ТВиМС. Практическое занятие №1

1. Элементы комбинаторики.

Элементы комбинаторики: перестановки, размещения, размещения с выбором, сочетания, сочетания с выбором.

Для непосредственного подсчёта вероятности появления события на основе классического определения применяются, как правило, формулы комбинаторики (раздела математики, изучающего вопросы о том, сколько различных комбинаций (соединений) можно составить из заданного числа объектов).

Большинство задач комбинаторики решается с помощью двух основных правил: правила суммы и правила произведения.

Правило суммы. Если элемент a из некоторого конечного множества можно выбрать n_1 способами, а элемент b можно выбрать n_2 способами, причем выбор одного элемента исключает одновременный выбор другого элемента. Тогда выбор «или a, или b» можно осуществить $n_1 + n_2$ способами.

При этом способы выбора элементов a и b не должны совпадать между собой. В противном случае будет $m + k - l$ способов выбора, где l — число совпадений.

Правило произведения. Пусть даны два упорядоченных множества A и B: A, содержащее n_1 элементов $\{a_1, a_2, \dots, a_{n_1}\} \in A$ и B, содержащее n_2 элементов $\{b_1, b_2, \dots, b_{n_2}\} \in B$. Тогда можно образовать ровно $n_1 n_2$ различных пар $\{(a_i, b_j)\big| i = \overline{1, n_1}, j = \overline{1, n_2}\}$, содержащих по одному элементу из каждого множества.

Это правило можно обобщить на случай любого конечного числа упорядоченных множеств.

Выборки и их типы

Определение 1.1. *Выборкой из n по k называется набор из k элементов, каждый из которых является элементом некоторого множества, состоящего из n элементов.*

Пример 1.1. *Выбранные некоторым образом две книги из пяти, стоящих на полке, будет выборкой из пяти по два.*

Пример 1.2. *Трехзначное число является выборкой из десяти (т.е. из множества цифр $\{0, 1, \dots, 9\}$) по три.*

Заметим, что в примере 1.2, в отличие от примера 1.1, число выбранных элементов может превышать число «всех» элементов, поскольку элементы (цифры в числе) могут повторяться.

Кроме параметров n и k (из скольких и по сколько) выборка характеризуется еще двумя критериями:

- **порядок**: выборка с учетом порядка или без учета порядка;
- **наличие повторений**: выборка с повторениями или без повторений.

В зависимости от типа, выборки имеют следующие названия, табл.1.1 .

Таблица 1.1

Тип выборки	С учетом порядка	Без учета порядка
Без повторений	Размещения	Сочетания
С повторениями	Размещения с повторениями	Сочетания с повторениями

Правильное определение типа выборки в задаче является залогом ее правильного решения. Рассмотрим задачу определения типы выборки на примерах.

Пример 1.3. *Пусть из группы в 20 студентов требуется выбрать старосту и его заместителя. Определим параметры и тип выборки. Во-первых заметим, что нам требуется выбрать 2 человека из 20, т.е. это выборка* ***из 20 по 2****. Далее, поскольку одного и того же студента нельзя одновременно выбрать и старостой и заместителем, то это выборка* ***без повторений****. Наконец, нужно ответить на вопрос важен ли для нас порядок выбора, т.е. пара «Белов — староста, Серов — заместитель» — это то же самое, что пара «Серов — староста, Белов — заместитель»? Очевидно, эти пары разные, поэтому это выборка* ***с учетом порядка****. Таким образом тип выборки в данном примере:* ***размещения из 20 по 2****.*

Пример 1.4. *Пятизначное двоичное число является* ***размещением с повторениями из 2 по 5****, т.к. мы выбираем 5 элементов (5 цифр числа) из множества $\{0, 1\}$ (т.к. число двоичное, т.е. в его записи могут присутствовать только 0 или 1) с повторениями (т.к. одна и та же цифра может повторяться в числе) и с учетом порядка (т.к. при перестановке цифр мы получим другое число, например $10001 \neq 10100$).*

Пример 1.5. *Школьник выбирает 3 предмета для сдачи ЕГЭ из 10 возможных. В данном случае мы имеем выборку без повторений (нельзя дважды* *выбрать один и тот же предмет) и без учета порядка (наборы «математика, русский язык, информатика» и «математика, информатика, русский язык» — это один и тот же набор). Таким образом, в данном случае имеем* ***сочетания из 10 по 3****.*

Пример 1.6. *Кость домино является* ***сочетанием с повторениями из 7 по 2****. Действительно, кость домино состоит из двух полей (выбираем 2 элемента), каждый из которых может принимать значения от 0 (пусто) до 6 (всего 7 значений) с повторениями (т.к. есть дубли) без учета порядка (т.к. кость нет разных костей «1–2» и «2–1» — это одна и та же кость).*

Приведем определения выборок каждого типа и формулы для вычисления их числа.

