19. Нормальное распределение

Определение 19.1. *Случайная величина ξ имеет* ***нормальное распределение*** *с параметрами a и σ, если её плотность распределения имеет вид:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \tag{19.1}$$

Кратко нормально распределённую случайную величину будем записывать так: $\xi \sim N(a;\sigma)$.

Нормальное распределение определяется двумя параметрами **a и σ.**

Функции распределения нормального закона выражается через функцию Лапласа $\Phi(x)$ (19.3):

$$F(x) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \tag{19.2}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt. \tag{19.3}$$

Для случайной величины ξ, имеющей нормальное распределение, параметры a и σ имеют простой вероятностный смысл:

$$M(\xi) = a; \quad D(\xi) = \sigma^2; \quad \sigma(\xi) = \sigma. \tag{19.4}$$

Формула для вычисления вероятности попадания нормальной случайной величины в заданный интервал:

$$P(x_1 \leqslant \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \left(0{,}5 + \Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right)\right) - \\ - \left(0{,}5 + \Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right)\right) = \Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right),$$

$$P(x_1 \leqslant \xi < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right). \tag{19.5}$$

Вероятность отклонения случайной величины от математического ожидания

$$P(|\xi - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \tag{19.6}$$

В Maxima значения функции плотности распределения (19.1) и функции распределения (19.2) для нормального закона вычисляются при помощи встроенных в пакет функций pdf_normal(x, a, σ) и cdf_normal(x, a, σ).

Пример 19.1. *Написать функцию плотности вероятности нормально распределённой случайной величины ξ, зная, что $M(\xi) = 4$, $D(\xi) = 25$ и построить график функции плотности и распределения.*

◀ Так как математическое ожидание $a = 4$, а среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{25} = 5$, то по формуле (19.1) получаем плотность распределения

$$f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-(x-4)^2/50}.$$

На рис. 19 представлен график функции плотности заданной $\xi \sim N(4;5)$. График функции $f(x)$ симметричен относительно прямой $x = a$, максимальное значение функция достигает в точке $x = a$ и примерно равно $\dfrac{0{,}4}{\sigma} = 0{,}08$. При любых значениях параметров a и σ по оси абсцисс график следует изображать в диапазоне $[a - 3\sigma; a + 3\sigma]$, вне этого отрезка значение функции близко к нулю. На рис. 20 изображен график функции распределения заданной случайной величины ξ. ▶

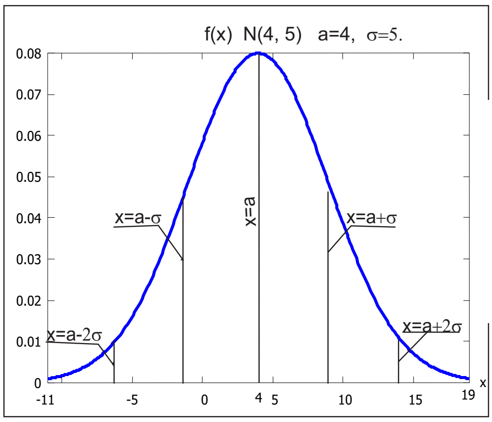

Рисунок 19. *К примеру 19.1*

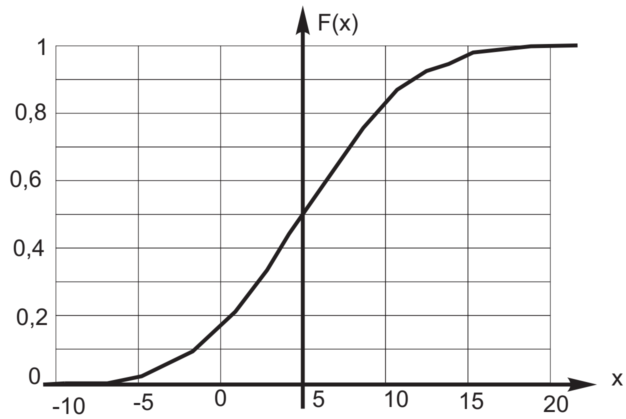

Рисунок 20. *К примеру 19.1*

Пример 19.2. *Случайная величина ξ подчиняется нормальному закону распределения вероятностей с параметрами $a = 0, \sigma = 1$. Определить: а) $P(-2 < \xi < 3)$, б) $P(\xi < 1)$, в) $P(\xi > 3)$. Привести геометрическую иллюстрацию полученного решения.*

