23. Подготовка к контрольной работе №2. Случайные величины

Примерный вариант контрольной работы №2

Пример 23.1. *В урне из 15 шаров 3 белых. Шар извлекают, смотрят цвет и кладут на место. Найти математическое ожидание и дисперсию д.с.в. ξ — числа извлечённых белых шаров при 8 подходах и вероятность того, что белый шар появится не менее двух раз.*

Пример 23.2. *Лампочки проверяют до первой бракованной, всего имеется 5 лампочек. Составить ряд распределения д.с.в. ξ — числа проверенных лампочек. Вероятность работы любой лампочки равна* 0,8. *Найти $M(\xi), D(\xi)$, функцию распределения д.с.в. ξ и построить её график.*

Пример 23.3. *Н.с.в. ξ задаётся плотностью распределения вероятностей* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{A}{1+x^2}, & x \in (-1;1], \\ 0, & x \notin (-1;1]. \end{cases}$ *Найти вероятность попадания ξ в интервал* $(0;\sqrt{3}/3)$.

Пример 23.4. *Н.с.в. ξ распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 4$. Найти функцию распределения $F(x)$ н.с.в. ξ, $M(\xi)$, $D(\xi)$, $P(0{,}25 \leqslant \xi \leqslant 0{,}75)$ и отобразить графически полученное решение.*

Пример 23.5. *Д.с.в. ξ и η независимы. Найти ряд распределения д.с.в. $\theta = 2\xi - 4\eta$, математическое ожидание и дисперсию θ. Ряды распределения д.с.в. ξ и η равны:*

ξ	0	1	2
P	0,5	0,25	0,25

η	-1	0
P	0,5	0,5

Пример 23.6. *Непрерывный случайный вектор $(\xi;\eta)$ задаётся плотностью распределения вероятностей*

$$f(x,y) = \begin{cases} A\cos x\cos y, & (x,y) \in D : \{x \in (0;\pi/2], y \in (0;\pi/2]\}, \\ 0, & (x,y) \notin D. \end{cases}$$

Найти функции плотности распределения компонент случайного вектора $(\xi;\eta)$: $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$. Схематически постройте их графики. Найдите $M(\xi)$ и $M(\eta)$.

Решение примерного варианта контрольной работы №2

Пример 23.1. *В урне из 15 шаров 3 белых. Шар извлекают, смотрят цвет и кладут на место. Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины ξ — числа извлечённых белых шаров при 8 подходах и вероятность того, что белый шар появится не менее двух раз.*

Пусть проведено n независимых испытаний с вероятностью p появления события A в каждом испытании (испытания Бернулли). Обозначим ξ — случайную величину, равную числу появлений события A в n испытаниях. По формуле Бернулли

$$P(\xi = m) = P(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \text{ где } q = 1 - p,\ m = 0{,}1,\ \ldots, n. \tag{23.1}$$

Определение 23.1. *Распределение дискретной случайной величины, задаваемое нижеприведенной таблицей, называется* ***биномиальным****.*

ξ	0	1	2	$\ldots$	k	$\ldots$	$n-1$	n
P	q^n	npq^{n-1}	$C_n^2p^2q^{n-2}$	$\ldots$	$C_n^kp^kq^{n-k}$	$\ldots$	$np^{n-1}q$	p^n

$$M(\xi) = n \cdot p, \quad D(\xi) = n \cdot p \cdot q. \tag{23.2}$$

◀ Найдём искомые вероятности по формуле Бернулли при $n = 8$, $p = \dfrac{3}{15} = 0{,}2$.

$$P_8(0) = 0{,}8^8 = 0{,}16777216; \quad P_8(1) = 8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^7 = 0{,}3355443.$$

Пусть A искомое событие. Тогда
$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - (P_8(0) + P_8(1)) \approx 0{,}\mathbf{497}$.

