14. Функции распределения и плотности непрерывной случайной величины

Определение 14.1. *Функцией распределения $F(x)$ случайной величины ξ называется вероятность того, что ξ приняла значение меньшее x:*

$$F(x) = P(\xi < x). \tag{14.1}$$

Определение 14.2. *Функция $F(x)$ обладает кусочно непрерывной производной, если её производная $F'(x)$ непрерывна везде, кроме конечного (или бесконечного счётного) множества точек, в которых $F'(x)$ может иметь разрывы 1-го рода.*

В частности, если производная $F'(x)$ непрерывна, то она кусочно непрерывна, т.к. множество точек разрыва пусто.

Определение 14.3. *Случайная величина ξ называется непрерывной, если её функция $F(x)$ непрерывна и обладает кусочно непрерывной производной $F'(x)$.*

Свойства функции распределения непрерывной случайной величины:

(1) $0 \leqslant F(x) \leqslant 1,\ F(-\infty) = 0,\ F(+\infty) = 1$;

(2) $P(x_1 \leqslant \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$;

(3) $F(x)$ не убывает;

(4) $F(x)$ непрерывна;

(5) $P(\xi = a) = 0$ для любого числа a.

Используя определение функции распределения (14.1), рассмотрим ряд задач и на непрерывные случайные величины.

Вероятность попадания случайной величины в заданный промежуток зависит от скорости роста функции распределения. Поэтому непрерывную случайную величину задают, используя производную от функции распределения.

Определение 14.4. *Плотностью распределения $f(x)$ (или дифференциальной функцией распределения) непрерывной случайной величины ξ называют первую производную от её функции распределения:*

$$f(x) = F'(x). \tag{14.2}$$

Замечание 14.1. *Поскольку функция распределения дискретной случайной величины имеет ступенчатую форму, для её описания плотность распределения неприменима.*

Свойства плотности распределения н.с.в.:

(1) $f(x) \geqslant 0$;

(2) $f(-\infty) = f(+\infty) = 0$;

(3) $f(x)$ кусочно непрерывная функция;

(4) $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$;

(5) $P(x_1 \leqslant \xi < x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$;

(6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Пример 14.1. *Н.с.в. ξ задана функцией распределения*

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant -2, \\ A(x+2)^2 \text{ при } -2 < x \leqslant 2, \\ 1 \text{ при } x > 2. \end{cases}$$

Найти значение параметра A и вероятность того, что в результате испытания величина ξ примет значение, заключенное в интервале $(-1; 1)$.

◀ Функция распределения является непрерывной на всем действительной оси (свойство 4), поэтому при $x \to 2$ пределы слева и справа должны быть равны. Получаем уравнение $A(2+2)^2 = 1$.

Это выполняется при $A = \frac{1}{16}$.

На рис. 7 представлен график функции распределения.

Вероятность того, что ξ примет значение, заключенное в интервале $(-1; -1)$, равна приращению функции распределения на этом интервале:

$P(-1 < \xi < 1) = F(1) - F(-1) = \frac{1}{16}\left((1+2)^2 - (-1+2)^2\right) = \frac{1}{2}$. ▶

