SHANDONG UNIVERSITY

实变函数

课程总结

学院 数学

班级 22 应数

学号 10213

姓名

2024 年 3 月 17 日

目录

写在前面

本文主要记录吉林大学实变函数课程 (曹阳) 的笔记和课程总结. 吉林大学实变函数主要包括以下的内容:1. 集合论、2. 测度论、3. 可测函数、4. 勒贝格 (Lebesgue(下略) 积分和勒贝格测度、5.L^2 空间和 L^n 空间. 本课程有期中考试. 课程的主要难点在于对于测度理论的理解和对多种可测函数的了解.(复变函数惨剧不能在实变函数重演)

1 前置知识

在正式学习实变函数之前, 我们需要了解一些前置知识, 这些知识包括集合论以及它的附属内容.

1.1 集合论

在高中期间, 就给出了集合的定义即: 具有某种特定性质或同一关系的"事物"的总体,"事物"称为集合的元素. 当两个集合相等时, 我们一般认为是两个集合的元素完全相同若一个集合 A 包含于另一个集合 B, 则代表集合 A 中的元素在集合 B 中都存在. 我们称集合 A 为集合 B 的子集. 若集合 A 不包含于集合 B, 则称集合 A 不是集合 B 的子集. 我们称集合 A 为集合 B 的真子集. 我们用符号 $\subset$ 表示包含关系, 用符号 $\subseteq$ 表示包含关系或相等关系. 不含任何元素的集合称为虚无集或者空集, 记为 $\emptyset$

定理 1.1. *A=B 的充要条件是:A⊂B 且 B⊂A*

定理 1.2. *如果 $A \subset B, B \subset C$, 则 $A \subset C$*

定理 1.3. *对于任意集合 A,B,C, 有如下公式成立:*

- $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cup A^c = U, A \cap A^c = \emptyset$
- $A \cup U = U, A \cap U = A$

- $A \cup A = A, A \cap A = A$

定理 1.4.
- $A \cap B \subset A \subset A \cup B$
- 若 $A_\lambda \subset B_\lambda$ 则 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$, 特别的是若 $A_\lambda \subset C(\lambda \in \Lambda)$, 则 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subset C$
- 若 $A_\lambda \supset B_\lambda$ 则 $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \supset \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$, 特别的是若 $B_\lambda \supset C(\lambda \in \Lambda)$ 则 $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \supset C$
- $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda \cup B_\lambda) = \big(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\big)\bigcup\big(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\big)$
- $A\bigcap\big(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\big) = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}(A \cap B_\lambda)$

定理 1.5. 对于任意集合 A,B, 有如下公式成立:
- $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cup U = U, A \cap U = A$
- $A \cup A = A, A \cap A = A$

定义 1.6. 对于两个不同集合 A,B: 我们定义如下运算:

$$A - B := \{x; x \in A \text{且} x \notin B\}$$

我们称上述的运算为集合的差运算, 有时候也称为集合的减法运算.

定理 1.7. $A - B = A \cap B^c$

证明. $\Rightarrow$ 根据定义可知, 对于 $x \in (A - B)$ 来说:$x \in A$ 且 $x \in B^c$ 从而可知 $x \in A \cap B^c$
$\Leftarrow$ 反之依然. $\square$

定理 1.8. 给定一个集合 S,A 是 S 的子集
- $S^c = \emptyset; \emptyset^c = \emptyset$

- $A \cup A^c = S; A \cap A^c = \emptyset$
- $(A^c)^c = A$
- 若 $A \subset B$, 则 $A^c \supset B^c$

定义 1.9. *对于一个给定的集合 S, 若 $\mathscr{F}$ 是 S 的一族子集, 即 $\mathscr{F}$ 是以 S 的一些子集为元素的一个集合, 如果它满足如下条件:*
(1): $\emptyset \in \mathscr{F}$
(2): 若 $A \in \mathscr{F}$, 则 $A^c \in \mathscr{F}$
(3): 若 $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{F}$, 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{F}$
我们称这样的 $\mathscr{F}$ 为 S 的一个 σ-代数.

