15. Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Определение 15.1. *Математическим ожиданием непрерывной случайной величины ξ с плотностью распределения $f(x)$ называется:*

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \tag{15.1}$$

Замечание 15.1. *Если $\eta = \varphi(\xi)$ — н.с.в. аргумента ξ, причём возможные значения ξ принадлежат всей оси Ox, то*

$$M(\varphi(\xi)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, f(x) dx, \tag{15.2}$$

где $f(x)$ —плотность распределения ξ.

$$M(\xi^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f(x) dx, \tag{15.3}$$

Определение дисперсии как математического ожидания квадрата отклонения полностью сохраняется для непрерывных случайных величин:

$$D(\xi) = M\big(\xi - M(\xi)\big)^2.$$

Вычисление дисперсии н.с.в. следует вести по следующей формуле:

$$D(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big(x - M(\xi)\big)^2 f(x) dx. \tag{15.4}$$

На практике проще применять формулу

$$D(\xi) = M\left(\xi^2\right) - M^2(\xi). \tag{15.5}$$

Определение 15.2. *Средним квадратическим отклонением случайной величины ξ называют квадратный корень из её дисперсии:*

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)}. \tag{15.6}$$

Все свойства математического ожидания и дисперсии, приведённые в предыдущей для ДСВ, сохраняются в этом случае.

Если $\eta = \varphi(\xi)$ — функция случайного аргумента ξ, причём возможные значения ξ принадлежат всей оси Ox, то

$$D(\varphi(\xi)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big(\varphi(x) - M(\varphi(x))\big)^2 f(x)dx, \tag{15.7}$$

или

$$D(\varphi(\xi)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) f(x)\,dx - M^2(\varphi(\xi)). \tag{15.8}$$

Пример 15.1. *Н.с.в. ξ задана плотностью распределения $f(x) = x/18$ в интервале $(0, 6)$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины ξ.*

◀ Поскольку плотность равна 0 вне $(0,\ 6)$, подставив $f(x) = x/18$, получим

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \frac{1}{18}\int\limits_{0}^{6} x^2 dx = \frac{1}{18}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^6 = \frac{216}{54} = 4.$$

Дисперсия

$$D(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - M^2(\xi)$$

или

$$D(\xi) = \frac{1}{18}\int\limits_0^6 x^3\,dx - 4^2 = \frac{1}{18}\cdot\frac{x^4}{4}\bigg|_0^6 - 16 = \frac{6^3}{3\cdot 4} - 16 = 18 - 16 = 2.$$

Осталось найти среднеквадратическое отклонение случайной величины ξ.

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{2}.$$

На рис. 12 представлена геометрическая иллюстрация математического ожидания и среднеквадратического отклонения случайной величины ξ.

Отметим, что значение $M(\xi)$ центр массы треугольника по оси Ox, а при помощи $\sigma(\xi)$ находится средний разброс случайной величины от её математического ожидания. ▶

