# ТВиМС. Практическое занятие №7

## 7. Повторные независимые испытания

Повторные испытания. Формула Бернулли. Производящие функции. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа. Формула Пуассона. Отклонение частоты от вероятности.

### 7.1. Формула Бернулли

Предположим, что производится $n$ независимых испытаний, в результате каждого из которых может наступить или не наступить некоторое событие $A$. Обозначим $P(A) = p$, $P(\overline{A}) = 1 - p = q$ и определим $P_n(m)$ — вероятность того, что событие $A$ произойдет $m$ раз в $n$ испытаниях.

Для вычисления $P_n(m)$ используется формула Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{7.1}$$

Для вычисления вероятности по формуле Бернулли (7.1), в пакет Maxima встроена функция pdf_binomial(m,n,p).

***Пример*** 7.1. *Инструкция к устройству состоит из* 10 *страниц. Вероятность опечатки на каждой странице равна* 0,05. *Найти вероятность того, что на двух страницах инструкции будут опечатки.*

◀ Здесь $n = 10$, $p = 0{,}05$, $q = 1 - p = 0{,}95$, $m = 2$. По формуле Бернулли (7.1)

$$P_{10}(2) = C_{10}^2 \cdot p^2 \cdot q^8 = \frac{10!}{2!8!} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^8 \approx \mathbf{0{,}075}. \ ▶$$

**Ответ:** $\boxed{P_{10}(2) \approx 0{,}075.}$

***Пример*** 7.2. *Вероятность выпуска стандартного изделия на автоматической линии равна* 0,9. *Определить вероятности того, что из пяти наудачу взятых изделий* $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ *окажутся стандартными.*

◀ По формуле (7.1) при $n = 5$, $m = 0$, $p = 0{,}9$, $q = 0{,}1$ найдем вероятность того, что среди пяти взятых изделий не окажется стандартных

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot (0{,}9)^0 \cdot (0{,}1)^5 = 10^{-5}.$$

Как видим, это событие оказалось маловероятным. При других $m$ будем иметь:

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot (0{,}9)^1 \cdot (0{,}1)^4 = \frac{5!}{1!4!} \cdot 0{,}9 \cdot 10^{-4} = 0{,}00045,$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot (0{,}9)^2 \cdot (0{,}1)^3 = \frac{5!}{2!3!} \cdot 0{,}81 \cdot 10^{-3} = 0{,}0081,$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot (0{,}9)^3 \cdot (0{,}1)^2 = \frac{5!}{3!2!} \cdot 0{,}729 \cdot 10^{-2} = 0{,}0729,$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot (0{,}9)^4 \cdot (0{,}1)^1 = \frac{5!}{4!1!} \cdot 0{,}6561 \cdot 0{,}1 = 0{,}32805,$$

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot (0{,}9)^5 \cdot (0{,}1)^0 = 0{,}59049.$$

Отметим, что сумма всех вероятностей равна 1.

$$\sum_{m=0}^{5} P_5(m) = 1.$$

Так как вероятность $p_5(5) \approx 0{,}591$ довольно высокая, то наиболее вероятным оказался выпуск пяти стандартных изделий.

Решение данного примера является достаточно трудоемкой задачей, поэтому проще воспользоваться компьютерным пакетом. Напишем простейшую и понятную без комментариев Maxima-программу, которая, кроме вычислений вероятностей, ещё иллюстрирует полученные значения вероятностей.

```
(%i1) load(distrib)$   fpprintprec:5$
(%i3) P:makelist(pdf_binomial(k, 5, 0.9), k, 0, 5);
(%o3) [1.0 10^-5,  4.5 10^-4,  0.0081,  0.0729,  0.3281,  0.5905]
(%i4) wxplot2d( ['discrete, P],[style,points])$
```

Во второй строке программы создаётся список, в который записываются вероятности вычисленные по формуле Бернулли при $k = 0, 1, \cdots, 5$: $P_5(0), \cdots, P_5(5)$. Функция wxplot2d графически отображает значения полученных вероятностей, рис. 22. ▶