◀ а) Применим формулу (19.5), полагая $a = 0$, $\sigma = 1, x_1 = -2$, $x_2 = 3$. Тогда

$$P(-2 < \xi < 3) = \Phi\left(\frac{3-0}{1}\right) - \Phi\left(\frac{-2-0}{1}\right) = \Phi(3) - \Phi(-2) =$$
$$= \Phi(3) + \Phi(2) \approx 0{,}499 + 0{,}477 = \mathbf{0{,}976}.$$

Значения $\Phi(3)$ и $\Phi(2)$ найдены из таблицы приложение 2.При этом мы учли нечетность функции Лапласа, $\Phi(-2) = -\Phi(2)$. ▶

◀ б) $P(\xi < 1) = P(-\infty < \xi < 1) = \Phi\left(\dfrac{1-0}{1}\right) - \Phi\left(\dfrac{-\infty-0}{1}\right) =$
$= \Phi(1) + \Phi(+\infty) \approx 0{,}3413 + 0{,}500 = \mathbf{0{,}841}$. ▶

◀ в) $P(\xi > 3) = P(3 < \xi < +\infty) = \Phi\left(\dfrac{\infty-0}{1}\right) - \Phi\left(\dfrac{3-0}{1}\right) =$
$= \Phi(+\infty) - \Phi(3) \approx 0{,}500 - 0{,}499 = \mathbf{0{,}001}$. ▶

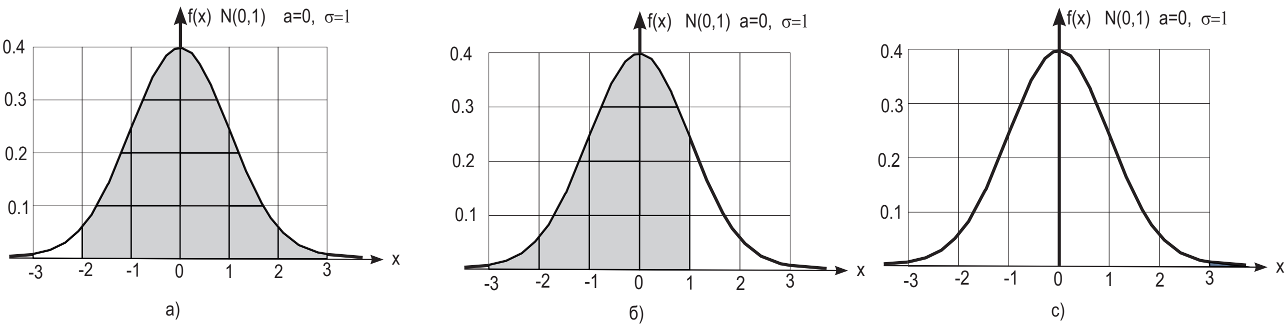

Рисунок 21. *К примеру 19.2*

На рис. 21 приведена геометрическая иллюстрация полученного решения.▶

Ответ: $\boxed{P(-2 < \xi < 3) \approx 0{,}976; \quad P(\xi < 1) \approx 0{,}841; \quad P(\xi > 3) \approx 0{,}001.}$

Пример 19.3. *Случайная величина ξ подчиняется нормальному закону распределения с параметрами $a = 3$, $\sigma = 2$. Найти: а) $P(|\xi - 3| < 2{,}5)$, б) $P(|\xi - 3| < 0{,}1)$, в) $P(|\xi - 2| < 2)$. Привести геометрическую иллюстрацию полученного решения.*

