30. Сравнение двух дисперсий (критерий Фишера)

Пример 30.1. *По двум независимым выборкам из нормальных генеральных совокупностей, объёмы которых равны* $n_1 = 12$ *и* $n_2 = 15$, *найдены исправленные выборочные дисперсии* $S_1^{*^2} = 10$, $S_2^{*^2} = 5{,}5$. *С уровнем значимости* $\alpha = 0{,}05$ *проверить нулевую гипотезу о равенстве дисперсий* $H_0 : \ \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ *при конкурирующей гипотезе* $H_1 : \ \sigma_1^2 > \sigma_2^2$.

◀ В качестве критерия проверки гипотезы примем отношение большей исправленной дисперсии к меньшей:

$$F = \frac{S_1^{*^2}}{S_2^{*^2}}.$$

Известно, что при условии справедливости нулевой гипотезы, величина F имеет распределение Фишера–Снедекора со степенями свободы $k_1 = n_1 - 1$, $k_2 = n_2 - 1$. Решающее правило зависит от конкурирующей гипотезы. В данном примере $k_1 = 12 - 1 = 11$, $k_2 = 15 - 1 = 14$, $F_{\text{набл}} = \frac{S_1^{*^2}}{S_2^{*^2}} = \mathbf{1{,}82}$. По таблице критические точки распределения F Фишера-Снедокера (Приложение 5) находим $F_{\text{кр}} = \mathbf{2{,}56}$.

В Excel это значение можно найти командой =FРАСПОБР(0,05;11;14).

Так как $F_{\text{набл}} < F_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве дисперсий. ▶

Ответ: **Нулевая гипотеза принимается.**

30.1. Критерии согласия

Пример 30.2. *Произведено* $n = 100$ *измерений некоторой случайной величины. Вся совокупность элементов выборки разбита на 9 интервалов* $(a_i; a_{i+1}), i = 1, 2, \ldots, 9$. *В итоге получен следующий статистический ряд.*

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_i	69,2	69,8	70,4	71,0	71,6	72,2	72,8	73,4	74,0
a_{i+1}	69,8	70,4	71,0	71,6	72,2	72,8	73,4	74,0	74,6
m_j	1	4	11	21	27	22	10	3	1

Определить закон распределения данной случайной величины ξ.

◄ Как видим из таблицы, длина интервала $\Delta a_j = 0{,}6$. Для выдвижения гипотезы о виде распределения на рис. 61 построим гистограмму данного вариационного ряда.

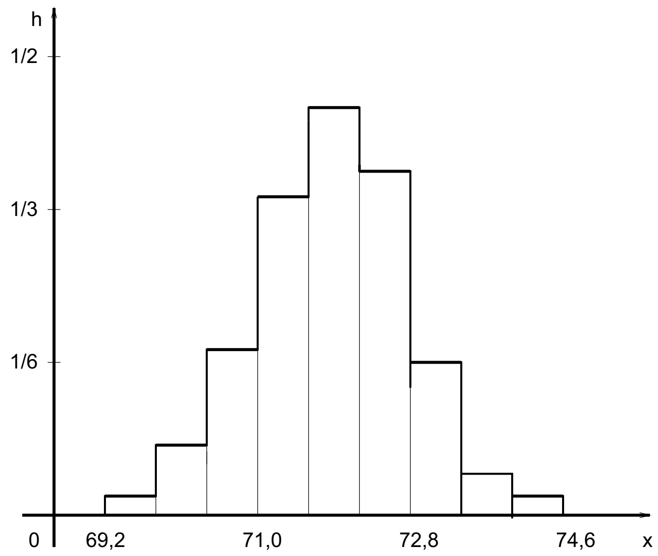

Рисунок 61. *Гистограмма примера 30.2*

Поскольку распределение симметрично и имеет максимум в середине, то можно выдвинуть нулевую гипотезу H_0 о том, что изучаемая величина подчиняется нормальному закону. Вследствие этого нужно сделать оценки для каждого из неизвестных параметров нормального распределения.