По формулам (23.2) находим:
$M(\xi) = n \cdot p = 8 \cdot 0{,}2 = \mathbf{1{,}6}$;
$D(\xi) = nqp = 8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = \mathbf{1{,}28}$. ▶

Ответ: $\boxed{P(A) \approx 0.497,\ M(\xi) = 1{,}6,\ D(\xi) = 1{,}28.}$

Пример 23.2. *Лампочки проверяют до первой бракованной, но всего имеется 5 лампочек. Составить ряд распределения д.с.в.* ξ *— числа проверенных лампочек. Вероятность работы любой лампочки равна* 0,8. *Найти* $M(\xi), D(\xi)$, *функцию распределения д.с.в.* ξ *и построить её график.*

◀ Случайная величина ξ может принимать следующие значения: 1, 2, 3, 4, 5. Найдем вероятности, с которыми она принимает эти значения. Здесь имеет место геометрическое распределение, где $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$.

$P(\xi = 1)$ есть вероятность, что первая лампочка оказалась бракованной. Значение этой вероятности, согласно условию, равна 0,2;
$P(\xi = 1) = 0{,}2$; $P(\xi = 2) = 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}16$;
$P(\xi = 3) = 0{,}8^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}128$;
$P(\xi = 4) = 0{,}8^3 \cdot 0{,}2 = 0{,}1024$.

Событие состоящее в том, что будут проверены все пять лампочек будет состоять из двух событий: первые четыре лампочки исправны, а пятая неисправна и все пять исправны.

Данная вероятность равна
$P(\xi = 5) = 0{,}8^4 \cdot 0{,}2 + 0{,}8^5 = 0{,}8^4(0{,}2 + 0{,}8) = 0{,}8^4 = 0{,}4096$.

Таким образом, ряд распределения имеет вид:

ξ	1	2	3	4	5
p	0,2	0,16	0,128	0,1024	0,4096

$M(\xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k p_k = 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}16 + 3 \cdot 0{,}128 + 4 \cdot 0{,}1024 + 5 \cdot 0{,}4096 =$
$= \mathbf{3{,}3616}$.

$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi)$.

$M(\xi^2) = \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k)^2 p_k = 1 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}16 + 9 \cdot 0{,}128 + 16 \cdot 0{,}1024 +$
$+ 25 \cdot 0{,}4096 = 13{,}8704$.

$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = 13{,}8704 - 3{,}3616^2 \approx \mathbf{2{,}570}$.

Найдём теперь функцию распределения $F(x) = P(\xi < x)$.

При $x \leqslant 1$ функция $F(x) = 0$, так как ξ не принимает значений меньших единицы. Если $1 < x \leqslant 2$, то $F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = 1) = 0{,}2$. Если $2 < x \leqslant 3$, то событие, заключающееся в том, что случайная величина ξ удовлетворяет неравенству $\xi < x$, можно представить как сумму двух несовместных событий: $\xi < 2$ и $2 \leqslant \xi < 3$. Поэтому по теореме сложения имеем:
$F(x) = P(\xi < x) = P((\xi < 2) + (2 \leqslant \xi < 3)) = P(\xi < 2) + P(2 \leqslant \xi < 3) = 0{,}36$
и так далее.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \leqslant 1, \\ 0{,}2, & \text{при} \quad 1 < x \leqslant 2, \\ 0,36, & \text{при} \quad 2 < x \leqslant 3, \\ 0,488, & \text{при} \quad 3 < x \leqslant 4, \\ 0,5094, & \text{при} \quad 4 < x \leqslant 5, \\ 1, & \text{при} \quad 5 < x. \end{cases}$$

График этой функции $F(x)$ является ступенчатой линией со скачками в точках $x = k, k = 1, 2, 3, 4, 5$, равными вероятностям $P(\xi = k)$, рис. 49. ►

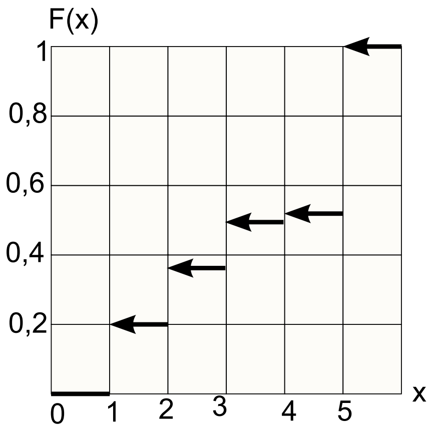

Рисунок 49. $F(x)$

Пример 23.3. *Н.с.в. ξ задаётся плотностью распределения вероятностей* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{A}{1+x^2}, & x \in (-1; 1], \\ 0, & x \notin (-1; 1]. \end{cases}$ *Найти вероятность попадания ξ в интервал $(0; \sqrt{3}/3)$. Построить графики функции плотности вероятностей и функции распределения вероятностей.*

