset N(a_0, \delta)$$

所以任何邻域都是开集. 同时由于 $\{P'; \rho(P', P) \leq \delta\}$ 是包含 $N(P, \delta)$ 的最小闭集所以

$$\overline{N(P, \delta)} = \{P'; \rho(P', P) \leq \delta\}$$

4. 设 Δ 是一有限闭区间, F_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) 都是 Δ 的闭子集, 证明如果 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$, 则必有正整数 N , 使

得 $\bigcap_{n=1}^N F_n = \emptyset$

证明 若 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$ 则记 $A_n = (F_n)^c$ 根据 De.morgan 律可知:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \right)^c = \Delta$$

并且 A_n 是开集, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 是开覆盖, 由于 Borel 有限覆盖定理可知: 存在有限 N 个开子覆盖, 覆盖整个区域 Δ 所以

$$\bigcup_{n=1}^N A_n = \Delta$$

5 设 $E \subset \mathbf{R}^n$, \mathcal{M} 是一族完全覆盖 E 的开邻域, 则有 \mathcal{M} 中的可数 (或有限) 多个邻域 N_1, \dots, N_m, \dots , 它们也完全覆盖了 E

证明 考虑 E 中的单点集 $a_i \in E \subset \mathbf{R}^n$, 从而一定有 $a_i \in N_i$, 那么

$$\exists \delta > 0 \quad N(a_0, P) \subset N_0$$

由于有理数集的稠密性: $\overline{Q^n} = R^n$ 所以得到那么一个集合:

$$A_i = \{(n, r); n \in Q^n \quad r \in r\}$$

因此

$$A_i \subset N(a_0, P) \subset N_0$$

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$$

得证

6. 证明 \mathbf{R}^n 中任意开集 G 都可以表现成 $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i^{(n)}$ 的形式, 其中

$$I_i^{(n)} = \left\{ P; P = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), c_j^{(i)} < x_j < d_j^{(i)}, j = 1, 2, 3, \dots, n \right\}$$

证明 记 $\exists \delta > 0$, 同时 $P \in G$ 所以

$$G = \bigcup_{P \in G} N(P, \delta)$$

构造如下 $I_P^{(n)}$

$$I_P^{(n)} = \left\{ Q; Q = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad x_i - \frac{\delta}{\sqrt{n}} < P_n < x_i + \frac{\delta}{\sqrt{n}} \right\}$$

同时因为

$$\begin{aligned}\rho(P, Q) &= \left\{ \sum_{i=1}^n (x_i - P_i)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &< \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\delta^2}{n} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \delta\end{aligned}$$

通过上述得:

$$G = \bigcup_{P \in G} I_P^{(n)} \subset \bigcup_{P \in G} N(P, \delta_P) = G$$

通过题 5 可得证

7. 试根据 Borel 有限覆盖定理证明 Bolzano-Weierstrass 定理

证明 $E \subset \mathbf{R}^n$ 是有界无穷集合, 从而可以找的到一族开覆盖 $N_n = \{x; \rho(x, 0) < K + \frac{1}{n}\}$ 从而有可数多个 N_n 覆盖, 因此能找到 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x'$

8. \mathbf{R}^n 中任何开集基数均为 c

证明 只需证明 $\overline{E} \geq c$ 考虑 $([0, 1])^n$, 不失一般性. 且上述集合是有界闭集, 所以 E 中有可数多个子集, $\bigcup_{i=1}^n E_i = ([0, 1])^n$ 则由 Bernstein 定理可知:

$$\overline{E} = c$$

9. 证明对于任意 $E \subset \mathbf{R}^n$, E 都是 \mathbf{R}^n 中包含 E 的最小的闭集

证明 记 $\mathbf{U} = \{u, u \text{ 是开集}, u \subset A\}$, 命题等于证

$$\bigcup_{u \in \mathbf{U}} u = A^\circ$$

可以使用”两边夹“方法:

先证明: $\bigcup_{u \in \mathbf{U}} u \supseteq A^\circ$: 任取 $x_0 \in A^\circ$, 根据定义有

$$\exists u_i, x_0 \in U_i \subseteq A$$

即 $u_i \in \mathbf{U}$, 因而有:

$$x_0 \in u_i \subseteq \bigcup_{u \in \mathbf{U}} u$$

再证明: 只需要每个 $u_i \in \mathbf{U}$, 有 $u_i \subseteq A^\circ$ 对 $\forall x \in u_i$, 则

$$u_i \subseteq A \quad \text{则 } x_0 \in A^\circ$$

, 只需利用 De.morgan 律可得证

10. 对于 \mathbf{R}^n 上定义的实函数 $f(x)$, 令

$$w(f, x) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left(\sup_{|x' - x| < \delta} f(x') - \inf_{|x' - x| < \delta} f(x') \right)$$