定理 1.10. *如果 $\mathscr{A}$ 是由 S 的子集构成的一个非空集合, 则存在唯一一个 S 的子集的 σ-域 $\mathscr{F}(\mathscr{A})$, 是 $\mathscr{A} \subset \mathscr{F}(\mathscr{A})$ 并且对于 S 的子集的的任何 σ-域 $\mathscr{F}$, 只要 $\mathscr{F} \subset \mathscr{A}$, 就有 $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}(\mathscr{F})$, 这也就是说在 S 的子集的包含 $\mathscr{A}$ 的 σ-域中有一个最小的 $\mathscr{F}(\mathscr{A})$. 这个 σ-域 $\mathscr{F}(\mathscr{A})$ 称为由 $\mathscr{A}$ 产生的 σ-域.*

对于一串给定的集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ 我们定义

$$x; \quad n, \ x \in A_n$$

为这串集合的上极限, 记为 $\limsup_n A_n$ 或者 $\overline{\lim_n} A_n$; 定义

$$x; \quad n, \ x \notin A_n$$

为这串集合的下极限, 记为 $\liminf_n A_n$ 或者 $\widetilde{\lim_n} A_n$. 如果集合列的上, 下极限均存在且相等, 那么它的上下极限统称为极限, 记为 $\lim_n A_n$.

定理 1.11. *对于一串给定的集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ 我们有如下结论:*

- $\limsup_n A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$
- $\liminf_n A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$

定理 1.12. *给定一个集合列 $A_1, A_2 \ldots A_n \ldots$, 我们有如下结论:*
(1): 如果集合列是 (单调) 递增的即 $A_n \subset A_{n+1}$ 则 $\lim_n A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_n$
(2): 如果集合列是 (单调) 递减的即 $A_n \supset A_{n+1}$ 则 $\lim_n A_n = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_n$

2 第一周

2.1 素扑集合论

在数学分析中, 我们初步了解了集合的定义、定理、应用. 这些似乎都是正确的. 但 1903 年英国数学家罗素提出了罗素悖论即讨论如下问题: 一个集合的集合是否是集合. 为了使得上述命题具有良定义, 罗素并未直接使用集合的集合而是运用了另一种等价命题.

例 2.1 (罗素悖论)**.** *假定一个集合* $\mathrm{W} \notin \mathrm{W}$, *那么不妨取如下集合*

$$\widetilde{W} = \{\mathrm{V} \subset \mathrm{W} | \mathrm{V} \notin \mathrm{V}\}$$

上述集合揭示了一个矛盾:

$$\mathrm{W} \in \mathrm{W}$$

罗素悖论让数学家猛然发现原有集合论出现了危机, 但是我们不对上述问题进一步讨论, 留作线上作业 (自行阅读文献https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Beginnings_of_set_theory/).
在素扑集合论中,Cantor 首次引用了势 (又称基数) 的概念.

定义 2.2. *对于集合 A 来说, 集合 A 的基数就是集合 A 中所有元素的个数, 记作* $\overline{\overline{A}}$

通常情况下, 对于两个集合 A,B: 如果 A 到 B 的映射是单射, 那么称 A 的基数小于 B 的基数. 如果 A 到 B 的映射既单又满, 那么称 A 和 B 是等势的 (一一对应). 紧接着,Cantor 通过观察发现 $[0,1]$ 和自然数集 $\mathbf{N}$ 之间基数不相等从而引发了对于无穷大是否是"真"无穷大的讨论. 下面系统地给出 $[0,1]$ 和自然数集 $\mathbf{N}$ 之间基数关系

定理 2.3. $[0,1]$ *的基数大于自然数集* $\mathbf{N}$ *即:*

$$\overline{\overline{([0,1])}} \succ \overline{\overline{\mathbf{N}}}$$

接下来我们使用两种方法进行证明:

三分法. 首先可知自然数集是可数集[1], 那么不妨取自然数集全体为 $x_0, x_1, x_2 \ldots x_n \ldots$. 考虑 $[0,1]$: 使用三分法 (如图1) 即

$$[0,1] = [0\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$$

假如我们只选取 $[\frac{2}{3}, 1]$, 那么自然数集中元素一定有不在 $[\frac{2}{3}, 1]$ 中的, 不断重复, 一定能得到如下结论: 存在一个集合 A, 不包含任何自然数集中的元素. 但是有根据闭区间套定理或者 Cantor 定理我们可知集合 A 非空. 得证. □