◀ а) Так как $a = 3$, то для нахождения вероятности неравенства $|\xi - 3| < 2{,}5$, применим формулу (19.6), где $\varepsilon = 2{,}5$. Числовые значения для функции Лапласа $\Phi(1{,}25)$ определяем из таблицы приложение 2.

$$P(|\xi - 3| < 2{,}5) = 2\Phi\left(\frac{2{,}5}{2}\right) = 2\Phi(1{,}25) = 2 \cdot 0{,}3944 = \mathbf{0{,}7888}. \ ▶$$

◀ б) Применяем эту же формулу:

$$P(|\xi - 3| < 0{,}1) = 2\Phi\left(\frac{0{,}1}{2}\right) = 2\Phi(0{,}05) \approx 2 \cdot 0{,}0199 = \mathbf{0{,}0398}. \ ▶$$

◀ в) В этом случае формулу (19.6) применять нельзя. Применяем общую формулу (19.5).

$$P(|\xi - 2| < 2) = P(0 < \xi < 4) = \Phi\left(\frac{4-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{0-3}{2}\right) =$$
$$= \Phi(0{,}5) - \Phi(-1{,}5) \approx 0{,}1915 + 0{,}4332 = \mathbf{0{,}6247}. \ ▶$$

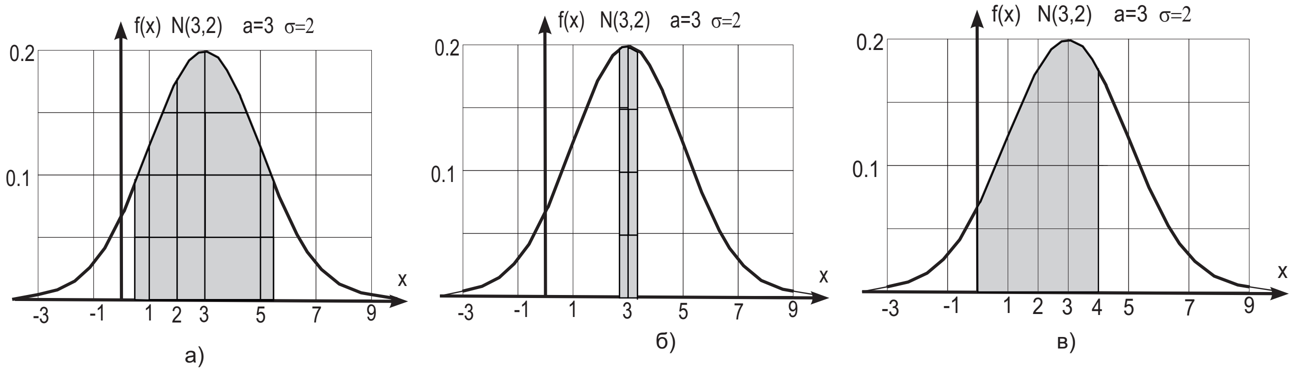

Рисунок 22. *К примеру 19.3*

На рис. 22 приведена геометрическая иллюстрация полученного решения.

Ответ: $\boxed{P(2<\xi<3)\approx 0{,}192;\quad P(|\xi-3|<0{,}1)\approx 0{,}04; P(|\xi-2|<2)\approx 0{,}625.}$

Пример 19.4. *Вычислить вероятность того, что случайная величина ξ, подчинённая нормальному закону, при трёх испытаниях хотя бы один раз окажется в интервале (4; 6), если $M(\xi)=3{,}8$, $\sigma(\xi)=0{,}6$.*

◀ Сначала найдем вероятность того, что случайная величина ξ будет заключена в интервале (4; 6). Применяем формулу (19.5):

$$P(4<\xi<6)=\Phi\left(\frac{6-3{,}8}{0{,}6}\right)-\Phi\left(\frac{4-3{,}8}{0{,}6}\right)=$$

$$=\Phi(3{,}67)-\Phi(0{,}33)\approx 0{,}500-0{,}129=0{,}371.$$

Тогда вероятность попадания вне интервала (4; 6) будет равна $1-0{,}371=$ $=0{,}629$. Вероятность того, что случайная величина ξ при трёх испытаниях все три раза окажется вне интервала (4; 6), найдется по теореме умножения независимых событий как $0{,}6294^3\approx 0{,}2489$. Следовательно, искомая вероятность $p=1-0{,}249=0{,}751$. ▶

