17. Распределение Пуассона

Пусть в испытаниях Бернулли $n \to \infty$, $p \to 0$, так, что $np \to \lambda$. Тогда вероятность $P_n(m)$ приближённо определяется с помощью формулы Пуассона:

$$P(\xi = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0. \tag{17.1}$$

Определение 17.1. *Распределение дискретной случайной величины, задаваемое формулой (17.1), называется распределением Пуассона или пуассоновским распределением.*

Запишем закон распределения Пуассона в виде таблицы:

ξ	0	1	2	...	m	...
p	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$	...

Пример 17.1. *Доказать, что* $\sum\limits_{m=0}^{+\infty} P(\xi = m) = 1$.

◀ $\sum\limits_{m=0}^{+\infty} P(\xi = m) = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} =$

$= e^{-\lambda}\left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots + \frac{\lambda^m}{m!} + \ldots\right) = e^{-\lambda}\left(e^{\lambda}\right) = 1.$ ▶

Пример 17.2. *Используя производящую функцию, вывести формулы для математического ожидания и дисперсии пуасоновского распределения.*

◀ $\varphi(z) = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} p_m z^m = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} z^m = e^{-\lambda} \sum\limits_{m=0}^{+\infty} \frac{\lambda^m}{m!} z^m =$

$= e^{-\lambda} \sum\limits_{m=0}^{+\infty} \frac{(\lambda z)^m}{m!} = e^{-\lambda} e^{\lambda z} = e^{\lambda(z-1)}.$

Получили формулу для производящей функции пуассоновского распределения

$$\varphi(z) = e^{\lambda(z-1)}. \tag{17.2}$$

Найдем производные первого и второго порядка производящей функции (17.2).

$\varphi'(z) = \left(e^{\lambda(z-1)}\right)' = \lambda e^{\lambda(z-1)}.$

$\varphi''(z) = \lambda^2 e^{\lambda(z-1)}.$

Находим значение производных для $z = 1$

$$\varphi'(1) = \lambda, \qquad \varphi''(1) = \lambda^2.$$

Для вычисления математического ожидания и дисперсии применяем формулы (16.6) и (16.8). Получаем

$\mathrm{M}(\xi) = \varphi'(1) = \lambda, \qquad D(\xi) = \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$ ►

$$M(\xi) = D(\xi) = \lambda. \tag{17.3}$$

Пример 17.3. *Найдите значение производящей функции распределения Пуассона с параметром $\lambda = ln3$ точке в точке 0,5.*

◄ $\varphi(z) = e^{\lambda(z-1)}$.

$\varphi(3) = e^{\ln 3(0,5-1)} = \left(e^{\ln 3}\right)^{-0,5} = 3^{-0,5} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}.$ ►

Ответ: $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{3}}.}$

Пример 17.4. *Случайная величина ξ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = 4$. Найти математическое ожидание случайной величин $\eta = 2\xi^2 - 4\xi + 5$.*

◄

$M(\eta) = M(2\xi^2 - 4\xi + 5) = 2M(\xi^2) - 4M(\xi) + M(5).$
$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) \Rightarrow M(\xi^2) = D(\xi) + M^2(\xi).$
$M(\xi) = D(\xi) = \lambda \Rightarrow M(\xi^2) = \lambda + \lambda^2.$
$M(\eta) = 2\lambda + 2\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 2\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 32 - 8 + 5 = 29.$

Ответ: $\boxed{\mathbf{29.}}$

Пример 17.5. *Вероятность того, что изделие окажется бракованным, равна 0,02. Случайным образом выбрали 120 изделий. Записать закон распределения числа бракованных изделий среди выбранных изделий. Найти $M(\xi)$ и $D(\xi)$.*

◄ Здесь $n = 120$ и $p = 0{,}02$. Поскольку первая величина больше 100, а вторая — меньше 0,1, то для решения задачи можно применить формулу Пуассона (17.1). Параметр $\lambda = np = 120 \cdot 0{,}02 = 2{,}4$; используя калькулятор $e^{-2,4} = 0{,}0907$. Тогда

$$P(\xi = 0) = \frac{2{,}4^0 \cdot e^{-2,4}}{0!} = 0{,}0907, \quad P(\xi = 1) = \frac{2{,}4^1 \cdot e^{-2,4}}{1!} = 0{,}2177,$$

$$P(\xi = 2) = \frac{2{,}4^2 \cdot e^{-2{,}4}}{2!} = 0{,}2612, \quad P(\xi = 3) = \frac{2{,}4^3 \cdot e^{-2{,}4}}{3!} = 0{,}2090, \ldots$$