◄ Для нахождения A воспользуемся свойством плотности распределения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{A}{1+x^2}dx = 1 \Leftrightarrow A \operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^{1} = 1 \Leftrightarrow$$

$$A(\operatorname{arctg}(1) - \operatorname{arctg}(-1)) = A\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = A\pi/2 \Rightarrow A = \frac{2}{\pi}. \Rightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi(1+x^2)}, & x \in (-1; 1], \\ 0, & x \notin (-1; 1]. \end{cases}$$

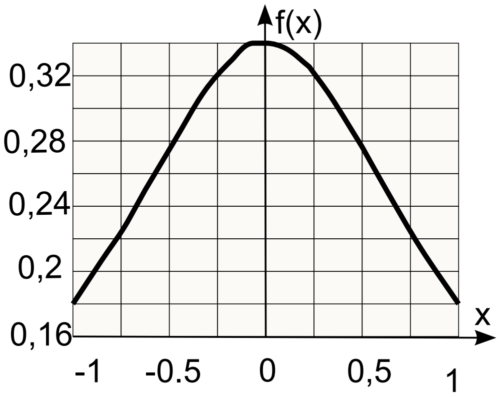

Рисунок 50. $f(x)$

График плотности $f(x)$ изображен на рис. 50.

Для нахождения функции распределения $F(x)$, связанной с плотностью формулой $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$, рассмотрим три возможных случая расположения x:

$$(1)\ x \leqslant -1 \Rightarrow F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0;$$

$$(2)\ -1 < x \leqslant 1 \Rightarrow F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0dt + \int\limits_{-1}^{x} \frac{2}{\pi(1+t^2)}dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} t\Big|_{-1}^{x} = \frac{2}{\pi}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2\operatorname{arctg} x}{\pi};$$

$$(3)\ 1 < x \Rightarrow F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0dt + \int\limits_{-1}^{1} \frac{2}{\pi(1+t^2)}dt + \int\limits_{1}^{x} 0dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\operatorname{arctg} t\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Окончательно получаем:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при}\quad x \leqslant -1; \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{2\operatorname{arctg} x}{\pi}, & \text{при}\quad -1 < x \leqslant 1; \\ 1, & \text{при}\quad x > 1. \end{cases}$$

График функции $F(x)$ на интервале $x \in (-1; 1)$, представлен на рис. 51.

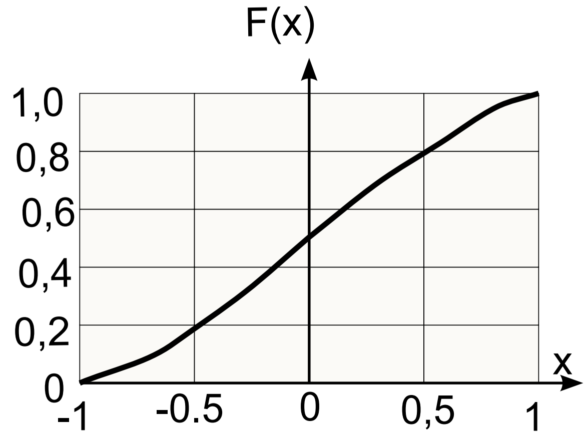

Рисунок 51. $F(x)$

$$P\left(x \in (0; \sqrt{3}/3)\right) = F(\sqrt{3}/3) - F(0) = \left(0{,}5 + \frac{2\,\mathrm{arctg}\,(\sqrt{3}/3)}{\pi}\right) -$$
$$-\left(0{,}5 + \frac{2\,\mathrm{arctg}(0)}{\pi}\right) = \frac{2\pi/6}{\pi} = \frac{1}{3}. \quad ▶$$

Ответ: $\boxed{A = \frac{1}{\pi},\ P\left(x \in (0; \sqrt{3}/3)\right) = \frac{1}{3}.}$

Пример 23.4. *Н.с.в. ξ распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 4$. Найти функцию распределения $F(x)$ н.с.в. ξ, $M(\xi)$, $D(\xi)$, $P(0{,}25 \leqslant \xi \leqslant 0{,}75)$ и отобразить графически полученное решение.*

Определение 23.2. *Распределение непрерывной случайной величины называется* ***экспоненциальным (показательным)****, если плотность распределения имеет вид:*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad x < 0, \quad \text{где } \lambda > 0. \end{cases} \tag{23.3}$$

Экспоненциальное распределение определяется одним параметром $\lambda > 0$.