Ответ: $\boxed{\approx 0{,}751.}$

Пример 19.5. *Длина изготовляемых деталей является нормально распределённой случайной величиной ξ с математическим ожиданием $a=8$ см. Вероятность того, что наудачу взятая деталь имеет размер от 7,6 до 7,8 см, равна 0,3. Чему равна вероятность того, что размер наудачу взятой детали будет в пределах от 8,2 до 8,4 см?*

◀ Поскольку кривая плотности нормального распределения симметрична относительно математического ожидания a, и при этом интервалы

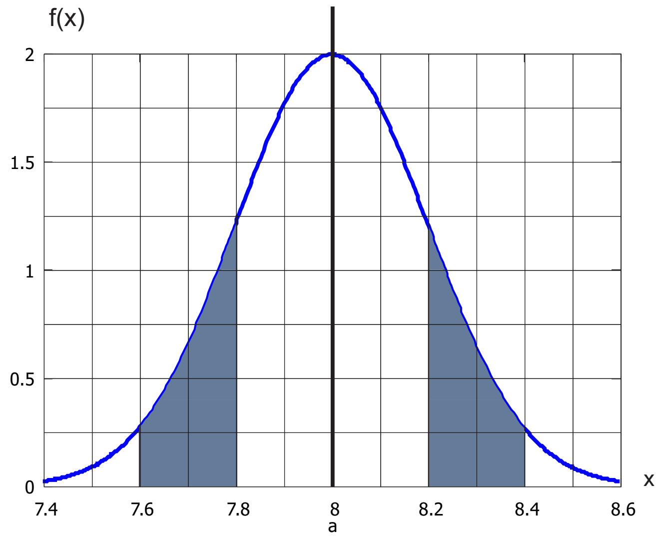

Рисунок 23. *Для примера 19.5*

(7,6; 7,8) и (8,2; 8,4), также симметричны относительно прямой $x = 8$, рис. 23. Следовательно,

$P(7{,}6 < \xi < 7{,}8) = P(8{,}2 < \xi < 8{,}4) = 0{,}3.$ ▶

Ответ: $\boxed{0{,}3.}$

Пример 19.6. *Длина детали представляет собой случайную величину ξ, распределённую по нормальному закону и имеющую поле допуска от* 78 *до* 84 *см. Известно, что брак по заниженному размеру (длина деталей меньше* 78 *см) составляет* 4%, *а брак по завышенному размеру (длина деталей больше* 84 *см)* 6%. *Найти средний размер детали a и среднее квадратическое отклонение σ.*

◀ Поле допуска находится от 78 до a и от a до 84. Вероятность попадания в первый интервал $0{,}5 - 0{,}04 = 0{,}46$, а во второй: $0{,}5 - 0{,}06 = 0{,}44$. Поскольку

$$P(78 < \xi < a) = \Phi(0) - \Phi\left(\frac{78 - a}{\sigma}\right) = 0{,}46,$$

$$P(a < \xi < 84) = \Phi\left(\frac{84 - a}{\sigma}\right) - \Phi(0) = 0{,}44$$

и функция Лапласа $\Phi(0) = 0$, то

$$\begin{cases} \Phi\left(\dfrac{78 - a}{\sigma}\right) = -0{,}46, \\ \Phi\left(\dfrac{84 - a}{\sigma}\right) = 0{,}44. \end{cases}$$