Здесь наибольшая вероятность при $k = 2$. Распределение Пуассона можно записать следующим образом:

ξ	0	1	2	3	...	k	...
p	0,0907	0,2177	**0,2612**	0,2090	...	$2{,}4^k \cdot e^{-2{,}4}/k!$	...

$M(\xi) = \lambda = 2{,}4; \quad D(\xi) = \lambda = 2{,}4.$

Для вычисления распределения Пуассона $P(\xi = m) = \dfrac{\lambda^m}{m!}\, e^{-\lambda}$ в компьютерный пакет Maxima встроена функция pdf_poisson(m,a).

Maxima-программа.

```
fpprintprec:5$ n:120$ p:0.02$ L:n*p;
PL:makelist(L^k/k!*exp(-L),k,0,8);

(%o5) [0.091, 0.218, 0.261, 0.209, 0.125, 0.06, 0.024, 0.008, ...
```

▶

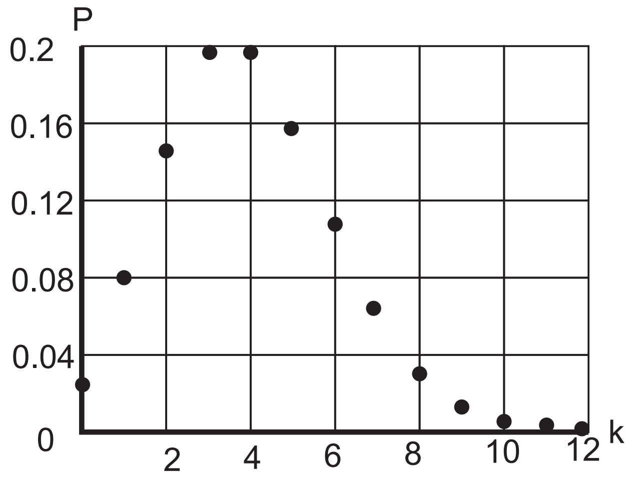

Рисунок 17. *Распределения Пуассона для примера 17.6*

Пример 17.6. *В партии поступивших на склад деталей 1% бракованные. Случайным образом выбрали n=400 деталей. Случайная величина ξ — число бракованных деталей среди выбранных. Составить ряд распределения случайной величины ξ. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ. Какова вероятность, что будет выбрано более пяти бракованных деталей. Построить график ряда распределения случайной величины ξ на отрезке $x \in [0; L + 4\sigma(\xi)]$, где $\sigma(\xi)$ — среднеквадратическое отклонение случайной величины ξ.*

◄ Этот пример подобен решённому выше примеру 16.6, только число испытаний значительно больше и применения формул Бернулли затруднительно.

Применяем формулы Пуассона (17.1). Здесь $\lambda = n\,p = 400 \cdot 0{,}1 = 4$.

$$P(\xi = k) = \frac{4^k}{k!}e^{-4}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Для вычисления математического ожидания и дисперсии применяем формулу $M(\xi) = D(\xi) = \lambda = 4$. $\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = 2$.

Пишем Maxima-программу, которая по приведённым формулам получит и выведет все требуемые результаты и строит график функции распределения на отрезке $x \in [0; 12]$, рис. 17.

```
kill(all)$  load(distrib)$  fpprintprec:3$  n:400$ p:0.01$  L:n*p;
M:L$   D:L$   S:sqrt(D);    m1:0$     m2:fix(L+4*S);
array(P,100)$
fillarray(P,makelist(L^k/k!*exp(-L), k, 0 ,m2))$
G:makelist([k,P[k]],k,m1,m2);
plot2d([discrete,G], [x,m1,m2],[gnuplot_postamble, "set grid;"])$
P_5_n:1-sum(P[k],k,0,5);
```

```
Вывод программы
(L) 4.0
(S) 2.0
(m2) 12
(G) [[0,0.0183],[1,0.0733],[2,0.147],[3,0.195],[4,0.195],
[5,0.156],[6,0.104],[7,0.0595],[8,0.0298],[9,0.0132],
[10,0.00529],[11,0.00192],[12,6.42*10^-4]]
(P_5_n) 0.215
```