Ответ: $\boxed{M(\xi) = 4,\ D(\xi) = 2,\ \sigma(\xi) = \sqrt{2}.}$

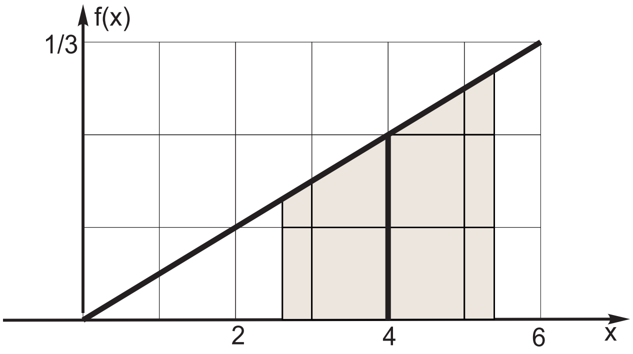

Рисунок 12. *Функция плотности примера 15.1*

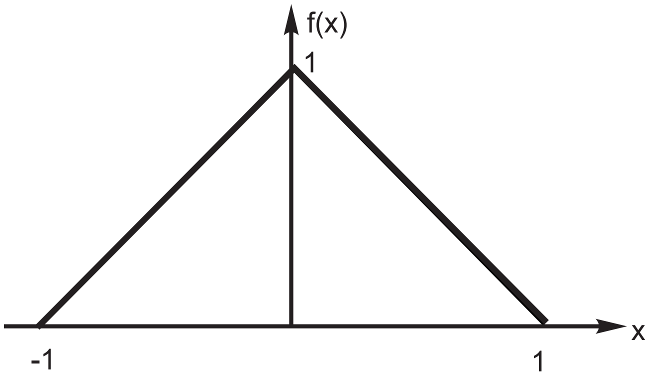

Рисунок 13. *График плотности распределения примера 15.2*

Пример 15.2. *График плотности вероятности н.с.в. ξ изображен на рисунке 13 (закон Симпсона). Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины ξ.*

◄ Из графика $f(x)$ видно, что плотность вероятности определяется уравнениями:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 \text{ при } x \in (-1,0), \\ -x+1 \text{ при } x \in (0,1), \\ 0 \text{ при } x \leqslant -1,\ x \geqslant 1. \end{cases}$$

Поскольку $f(x)$ задана на интервале $(-1,1)$ двумя аналитическими выражениями, то

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int\limits_{-1}^{0} x(x+1)dx + \int\limits_{0}^{1} x(-x+1)dx = \mathbf{0}.$$

Можно было без вычислений заметить, что $M(\xi) = 0$. Это следует из симметрии функции плотности относительно прямой $x = 0$.

Далее, учитывая, что $M(\xi) = 0$, найдем дисперсию

$$D(\xi) = \int\limits_{-1}^{0} x^2(x+1)dx + \int\limits_{0}^{1} x^2(-x+1)dx = \frac{1}{6} \approx \mathbf{0{,}167}.$$

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \approx \mathbf{0{,}408}. \blacktriangleright$$

Ответ: $\boxed{M(\xi) = 0,\ D(\xi) = 1/6 \approx 0{,}167,\ \sigma(\xi) \approx 0{,}408.}$

Пример 15.3. *Н.с.в. ξ задана плотностью распределения $f(x) = A\sin 2x$ в интервале $(0, \pi/2)$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание и дисперсию величины ξ.*

◀ Заданная функция может быть функцией плотностью, если она неотрицательна и площадь между графиком функции и осью абсцисс равна 1. Получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = A\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin 2xdx = -0{,}5A\cos 2x\Big|_0^{\pi/2} =$$
$$= -0{,}5A(\cos\pi - \cos 0) = A.$$

При $A = 1$ все требования к функции плотности выполняются.

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int\limits_{0}^{\pi/2} x\sin 2xdx = -0{,}5\int\limits_{0}^{\pi/2} xd\cos 2x =$$
$$= -0{,}5x\cos 2x\Big|_0^{\pi/2} + 0{,}5\int\limits_{0}^{\pi/2}\cos 2x\,dx =$$
$$= -0{,}5(\frac{\pi}{2}\cos\pi - 0\cos 0) + 0{,}25\sin 2x\Big|_0^{\pi/2} = \pi/4.$$

$$M(\xi^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx = \int\limits_{0}^{\pi/2} x^2\sin 2xdx = -0{,}5\int\limits_{0}^{\pi/2} x^2d\cos 2x =$$
$$= -0{,}5x^2\cos 2x\Big|_0^{\pi/2} + 0{,}5\int\limits_{0}^{\pi/2}\cos 2x\,dx^2 = \frac{\pi^2}{8} + \int\limits_{0}^{\pi/2} x\cos 2xdx =$$
$$= \frac{\pi^2}{8} + 0{,}5\int\limits_{0}^{\pi/2} xd\sin 2x = \frac{\pi^2}{8} + 0{,}5(x\sin 2x\Big|_0^{\pi/2} - \int\limits_{0}^{\pi/2}\sin 2xdx) =$$
$$= \frac{\pi^2}{8} + 0{,}25\cos 2x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}.$$

$$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.$$ ▶

Ответ: $\boxed{M(\xi) = \pi/4,\ D(\xi) = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.}$

Пример 15.4. *Плотность вероятности распределения Лапласа имеет вид:* $f(x) = \dfrac{\lambda}{2} \cdot e^{-\lambda|x|}$ $(\lambda > 0)$. *Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины* ξ.