图 1: Cantor 三分集

虽然上面的证明方法很巧妙但是没有得到当时主流数学家的认可. 下面我们使用对角线法进行证明

对角线法. 首先我们可知 $[0,1]$ 中的元素均为如下形式 $0.x_0x_1x_2\ldots$, 其次通过数学分析中的操作可以将自然数集按照大小排列为矩阵形式即 $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots \\ n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$ 我们取上面矩阵的所有对角线元素来组成 $[0,1]$ 中的元素. 不断重复以上操作, 得证 $\square$

2.2 无穷大

对于无穷大来说: 我们需要牢记以下性质:

- 自然数集的基数和 $[0,1]$ 的基数不同, 换而言之它们是不同的无穷大
- 有无穷多个不同的无穷大
- 没有最大的无穷大

命题 2.4 (连续统假设). *不存在这样的集合, 它的基数位于自然数集的基数和 $[0,1]$ 的基数之间.*

需要说明的是连续统假设在现有的 ZFC 证明体系中无法被证明, 尽量不要使用, 使用需预先声明

2.3 Bernstein 定理

在素扑集合论中, 我们要证明两个集合是等势的, 要构造出这两个集合之间的双射, 但是这步往往是困难重重. 这时候 Bernstein 定理就起了很大的作用.

定理 2.5 (Bernstein). *对于两个集合 A,B: 若 $\overline{\overline{A}} \succ \overline{\overline{B}}$ 且 $\overline{\overline{B}} \succ \overline{\overline{A}}$ 那么 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$*

[1]此性质见数学分析 (陈纪修)

Bernstein. 考虑集合 A,B 之间的映射关系, 取 φ 为 A 到 B 的单射,γ 为 B 到 A 的单射. 那么存在 B 中子集 B_0, 使得 φ 是 A 到 B_0 的一一对应. 同样的存在 A 中子集 A_0, 使得 γ 是 B 到 A_0 的一一对应 (如图2). 之后, 我们对剩余部分进行二分法处理从而有如下式:

$$\begin{aligned} C &= A - A_0 - \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \\ &= \gamma(B) - \gamma(B - B_0) - \gamma(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) \\ &= \gamma(B_0 - \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) \end{aligned}$$

因此我们能够得到上述定理 □

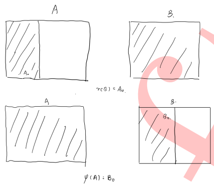

图 2:

或许有的人认为 Bernstein 定理是显然的, 但是实际上证明十分困难. 因为题目只给了两个条件: 两个单射.Bernstein 做法巧妙地避免的这种简陋的条件. 运用迭代和图像的思想来证明.

2.4 连续统基数 (势)

根据连续统假设, 我们把 $[0,1]$ 的基数称为连续统基数, 记为 $\aleph_0$(为了书写方便, 我们在实际使用当中常记为 c)

例 2.6. *一些常见的基数为 c 的集合:*

- *实数集 R*
- *任何一个非空开区间*
- *一些基数小于等于 c 的集合, 若他们当中有任意一个集合的基数为 c, 那么他们的并集*
- *n 维欧氏空间 R^n*

2.5 可数集合

首先, 先明晰一个概念: 可数集合就是可列集合. 为什么这么说呢:
首先, 可数集合的定义是: 凡是能够和全体正整数组成的集合 $\mathcal{Z}_+$ 对等的集合都称为可数集合. 再回顾一下可列集合的定义: 若一个集合能够和有理数集 $\mathcal{Q}$ 对等, 那么称这个集合为可列集合. 那么我们不难发现: 有理数集 $\mathcal{Q}$ 和全体正整数组成的集合 $\mathcal{Z}_+$ 是对等的, 因此可数集合和可列集合是等价的. 因此, 给出一个兼顾可数集合和可列集合的定义:

定义 2.7. *如果一个集合能够和全体正整数组成的集合 $\mathcal{Z}_+$ 对等, 那么称这个集合为可数集合. 我们把这个集合的基数称为可数基数, 记为 $\aleph_0$ 或者 c.*

需要指出的是可数基数是 $\aleph_0$ 事实上是不妥的, 因为连续统假设并没有被证明. 但是在实际使用中, 我们常常把可数基数称为 $\aleph_0$. 下面给出一些定理:

定理 2.8. *给定一个可列集合列 A_i:*
(1): 任何一个无穷集合都有可数子集
(2): 可数集合的自己如果不是有限集合, 则一定还是可数集合
(3): 若 A 可数,B 有限, 则 $A \cup B$ 可数
(4): 若 A,B 都是可数集合, 则 $A \cup B$ 可数
(5): 如果 $A_i(i = 1, 2, 3, \dots)$ 的每一个都是可数集合, 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 也是可数集合.
(6): 全体有理数构成一个可数集合.
(7): 如果 A 是一无穷集合,B 是一可数集合, 则 $A \cup B \sim A$

证明. (1): 给定一个无穷集合 A, 从 A 中取得一个元素记为 e_1, 那么同样的, 从 $A - \{e_1\}$ 我们取得第二个元素 e_2, 不断重复以上操作, 得到 A 的一个无穷可数子集

$$e_1, e_2, e_3, \dots e_n \dots$$

(2): 由 (1) 易知, 证明略.
(3): 若 A 可数, 那么它的元素可以按照一定次序排列即

$$a_1, a_2, \dots, a_n \dots$$

又因为 B 是有限集合, 那么 $A \cup B$ 中的元素可以按照如下次序排列

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n \dots$$

(4): 若 A,B 都是可数集合, 那么它们的元素可以按照一定次序排列即 $a_1, a_2, \dots, a_n \dots$ 和 $b_1, b_2, \dots, b_n \dots$ 那么 $A \cup B$ 中的元素可以按照如下次序排列:

$$a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \dots$$

(5): 如果 $A_i(i=1,2,\dots)$ 每一个都是可数集合, 作如下构造:
记 $A_1^*=A_1, A_i^*=A_i-(\bigcup\limits_{t=1}^{i-1}A_t)$ 所以我们能够得到如下事实:
A_i^* 都是可数的, 那么可以排列为如下形式

$$a_{i1},a_{i2},\dots,a_{in},\dots$$

因此对于

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i^*=\{a_{ij}|i=1,2\dots;j=1,2,dots\}$$

并且令 a_{ij} 为整数 2^i3^j, 由于正整数分解定理, 可知当 $i_1\neq i_2, j_1\neq j_2$ 时有 $2^{i_1}3^{j_1}\neq 2^{i_2}3^{j_2}$, 所以:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i^*\text{是可数集合}$$

(6): 考虑有理数的笛卡尔积 $\mathcal{Z}\times\mathcal{Z}$, 我们有:

$$f:\mathcal{Z}\times\mathcal{Z}\to Q \quad f(p,q)=\frac{p}{q}$$

根据上述可知, 有理数集是可数集合.
(7): □

定理 2.9. 有限多个可数集的乘积是可数集

证明. 设 $A_1,A_2,\dots,A_n$ 为可数集, 则

$$\prod_{i=1}^{n}A_i=\{x_{1j_1},x_{2j_2},\dots,x_{n,j_n}\} \quad x_{ij_i}\in A+$$

并且

$$f(\alpha)=\prod_{i=1}^{n}p_i^{j_i} \quad p_i\text{为不同的质数} \quad \alpha\in prod_{i=1}^{n}A_i$$

则 $f(\alpha)$ 为一一对应, 于是有限多个可数集的乘积是可数集 □

3 第二周

3.1 聚点, 内点, 边界点,Bolzano-Weirtdtrass 定理

先介绍基本的点集理论, 对于 $\mathbb{R}^n$ 来说, 指的是 n 个实数组成的数组称为 $\mathbb{R}^n$ 中的点, 给出 $\mathbb{R}^n$ 中的 $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$,$Y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ 之间的距离 $\rho(X,Y)$ 定义为

$$\rho(X,Y)=\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-y_i^2)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