证明 首先可知

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left(\sup_{|x' - x| < \delta} f(x') - \inf_{|x' - x| < \delta} f(x') \right) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{x', x'' \in N(x, \delta)} |f(x') - f(x'')|$$

根据上面可知:

$$\{x; \omega(f, x) < \epsilon\} = \{x; f(x) < \epsilon\} \quad \text{是闭集}$$

因此有: $\{x; \omega(f, x) \geq \epsilon\}$ 是闭集同时根据定义可知 $f(x)$ 的连续点集合为

$$\{x; \omega(f, x) = 0\}$$

因此有 F_σ 集

$$\{x; \omega(f, x) = 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x; \omega(f, x) \geq \frac{1}{n}\right\}$$

11. 于 $E \subset \mathbf{R}^n$ 及实数 a , 定义 $aE = \{(ax_1, ax_2, \dots, ax_n); (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n\}$. 证明当 E 为开集 aE 为开集, 当 E 为闭集时, aE 为闭集

证明 若 E 为开集, 则对于 $x \in E$, 我们有 $N(x, \delta) \subset E$ ($\exists \delta > 0$) 所以有 $N(ax, a\delta) \subset aE$, 因此 $ax \in aE$ 所以 aE 为开集. 证明闭集同理

: 12. 见《基础拓扑学讲义》第一章第二节定理 13. 证明: $f(P)$ 下半连续等价于对任意实数 $\alpha, \{P; f(P) \leq \alpha\}$ 都是 \mathbf{R}^n 中的闭集, 也等价于 $\{(p, y); P \in \mathbf{R}^n, f(P) \leq y\}$ 是 \mathbf{R}^{n+1} 中包含 E 的最小的闭集

证明 略.

14. 设 A, B 是 \mathbf{R}^n 中的有界闭集, $0 < \lambda < 1$, 证明:

$$\lambda A + (1-\lambda)B \stackrel{\text{def}}{=} \{x; x = (x_1, \dots, x_n), \text{有 } (y_1, \dots, y_n) \in A, (z_1, \dots, z_n) \in B, \text{使 } x_i = \lambda y_i + (1-\lambda)z_i, i = 1, \dots, n\}$$

证明 由于 A, B 有界, 那么不妨设 $\|A\| < M_1$ $\|B\| < M_2$ 从而有可数多个

$$\|\lambda A + (1-\lambda)Q\| \leq \lambda\|A\| + (1-\lambda)\|B\|$$

$$\lambda M_1 + (1-\lambda)M_2$$

所以 $\lambda A + (1-\lambda)B$ 有界并且由于 A, B 是闭集, 所以对于 $\lambda A + (1-\lambda)B$ 来说, 任取 A, B 的聚点为 a_0, b_0 , 则 $\lambda A + (1-\lambda)B$ 的聚点为 $\lambda a_0 + (1-\lambda)b_0$, 得证.

返例为 $A = \{(x, 0) \mid x \in \mathbf{R}^n\}, B = \{(0, 0)\}$

2.3 p 进位表数法

1. 证明由 $(0,1)$ 开区间中的实数 x 组成的实数序列的全体作为一个基数为 c 的集合, 进而证明任何实数组成的实数序列的全体所作成的集合的基数为 c

证明 利用二分法可得: 在 $(0,1)$ 开区间中的所有实数均唯一地表示为 $0.x_1x_2x_3\dots$ $x_i = 0$ 或 1 , 那么题中集合和 $(0,1)$ 存在单射, 则该集合基数为 c 进而利用对角线法

$$\begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

根据 Cantor 的作法, 可知任何实数组成的实数序列的全体所作成的集合的基数为 c

2. 证明区间 $[0,1]$ 上的全体连续函数所作成的全体集合 U 的基数为 c , 同样 $[0,1]$ 上的左连续的单调函数的全体所构成的集合 W 的基数 c

证明 考虑集合 $A_1 = \{x; f(x) \leq \frac{1}{2}\}$ 以及 $B_1 = \{x; f(x) > \frac{1}{2}\}$, 分别将符合集合 A_1 的连续函数记为 0.1 , 符合集合 B_1 的连续函数记为 0.0 , 重复以上操作记映射为 $I: f \mapsto 0.x_1x_2\dots$ $x_i = 0$ 或 1 . 所以只需证明若满足 $I(f_1) = I(f_2) = 0.x_1x_2\dots$ 当且仅当 $f_1 = f_2$ 可以断言上述一定成立, 若不然则有: f_1 有不连续点, 矛盾! 所以根据 Bernstein 定理可知: 区间 $[0,1]$ 上的全体连续函数所作成的全体集合 U 的基数为 c 同样的 $[0,1]$ 上的左连续的单调函数的全体所构成的集合 W 的基数 c