Из таблицы приложение 2, найдем значения аргументов функции Лапласа при который функция равна $-0{,}46$ и $0{,}44$:

$$\begin{cases} \dfrac{78-a}{\sigma} = -1{,}75, \\ \dfrac{84-a}{\sigma} = 1,55 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 = 3{,}3\sigma, \\ a = 78 + 1{,}75\sigma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma = 1{,}818, \\ a = 81{,}182. \end{cases}$$ ►

Ответ: $\boxed{a = 81{,}182, \quad \sigma = 1{,}818.}$

Пример 19.7. *Диаметр подшипников, выпускаемых заводом, представляет собой случайную величину ξ, распределённую по нормальному закону с $a = 15$ мм и $\sigma = 0{,}4$ мм. Найти вероятность брака P при условии, что разрешается допуск для диаметра подшипника $\pm 0{,}8$ мм. Какую точность диаметра подшипника можно гарантировать с вероятностью $0{,}92$?*

◄ Так как здесь отклонение $\varepsilon = 0{,}8$, то, согласно (19.6),

$$P(|\xi - 15| < 0{,}8) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{0{,}8}{0{,}4}\right) = 2 \cdot \Phi(2) \approx 2 \cdot 0{,}477 = 0{,}954.$$

Отсюда вероятность брака найдется, как вероятность противоположного события: $P = 1 - 0{,}954 = \mathbf{0{,}046}$.

Во второй части задачи, наоборот, задана вероятность $P(|\xi - a| < \varepsilon)$ и нужно найти отклонение ε. Подставим известные данные в формулу (19.6). Тогда $0{,}92 = 2 \cdot \Phi(\varepsilon/0{,}4)$, $\Phi(\varepsilon/0{,}4) = 0{,}46$. Из таблицы приложение 2. найдем, что $\varepsilon/0{,}4 = 1{,}75$ или $\varepsilon = \mathbf{0{,}7}$ мм. ►

Ответ: $\boxed{P \approx 0{,}05, \ \varepsilon = 0{,}7.}$

Пример 19.8. *Размер диаметра втулок считается нормально распределённым с $a = 2{,}5$ см и $\sigma = 0{,}01$ см. В каких границах можно практически гарантировать размер диаметра втулки ξ, если за вероятность практической достоверности принимается $0{,}9973$?*

◄ Согласно правилу «3σ» (трёх сигм):

$$P(|\xi - a| < 3\sigma) = 0{,}9973.$$

Отсюда получим: $|\xi - a| < 3\sigma$, $a - 3\sigma < \xi < a + 3\sigma$,
$2,5 - 0{,}03 < \xi < 2,5 + 0{,}03$ или $2{,}47 < \xi < 2{,}53$. ►

Ответ: $\boxed{\xi \in (2{,}47; 2{,}53).}$

Пример 19.9. *Срок безотказной работы прибора является случайной величиной, распределённой по нормальному закону. Найти среднее время T срока* *безотказной работы прибора, если с вероятностью 0,975 прибор безотказно работает более 400ч, а среднее квадратическое отклонение — 8ч.*

◄ Применяем формулу (19.5):
$P(x_1 \leqslant \xi < x_2) = \Phi\Big(\dfrac{x_2 - a}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\dfrac{x_1 - a}{\sigma}\Big)$.

Здесь ξ — срок безотказной работы прибора, a — искомая величина обозначающая среднее время T безотказной работы прибора, $\sigma = 8$ — среднее квадратическое отклонение безотказной работы прибора, $x_1 = 400,\ x_2 = +\infty$ — границы интервала на котором вероятность равна 0,975.

Получаем,

$$P(\xi > 400) = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{400 - a}{8}\right) \Rightarrow 0{,}5 - \Phi\left(\frac{400 - a}{8}\right) = 0{,}975 \Rightarrow$$
$$\Phi\left(\frac{400 - a}{8}\right) = 0{,}5 - 0{,}975 = -0{,}475.$$

Из таблицы приложение 2 находим при каком значении аргумента значение функции равно 0,475.

