21. Двумерные случайные величины

Определение 21.1. *n **-мерным случайным вектором** или n- **мерной случайной величиной** называется набор $\xi = (\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_n)$ случайных величин, заданных на одном и том же вероятностном пространстве (Ω, A, P).*

Фактически случайный вектор ξ есть отображение $\xi : \Omega \to R^n$

21.1. Двумерные дискретные случайные величины

Определение 21.2. *Законом распределения дискретной двумерной случайной величины называют набор всевозможных значений этой случайной величины, т.е. пар чисел $(x_i; y_j)$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, и их вероятностей $p_{ij} = P(\xi = x_i; \eta = y_j)$.*

Закон распределения для двумерной дискретные случайной величины задаётся в виде таблицы 21.1 в которой указывают все значения x_i, y_j и вероятности p_{ij}.

Таблица 21.1

$\xi \backslash \eta$	y_1	$\ldots$	y_j	$\ldots$	y_m
x_1	p_{11}	$\ldots$	p_{1j}	$\ldots$	p_{1m}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	$\ldots$	p_{ij}	$\ldots$	p_{im}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	$\ldots$	p_{nj}	$\ldots$	p_{nm}

Далее в эту таблицу добавляют одну строку и один столбец.

Зная двумерный закон распределения, можно найти закон распределения каждой составляющей (но не наоборот).

$$\begin{gathered} P(\xi = x_i) = P(\xi = x_i, \eta = y_1) + P(\xi = x_i, \eta = y_2) + \ldots \\ \ldots + P(\xi = x_i, \eta = y_m) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = p_{i*}. \end{gathered} \tag{21.1}$$

Аналогично

$$\begin{gathered} P(\eta = y_j) = P(\xi = x_1, \eta = y_j) + P(\xi = x_2, \eta = y_j) + \ldots \\ \ldots + P(\xi = x_n, \eta = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = p_{*j}. \end{gathered} \tag{21.2}$$

Таблица 21.2

Распределение двумерной дискретной случайной величины						
$\xi \backslash \eta$	y_1	$\dots$	y_j	$\dots$	y_m	$P(\xi = x_i)$
x_1	p_{11}	$\dots$	p_{1j}	$\dots$	p_{1m}	$p_{1\,*}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	$\dots$	p_{ij}	$\dots$	p_{im}	$p_{i\,*}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	$\dots$	p_{nj}	$\dots$	p_{nm}	$p_{n\,*}$
$P(\eta = y_j)$	$p_{*\,1}$	$\dots$	$p_{*\,j}$	$\dots$	$p_{*\,m}$	1

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_{i\,*}, \qquad M(\eta) = \sum_{j=1}^{m} y_j p_{*\,j}. \tag{21.3}$$

Определение 21.3. *Точка с координатами $\big(M(\xi); M(\eta)\big)$ называется центром распределения.*

Условные вероятности

$$P(\eta = y_j/\xi = x_i) = \frac{P(\xi = x_i, \eta = y_j)}{P(\xi = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\,*}}. \tag{21.4}$$

$$P(\xi = x_i/\eta = y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{*\,j}}. \tag{21.5}$$

Вероятности $P(\eta = y_j/\xi = x_i)$ для $j = 1, \dots, m$ образуют условное распределение случайной величины η при фиксированном значении ξ. В частности, можно найти условное математическое ожидание η при фиксированном значении ξ:

$$M(\eta/\xi = x_i) = \sum_{j=1}^{m} y_j P(\eta = y_j/\xi = x_i) \quad \text{для} \quad i = 1, \dots, n \tag{21.6}$$

и условное математическое ожидание ξ при фиксированном значении η:

$$M(\xi/\eta = y_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(\xi = x_i/\eta = y_j) \quad \text{для} \quad j = 1, \dots, m. \tag{21.7}$$

Для независимых дискретных случайных величин ξ и η

$$P(\eta = y_j/\xi = x_i) = P(\eta = y_j) \quad \text{и} \quad P(\xi = x_i/\eta = y_j) = P(\xi = x_i).$$

$$P(\eta = y_j/\xi = x_i) = \frac{p_{ij}}{p_{i\,*}} = \frac{p_{i\,*} \cdot p_{*\,j}}{p_{i\,*}} = p_{*\,j}\ .$$

$$P(\xi = x_i/\eta = y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{*\,j}} = \frac{p_{i\cdot} \cdot p_{*\,j}}{p_{*\,j}} = p_{i\,*}\ .$$