►

Пример 17.7. *В диспетчерской автопредприятия среднее число заявок, поступающих в одну минуту, равно* 2. *Найти вероятности того, что за одну минуту: не поступит вызова, поступит* $1, 2, 3$, ... *вызовов.*

◄ Количество вызовов ξ, поступивших за время t, имеет распределение Пуассона:

$$P_t(\xi = k) = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!},$$

где λ — среднее число событий в единицу времени (интенсивность). В данном случае $\lambda = 2,\ t = 1$. Следовательно,

$$P_1(\xi = 0) = \frac{2^0 \cdot e^{-2}}{0!} \approx 0{,}135, \quad P_1(\xi = 1) = \frac{2^1 \cdot e^{-2}}{1!} \approx 0{,}271,$$

$$P_1(\xi = 2) = \frac{2^2 \cdot e^{-2}}{2!} \approx 0{,}271, \quad P_1(\xi = 3) = \frac{2^3 \cdot e^{-2}}{3!} \approx 0{,}180, \ldots$$

Ответ:

ξ	0	1	2	3	...
P	0,135	0,271	0,271	0,180	...

▶

17.1. Геометрическое распределение

Пусть производится ряд независимых испытаний («попыток») для достижения некоторого результата (события A), и при каждой попытке событие A может появиться с вероятностью p. Тогда число попыток ξ до появления события A, включая удавшуюся, является дискретной случайной величиной, возможные значения которой принимают значения: $m = 1, 2, \ldots, m, \ldots$ Вероятности их по теореме умножения вероятностей для независимых событий равны

$$P(\xi = m) = pq^{m-1}, \qquad m = 1, 2, \ldots. \tag{17.4}$$

где $0 < p < 1, \quad q = 1 - p$.

Ряд распределения ξ имеет вид

ξ	1	2	3	...	m	...
P	p	pq	pq^2	...	pq^{m-1}	...

Как видно, вероятности $P_m = P(\xi = m) = pq^{m-1}, \quad m = 1, 2, \ldots,$ образуют для ряда последовательных значений бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем q (потому распределение и называется ***геометрическим***). Сумма вероятностей возможных значений случайной величины будет равна

$$S = p + pq + pq^2 + \ldots + p + pq^{m-1} + \ldots = \frac{p}{1-q} = 1.$$

Примеры случайных величин, распределённых по геометрическому закону: число выстрелов до первого попадания, число испытаний устройства до первого отказа, число бросаний монеты до первого выпадения герба (или решки) и т.п.

Выведем формулу для математическое ожидания и дисперсии случайной величины ξ для геометрического распределения. Для этого найдем её производящую функцию

$$\varphi(z)=\sum_{m=1}^{\infty}pq^{m-1}z^m=pz\sum_{m=1}^{\infty}(qz)^{m-1}=\frac{pz}{1-zq}.$$

Далее находим производные первого и второго порядков

$$\varphi'(z)=p\frac{1-zq+zq}{(1-zq)^2}=\frac{p}{(1-zq)^2},$$

$$\varphi''(z)=p\left((1-zq)^{-2}\right)'=2pq(1-zq)^{-3}=\frac{2pq}{(1-zq)^3}.$$

Находим значения производных при $z=1$

$\varphi'(1)=\dfrac{1}{p},\quad \varphi''(1)=\dfrac{2pq}{p^3}=\dfrac{2q}{p^2}.$

$M(\xi)=\varphi'(1)=\dfrac{1}{p}.$

$D(\xi)=\varphi''(1)+\varphi'(1)-(\varphi'(1))^2=\dfrac{2q}{p^2}+\dfrac{1}{p}-\left(\dfrac{1}{p}\right)^2=\dfrac{q}{p^2}.$