定理 3.1. *存在如下不等式:*

$$\rho(X,Y)+\rho(Y,Z)>\rho(X,Z)$$
$$\rho(X,Y)-\rho(Y,Z)<\rho(X,Z)$$

记

$$N(X,\delta)=\{Y;\rho(X,Y)<\delta\}$$

称上述的运算为以 X 为原点,δ 为半径的邻域. 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的点集 M 来说, 如果 $\forall X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in M$ 均有 $|x_i|<K \quad i=1,2,3,\ldots,n$ 则称集合 M 是有界的.

3.2 聚点, 内点, 边界点

考虑 $X\in\mathbb{R}^n$ 和 $E\subset\mathbb{R}^n$ 之间的关系, 现在有三种可能:
1. 对于 $\exists\delta>0$ 都有: $N(X,\delta)\subset E$
2. 对于 $\forall\delta>0$ 都有: $N(X,\delta)\bigcap E\neq\emptyset$ 并且 $N(X,\delta)\bigcap E^c\neq\emptyset$
3. 对于 $\exists\delta>0$ 都有 $N(X,\delta)\subset E^c$
我么称 1 中所述的点为集合 E 的内点,2 中所述的点为集合 E 的边界点,3 中所述的点为集合 E 的外点.

定义 3.2. *设 $E\subset\mathbb{R}^n,P_0\in\mathbb{R}^n$, 如果对于任意的 $\delta>0$, 在以 P_0 为心, 以 δ 为半径的邻域 $N(P_0,\delta)$ 中恒有无穷多个点属于 E, 则我们称 P_0 是 E 的聚点.*

显而易见的, 所有内点均是聚点.E 的聚点不一定属于 E

定理 3.3. *$P_0\in E^{'}$ 的充分必要条件是 P_0 为 E 之一极限点, 即有一串互异的点 $P_n\in E$, 使得 $\rho(P_0,P_n)\to 0 \quad (n\to\infty)$*

证明. 充分性: 若 $\rho(P_0,P_n)\to 0 \quad (n\to\infty)$, 那么 $\forall\delta>0$,$\rho(P_n-P_o)<\delta$ 根据定义 $P_n\in E^{'}$
必要性: 若 $p_0\in E^{'}$ 从而 P_0 是 E 的聚点, 那么 $\forall\delta>0$, $N(P_0,\delta)$ 中恒有无穷多个点属于 E, 那么取 $\delta=\frac{1}{n}$, 从而得到一序列 $\{P_1,P_2,\ldots,P_n\}$ □

定理 3.4. *若 $A\subset B\subset\mathbb{R}^n$, 则 $A^{'}\subset B^{'}$*

定理 3.5. *若 $A\subset\mathbb{R}^n;B\subset\mathbb{R}^n$ 从而 $(A\cup B)^{'}\subset A^{'}\cup B^{'}$*

是 E 的边界点而不是 E 的聚点的点称为 E 的孤立点, 显然,E 中孤立点一定属于 E, 如果集合 E 的每一个点都是孤立点, 则称 E 为孤立集合

定理 3.6. *E 是孤立集合的充要条件为 $E\bigcap E^{'}=\emptyset$*

3.3 Bolzano–Weierstrass 定理

若 $A\subset R^n$ 是一有界无穷集, 那么 A 中至少有一个聚点, 即 $A^{'}\neq\emptyset$

画格法

考虑如下集合

$$\{(x,y);a_1<x<a_2,b_1<y<b_2\}$$

不失一般性从坐标系系统来看: 它是以原点为中心的长方形 (如图3) 以坐标轴为割线, 将该长方形分为四个小长方形, 取右上长方形, 重复操作, 我们可以根据 **Cantor** 闭区间套定理可知, 一定能取到 A 的聚点.