Определение 21.4. *Корреляционным моментом* $K_{\xi\eta}$ *случайных величин* ξ *и* η *называют:*

$$K_{\xi\eta} = M\left(\big(\xi - M(\xi)\big)\big(\eta - M(\eta)\big)\right).$$

$$K_{\xi\eta} = M(\xi \cdot \eta) - M(\xi) \cdot M(\eta). \tag{21.8}$$

Вычисление корреляционного момента по формуле (21.8) для дискретных случайных величин сводится к вычислению суммы:

$$K_{\xi\eta} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} p_{ij} x_i y_j - M(\xi) \cdot M(\eta),$$

а для непрерывных — интеграла:

$$K_{\xi\eta} = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} xyf(x;\, y)dxdy - M(\xi) \cdot M(\eta).$$

Теорема 21.1. *Для независимых случайных величин корреляционный момент равен нулю.*

Пример 21.1. *Задана дискретная двумерная случайная величина* (ξ, η)*:*

$\xi\backslash\eta$	*4*	*7*	*8*
3	*0,1*	*0,2*	*0,1*
5	*0,3*	*0,1*	*0,2*

Найти законы распределения составляющих ξ *и* η*, безусловное и условное математическое ожидание* ξ *при условии* $\eta = 7$*, а также безусловное и условное математическое ожидание* η *при* $\xi = 5$*. Найти корреляционный момент* $K_{\xi\eta}$*.*

◀ Сложив вероятности по строкам, получим закон распределения составляющей ξ:

ξ	3	5
p	0,4	0,6

Если сложим вероятности по столбцам, то придем к закону распределения составляющей η:

η	4	7	8
p	0,4	0,3	0,3

С помощью последних таблиц легко найдем безусловные математические ожидания:

$$M(\xi) = 3 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}6 = \mathbf{4{,}2},$$

$$M(\eta) = 4 \cdot 0{,}4 + 7 \cdot 0{,}3 + 8 \cdot 0{,}3 = \mathbf{6{,}1}.$$

Вероятность $P(\eta = 7) = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3$. Согласно (21.5), $P\left(\xi = x_i/\zeta = y_j\right) = \dfrac{p_{ij}}{p_{*j}}$, условные вероятности

$$P(\xi = 3/\eta = 7) = 0{,}2/0{,}3 = \mathbf{2/3},$$

$$P(\xi = 5/\eta = 7) = 0{,}1/0{,}3 = \mathbf{1/3}.$$

Условный закон распределения $\xi/\eta = 7$ примет вид:

$\xi/\eta = 7$	3	5
$P(\xi = x_i/\eta = 7)$	2/3	1/3

Соответствующее условное математическое ожидание

$$M(\xi/\eta = 7) = 3 \cdot 2/3 + 5 \cdot 1/3 = \mathbf{11/3}.$$

Вероятность $P(\xi = 5) = 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}6$. Далее по формуле (21.4) вычисляем условные вероятности

$$P(\eta = 4/\xi = 5) = 0{,}3/0{,}6 = \mathbf{1/2},$$

$$P(\eta = 7/\xi = 5) = 0{,}1/0{,}6 = \mathbf{1/6},$$

$$P(\eta = 8/\xi = 5) = 0{,}2/0{,}6 = \mathbf{1/3}.$$

По условному закону распределения $\eta/\xi = 5$

$\eta/\xi=5$	4	7	8
$P(\eta=y_j/\xi=5)$	1/2	1/6	1/3

найдем условное математическое ожидание

$M(\eta/\xi=5)=4\cdot 1/2+7\cdot 1/6+8\cdot 1/3=\mathbf{35/6}$.

Умножая значения x_i на y_j компонентов случайного вектора $(\xi;\eta)$ и в качестве вероятностей принимая значения p_{ij} из закона распределения, получим закон распределения одномерной случайной величины $\xi\eta$:

$\xi\eta$	12	20	21	24	35	40
P	0,1	0,3	0,2	0,1	0,1	0,2

$M(\xi\eta)=12\cdot 0{,}1+20\cdot 0{,}3+21\cdot 0{,}2+24\cdot 0{,}1+35\cdot 0{,}1+40\cdot 0{,}2=\mathbf{25{,}3}$.