Итак, для случайной величины ξ имеющей геометрическое распределение, получили

$$M(\xi)=\frac{1}{p},\qquad D(\xi)=\frac{q}{p^2}. \tag{17.5}$$

Пример 17.8. *Детали, количество которых неограниченно, проверяют до появления бракованной. Вероятность брака для каждой детали одинакова и равна* 0,6. *Построить ряд распределения дискретной случайной величины ξ — числа проверенных деталей. Найти математическое ожидание $M(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$ и среднеквадратическое отклонение $\sigma(\xi)$ случайной величины ξ. Какова вероятность, что будет проверено более четырёх деталей? Построить график ряда распределения случайной величины ξ на отрезке $k\in[0;8]$.*

◀ Используем формулу для геометрического распределения (17.4) при $p=0{,}6,\quad q=0{,}4.$

$P(\xi=k)=0{,}6\cdot 0,4^{k-1},\qquad k=1,2,\ldots.$

$P(\xi = 1) = 0{,}6; \quad P(\xi = 2) = 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}24;$
$P(\xi = 3) = 0{,}6 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}096; \quad P(\xi = 4) = 0{,}6 \cdot 0{,}4^3 = 0{,}0384; \ldots\ldots$
$P\_5\_n = 1 - (0{,}6 + 0{,}24 + 0{,}096 + 0{,}0384) = 0{,}0256.$

Maxima-программа:

```
kill(all)$  load(distrib)$ fpprintprec:3$
p:0.6$ q:1-p; K:8$
M:1/p;   D:q/p^2;   S:sqrt(D);
P:makelist(p*q^(k-1), k, 1 ,K);
P_5_n:1-sum(P[k], k, 1, 4);
plot2d([discrete,P], [x,1,K],[style,points],
[gnuplot_postamble, "set grid;"])$
```

►

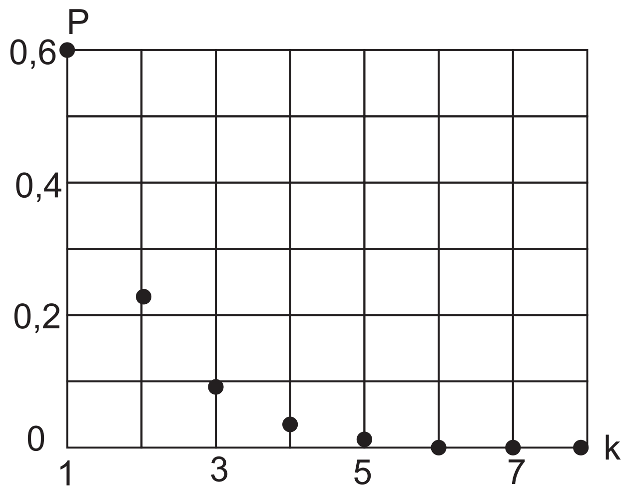

Рисунок 18. *Геометрическое распределения для примера 17.8*

17.2. Задачи из типового расчета на дискретные распределения

Задача 1.8

Пример 17.9. *Производится стрельба по мишени. Случайная величина ξ — число попаданий в цель.*

а) Вероятность попадания при каждом выстреле 0,6. Было произведено 12 независимых выстрелов. Найти математическое ожидание и дисперсию ξ. Определить вероятность того, что будет не менее 10 попаданий в цель.

б) Вероятность промаха при каждом выстреле 0,99 *и было произведено 200 независимых выстрелов. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ. Определить вероятность того, что будет более двух попаданий в цель.*

◀ $M(\xi) = np = 12 \cdot 0{,}6 = 7{,}2$, $D(\xi) = npq = 7{,}2 \cdot 0{,}4 =$ **2,88**.

По формуле Бернулли (**??**) $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ найдем:
$P_{12}(10) = C_{12}^{10} \cdot 0{,}6^{10} \cdot 0{,}4^2 = 66 \cdot 0{,}6^{10} \cdot 0{,}4^2 \approx 0{,}0639.$
$P_{12}(11) = C_{12}^{11} \cdot 0{,}6^{11} \cdot 0{,}4 = 12 \cdot 0{,}6^{11} \cdot 0{,}4 \approx 0{,}0174.$
$P_{12}(12) = 0{,}6^{12} \approx 0{,}0022.$
$P(A_{\text{а}}) = P_{12}(10) + P_{12}(11) + P_{12}(12) \approx 0{,}0639 + 0{,}0174 + 0{,}0022 =$ **0,0835**.

б) Вероятность промаха равна 0,99, следовательно вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,01.