Математическое ожидание и дисперсия равны

$$M(\xi) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{23.4}$$

◀ Найдем функцию распределения:

$$\text{при } x \geqslant 0 \quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{0}^{x} 4e^{-4t}dt = -e^{-4t}\Big|_0^x = 1 - e^{-4x};$$

$$\text{при } x < 0 \quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$$

По формулам (23.4), числовые характеристики случайной величины ξ
$M(\xi) = \dfrac{1}{\lambda} = \mathbf{0{,}25}$, $\qquad D(\xi) = \dfrac{1}{\lambda^2} = \mathbf{0{,}625}$.

$P(0{,}25 \leqslant \xi \leqslant 0{,}75) = F(0{,}75) - F(0{,}25) = \left(1 - e^{-4\cdot 0{,}75}\right) - \left(1 - e^{-4\cdot 0{,}25}\right) =$
$= \dfrac{1}{e} - \dfrac{1}{e^3} \approx \mathbf{0{,}318}$.

На рис. 52 изображен график функции плотности данного распределения.

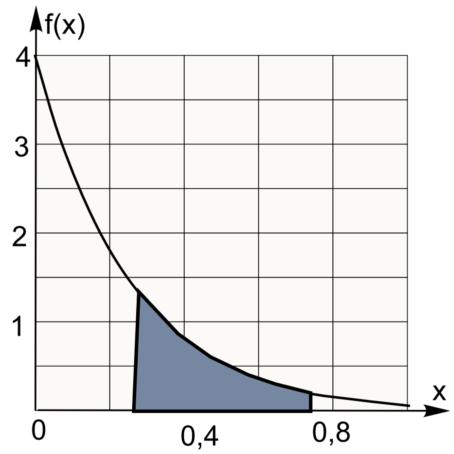

Рисунок 52. *Функция* $f(x)$

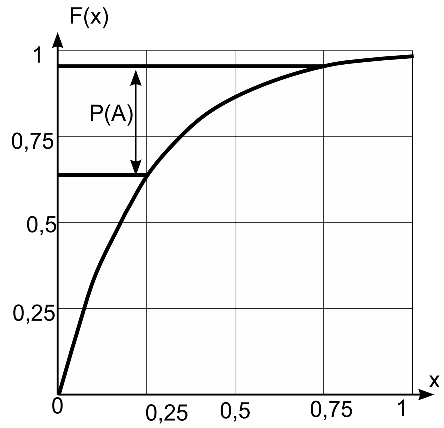

Рисунок 53. *Функция* $F(x)$

Искомая вероятность равна закрашенной области. На рис. 53 представлен график функции распределения. Искомая вероятность равна приращению функции $F(0,75) - F(0,25)$. ▶

Ответ: $\boxed{M(\xi) = 0{,}25; \ D(\xi) = 0{,}625; \quad F(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ 1 - e^{-4x}, x \geqslant 0. \end{cases}}$

Пример 23.5. *Д.с.в. ξ и η независимы. Найти ряд распределения д.с.в. $\theta = 2\xi - 4\eta$, математическое ожидание и дисперсию θ. Ряды распределения д.с.в. ξ и η равны:*

ξ	*0*	*1*	*2*
P	*0,5*	*0,25*	*0,25*

η	*-1*	*0*
P	*0,5*	*0,5*

◀ Ряды распределения д.с.в. 2ξ и -4η равны:

2ξ	0	2	4
P	0,5	0,25	0,25

-4η	0	4
P	0,5	0,5

$M(\xi) = 1 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}25 = 0{,}75.$

$M(\eta) = -1 \cdot 0{,}5 = -0{,}5.$

$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = 1^2 \cdot 0{,}25 + 2^2 \cdot 0{,}25 - (0{,}75)^2 =$
$= 0{,}25 + 1 - 0{,}5625 = 0{,}6875.$