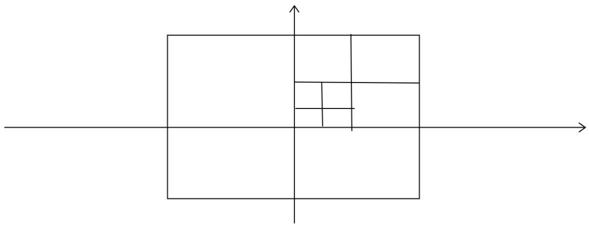

图 3: 画格长方形

笔记 3.7. 画格法在分析学中常常使用并且阿尔弗斯在它的教材中也常常使用.

定义 3.8. 设 $E\subset\mathbb{R}^n$, 称 E 的全体聚点所作成的点集为 E 的导集, 记为 E' 又 $\overline{E}=E\bigcup E'$

3.4 开集, 闭集与完备集

定理 3.9. 设 (x,τ), 那么闭集有性质:

1. $\emptyset, X$ 闭
2. 闭集任意交封闭
3. 闭集有限并封闭

笔记 3.10. 上述定义利用: 公式:

1. $(\bigcap A_\lambda)^c=\bigcup(A_\lambda^c)$
2. $(\bigcup A_\lambda)^c=\bigcap(A_\lambda^c)$

定义 3.11. 对于拓扑空间 x,τ,$a\subseteq X,\tau\in A$, 如果存在一个开集 U,$s.t$ $x\in U\subseteq A$, 则称 x 是 A 的一个内点, A 是 X 的一个邻域。A 的所有内点称为 A 的内部, 记作 A^o

推论 3.12. *1. 若 $A \subseteq B$，则 $A^o \subseteq B^o$*

2. A^o 是包含于 A 的最大的开集

3. A 是开集 $\iff A = A^o$

4. $(A \cap B)^o = A^o \cap B^o$

5. $(A \cup B)^o \supseteq A^o \cup B^o$

证明. 证明命题 1: 对于 $\forall x \in A^o$ 存在开集 u ,s.t $x \in u \subseteq A \subseteq B$, 则 $x \in\subset B^o$ 即 $A^o \subset b^o$
证明命题 2: 记 $\mathbf{U} = \{u,$ u 是开集$, u \subset A\}$, 命题等于证

$$\bigcup_{u \in \mathbf{U}} u = A^o$$

可以使用”两边夹“方法:
先证明: $\bigcup_{u \in \mathbf{U}} u \supseteq A^o$: 任取 $x_0 \in A^o$，根据定义有

$$\exists u_i, x_O \in U_i \subseteq A$$

即 $u_i \in \mathbf{U}$, 因而有:

$$x_0 \in u_i \subseteq \bigcup_{u \in \mathbf{U}} u$$

再证明: 只需要每个 $u_i \in \mathbf{U}$, 有 $u_i \subseteq A^o$ 对 $\forall x \in u_i$, 则

$$u_i \subseteq A \quad \text{则} x_0 \in A^o$$

证明命题 3: 命题 3 是命题 2 的推论，可以直接得到.
证明命题 4:1.$(A \cap B)^o \subseteq A^o \quad (A \cap B)^o \subseteq B^o$ 从而有

$$(A \cap B)^o \subseteq A^o \cap B^o$$

2.$A^o \cap B^o \subseteq A \cap B$ 和 $(A^o \cap B^o)^o \subseteq (A \cap B)^o$ 从而命题 4 得证证明命题 5: 方法同命题 4 类似，略. □

笔记 3.13 (命题四). *1. $(\bigcap_{k=1}^{n} A_k)^o = \bigcap_{k=1}^{n} {A_k}^o$*

2. $(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k)^o \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} {A_k}^o$

笔记 3.14. 何为最大性，它是最大的，比任何具有相同性质的都大。那么对于开集的最大性就有:
指任意包含于 A 的开集 ϖ 有

$$\varpi \subseteq A^o = \bigcup_{u \in \mathbf{U}} u$$

这是接触到的第一个新事物，在刚开始学习拓扑学中，应该一步步地严谨证明。

定义 3.15. (x,τ) $A \subseteq X$ $x \in X$ 如果 x 的任意邻域都包含 $A \setminus \{x\}$ 的点, 则称 x 是 A 的一个聚点,A 的聚点的全体组成的集合叫做 A 的导集 A', 记 A 的闭包为 $\overline{A} = A \cup A'$

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \in A\ x \in A' \Leftrightarrow x \quad A$$

定义 3.16 (边界点)**.** ∂,x 是 A 的边界点, 如果 x 的任一邻域, 既与 A 交非空，又与 A^c 交非空.