Определение 1.2. *Размещениями из n по m называются различные способы выбора m предметов из n, отличающиеся самими предметами или порядком их расположения в выборке. Обозначаются A_n^m.*

$$A_n^m = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{1.1}$$

Размещения обладают следующими свойствами:

$$A_n^n = n! = P_n, \quad A_n^0 = 1, \quad A_n^1 = n. \tag{1.2}$$

Определение 1.3. *Перестановками называются различные способы упорядочивания n различных предметов (пронумерованных карточек) при их расположении слева направо. Перестановки являются частным случаем размещений из n по n и обозначаются $P_n = A_n^n$.*

$$P_n = n!. \tag{1.3}$$

Размещения с повторениями обозначаются $\overline{A}_n^m$ и вычисляются по формуле:

$$\overline{A}_n^m = n^m. \tag{1.4}$$

Определение 1.4. *Сочетаниями из n по m называются различные способы выбора m предметов из n, отличающиеся самими предметами. Обозначаются C_n^m*

Число сочетаний из n по m определяется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{1.5}$$

Сочетания обладают следующими свойствами:

(1) $C_n^m = C_n^{n-m}$,

(2) $C_n^0 = C_n^n = 1, \quad C_n^1 = C_n^{n-1} = n$,

(3) $\sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i = \left(C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n\right) = (1+1)^n = 2^n$.

Сочетания с повторениями из n элементов по m элементов обозначаются $\overline{C}_n^m$, а их число вычисляется по формуле

$$\overline{C}\,_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}. \tag{1.6}$$

Пример 1.7. *В студенческом буфете продают пирожки с мясом и капустой. Вася купил три пирожка. Сколько различных комбинаций пирожков возможно в данном случае?*

◀ Отметим, что порядок выдачи пирожков не важен и легко выписать всевозможные комбинации возможны в данной задаче: {ммм, ммк, мкк, ккк}. Т.е. $k = 4$.

Подсчитаем это число по формуле числа сочетаний с повторениями
$k = C_{2+3-1}^3 = C_4^3 = \dfrac{4!}{3!1!} = \mathbf{4}.$ ▶

Ответ: $\boxed{n = 4.}$

Немножко усложним задачу задачу.

Пример 1.8. *В буфете продают пирожки с мясом, вареньем и капустой. Сколькими способами можно приобрести пять пирожков?*

◀ Отметим, что порядок выдачи пирожков не важен и можно выписать всевозможные комбинации получения пяти пирожков: {ммммм, ммммв, ммммк, мммвв,..., ккккк}.

Подсчитаем это число по формуле (1.6) числа сочетаний с повторениями
$k = C_{3+5-1}^5 = C_7^5 = \dfrac{7!}{5!2!} = \dfrac{7\cdot 6}{2} = \mathbf{21}.$ ▶

Ответ: $\boxed{n = 21.}$

Пример 1.9. *В коробке имеются шесть карточек с буквами: П, Р, И, В, Е, Т. Найдите количество «трёхбуквенных слов» (включая бессмысленные), составленных из этих букв.*

◀ Первую букву можно вытащить шестью способами, из пяти оставшихся букв вытаскиваем вторую букву пятью способами и третью букву вытаскиваем четырьмя способами. Получаем,
$n = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \mathbf{120}$.

Можно было просто вычислить число размещений из шести различных букв по три буквы. $n = A_6^3 = \dfrac{6!}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \mathbf{120}$. ▶

Ответ: $\boxed{120.}$

Пример 1.10. *В коробке имеются шесть карточек с буквами: Д, О, К, Л, А, Д. Найдите количество «трёхбуквенных слов» (включая бессмысленные), составленных из этих букв.*

◀ Искомое количество комбинаций равна числу слов без Д+ число слов с одной Д + число слов с двумя Д.