Для расчётов возьмём середины интервалов $u_j = (x_{j-1} + x_j)/2$, $j = 1, 2, ..., s$, где s — число интервалов. Тогда выборочное среднее и дисперсия определятся по формулам:

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{s} m_i u_i / n, \qquad S^2 = \sum_{i=1}^{s} m_i u_i^2 / n - \overline{x}^2.$$

Исправленная дисперсия $S^{*2} = nS^2/(n-1)$. В результате вычислений получим: $\overline{x} = 71,876$, $S^* = 0{,}8982$.

Вероятность попадания случайной величины ξ в определённый интервал (x_{j-1}, x_j) можно найти с помощью функции распределения, как это указано в лекции, или для нормальной случайной величины по формуле

$$P_j = P(x_{j-1} < \xi < x_j) = \Phi\left(\frac{x_j - \bar{x}}{S^*}\right) - \Phi\left(\frac{x_{j-1} - \overline{x}}{S^*}\right).$$

Здесь значения функции Лапласа можно найти по таблицам. Тогда теоретические частоты определятся как $m_j = P_j \cdot n$. В итоге вместо эмпирических частот получим следующие приближённые значения теоретических частот m_i':

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m_j'	0,8961	3,9749	11,4545	21,4611	26,1543	20,7354	10,6927	3,5848	0,7808

После этого последовательно находим $m_i - m_i'$, $(m_i - m_i')^2$, и $(m_i - m_i)^2/m_i'$, а затем сумму последних значений.

Далее применяем критерий Пирсона

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{j=1}^{S} \frac{(m_j - m_j')^2}{m_j'}. \tag{30.1}$$

Определяем число степеней свободы k случайной величины χ^2:

$$k = s - 1 - r, \tag{30.2}$$

где r — число параметров закона распределения (для нормального закона распределения $r = 2$), s — число интервалов.

Согласно (30.1), критерий $\chi^2_{\text{набл}} = \mathbf{0{,}349}$.

Учитывая, что здесь количество интервалов $s = 9$, определяем число степеней свободы k по формуле (30.2): $k = 9 - 1 - 2 = 6$. Зададимся уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$. Тогда с числом степеней свободы 6 по таблице критических точек распределения χ^2 (приложение 4) находим значение критерия

$$\chi^2_{\text{кр}}(\alpha, k) = \chi^2_{\text{кр}}(0{,}05; 6) = \mathbf{12{,}6}.$$

Так как $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении. Другими словами, расхождение эмпирических и теоретических частот незначимо. Следовательно, опытные данные согласуются с гипотезой о нормальном распределении изучаемой случайной величины ξ. ►

Ответ: $\boxed{\xi \text{ — нормальная случайная величина.}}$

Задания для самостоятельной работы

30.1. При испытании образцов алюминиевого сплава АМг5 В на растяжение были получены следующие значения относительного удлинения (в %):

Исходные данные задания 30.1									
17,2	18,7	15,0	18,4	19,7	18,1	18,5	16,8	14,8	19,3
14,4	15,3	16,4	18,0	15,6	19,2	20,1	17,8	16,0	16,5
19,7	19,5	15,5	16,1	16,8	18,8	16,6	18,7	17,1	15,9
18,4	18,3	20,8	19,5	17,7	15,8	18,2	19,1	16,7	20,0
16,9	18,1	16,4	16,7	16,2	18,8	19,6	19,6	17,7	17,1
15,6	16,9	17,8	18,0	20,4	15,1	18,7	18,2	17,1	16,6
15,4	19,6	18,7	16,9	15,8	18,6	19,9	17,0	18,2	18,0
15,7	17,2	17,3	17,2	17,4	19,0	18,9	17,5	16,3	16,4
17,9	18,4	16,3	18,9	20,5	18,4	16,5	16,9	17,2	18,5
17,5	19,4	16,5	17,0	19,5	17,3	17,6	18,6	17,5	20,5

Построить гистограмму относительных частот при длине интервала $h = 0,8$. Определить закон распределения данной случайной величины ξ. Принять уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

30.2. По выборке объёма $n = 30$ найден выборочный коэффициент корреляции $r^*_{xy} = 0{,}35$. При уровне значимости 0,1 проверить гипотезу о равенстве нулю теоретического коэффициента корреляции при конкурирующей гипотезе $r_{\xi\eta} \neq 0$.