Получаем линейное уравнение

$$\frac{400 - a}{8} = -1{,}96 \Rightarrow 400 - a = -15{,}68 \Rightarrow \mathbf{a{=}415{,}68}.$$

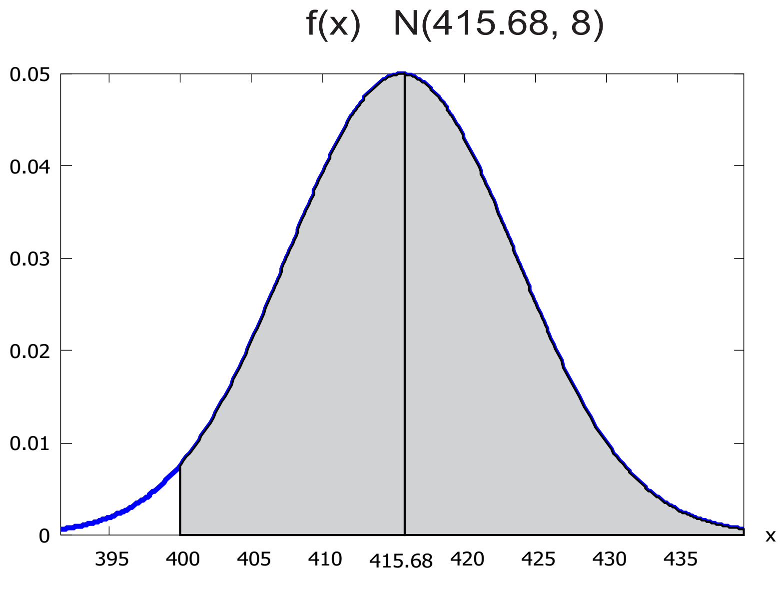

Рисунок 24. *К примеру 19.9*

На рис. 24 Представлена иллюстрация полученного решения. Площадь выделенной области равна 0,975. ►

Ответ: $\boxed{\approx 415{,}68.}$

20. Числовые характеристики функции случайного аргумента

Для непрерывной случайной величины ξ

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \tag{20.1}$$

$$D(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - M^2(\xi). \tag{20.2}$$

Замечание 20.1. *Если $\eta = \varphi(\xi)$ — непрерывная функция случайного аргумента ξ, причём возможные значения ξ принадлежат всей оси Ox, то*

$$M(\varphi(\xi)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot f(x) dx, \tag{20.3}$$

где $f(x)$ — плотность распределения ξ.

$$D(\varphi(\xi)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) f(x)\, dx - M^2(\varphi(\xi)). \tag{20.4}$$

Замечание 20.2. *Если ξ— непрерывная случайная величина, заданная плотностью распределения $f(x)$, и если $y = \varphi(x)$ — дифференцируемая монотонно возрастающая или монотонно убывающая функция, обратная функция которой $x = \psi(y)$, то плотность распределения $g(y)$ случайной величины η определяется равенством*

$$g(y) = f[\psi(y)] \cdot |\psi'(y)|. \tag{20.5}$$

Пример 20.1. *Случайная величина ξ имеет плотность распределения* $f(x) = \begin{cases} 0, x <\notin [0;1], \\ 3x^2, x \in [0;1]. \end{cases}$ *Найти плотность распределения случайной величины $\eta = |x-2|$, $M(\eta)$ и $D(\eta)$.*

◀ $F_\eta = P(y < \eta) = P(y < |x-2|) = \int\limits_{2-y}^{2} 3x^2\, dx = x^3\Big|_{2-y}^{2} = 8 - (2-y)^3.$

$$f_\eta(y) = F'_\eta(y) = \begin{cases} 3(2-y)^2, & y \in [1;2], \\ 0, & y \notin [1;2]. \end{cases}$$

Вычислим числовые характеристики двумя способами.