Ответ: $\boxed{A = \frac{1}{16}; P(-1 < \xi < 1) = 0{,}5.}$

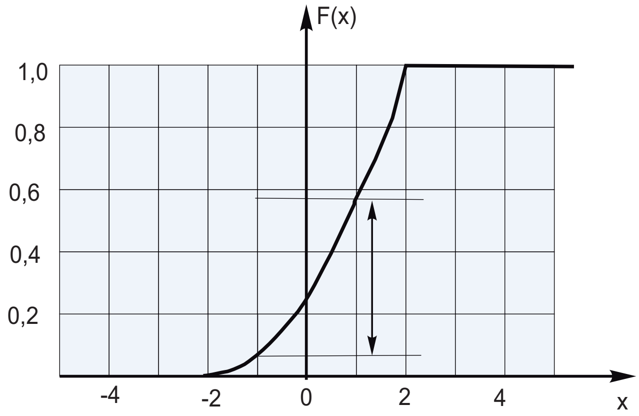

Рисунок 7. *Функция распределения примера 14.1*

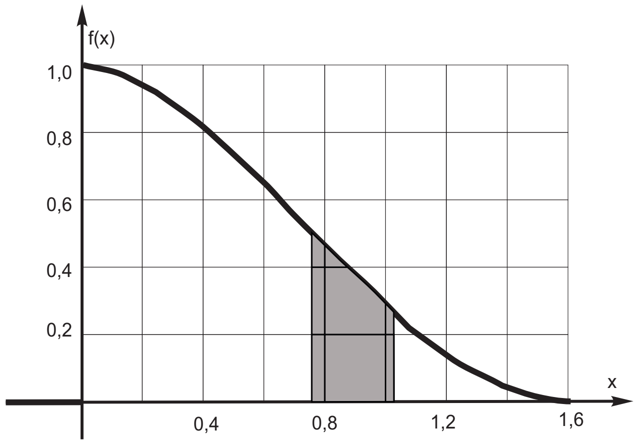

Рисунок 8. *Функция плотности примера 14.2*

Пример 14.2. *Непрерывная случайная величина ξ задана плотностью распределения $f(x) = A\cos^2 x$ в интервале $(0;\pi/2)$, а вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти вероятность того, что ξ примет значение, принадлежащее интервалу $(\pi/4, \pi/3)$.*

◀ Согласно свойству 6, функции плотности распределения $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

Подставляем заданную функцию плотности

$$A\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 xdx = A\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2x}{2}dx = A\left(\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= A\left(\frac{\pi}{4} - 0 + \frac{\sin(\pi) - \sin 0}{4}\right) = A\frac{\pi}{4} = 1.$$

Следовательно, $A = \frac{4}{\pi}$.

Искомую вероятность находим по формуле

$$P(a < \xi < b) = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

По условию, $a = \pi/4$, $b = \pi/3$, $f(x) = \cos^2 x$. Следовательно, данная вероятность

$$P\left(\frac{\pi}{4} < \xi < \frac{\pi}{3}\right) = A\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\cos^2 xdx = A\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{1+\cos 2x}{2}dx = A\left(\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} =$$

$$= A\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8} + \frac{\sin(2\pi/3) - \sin\pi/2}{4}\right) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}-2}{8}\right) =$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{(\sqrt{3}-2)}{2\pi} \approx \mathbf{0{,}138}.$$

Графическая иллюстрация для данного примера представлена на рис. 8.

▶

Ответ: $\boxed{A = \frac{4}{\pi};\ P\left(\frac{\pi}{4} < \xi < \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{6} + \frac{(\sqrt{3}-2)}{2\pi} \approx 0{,}138.}$

Пример 14.3. *Дана функция распределения н.с.в. ξ*

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 1, \\ A(x-1)^2 \text{ при } 1 < x \leqslant 3, \\ 1 \text{ при } x > 3. \end{cases}$$

Найти значение величины A и плотность распределения $f(x)$.

◀ Плотность распределения равна первой производной от функции распределения:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 1, \\ 2A(x-1) \text{ при } 1 < x \leqslant 3, \\ 0 \text{ при } x > 3. \end{cases}$$

Для определения A используем свойство функции плотности вероятностей

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Подставляем полученную функцию $f(x)$.

$$\int\limits_{1}^{3} 2A(x-1)dx = 2A\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^3 = 2A\left(\left(\frac{9}{2} - 2\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right) = 4A.$$

Следовательно, $A = \frac{1}{4}$.

Рассмотрим более простой метод определения параметра A. Функция распределения $F(x)$ определена и непрерывна для всех $x \in \mathbb{R}$. При $x = 3$ предел справа функции распределения равен 1, следовательно и предел слева также обязан быть равен 1. Получаем уравнение

$$A(3-1)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{4}.$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 1, \\ 0{,}5(x-1) \text{ при } 1 < x \leqslant 3, \\ 0 \text{ при } x > 3. \end{cases} \quad \blacktriangleright$$

Пример 14.4. *ξ — н. с. в. с плотностью распределения $f(x)$, заданной следующим образом:*

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \leqslant 0, \\ A(4x - x^2), \text{ если } 0 < x \leqslant 4, \\ 0, \text{ если } x > 4. \end{cases}$$

Найти: а) значение параметра A; б) вероятность попадания ξ в интервал $(1;2)$; в) функцию распределения $F(x)$.