Применяя формулу (21.8), найдём корреляционный момент

$K_{\xi\eta}=M(\xi\cdot\eta)-M(\xi)\cdot M(\eta)=25{,}3-4{,}2\cdot 6.1=-0{,}32$. ►

Пример 21.2. *Дано распределение двумерного случайного вектора $(\xi;\eta)$ с дискретными компонентами.*

$\xi\backslash\eta$	-1	0	2
-1	0,1	0,1	0,2
2	0,05	0,1	0,05
3	0,1	0,2	0,1

Найти корреляционный момент $K(\xi\eta)$.

◄ Выпишем отдельно ряды распределения случайных величин ξ, η и $\xi\eta$.

ξ	-1	2	3
p	0,4	0,2	0,4

η	-1	0	2
p	0,25	0,4	0,35

$\xi\eta$	-3	-2	0	1	4	6
p	0,1	0,25	0,4	0,1	0,05	0,1

Найдём математические ожидания $M(\xi)$, $M(\eta)$ и $M(\xi\eta)$.

$M(\xi)=-1\cdot 0{,}4+2\cdot 0{,}2+3\cdot 0{,}4=1{,}2$.

$M(\eta)=-1\cdot 0{,}25+0+2\cdot 0{,}35=0{,}45$.

$M(\xi\eta)=-3\cdot 0{,}1-2\cdot 0{,}25+0{,}1+4\cdot 0{,}05+6\cdot 0{,}1=0{,}1$.

Применяя формулу (21.8) найдём корреляционный момент

$K_{\xi\eta}=M(\xi\cdot\eta)-M(\xi)\cdot M(\eta)=0{,}1+1{,}2\cdot 0{,}45=\mathbf{0{,}64}$. ►

Ответ: $\boxed{K_{\xi\eta}=0{,}64.}$

Пример 21.3. *Дано распределение двумерного случайного вектора $(\xi;\eta)$ с дискретными компонентами.*

$\xi\backslash\eta$	*1*	*2*	*4*
3	*0,1*	*0,1*	*0,2*
5	*0,15*	*0,15*	*0,3*

Требуется:

1) Найти одномерные распределения случайных величин ξ, η и $\xi\eta$, их математические ожидания $M(\xi)$, $M(\eta)$ и $M(\xi\eta)$ и дисперсии $D(\xi)$, $D(\eta)$ и $D(\xi\eta)$. Вычислить непосредственно их корреляционный момент $K(\xi\eta)$.

2) Доказать независимость случайных величин ξ и η.

◀ Выпишем расширенную таблицу для заданного закона распределения двумерной случайной величины $\xi,\eta)$.

$\xi\backslash\eta$	1	2	4	$P(\xi = x_i)$
3	0,1	0,1	0,2	0,4
5	0,15	0,15	0,3	0,6
$P(\eta = y_j)$	0,25	0,25	0,5	1

Выпишем отдельно ряды распределения случайных величин ξ, η и $\xi\eta$.

ξ	3	5
P	0,4	0,6

η	1	2	4
P	0,25	0,25	0,5

$\xi\eta$	3	5	6	10	12	20
P	0,1	0,15	0,1	0,15	0,2	0,3

Найдём математические ожидания $M(\xi)$, $M(\eta)$ и $M(\xi\eta)$.

$M(\xi) = 3 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}6 = \mathbf{4{,}2}$.

$M(\eta) = 1 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}25 + 4 \cdot 0{,}5 = \mathbf{2{,}75}$.

$M(\xi\eta) = 3 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}15 + 6 \cdot 0{,}1 + 10 \cdot 0{,}15 + 12 \cdot 0{,}2 + 20 \cdot 0{,}3 = \mathbf{11{,}55}$.

Найдём дисперсии $D(\xi)$, $D(\eta)$ и $D(\xi\eta)$.

$D(\xi) = 3^2 \cdot 0{,}4 + 5^2 \cdot 0{,}6 - 4{,}2^2 = \mathbf{0{,}96}$.

$D(\eta) = 1^2 \cdot 0{,}25 + 2^2 \cdot 0{,}25 + 4^2 \cdot 0{,}5 - 2{,}75^2 = \mathbf{1{,}6875}$.

$D(\xi\eta) = 3^2 \cdot 0{,}1 + 5^2 \cdot 0{,}15 + 6^2 \cdot 0{,}1 + 10^2 \cdot 0{,}15 + 12^2 \cdot 0{,}2 + 20^2 \cdot 0{,}3 - M^2(\xi\eta) = \mathbf{38{,}6475}$.