<u>*1 способ*</u>. Используем формулы (20.3) и (20.4).

$$M(\varphi(\xi)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\cdot f(x)dx, \qquad D(\varphi(\xi)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) f(x)\,dx - M^2(\varphi(\xi)).$$

$$M(\eta) = \int\limits_0^1 |x-2|\cdot 3x^2\,dx = 3\int\limits_0^1 2x^2 - x^3\,dx = \left(2x^3 - \frac{3x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = 1{,}25.$$

$$D(\eta) = \int\limits_0^1 |x-2|^2\cdot 3x^2\,dx - \frac{25}{16} = 3\int\limits_0^1 \left(x^4 - 4x^3 + 4x\right)\,dx - \frac{25}{16} =$$

$$= 3\left(\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4x^3}{3}\right)\Big|_0^1 - \frac{25}{16} = \frac{8}{5} - \frac{25}{16} = \frac{3}{80}.$$

<u>*2 способ*</u>. Используем полученное значение для функции плотности случайной величины η

$$M(\eta) = \int\limits_1^2 3y(2-y)^2\,dy = 6y^2 - 4y^3 + \frac{3}{4}y^4\Big|_1^2 =$$

$$= 18 - 28 + 12 - \frac{3}{4} = 1{,}25.$$

$$D(\eta) = \int\limits_1^2 3y^2(2-y)^2\,dy = \int\limits_1^2 (12y^2 - 12y^3 + 3y^4)\,dy = \int\limits_1^2 4 - 3y^4y^3 + \frac{3}{5}y^5\Big|_1^2 - \frac{25}{16} =$$

$$= \frac{8}{5} - \frac{25}{16} = \frac{3}{80}.$$

▶

Ответ: $\boxed{f_\eta(y) = \begin{cases} 3(2-y)^2, & y \in [1;2], \\ 0, & y \notin [1;2]; \end{cases} \quad M(\eta) = 1{,}25; \;\; D(\eta) = \frac{3}{80}.}$

Пример 20.2. *Случайная величина ξ имеет показательное распределение с плотностью $f(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, x \geqslant 0. \end{cases}$ Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \sqrt{\xi}$.*

◀

<u>*1 способ*</u> основанный на применение формулы (20.5).

Т.к. функция $y = \sqrt{x}$ монотонно возрастающая на всей области определения $x \geqslant 0$, то для определения функции плотности случайной величины η можно применить формулу (20.5). Отметим, что случайная величина η не принимает отрицательные значения, поэтому ее плотность равна нулю при $Y < 0$.

Найдём функцию $\psi(y)$, обратную функция $y = \sqrt{x}$.

$x = y^2, y > 0 \;\Rightarrow\; x' = 2y$.

Применяем формулу (20.5):

$$f_\eta(y) = \begin{cases} 0, y < 0, \\ \lambda e^{-\lambda y^2} \cdot 2y, y \geqslant 0. \end{cases}$$

2 способ основанные на нахождении функции распределения $F_\eta(y)$ непрерывной случайной величины η. Пусть $y > 0$. Тогда

$$F_\eta(y) = P(\eta < y) = P(\sqrt{x} < y) = P(x < y^2) = \int\limits_0^{y^2} \lambda e^{-\lambda x}\, dx =$$

$$= -e^{-\lambda y^2}\Big|_0^{y^2} = -e^{-\lambda y^2} + 1.$$

Получили выражение для функции распределения случайной величины η

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, y < 0, \\ 1 - e^{-\lambda y^2} y \geqslant 0. \end{cases}$$

Находим функцию плотности вероятностей случайной величины η

$$\mathrm{f}_\eta(y) = F'_\eta(y) = \begin{cases} 0, y < 0, \\ 2\lambda y e^{-\lambda y^2} y \geqslant 0. \end{cases}$$

►

Ответ: $\boxed{f_\eta(y) = \begin{cases} 0, y < 0, \\ 2\lambda y e^{-\lambda y^2}, y \geqslant 0. \end{cases}}$

Пример 20.3. *Пусть ξ $N(0,1), \eta = \xi^3$. Найти плотность распределения случайной величины η .*

◄ Найдём функцию плотности случайной величины η. Т.к. функция $y = x^3$ монотонно возрастающая на всей действительной оси, то для определения функции плотности случайной величины η можно применить формулу (20.5). Найдём функцию $\psi(y)$, обратную функция $y = x^3$. Для этого извлекаем кубический корень.

$$x = \sqrt[3]{y} \Rightarrow \ \psi(y) = \sqrt[3]{y} \Rightarrow \psi'(y) = \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}$$

Функцию плотности случайной величины η найдём по формуле (20.5) $g(y) = f[\psi(y)] \cdot |\psi'(y)|$.