$\blacktriangleleft$ а) $\int\limits_0^4 A(4x - x^2)dx = A\left(2x^2 - \dfrac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4 = A\left(32 - \dfrac{64}{3} - 0\right) = \dfrac{32A}{3}.$

$$\frac{32A}{3} = 1 \qquad \Rightarrow A = \frac{3}{32}.$$

б) Вероятность

$$P(1 < \xi < 2) = \int\limits_1^2 f(x)dx = \int\limits_1^2 \frac{3}{32}(4x - x^2)dx = \frac{3}{32}\left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 =$$

$= \dfrac{11}{32} \approx 0{,}344.$

в) Функция распределения $F(x)$ для н. с. в. даётся формулой

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Если $-\infty < x \leqslant 0$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0;$$

если $0 < x \leqslant 4$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int\limits_{0}^{x} f(t)dt = \frac{6x^2 - x^3}{32};$$

если, наконец, $x > 4$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{4} \frac{3}{32}(4t - t^2)dt + \int\limits_{4}^{x} 0dt = 1. \blacktriangleright$$

Ответ: $\boxed{P(1 < \xi < 2) = 11/32 \approx 0{,}344,\ F(x) = \begin{cases} 0, \ \textbf{если}\ x \leqslant 0, \\ \dfrac{6x^2 - x^3}{32}, \ \textbf{если}\ 0 < x \leqslant 4, \\ 1, \ \textbf{если}\ x > 4. \end{cases}}$

Пример 14.5. *ξ — н. с. в. с заданна функцией распределения:*

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ \textit{если}\ x \leqslant A, \\ \sqrt{x} - 2, \ \textit{если}\ A < x \leqslant B, \\ 1, \ \textit{если}\ x > B. \end{cases}$$

Найти: а) значение параметров A и B; б) вероятность попадания ξ в интервал $(1; 5)$; в) функцию плотности распределения $f(x)$.

$\blacktriangleleft$ а) Функция распределения $F(x)$ определена и непрерывна для всех $x \in \mathbb{R}$. Поэтому при $x = A$, предел справа функции $F(x)$ обязан быть равным 0. Получаем,

$$\sqrt{A} - 2 = 0 \ \Rightarrow \ A = 4.$$

При $x = B$ предел справа функции распределения равен 1, следовательно и предел слева также обязан быть равен 1. Получаем уравнение

$$\sqrt{B} - 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad B = 9.$$

Получили формулу для функции распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ \text{если}\ x \leqslant 4, \\ \sqrt{x} - 2, \ \text{если}\ 4 < x \leqslant 9, \\ 1, \ \text{если}\ x > 9. \end{cases}$$

б) $P(1 < \xi < 5) = F(5) - F(1) = \sqrt{5} - 2 - 0 = \sqrt{5} - 2.$

$$\text{в) } f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \leqslant 4 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ если } 4 < x \leqslant 9, \\ 0, \text{ если } x > 9. \end{cases}$$

Пример 14.6. *Случайная величина ξ имеет на всей числовой оси плотность распределения $f(x) = a/(1+x^2)$ (закон Коши). Найти параметр a, функцию распределения $F(x)$ и $P(\xi > 1)$.*

◄ Так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1,$$

следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{1+x^2}dx = a \cdot \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = a\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = a\pi = 1.$$

Отсюда найдем, что $a = 1/\pi$, а плотность распределения $f(x) = 1/\pi(1+x^2)$. Функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{\pi(1+t^2)} = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} t\Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x.$$

$$P(\xi > 1) = F(+\infty) - F(1) = \left(0{,}5 + \frac{arctg(+\infty)}{\pi}\right) - \left(0{,}5 + \frac{arctg(1)}{\pi}\right) =$$
$$= \frac{\pi/2}{\pi} - \frac{\pi/4}{\pi} = \mathbf{0{,}25}.$$ ►