$n = A_4^3 + 3 \cdot A_4^2 + 3 \cdot A_4^1 = 24 + 36 + 12 = 72.$ ▶

Ответ: $\boxed{\mathbf{72.}}$

Пример 1.11. *В урне лежит 5 белых и 6 красных перенумерованных (различающихся) шаров. а) Скольким способами можно вынуть белый и красный шар? б) Скольким способами можно вынуть белый или красный шар?*

◀ Вынуть белый шар можно пятью, а красный — шестью способами. Тогда вынуть одновременно один белый и один красный шар можно $5 \cdot 6 = \mathbf{30}$ способами (правило умножения), а вынуть один шар любого цвета можно $5 + 6 = \mathbf{11}$ способами (правило сложения). ▶

Ответ: $\boxed{\text{а) 30; б) 11.}}$

Рассмотрим несколько задач на нахождение числа комбинаций при игре в покер. В покер играют стандартной колодой из 52 карт — 4 равносильные масти по 13 карт от 2 до туза. Покерные комбинации состоят из пяти карт. Всего существует 10 комбинаций. Выигрывает тот, кто соберет более старшую комбинацию.

Пример 1.12. *Из колоды в 52 карты наугад выбираются 5 карт. Скольким способами можно вытащить комбинацию «каре», т.е. любые четыре карты одного достоинства?*

◀ Поскольку всего в колоде 13 достоинств, то выбрать одно из них можно $A_{13}^1 = C_{13}^1 = 13$ способами. Таким образом, выбрать четыре карты одного достоинства можно тринадцатью способами. Пятая карта выбирается из оставшихся 48 карт $A_{48}^1 = C_{48}^1 = 48$ способами. Поскольку пятая карта выбирается независимо от первых четырех, по правилу умножения получаем, что каре можно выбрать $13 \cdot 48 = 624$ способами. ▶

Ответ: $\boxed{\textbf{624.}}$

Пример 1.13. *Из колоды в 52 карты наугад выбираются 5 карт. Сколькими способами можно вытащить комбинацию «стрит», т.е. пять карт подряд идущего достоинства?*

◀ Предположим сначала, что все карты одной масти. Тогда, учитывая, что туз может играть роль как старшей, так и младшей карты (единицы), существует 10 комбинаций «стрит»: $\{\text{Т}, 2, 3, 4, 5\}$, $\{2, 3, 4, 5, 6\}$, $\ldots$, $\{10, \text{В}, \text{Д}, \text{К}, \text{Т}\}$. Учитывая теперь, что масть каждой карты в этой комбинации можно выбрать четырьмя способами, причем выбор масти каждой карты независим от выбора других, получим $10 \cdot 4^5 = 10240$ способов. ▶

Ответ: $\boxed{\textbf{10240.}}$

Пример 1.14. *Из колоды в 52 карты наугад выбираются 5 карт. Сколькими способами можно вытащить комбинацию «фулл хаус», т.е. три карты одного достоинства и две — другого?*

◀ Выбрать два достоинства из тринадцати можно $A_{13}^2 = 13 \cdot 12$ способами. Здесь возникает выборка с учетом порядка, поскольку эти достоинства неравнозначны, т.е. три двойки и две дамы это не то же самое, что три дамы и две двойки — мы различаем эти комбинации. Далее, внутри каждого достоинства возникает выбор мастей, это выбор без учета порядка $C_4^3 = 4$ для трех карт и $C_4^2 = 6$ для двух. По правилу произведения, число комбинаций «фулл хаус» равно $A_{13}^2 \cdot C_4^3 \cdot C_4^2 = 13 \cdot 12 \cdot 4 \cdot 6 = 3744$. ▶

Ответ: $\boxed{\textbf{3744.}}$

Пример 1.15. *Из колоды в 52 карты наугад выбираются 5 карт. Сколькими способами можно вытащить комбинацию «тройка», т.е. три карты одного достоинства?*