◀ Математическое ожидание

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}dx = \frac{1}{2}\lambda\int\limits_{-\infty}^{0} xe^{\lambda x}dx + \frac{1}{2}\lambda\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-\lambda x}dx.$$

Проводя интегрирование по частям, получим $M(\xi) = 0$. Этот результат можно было получить сразу, поскольку подынтегральная функция нечётная.

Аналогично найдем дисперсию

$$D(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}dx = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \dfrac{\sqrt{2}}{\lambda}$.▶

Ответ: $\boxed{M(\xi) = 0,\ D(\xi) = 2/\lambda^2,\ \sigma(\xi) = \dfrac{\sqrt{2}}{\lambda}.}$

Пример 15.5. *Случайная величина эксцентриситета детали характеризуется функцией распределения Рэлея:*

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \text{ при } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$, *моду и медиану распределения.*

◀Плотность вероятности

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ \dfrac{x}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \text{ при } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Модой распределения $M_0(\xi)$ называется значение аргумента, при котором плотность вероятности достигает максимума. Здесь

$$f'(x) = \frac{1}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{\sigma^2}\right)$$

и так как $x \geqslant 0$, то $f'(x) = 0$ только при $x = \sigma$. Поскольку $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус при переходе через точку $x = \sigma$, то f в этой точке будет иметь максимум. Следовательно, мода $M_0(\xi) = \sigma$.

Медианой распределения $M_e(\xi)$ называют величину x, определяемую из равенства $F(x) = 1/2$. В данной задаче

$$1/2 = 1 - e^{-x^2/2\sigma^2}, \quad 1/2 = e^{-x^2/2\sigma^2}.$$

Отсюда найдем $x = \sigma\sqrt{2 \cdot \ln 2}$ или $M_e(\xi) = \sigma\sqrt{2 \cdot \ln 2}$. ►

Пример 15.6. *Дана функция распределения н.с.в. $F(x)$. Найти параметр A, плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание и дисперсию непрерывной случайной величины и вероятность её попадания в интервал $(1, 3)$. Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ A(x^2 + x), & x \in (0; 2], \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

◄ Функция распределения $F(x)$ определена и непрерывна для всех $x \in \mathbb{R}$. При $x = 2$ предел справа функции распределения равен 1, следовательно и предел слева также обязан выть равен 1. Получаем уравнение

$$A(2^2 + 2) = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{6}.$$

Следовательно,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{6}(x^2 + x), & x \in (0; 2], \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Найдём теперь функцию плотности

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{6}(2x + 1), & x \in (0; 2], \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Графики функции плотности и функции распределения представлены на рис. 14 и 15.

Найдём числовые характеристики случайной величины ξ.

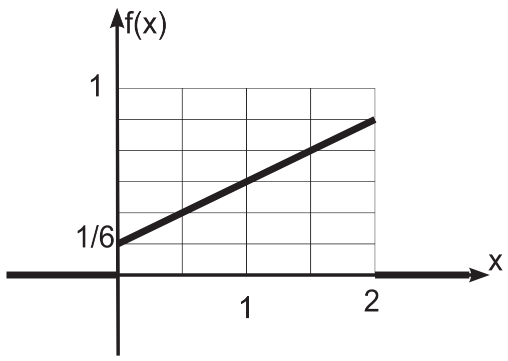

Рисунок 14. *Функция плотности примера 15.6*

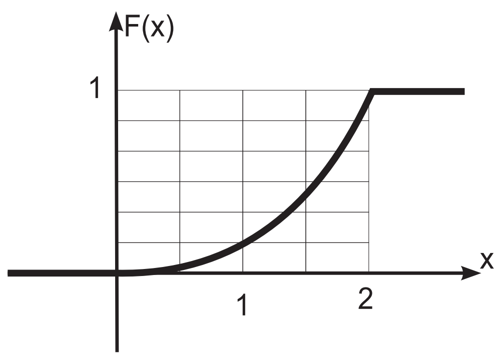

Рисунок 15. *Функция распределения примера 15.6*

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int\limits_0^2 \frac{1}{6}(2x^2 + x)dx = \\ = \frac{1}{6}\left(\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{6}\left(\frac{16}{3} + 2\right) = \frac{11}{9}.$$