30.3. По выборке объёма $n = 100$, извлеченной из двумерной нормальной генеральной совокупности, составлена корреляционная таблица:

Исходные данные задания 30.3					
$\xi\backslash\eta$	2	6	10	14	18
2	5	4	-	-	-
4	-	8	10	-	
8	-	-	30	12	-
16	-	2	10	13	6

30.4. Найти выборочный коэффициент корреляции и при уровне значимости 0,1 проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю теоретического коэффициента корреляции при конкурирующей гипотезе $r_{\xi\eta} \neq 0$.

Таблица 30.3

N варианта	n_1	n_2	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	σ_1^2	σ_2^2	α
1	13	17	51,4	55,0	4,38	1,29	0,01
2	12	16	81,66	85,00	29,96	12,97	0,05
3	11	15	35,40	30,30	9,84	3,90	0,01
4	10	14	25,65	23,55	2,08	0,98	0,05
5	9	13	4,40	4,00	0,0295	0,008	0,01
6	8	12	80,53	82,40	21,34	7,34	0,05
7	7	11	14,31	12,21	17,82	3,70	0,01
8	6	10	16,62	13,34	13,32	4,47	0,05
9	5	9	32,12	30,10	18,92	3,45	0,01
10	10	8	7,20	5,15	10,52	3,18	0,05
11	13	17	8,81	5,85	11,68	4,62	0,01
12	12	16	5,03	6,21	5,22	2,90	0,05
13	11	15	4,64	4,02	6,73	2,39	0,01
14	10	14	13,33	16,22	8,94	4,52	0,05
15	9	13	16,08	13,11	7,35	2,02	0,01
16	13	10	28,43	30,50	11,22	2,38	0,01
17	12	11	80,34	78,10	24,35	11,71	0,05
18	11	12	45,78	40,32	18,43	7,84	0,05
19	10	13	25,31	22,84	8,51	3,04	0,01
20	9	14	23,46	25,81	12,38	5,87	0,05
21	8	15	16,38	18,21	11,64	3,66	0,01
22	7	16	17,64	15,32	10,52	4,52	0,05
23	6	17	5,32	7,55	4,32	1,38	0,01
24	5	8	4,38	4,01	2,35	0,75	0,05
25	10	9	19,23	17,34	7,48	1,82	0,01
26	13	13	8,32	6,29	4,35	8,25	0,01
27	12	14	12,48	10,31	19,38	8,25	0,01
28	11	15	23,45	20,81	17,25	8,50	0,05
29	10	16	20,44	23,00	13,11	4,54	0,01
30	9	17	13,25	11,49	10,12	6,98	0,05

30.5. По выборке объёма $n = 100$ найден средний вес деталей $\overline{x} = 210$ г, изготовленных на первом станке; по выборке объёма $m = 90$ найден средний вес $\overline{y} = 208$ г деталей, изготовленных на втором станке. Генеральные дисперсии известны: $\sigma_1^2 = 80$, $\sigma_2^2 = 70$. Предполагается, что случайные величины ξ и η распределены нормально и выборки независимы. При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу $H_0 : M(\xi) = M(\eta)$ при конкурирующей гипотезе $M(\xi) \neq M(\eta)$.

30.6. В таблице 30.3 даны варианты заданий. Для каждого варианта приведены две независимые выборки объёмами n_1 и n_2, найдены выборочные средние $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$ и известны дисперсии σ_1^2, σ_2^2. Нужно проверить при заданном уровне значимости α равенство математических ожиданий при конкурирующей гипотезе об их неравенстве.

30.7. Задана выборка объёма $n = 120$ из нормальной совокупности с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 5$ и выборочной средней $\overline{x} = 23{,}54$. Необходимо при уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу $H_0 : a = a_0 = 23$ при конкурирующей гипотезе $H_1 : a \neq 23$.

30.8. Фирма рассылает рекламные каталоги торговым организациям. Вероятность того, что организация, получившая каталог, закажет рекламируемое изделие, равна 0,1. Фирма разослала 200 новых улучшенных каталогов и получила 30 заказов. Можно ли считать, что новые каталоги значимо лучше старых?

Указание. Принять нулевую гипотезу $H_0 : p = p_0 = 0{,}1$; конкурирующую — $H_1 : p > 0{,}1$; уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.