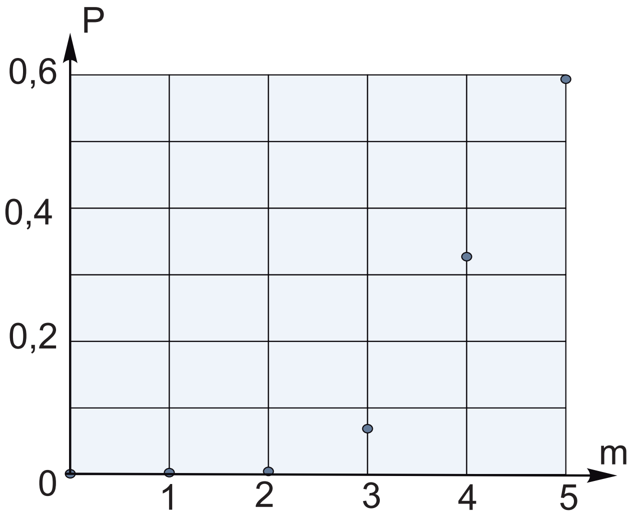


Рисунок 22. *К примеру 7.2*

**Ответ:** $\boxed{P \approx \{10^{-5},\quad 0{,}00005,\quad 0{,}0081,\quad 0{,}0729,\quad 0{,}3281,\quad 0{,}5905\}}$.

***Пример*** 7.3. *3D-принтер печатает детали сложной формы, которые поступают на склад. Вероятность выхода нестандартной детали равна* $0,07$. *Найти вероятность того, что среди наудачу выбранных шести деталей:*
*а) не окажется ни одной бракованной детали;*
*б) не более двух деталей будут бракованными;*
*в) более двух деталей будут бракованными.*

◀ Здесь $n = 6,\ p = 0{,}07,\ q = 0{,}93.$

а) Вероятность $P_1$ того, что не окажется ни одной бракованной детали, найдем по формуле Бернулли при $m = 0$:
$P_1 = P_6(0) = C_6^0 \cdot (0{,}07)^0 \cdot (0{,}93)^6 \approx \mathbf{0{,}647}.$
б) найдем сначала вероятности $P_6(1)$ и $P_6(2)$:

$$P_6(1) = C_6^1 \cdot (0{,}07)^1 \cdot (0{,}93)^5 \approx 0{,}292,$$

$$P_6(2) = C_6^2 \cdot (0{,}07)^2 \cdot (0{,}93)^4 \approx 0{,}055.$$

Тогда вероятность $P_2$ того, что не более двух деталей будут бракованными, определится как сумма

$$P_2 = P_6(0) + P_6(1) + P_6(2) \approx \mathbf{0{,}994}.$$

в) Так как

$$\sum_{m=0}^{6} P_6(m) = 1,$$

то искомая вероятность $P_3$ того, что более двух деталей будут бракованными, определяется как сумма вероятностей:

$$P_3 = \sum_{m=3}^{6} P_6(m) = \sum_{m=0}^{6} P_6(m) - \sum_{m=0}^{2} P_6(m) \approx 1 - 0{,}994 = \mathbf{0{,}006}.$$ ▶

**Ответ:** $\boxed{P_1 \approx 0{,}647\ P_2 \approx 0{,}994\ P_3 \approx 0{,}006.}$

**Пример** 7.4. *Автомат производит с вероятностью 0,92 годное изделие, с вероятностью 0,06 – изделие с устранимым браком и с вероятностью 0,02 – с неустранимым браком. Произведено 50 изделий. Определить вероятность того, что среди них будет три изделия с устранимым браком и одно с неустранимым браком.*

**Замечание** 7.1. *Формула Бернулли обобщается на тот случай, когда в результате каждого опыта возможны не два исхода $A$ и $\overline{A}$, а несколько. Пусть производится $n$ независимых опытов в одинаковых условиях, в каждом из которых может произойти только одно из событий $A_1, A_2, \ldots, A_m$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_m$, причём*