Найдём корреляционный момент

$K_{\xi\eta} = M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta) = 11{,}55 - 4{,}2 \cdot 2{,}75 = \mathbf{0}$.

2) Для доказательства независимости случайных величин ξ и η проверим выполнение условий:

$P(\xi = x_i, \eta = y_j) = P(\xi = x_i) \cdot P(\eta = y_j), i = 1, 2; j = 1, 2, 3.$

$P(\xi = x_1) \cdot P(\eta = y_1) = 0{,}25 \cdot 0{,}4 = 0{,}1.$
$P(\xi = x_1) \cdot P(\eta = y_2) = 0{,}25 \cdot 0{,}6 = 0{,}15.$
$P(\xi = x_2) \cdot P(\eta = y_1) = 0{,}25 \cdot 0{,}4 = 0{,}1.$
$P(\xi = x_2) \cdot P(\eta = y_2) = 0{,}25 \cdot 0{,}6 = 0{,}15.$
$P(\xi = x_3) \cdot P(\eta = y_1) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}2.$
$P(\xi = x_3) \cdot P(\eta = y_2) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}3.$

Все условия выполняются, следовательно случайные величины ξ и η независимы.

Ответ: $\boxed{\begin{array}{l} M(\xi) = 4{,}2;\; M(\eta) = 2{,}75;\; M(\xi\eta) = 11{,}55; \\ D(\xi) = 0{,}96;\; D(\eta) = 1{,}6875; D(\xi\eta) = 38{,}6475;\; K_{\xi\eta} = 0; \\ \xi \text{ и } \eta \text{ независимы}. \end{array}}$ ►

Пример 21.4. *Задана дискретная случайная величина $\Theta = 10\xi - 3\eta$, где ξ и η — дискретные случайные величины из примера 21.3. Вычислить математическое ожидание $M(\Theta)$ и дисперсию $D(\Theta)$ случайной величины Θ двумя способами: на основании свойств математического ожидания и дисперсии и используя ряд распределения этой случайной величины.*

◄ Используем два свойства математическое ожидания $M(C\xi) = CM(\xi)$ и $M(\xi + \eta) = M(\xi) + M(\eta)$.

$M(\Theta) = 10 \cdot M(\xi) - 3 \cdot M(\eta) = 10 \cdot 4{,}2 - 3 \cdot 2{,}75 = \mathbf{33{,}75}$.

Найдём теперь первым способом дисперсию $D(\Theta)$. Используем два свойства дисперсии ожидания $D(C\xi) = C^2 D(\xi)$ и для независимых случайных величин $D(\xi + \eta) = D(\xi) + D(\eta)$.

$D(\Theta) = 10^2 \cdot D(\xi) + (-3)^2 \cdot D(\eta) = 100 \cdot 0{,}96 + 9 \cdot 1{,}6875 = \mathbf{111{,}1875}$.

Запишем ряды распределения случайных величин $10 \cdot M(\xi)$ и $-3 \cdot M(\eta)$:

10ξ	30	50
P	0,4	0,6

-3η	-12	-6	-3
P	0,5	0,25	0,25

Получаем ряд распределения случайной величины $\Theta = 10\xi - 3\eta$:

Θ	18	24	27	38	44	47
P	$0{,}4 \cdot 0{,}5$	$0{,}4 \cdot 0{,}25$	$0{,}4 \cdot 0{,}25$	$0{,}6 \cdot 0{,}5$	$0{,}6 \cdot 0{,}25$	$0{,}6 \cdot 0{,}25$

Θ	18	24	27	38	44	47
P	0,2	0,1	0,1	0,3	0,15	0,15

Находим $M(\Theta)$:
$M(\Theta) = 18 \cdot 0{,}2 + 24 \cdot 0{,}1 + 27 \cdot 0{,}1 + 38 \cdot 0{,}3 + 44 \cdot 0{,}15 + 47 \cdot 0{,}15 = \mathbf{33{,}75}$

и $D(\Theta)$:
$D(\Theta) = 18^2 \cdot 0{,}2 + 24^2 \cdot 0{,}1 + 27^2 \cdot 0{,}1 + 38^2 \cdot 0{,}3 + 44^2 \cdot 0{,}15 + 47^2 \cdot 0{,}15 - 33{,}75^2 =$
$= \mathbf{111{,}1875}$.

Так как случайные величины ξ и η независимы, оба способа дали один и то же результат. ►

Ответ: $\boxed{M(\Theta) = 33{,}75;\ D(\Theta) = 111{,}1875.}$