$D(\eta) = M(\eta^2) - M^2(\eta) = (-1)^2 \cdot 0{,}5 - 0{,}25 = 0{,}25.$

Случайная величина $\theta = 2\xi - 4\eta$ принимает следующие значения: $\theta = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Найдём вероятности

$P(\theta = 0) = P(2\xi = 0) \cdot P(-4\eta = 0) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25.$

$P(\theta = 2) = P(2\xi = 2) \cdot P(-4\eta = 0) = 0{,}25 \cdot 0{,}5 = 0{,}125.$

$P(\theta = 4) = P(2\xi = 0) \cdot P(-4\eta = 4) + P(4\xi = 4) \cdot P(-4\eta = 0) =$
$= 0{,}5 \cdot 0{,}5 + 0{,}25 \cdot 0{,}5 = 0{,}375.$

$P(\theta = 6) = P(2\xi = 2) \cdot P(-4\eta = 4) = 0{,}25 \cdot 0{,}5 = 0{,}125.$

$P(\theta = 8) = P(2\xi = 4) \cdot P(-4\eta = 4) = 0{,}25 \cdot 0{,}5 = 0{,}125.$

θ	0	2	4	6	8
P	0,25	0,125	0,375	0,125	0,125

$M(\theta) = 0 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}125 + 4 \cdot 0{,}375 + 6 \cdot 0{,}125 + 8 \cdot 0{,}125 = 16 \cdot 0{,}125 + 1{,}5 = \mathbf{3{,}5}.$

$D(\theta) = 4 \cdot 0{,}125 + 16 \cdot 0{,}375 + 36 \cdot 0{,}125 + 64 \cdot 0{,}125 - (3{,}5)^2 =$
$= 19 - 12{,}25 = \mathbf{6{,}75}.$

Найдём теперь $M(\theta)$ и $D(\theta)$ используя свойства математического ожидания и дисперсии.

$M(\theta) = 2 \cdot M(\xi) - 4 \cdot M(\eta) = 2 \cdot 0{,}75 + 4 \cdot 0{,}5 = \mathbf{3{,}5}.$

$D(\theta) = 2^2 \cdot D(\xi) + (-4)^2 \cdot D(\eta) = 4 \cdot 0{,}6875 + 16 \cdot 0{,}4375 = \mathbf{6{,}75}.$

Результаты совпали. ▶

Пример 23.6. *Непрерывный случайный вектор* $(\xi;\eta)$ *задаётся плотностью распределения вероятностей*

$$f(x,y)=\begin{cases} A\cos x\cos y, & (x,y)\in D:\{x\in(0;\pi/2], y\in(0;\pi/2]\},\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

Найти функции плотности распределения случайных величин $f_\xi(x)$ *и* $f_\eta(y)$ *и схематически постройте их графики. Найдите* $M(\xi)$ *и* $M(\eta)$.

◀ $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1\Rightarrow$

$$A\int\limits_0^{\pi/2}(\cos x)dx\int\limits_0^{\pi/2}(\cos y)dy=A\left(\int\limits_0^{\pi/2}\cos x\,dx\right)^2=A\left(\sin x\Big|_0^{\pi/2}\right)^2=A\Rightarrow A=1.$$

Формулы $M(\xi)$ и $M(\eta)$.

$$M(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}xf_\xi(x)dx.\quad M(\eta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}yf_\eta(y)dxdy.$$

Найдём функции плотности распределения случайных величин ξ и η

$$f_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}0, x\notin[0;\pi/2],\\ \int\limits_0^{\pi/2}\cos x\cos ydy=\cos x\sin y\Big|_0^{\pi/2}=\cos x, x\in[0;\pi/2].\end{cases}$$

$$f_\eta(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}0, y\notin[0;\pi/2],\\ \int\limits_0^{\pi/2}\cos x\cos ydx=\cos y\sin x\Big|_0^{\pi/2}=\cos y, y\in[0;\pi/2].\end{cases}$$

$$M(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}xf_\xi(x)dx=\int\limits_0^{\pi/2}x\cos xdx=\int\limits_0^{\pi/2}xd(\sin x)-$$

$$-x\sin x\Big|_0^{\pi/2}-\int\limits_0^{\pi/2}\sin xdx=\pi/2+\cos x\Big|_0^{\pi/2}=\pi/2-1.$$

$$M(\eta)=\pi/2-1.$$ ▶