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

*Тогда вероятность того, что в $k_1$ опытах появится событие $A_1$, а в $k_m$ опытах — событие $A_m$ $\left(\sum\limits_{j=1}^{m} k_j = n\right)$, определяется формулой полиномиального распределения*

$$P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2! \ldots k_m!} \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}. \tag{7.2}$$

◀ Применим для решения данной задачи формулу (7.2) полиномиального распределения. Здесь $n = 50$, $p_1 = 0{,}92$, $p_2 = 0{,}06$, $p_3 = 0{,}02$, $k_2 = 3$, $k_3 = 1$, $k_1 = n - k_2 - k_3 = 46$.

Тогда

$P_{50}(46, 3, 1) = \dfrac{50!}{46!3!1!} \cdot 0{,}92^{46} \cdot 0{,}06^3 \cdot 0{,}02^1 =$

$= \dfrac{47 \cdot 48 \cdot 49 \cdot 50}{6} \cdot 0{,}02162 \cdot 0{,}000216 \cdot 0{,}02 \approx \mathbf{0{,}086}$. ▶

**Ответ:** $\boxed{\approx 0{,}086.}$

## 7.2. Наивероятнейшее число появления события

Часто необходимо знать значение $m$, при котором вероятность $P_n(m)$ максимальна; это значение $m$ называется наивероятнейшим числом $m^*$ наступления события $A$ в $n$ испытаниях.

Можно показать, что

$$(n+1)p - 1 \leqslant m^* \leqslant (n+1)p. \tag{7.3}$$

Эту формулу можно записать в виде

$$np - q \leqslant m^* \leqslant np + p. \tag{7.4}$$

Возможны случаи когда неравенству (7.3) удовлетворяют два целых значения $m^*$, тогда имеются два наивероятнейших числа $m_1^*$ и $m_2^* = m_1^* + 1$.

***Пример*** 7.5. *В цехе восемь одинаковых конвейеров, работающих независимо друг от друга. Вероятность остановки в течении рабочего дня для каждого конвейера равна* 0,6. *Найти наивероятнейшее число $m^*$ остановок конвейеров в день и вероятность вероятность того, что будет $m^*$ остановок конвейеров.*

◄ Здесь $n = 8$, $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$. Тогда

$$np - q \leqslant m^* \leqslant np + p. \quad \text{или} \quad 4,4 \leqslant m^* \leqslant 5,4.$$

Следовательно, наиболее вероятное число заявок $m^* = \mathbf{5}$. Вероятность пяти заявок из восьми равна

$$P_8(5) = C_8^5 \cdot (0{,}6)^5 \cdot (0{,}4)^3 = \frac{8!}{3!5!} \cdot 0{,}07776 \cdot 0{,}064 \approx \mathbf{0{,}279}. \ ►$$

**Ответ:** $\boxed{m^* = 5,\ P_8(5) \approx 0{,}279.}$

***Пример*** 7.6. *Вероятность выпуска приборов высшего качества для некоторого предприятия равна* 0,75. *На контроль случайным образом выбрали партию из* 103 *приборов. Какое число приборов высшего качества в выбранной партии наиболее вероятно?*

◀ Обозначим $p = 0{,}75$, $q = 0{,}25$, $n = 103$. Тогда

$$0{,}75 \cdot 104 - 1 \leqslant m^* \leqslant 0{,}75 \cdot 104 \quad \text{или} \quad 77 \leqslant m^* \leqslant 78.$$

Так как здесь $(n+1)p = 78$ есть целое число, то существуют два наивероятнейших числа: $m^* = 77$, $m^* = 78$. ▶

**Ответ:** $\boxed{m^* = 77 \text{ и } 78.}$

На рис. 23, представлено графическое распределение вероятностей $P_{103}(m)$ в диапазоне $65 \leqslant m \leqslant 90$ для примера 7.6. Ниже приведена Maxima-программа.

```
kill(all)$ load ("distrib")$ fpprintprec:5$
n:103$   p:0.75$
P:makelist(pdf_binomial(k, n, p), k, 1,90)$
wxplot2d( ['discrete, P],[x,65,90],[style,points])$
["P77 = ", P[77], "P78 = ", P[78]];
```