Применяем формулу для распределения Пуассона (17.1)

$$P(\xi = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0.$$

$\lambda = np = 2, \quad M(\xi) = D(\xi) = \lambda = 2.$
$P(A_{\text{б}}) = 1 - (P_{200}(0) + P_{200}(1) + P_{200}(2))$
$P(\xi = 0) = \dfrac{2^0 \cdot e^{-2}}{0!} = 0{,}1353.$
$P(\xi = 1) = \dfrac{2^1 \cdot e^{-2}}{1!} = 0.2707$
$P(\xi = 2) = \dfrac{2^2 \cdot e^{-2}}{2!} = 0.2707$
$P(A_{\text{б}}) = 1 - (P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2)) \approx$ **0,323**. ▶

Ответ: $\boxed{M(\xi) = 2{,}88;\ P(A_{\mathbf{а}}) \approx 0{,}0835;\ P(A_{\mathbf{б}}) \approx 0{,}323.}$

Задача 1.9

Пример 17.10. *Кубик бросают до первого появления шестерки или пятерки (число бросков неограниченно). Построить ряд распределения дискретной случайной величины ξ — числа произведённых бросков. Найти математическое ожидание и дисперсию ξ. Найти вероятность того, что будет произведено от двух до пяти (включительно) бросков.*

◄ Используем формулу для геометрического распределения (17.4)

$P(\xi = m) = pq^{m-1}, \qquad m = 1, 2, \dots,$ при $p = 1/3, \quad q = 2/3.$

$P(\xi = k) = 1/3 \cdot (2/3)^{k-1} = 2^{k-1}/3^k, \qquad k = 1, 2, \dots.$

$P(\xi = 1) = 1/3; \quad P(\xi = 2) = 1/3 \cdot 2/3 = 2/9;$

$P(\xi = 3) = 1/3 \cdot (2/3)^2 = 4/27; \quad P(\xi = 4) = 1/3 \cdot (2/3)^3 = 8/81;$

$P(\xi = 5) = 1/3 \cdot (2/3)^4 = 16/243; \dots$

ξ	1	2	3	4	5	...	k	...
p	1/3	2/9	4/27	8/81	16/243	...	$2^{k-1}/3^k$	...

$$M(\xi) = \frac{1}{p} = \mathbf{3}. \qquad D(\xi) = \frac{q}{p^2} = \mathbf{6}.$$

$$P = 2/3^2 + 4/3^3 + 8/3^4 + 16/3^5 = \frac{54+36+24+16}{343} = \frac{130}{243} \approx \mathbf{0{,}535}. \ ►$$

Ответ: $\boxed{M(\xi) = \mathbf{3};\, D(\xi) = \mathbf{6};\, P = \frac{130}{243} \approx \mathbf{0{,}535}.}$

Задания для самостоятельной работы

17.1. Стрелок, имея бесконечное число патронов, стреляет до первого промаха. Вероятность попадания стрелка при каждом выстреле одинакова и равна 0,6. Построить ряд распределения дискретной случайной величины ξ — числа произведённых выстрелов. Найти вероятность того, что будет произведено менее пяти выстрелов.

17.2. Ведется стрельба по мишени до первого промаха. Стрелок имеет на руках 3 патрона, вероятность его попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,8. Случайная величина ξ — число истраченных патронов. Найдите среднее квадратическое отклонение д.с.в. ξ .

17.3. Производится 15 выстрелов по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле постоянна и равна 0,6. Построить ряд распределения дискретной случайной величины ξ — числа попаданий в мишень, найти наивероятнейшее число m* попаданий и в ответе выписать значение вероятности того, что число попаданий будет m* попаданий.

17.4. На проверку поступило 5 деталей, из которых 2 бракованные. Детали проверяются до обнаружения бракованной детали. Построить ряд распределения дискретной случайной величины ξ — числа проверенных деталей. Найти среднеквадратическое отклонение случайной величины ξ.

17.5. Фирма отправила заказчику 300 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,01. Составить ряд распределения числа повреждённых изделий в пути.

17.6. Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,001. Телефонная станция обслуживает 500 абонентов. Чему равны дисперсия и среднее число абонентов, которые позвонят на коммутатор в течение часа?

17.7.

17.8.

17.9.

17.10.