2.4 一维开集, 闭集, 完备集的构造

1. 证明全体有理数所构成的集合不是 G_δ 集, 即不能表成可数多个开集的交

证明 (反证法): 如果全体有理数可以表成可数多个开集的交即 $Q = \bigcap_{i=1}^{\infty} I_i$ 其中 I_i 是开集. 同时对于所有 $i \in I$ 来

说:

$$\exists \delta_0 > 0 \quad B(i, \delta_0) \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} I_i$$

可以根据有理数的稠密性可知: 上述一定不成立 (因为 \mathbb{R}^1 是不可数集合) 得证

2. 证明 $[0, 1]$ 上全体无理数所作成的集合不是 F_σ 集

证明 (反证法) 若 $[0, 1]$ 上全体无理数所作成的集合是 F_σ 集, 从而可知在 $[0, 1]$ 上的全体无理数所构成的集合为闭集, 矛盾

3. 证明不可能在 $[0, 1]$ 上有定义的, 在有理数点都连续, 在无理点处都不连续的实函数

证明 根据 2.10 可知: $f(x)$ 的全体不连续点作成一 F_σ 集, 由题 2 可知 $[0, 1]$ 上全体无理数所作成的集合不是 F_σ 集, 因此无法找到这样的实函数.

4. 证明 \mathbb{R}^1 中全体开集构成一基数为 c 的集合, 从而 \mathbb{R}^1 中全体闭集合也构成一基数为 c 的集合

证明 先证明: 全体开集 U 构成一个基数为 c 的集合

首先考虑任一有界开集, 根据定理可知: 它是由有限多个或者可数多个互不相交的开区间的并, 这些开区间的端点都不属于这个开集. 因此 $\overline{U} \geq c$ 其次因为 $\mathbb{R}^1 = \bigcup_{v \in \mathbb{R}^1} v$ 因此全体开集 $\overline{U} \leq c$ 根据 Bernstein 定理可知: $\overline{U} = c$

证明: 全体闭集 N 构成了一个基数为 c 的集合

证明原理同上.

5. 设 $F \subset \mathbb{R}^1$ 是非空有界完备集合, 证明, 存在 \mathbb{R}^1 上连续函数 f , 满足:

(1) $0 \leq f(x) \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^1$;

(2) $f(t_1) \leq f(t_2), \quad \forall t_1 \leq t_2$

(3) $\{f(t); t \in F\} = [0, 1]$

证明 因为 $F \subset \mathbb{R}^1$ 时有界完备集合, 所以 $F = \overline{F}$ 并且根据定理可知: F 是从一闭区间 $[a, b]$ 中去掉有限个或者可数多个彼此之间没有公共端点且与原来的闭区间也没有公共端点的开区间而成. 这些区间的端点都是属于 F 的. 因此: F 中得到了有限个 (易知命题成立, 不考虑) 或者可数多个 $[a_i, b_i]$ 从而得到连续函数 f 为

$$f(I) = a_i \frac{x - a_i}{b_i - a_i} \quad I = (a_i, b_i)$$

经过验证可知, 上述函数即为所求 (可能为错误解法!!!!)

2.5 点集间的距离

1. 证明定理 2: 设 E 是一点集, $d > 0$, U 是所以到 E 的距离小于 d 的点 P 作成的点集, 即

$$U = \{P; \rho(P, E) < d\}$$

则 U 是一开集, 且 $U \subset E$

证明 对于 U 中的任意元素 u_i , 则根据三角不等式可知:

$$\rho(u_i, u_j) - \rho(u_j, E) < \rho(u_i, E) \Leftrightarrow \rho(u_i, u_j) < 2d$$

因此记 $\delta = 2d \quad B(u_i, 2d) \subset U$ 因此 U 是一开集且 $U \subset E$

2. 证明任何闭集都可表成可数多个开集的交

证明 给出任意的闭集 A , 记 $G_n = \{x; \rho(x, A) < \frac{1}{n}\}$ 根据定理 2 可知: G_n 是一开集且 $G_n \supset A$ 只需证明:

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_n$$

因为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

所以

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_n$$

3. 举例说明定理 1 中的 A,B 都无界时结论不成立

证明 首先复习定理 1: 设 A,B 为两个非空闭集, 且其中至有一个有界, 则必有 $P \in A, Q \in B$ 使得

$$\rho(P, Q) = \rho(A, B)$$

举例说明当 A,B 无界时结论不成立. 例如: $A = \{(0, y)\} B = \{(\frac{1}{n}, 0)\}$

4. 取消定理 3 中 F_1, F_2 有界的限制

证明 事实上, 定理 3 中关于 F_1, F_2 的限制可以去除, 这是因为我们可以找到一个更加广泛的开集来规范闭集 (具体证明过程依据课堂教学)