Вывод программы: график и вероятности $[P77 = 0.09003, P78 = 0.09003]$

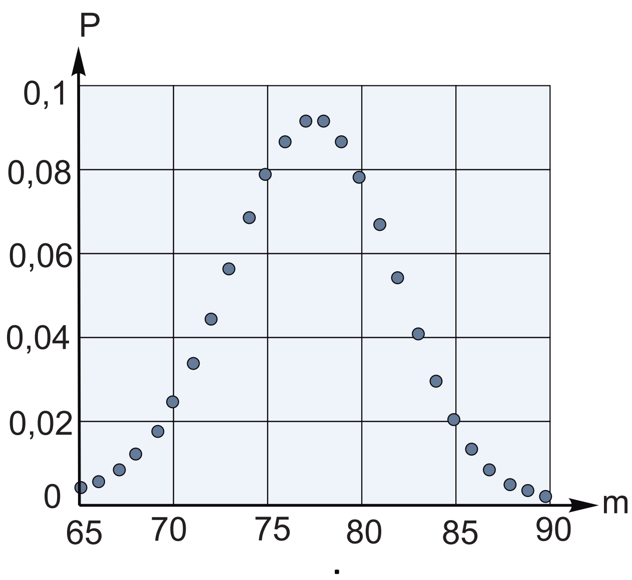


Рисунок 23. *К примеру 7.6*

# Задания для самостоятельной работы

**7.1.** Определить вероятность того, что в семье, имеющей пять детей, будет два мальчика. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,52, девочки 0,48.

**7.2.** Вероятность изготовления бракованного изделия равна 0,01. Из большой партии изделий отбирается 10 штук и проверяется их качество. Если среди них окажется два или более бракованных, то вся партия не принимается. Определить вероятность того, что вся партия будет отвергнута.

**7.3.** Устройство состоит из 12 элементов с одинаковой надежностью 0,9. (Надежность элемента – вероятность его работы за время $t$.) Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что за время $t$ выйдет из строя более одного элемента.

**7.4.** Вероятность вытащить выигрышный лотерейный билет равна 0,2. Найти вероятность того, что из 11 купленных билетов будет 2 или 3 выигрышных.

**7.5.** Прибор состоит из 3 независимо работающих блоков. Вероятности отказов блоков за время $t$ и соответственно равны: $p_1 = 0{,}2, p_2 = 0{,}3, p_3 = 0{,}4$. Найти вероятности того, что откажут: а) все блоки; б) два блока; в) один блок; г) 0 блоков.

**7.6.** Борец побеждает соперника с вероятностью 0,5. Расположите следующие события в порядке убывания их вероятностей: А) в 7 схватках будет менее 3 побед; Б) в 8 схватках будет не менее 6 побед; В) в 6 схватках будет более 3 побед; Г) в 5 схватках будет менее 2 побед.

**7.7.** Всхожесть семян моркови данной партии составляет 80%. Найти наивероятнейшее число всхожих семян из в партии из 300 луковиц.

**7.8.** По мишени произведено три выстрела. Вероятность попаданий при каждом выстреле одинаковая и равна 0,8. Найти вероятность $n$ попаданий, для $n = 0, 1, 2, 3$.

**7.9.** Вероятность приема радиосигнала при каждой передаче одинакова и равна 0,6. Найти вероятность того, что при четырёхкратной передаче сигнал будет принят три раза.

**7.10.** В урне два белых и восемь чёрных шаров. Из урны наудачу вынимаются с возвращением 10 шаров. Найти вероятность того, что белых шаров будет вытащено более двух.

**7.11.** Вероятность появления события в каждом испытании равна 0,7. Сколько нужно провести испытаний, чтобы наивероятнейшее число появлений события равнялось 10?