证明. $\partial A^c = A^o \cup (A^c)^o$ □

3.5 闭集

推论 3.17.

1. 若 $A \subseteq B$, 则 $\overline{A} \subseteq \overline{B}$
2. $\overline{A}$ 是包含 A 的最小的闭集。(等价于：所有包含 A 的闭集的交)
3. $A = \overline{A} \Longleftrightarrow A$ 是闭集
4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
5. $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

证明. 证明方法同开集性质证明方法. □

推论 3.18. (x,τ),$A \subseteq X$，则

$$\overline{A}^c = (A^c)^o \qquad A^{oc} = \overline{A^c}$$

证明. 由 $x \in \mathbb{C}$ 可知, 存在 x 的一个邻域 u 使得

$$u \in A^c \Longleftrightarrow x \in A^{co}$$

□

笔记 3.19. 上述的证明实际上没有难度，重要的是掌握这种方法，并熟练地运用和准确地写出这些过程

例题 3.20. $X = \{a, b, c\} \quad \tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$,$A = \{a\} \quad B = \{b\}$
那么

$$A^o = \{a\}, \overline{A} = X, A' = \{b, c\}, \partial A = \{b, c\}$$

例题 3.21 (Cantor 三分集)**.** 将闭区间 $[0, 1]$ 分成三份, 删去中间的开区间 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 留下两个闭区间

$$[\frac{2}{3}, 1], [0, \frac{1}{3}]$$

, 又把这两部分都分为三段, 删去中间的开区间, 即 $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}), (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, 如此作下去, 我们自然可知: 有些点是永远删不下去的. 我们将所有永远删不去的点所作成的集合 E 为 *Cantor* 集合,*Cantor* 三分集有如下的性质

1. E 是闭集
2. E 是自密的, 即 $E = E'$
3. $\overline{\overline{E}} = c$

4 p 进位表数法

定理 4.1 (二进制的等价性)**.** 设 $\mathscr{D}$ 代表所有由 $0, 1$ 两个数字重复排列而成的序列; 则 $\mathscr{D} \sim (0, 1)$

Proof . 如果我们将 $(0, 1)$ 中的任意 x 用二进制小数标出, 则确实每一个 x 都对应由 0,1 重复排列的序列. 但是这种对应不是一一对应的, 因为每一个形如 $\frac{m}{2^n}$ 的数都有两种表述法, 因此对应两个这样的序列. 现在我们约定只用第一种表示法, 于 $\forall x \in (0, 1)$ 就对应于唯一的一个由 0,1 重复排列的序列, 现在我们将对应于删去了的二进制表示法的那些序列以及序列 $0, 0, 0, \ldots$ 和 $1, 1, 1, \ldots$ 作成集合 T, 则 T 自然是可数的, 而 $\mathscr{D} - T$ 与 $(0, 1)$ 的对应已经是一一对应了, 所以

$$\mathscr{D} = (\mathscr{D} - T) \bigcup T \sim (0, 1) \bigcup N$$

因此:$\mathscr{D} \sim (0, 1)$ □

5 一维开集, 闭集, 完备集的构造

定理 5.1 ($\mathbb{R}^1$ 中有界开集构造原理)**.** *任何非空的有界开集都是有限多个或者是可数多个互不相交的开区间的并, 这些开区间的端点都不属于这个开集*