◀ Сначала выберем три карты одного достоинства. Это можно сделать (см. предыдущие задачи) $C_{13}^1 \cdot C_4^3 = 13 \cdot 4 = 52$ способами (13 способов выбрать достоинство и 4 способа — выбрать три масти из четырех). Дальше нам следует быть внимательными. Дело в том, что оставшиеся две карты могут быть выбраны не произвольным образом из оставшихся 49 карт. Во-первых, нам нужно исключить оставшуюся карту того же достоинства, что мы выбрали, иначе возникнет комбинация «каре». Во-вторых, две оставшиеся карты не могут быть одного достоинства, иначе возникнет комбинация «фулл хаус». Таким образом для выбора четвертой карты мы фиксируем одно из оставшихся 12 достоинств и выбираем любую масть ($12 \cdot 4 = 48$ способов), а пятая карта выбирается из 11 оставшихся достоинств (оно не должно совпадать ни с достоинством тройки, ни с достоинством четвертой карты), она также может быть любой масти, т.е. ее можно выбрать $11 \cdot 4 = 44$ способами. Получаем, что комбинацию «тройка» можно выбрать $52 \cdot 48 \cdot 44 = 109824$ способами. ►

Ответ: $\boxed{\textbf{109824.}}$

Пример 1.16. *В коробке находится 20 маркеров: 10 синих, 6 красных и 4 чёрных. Наугад взяли 6 маркеров. Сколькими способами можно вытащить а) два красных и два синих маркера; б) три синих и хотя бы один чёрный .*

◄ а) $M_{\text{а}} = C_{10}^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 = \dfrac{10! \cdot 6! \cdot 4!}{2! \cdot 8! \cdot 2! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 2!} =$
$= \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 720}{16} = 10 \cdot 9 \cdot 45 = 4050.$

б) $M_{\text{а}} = C_{10}^3 \cdot C_4^1 \cdot C_6^2 + C_{10}^3 \cdot C_4^2 \cdot C_6^1 + C_{10}^3 \cdot C_4^3 =$
$= C_{10}^3 \cdot \left(C_4^1 \cdot C_6^2 + C_4^2 \cdot C_6^1 + C_4^3\right) =$
$= \dfrac{10!}{3!7!}\left(4 \cdot \dfrac{6!}{2!4!} + \dfrac{4!}{2!2!} \cdot 6 + \dfrac{4!}{3!}\right) = 10 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 5 + 6 \cdot 6 + 4) = 12000.$ ►

Ответ: $\boxed{\textbf{а) 4050; б) 12000.}}$

Задания для самостоятельной работы

1.1. В коробке находятся пять карточек с цифрами 1,3,5,7,9. Сколько различных трёхзначных чисел можно составить?

1.2. В коробке имеются пять карточек с нечётными цифрами: 1, 3, 5, 7, 9. Сколько чисел можно составить при помощи данных карточек?

1.3. Из колоды в 36 карт наугад выбираются 5 карт. Сколькими способами можно вытащить три туза?

1.4. В коробке лежат пачки жевательной резинки разных вкусов: пять мятных, пять апельсиновых и восемь малиновых. Случайным образом выбирают пять пачек. Сколькими способами можно вытащить три мятных и хотя бы одну апельсиновую пачки?

1.5. В коробке двадцать деталей. Среди них десять – стандартные, шесть – отличного качества и четыре – бракованные. Наугад взяли пять деталей. Сколькими способами можно вытащить одну бракованную деталь и три отличного качества?

1.6. В коробке находится шестнадцать кубиков: четыре красных, четыре желтых, шесть синих и два зеленых. Наугад взяли шесть кубиков. Сколькими способами можно вытащить два красных кубика, два желтых и хотя бы один зеленый?

1.7. Из группы в 12 спортсменов выбирают случайным образом четырёх участников эстафеты 800x400x200x100 метров. Сколькими способами можно расставить спортсменов на этих этапах?

1.8. В соревнованиях по шахматам участвовало несколько шахматистов. Каждые два из них встречались между собой по одному разу. Известно, что они сыграли 28 партий. Сколько шахматистов участвовало в соревнованиях?

1.9. Четыре человека вошли в лифт восьмиэтажного дома. Сколькими способами пассажиры могут выйти из лифта на нужных этажах?

1.10. Восемь студентов садятся в аудитории случайно на один ряд. Найти число способов, при которых три определённых студента окажутся рядом.