5. 设 $E \subset \mathbb{R}^n, E \neq \emptyset, P \in \mathbb{R}^n$, 证明 $\rho(P, E)$ 是 P 的在 \mathbb{R}^n 上一致连续的函数

证明 $\rho(P, E) = \{E; \min_{p \in P} \rho(p, E)\}$ 所以对于 $\rho(p_1, p_2) \leq \delta$ 根据三角不等式可知:

$$\rho(P, E) \leq \rho(p_1, E) + \rho(p_1, p_2)$$

因此有

$$\rho(P, E) - \rho(p_1, p_2) \leq \delta = \epsilon$$

因此 $\rho(P, E)$ 是 P 在 \mathbb{R}^n 上的一致连续函数

6. 证明对于 \mathbb{R}^n 中任意两个不相交的非空闭集 F_1, F_2 都有 \mathbb{R}^n 上的连续函数 $f(P)$, 使得 $0 \leq f(P) \leq 1$ 且在 F_1 上 $f(P) = 0$, 在 F_2 上 $f(P) = 1$

证明 [Proof] 按照拓扑学中的道路连接定理证明方法, 证明略.

2.6 课后思考题

问题 2.1 课上思考题

$$P \text{ 是完备集} \Rightarrow \overline{P} = C \quad (2.1)$$

Sol. $\forall p_i \in P$, 同时因为 P 是完备集同时是 \mathbb{R}^1 的子集, 因此我们可知: 应存在一区间 $[\alpha, \beta] \subset P$, 同时 $\alpha, \beta \in P$. 由于 $P = P'$ 所以 p_i, α, β 的任意的任意邻域均包含 P 中的无穷点, 不妨令 $x_1 \in P$ 满足

$$\left\{ x_1; \min_{x \in P} ||x - \alpha| - |x - \beta|| \right\} \quad (2.2)$$

记 $\delta = \frac{1}{2^n} \quad n \rightarrow \infty$ 因此可以将区间 $[\alpha, \beta]$ 分成 3 段

$$[\alpha, x_1 - \delta], [x_1 - \delta, x_1 + \delta], [x_1 + \delta, \beta]$$

去掉 $x_1 - \delta, x_1 + \delta$ 将 $[\alpha, x_1 - \delta]$ 继续分为三段: 记 $x_2 \in P$ 满足

$$\left\{ x_2; \min_{x \in P} ||x - \alpha| - |x - x_1 + \delta|| \right\} \quad (2.3)$$

则 $[\alpha, x_1 - \delta]$ 分为三段

$$[\alpha, x_2 - \delta], [x_2 - \delta, x_2 + \delta], [x_2 + \delta, x_1 - \delta]$$

将 $x_2 - \delta, x_2 + \delta$ 去掉. 对 $[x_1 + \delta, \beta]$ 进行如上操作并不断进行如上操作, 直到得到一只有 $x \in P$ 组成的集合 A, 显然 $\overline{A} \geq c$ 根据 Bernstein 定理可得

$$\overline{\overline{P}} = c$$

第3章 测度理论

3.1 开集的体积

1. 对 \mathbb{R}^n 中点 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, 记 $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$, 设 G 是 \mathbb{R}^n 中开集, $x \in \mathbb{R}^n$. 令 $\tilde{G} = \{x + y; y \in G\}$, 那没 \tilde{G} 也是开集, 证明 $|G| = |\tilde{G}|$

证明 [Proof] 根据第二章第四节的定理可知:

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$$

其中 G_i 为不交的左闭右开的区间, 则令 $\tilde{G}_i = \{x + y; x \in G_i\}$ 同时因为 $|G_i| = |\tilde{G}_i|$ 所以

$$\begin{aligned} |\tilde{G}| &= \left| \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{G}_i \right| \\ &= \left| \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \right| \\ &= |G| \end{aligned}$$

得证.

2. 设 I 是 \mathbb{R}^2 中的一个开区间, G 是 I 绕点旋转 $\frac{\pi}{6}$ 后得到的集合, 那么 G 是 \mathbb{R}^2 中开集. 证明: $|G| = |I|$

证明 [Proof] 空

3. 设 G 是 \mathbb{R}^n 中开集, 令

$$\begin{aligned} m^*G &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|, I_i (i = 1, 2, 3, \dots) \text{是开区间, 且 } \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \subset G \right\} \\ m_*G &= \sup \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |F_j|, k \text{ 是正整数, } F_j (j = 1, 2, \dots, k) \text{是互不相交的含于 } G \text{ 的闭区间} \right\} \end{aligned}$$

证明: $m^*G = m, G = |G|$

证明 [Proof] 空

4. 设 G 是 \mathbb{R}^2 中开集, \tilde{G} 是 G 绕原点旋转 θ 后得到的集合易见 \tilde{G} 也是开集, 证明 $|G| = |\tilde{G}|$

证明 [Proof] 空

3.2 点集的外测度