Proof . 设开集 $G \subset (-M, M)$, 对于 $\forall x \in G$, 因为 G 是开集, 所以有开区间 α, β, 使得 $x \in (\alpha, \beta) \subset G$. 利用片段 **Segement**

$$E_\alpha = \{x; x \notin F, x \leq \alpha\} \tag{1}$$

$$\tag{2}$$

显然 E_α 是非空的且以 α 为一上界, 记 E_α 的上确界为 $\alpha^{'}$ 则 $\alpha^{'} \leq \alpha$, 而且 $\alpha^{'} \notin G$, 因为若 $\alpha^{'} \in G$, 则 $\epsilon > 0$ 充分小时,$(\alpha^{'} - \epsilon, \alpha^{'} + \epsilon) \subseteq G$, 而且 $\alpha^{'}$ 是 E_α 的上确界, 所以应有 $y \in E_\alpha$, 使得 $\alpha^{'} \geq y > \alpha^{'} - \epsilon$, 由 E_α 定义,$y \notin G$ 与 $(\alpha^{'} - \epsilon, \alpha^{'} + \epsilon) \subset G$ 矛盾, 可见 $\alpha^{'} \notin G$ 必然成立, 但在 $(\alpha, \alpha^{'})$ 之上是不能有点属于 G 的, 故 $(\alpha^{'}, \beta^{'}) \subset G$ 类似地, 可以适当放到 β 或者 $\beta^{'}$, 使得 $(\alpha^{'}, \beta^{'}) \subset G$,$\alpha^{'}, \beta^{'} \notin G$, 这事实上是说将 α, β 尽可能地放大, 直到遇到不属于 G 的点为止, 如果以 I_x 表示这样得出来的包含 x 的开区间 $(\alpha^{'}, \beta^{'})$. 则显然, 对于不同的点 $x, x^{'} \in G$, 或者 $I_x = I_y$ 或者 $I_x \bigcap I_{x^{'}} = \emptyset$. 因此 $\{I_x\}_{x \in G}$ 中至多有可数个彼此互异的开区间. 设其为

$$I_1, I_2, I_3, \ldots$$

则显然 $G \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (m_i$ 有限或者 $\infty)$, 但另一方面 $G \subset I_x$ 恒成立, 故又有 $G \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_i$, 于是 $G = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_i (m_i$ 有限或者 $\infty)$ □

定理 5.2. *设 F 是一非空的有界闭集, 则 F 中必有一最大点 (最大数) 和一最小点 (最小数)*

定理 5.3. *设 F 是一非空的有界闭集, 则 F 是由一闭区间中去掉有限个或者可数多个互不相交的开区间而成的, 这些开区间的端点都还是属于 F 的*

上述定理中所述的各个区间, 通常称为 F 的 $|textbf$

定理 5.4. *非空的有界闭集 F 是完备集合的充要条件是:F 是从一闭区间 $[a, b]$ 中去掉有限个或者可数多个彼此没有公共端点且与原来的闭区间也没有公共端点的开区间而成, 这些区间的端点都是属于 F 的*

6 点集之间的距离

定理 6.1. *设 E 是一点集,$d > 0$,U 是所以到 E 的距离小于 d 的点点 P 作成的点集, 即*

$$U = \{P; \rho(P, E) < d\}$$

则 U 是一开集, 且 $U \supset E$

定理 6.2 (隔离性定理). 设 F_1, F_2 是两个非空有界闭集,$F_1 \bigcap F_2 = \emptyset$, 则有开集 G_1, G_2, 使 $G_1 \subset F_1$,$G_2 \subset F_2$,$G_1 \bigcap G_2 = \emptyset$

7 测度理论

我们的直觉告诉我们, 两个互不相交的集合的体积是可加的. 但是在 Real-A 中, 这样的幻象被打破了, 本章我们将介绍和直觉相悖的测度理论, 主要是专注于处理两个互不相交的集合体积无法可加的情况. 我们先介绍一种"完美"解决集合"体积"的计算方法

定理 7.1 (示性函数). 记如下函数

$$\varphi_A = \begin{cases} 1, & 当 x \in A \\ 0, & 当 x \notin A \end{cases} \tag{3}$$

上述函数的含义是: 检测这个点是否属于集合 A, 若属于则记为 1, 若不属于则记为 0 从而一个集合的"体积"指的是在当前标签集合内该集合的示性函数的积分

8 开集的体积

定理 8.1. 对于任何拓扑, 都存在如下集合 G, 满足:

- $G_i \subset G$ 若 $G_1 \bigcap G_2 = \emptyset$, 则上述集合可加
- 平移可加性
- 旋转可加性