Ответ: $\boxed{a = 1/\pi \approx 0{,}318,\ F(x) = 0{,}5 + \operatorname{arctg}(x)/\pi,\ P(\xi > 1) = 0{,}25.}$

Пример 14.7. *График функции плотности распределения случайная величина ξ имеет вид, изображённый на рис. 9. Записать аналитическое уравнение для функции распределения $F(x)$ и найти $P(1 < \xi < 4)$.*

◄ Чтобы функция $f(x)$ могла быть функцией плотности, площадь треугольника, изображённого на рис. 9, должна быть равна 1.

Получаем, $\dfrac{1}{2} \cdot a \cdot 6 = 1 \ \Rightarrow \ a = \dfrac{1}{3}$.

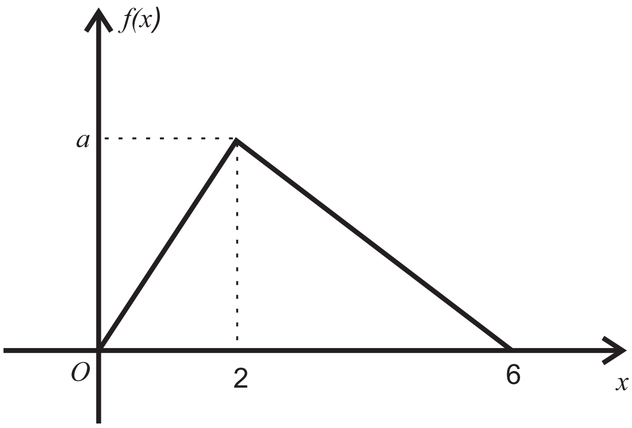

Рисунок 9. *Функция плотности примера 14.7*

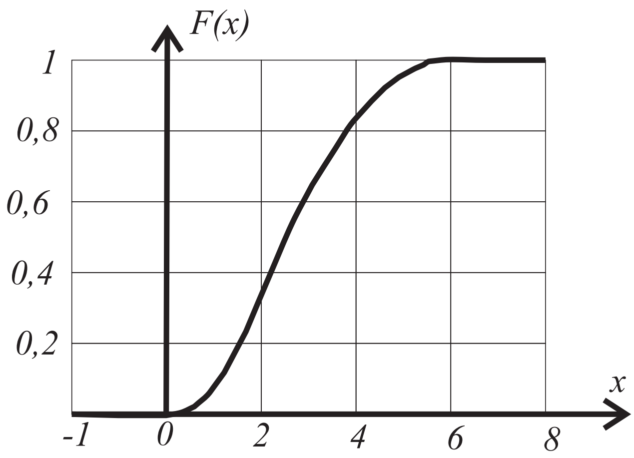

Рисунок 10. *Функция распределения примера 14.7*

Запишем аналитическое уравнение функции плотности распределения случайная величина ξ.

$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{ если } x\leqslant 0,\\ \dfrac{x}{6}, \text{ если } 0<x\leqslant 2,\\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{12}, \text{ если } 2<x\leqslant 6,\\ 0, \text{ если } x>6.\end{cases}$$

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\begin{cases} 0, \text{ если } x\leqslant 0,\\ \int\limits_0^x \dfrac{t}{6}\,dt, \text{ если } 0<x\leqslant 2,\\ \int\limits_0^2 \dfrac{t}{6}\,dt+\int\limits_2^x\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{t}{12}\right)\,dt, \text{ если } 2<x\leqslant 6,\\ 1, \text{ если } x>6\end{cases}=$$

$$=\begin{cases} 0, \text{ если } x\leqslant 0,\\ \dfrac{t^2}{12}\Big|_0^x, \text{ если } 0<x\leqslant 2,\\ \dfrac{t^2}{12}\Big|_0^2+\left(\dfrac{t}{2}-\dfrac{t^2}{24}\right)\Big|_2^x, \text{ если } x\in(2;6],\\ 1, \text{ если } x>6\end{cases}=\begin{cases} 0, \text{ если } x\leqslant 0,\\ \dfrac{x^2}{12}, \text{ если } 0<x\leqslant 2,\\ \dfrac{1}{3}+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{24}-\dfrac{5}{6}, \text{ если } x\in(2;6],\\ 1, \text{ если } x>6.\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\leqslant 0,\\ \dfrac{x^2}{12}, \text{ если } 0<x\leqslant 2,\\ -\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{24}, \text{ если } x\in(2;6],\\ 1, \text{ если } x>6.\end{cases}$$

На рис. 10 представлен график полученной функции распределения.