$$M(\xi^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int\limits_0^2 \frac{1}{6}(2x^3 + x^2)dx = \frac{1}{6}\left(\frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \\ = \frac{1}{6}\left(8 + \frac{8}{3}\right) = \frac{16}{9}.$$

$$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \frac{16}{9} - \left(\frac{11}{9}\right)^2 = \frac{144 - 121}{81} = \frac{23}{81} \approx \mathbf{0{,}284}.$$

$$P(1 < \xi < 3) = F(3) - F(1) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$ ▶

Ответ: $\boxed{M(\xi) = \frac{11}{9},\ D(\xi) = \frac{23}{81} \approx 0{,}284,\ P(1 < \xi < 3) = \frac{2}{3}.}$

Задания для самостоятельной работы

15.1. Н.с.в. ξ задана плотностью распределения:
$f(x)=\begin{cases} A(1-x^2), \; x\in(-1;\,1], \\ 0, \; x\notin(-1;\,1]. \end{cases}$ Найдите среднее квадратическое отклонение н.с.в. ξ.

15.2. Задана плотность распределения н.с.в. ξ: $f(x)=\begin{cases} A(x-4)^2, & x\in(0;\,4), \\ 0, & x\notin(0;\,4). \end{cases}$
Найдите математическое ожидание случайной ξ.

15.3. Н.с.в. ξ задана функцией распределения:
$F(x)=\begin{cases} 0, \; x\leqslant -2, \\ A(x^3+8), \; x\in(-2;\,0], \\ 1, \; x>0. \end{cases}$ Найдите среднее квадратическое отклонение н.с.в. ξ.

15.4. Задана функция распределения н.с.в. $\xi: F(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant 0, \\ Ax^3, & x\in(0;\,3), \\ 1, & x\geqslant 3. \end{cases}$
Вычислить дисперсию случайной ξ .

15.5. Случайная величина ξ задана на всей оси Ox функцией распределения $F(x)=\dfrac{\pi+2\operatorname{arctg}(x)}{2\pi}$. Найти вероятность того, что в результате испытания величина ξ примет значение, заключенное в интервале $(-1;1)$.

15.6. Плотность распределения непрерывной случайной величины ξ в интервале $(0,2)$ задана как $f(x)=Ax^3$; вне этого интервала $f(x)=0$. Определить A, найти вероятность того, что ξ примет значение, принадлежащее интервалу $(0,1)$ и её математическое ожидание.

15.7. Дана функция распределения непрерывной случайной величины ξ

$$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\leqslant 0, \\ 1/2-(1/2)\cos 3x \text{ при } 0<x\leqslant \pi/3, \\ 1 \text{ при } x>\pi/3. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$.

15.8. Функция распределения непрерывной случайной величины ξ задана выражением

$$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\leqslant 0, \\ ax^3 \text{ при } 0<x\leqslant 4, \\ 1 \text{ при } x>1. \end{cases}$$

Определить: коэффициент a, плотность распределения ξ, вероятность попадания ξ в интервал $(2,3)$.

15.9. Плотность распределения случайной величины ξ имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \leqslant 0 \text{ или } x > \pi, \\ A\sin x, \text{ если } 0 < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Найти A, функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию.

15.10. Случайная величина ξ имеет плотность вероятности $f(x) = (2/\pi)\cdot\cos^2 x$ при $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ и $f(x) = 0$ вне указанного интервала. Найти среднее квадратическое отклонение величины ξ.