$P(1<\xi<4)=F(4)-F(1)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{2}-\dfrac{16}{24}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{3}{4}.$

Задания для самостоятельной работы

14.1. Дана функция распределения непрерывной случайной величины ξ $F(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ 1-\dfrac{a}{(x+1)^2}, x\geqslant 0.\end{cases}$ Найти функцию плотности распределения случайной величины ξ и $P(\xi>1)$.

14.2. Непрерывная случайная величина ξ задана функцией распределения вероятностей $F(x)=\begin{cases}0, x<1,\\ a+\dfrac{b}{(x+1)^3}, x\geqslant 1.\end{cases}$

Найти значения параметров a и b, функцию плотности распределения вероятностей $f(x)$ и $P(1<\xi<3)$.

14.3. Непрерывная случайная величина ξ задана функцией распределения вероятностей $F(x)=\begin{cases}0, x\leqslant 1,\\ a(x^4-1), 1<x\leqslant 2,\\ 0, x>2.\end{cases}$

Найти значение параметра a, функцию плотности распределения вероятностей $f(x)$ и $P(1<\xi<2)$.

14.4. Дана функция плотности распределения случайной величины

$f(x)=\begin{cases}0, x\leqslant -1,\\ a(1-x^2), -1<x\leqslant 1,\\ 0, x>1.\end{cases}$

Найти функцию распределения $F(x)$ и $P(-0{,}5<\xi<1)$.

14.5. Дана функция плотности распределения случайной величины

$f(x)=\begin{cases}0,\ x<1,\\ a\sqrt{x},\ 1\leqslant x\leqslant 9,\\ 0\ , x>9.\end{cases}$

Найти функцию распределения $F(x)$ и $P(2<\xi<4)$.

14.6. Дана функция плотности распределения случайной величины
$$f(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0, \\ a\sin^2 x, 0 < x \leqslant \pi, \\ 0, x > \pi. \end{cases}$$
Найти функцию распределения $F(x)$ и $P(0 < \xi < \dfrac{\pi}{2})$.

14.7. Случайная величина ξ распределена по закону Лапласа: $f(x) = Ae^{-\lambda|x|}$. Найти значение коэффициента A и функцию распределения вероятностей $F(x)$.

14.8. Случайная величина ξ распределена по закону Симпсона на отрезке $[-3; 3]$, рис. 11. Найти: а) функцию плотности вероятностей $f(x)$; б) функцию распределения $F(x)$ и построить её график; в) $P(-2 \leqslant \xi \leqslant 1)$.

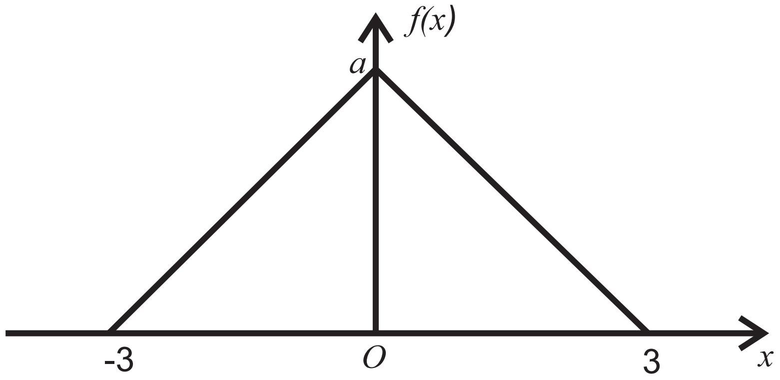

Рисунок 11. *Функция плотности примера 14.8*