Функция плотности заданной величины ξ равна:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\dfrac{x^2}{2}}.$$

Тогда функция плотности вероятностей величины η равна:

$$f_\eta(y) = \frac{1}{2\pi\sqrt[3]{y^2}} e^{-\dfrac{\sqrt[3]{y^2}}{2}}.$$ **Ответ:** $\boxed{f_\eta(y) = \frac{1}{2\pi\sqrt[3]{y^2}} e^{-\frac{\sqrt[3]{y^2}}{2}}.}$

Пример 20.4. *Пусть ξ $N(0,1), \eta = \xi^2$. Найти плотность распределения случайной величины η .*

◀ Функция плотности заданной величины ξ равна:
$f(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\dfrac{x^2}{2}}$.

Найдём функцию плотности случайной величины η. Т.к. функция $y = x^2$ имеет два интервала монотонности, поэтому обратная функция является двузначной $x = \pm\sqrt{y}$. Следовательно функция плотности $f_\eta(y)$ будет состоять из двух слагаемых, отображающих каждую ветку обратной функции.

Найдём модуль производной функции $\psi(y) = \pm\sqrt{y}$.

$|\psi'(y)| = \frac{1}{2\sqrt{y}}$.

$$f_\eta(y) = \begin{cases} 0, y \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{y}{2}} \dfrac{1}{2\sqrt{y}} + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{y}{2}} \dfrac{1}{2\sqrt{y}} \end{cases} = \begin{cases} 0, y \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\dfrac{y}{2}}. \end{cases}$$

Ответ: $\boxed{\mathbf{f}_\eta(y) = \begin{cases} 0, y \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\dfrac{y}{2}}. \end{cases}}$

Пример 20.5. *Непрерывная случайная величина ξ задана функцией плотности распределения $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 8e^{-8x}, & x \geqslant 0. \end{cases}$ Найти $M(\xi)$, $D(\xi)$, плотность распределения непрерывной случайной величины $k\eta = e^{3\xi}$, $M(\eta)$ и $D(\eta)$. Числовые характеристики случайной величины найти двумя способами.*

◀ По формуле (20.1) найдём $M(\xi)$

$$M(\xi) = \int\limits_0^{+\infty} x \cdot 8e^{-8x} dx = -\int\limits_0^{+\infty} x de^{-8x} = -xe^{-8x}\Big|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} e^{-8x} dx =$$

$$= -\frac{1}{8e^{8x}}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{8}.$$

Отметим, что случайная величина ξ описывает показательное распределение и для него $M(\xi) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{8}$.

По формуле (20.3) найдём $M(\eta)$

$M(\eta) = \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{3x} \cdot 8e^{-8x} dx = 8 \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-5x} dx = -\frac{8}{5} e^{-5x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{8}{5}$.

$$g(y)=\begin{cases}0, & y<1,\\ \dfrac{8}{3y}e^{-8\frac{\ln y}{3}}, & y\geqslant 1\end{cases}=\begin{cases}0, & y<1,\\ \dfrac{8}{3y}\left(e^{\ln y}\right)^{(-8/3)}, & y\geqslant 1\end{cases}=$$
$$=\begin{cases}0, & y<1,\\ \dfrac{8}{3y}y^{-8/3}, & y\geqslant 1\end{cases}=\begin{cases}0, & y<1,\\ \dfrac{8}{3}y^{-11/3}, & y\geqslant 1.\end{cases}$$

Проверим выполняется ли условие нормировки полученной функции плотности

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{8}{3}y^{-11/3}dy=\frac{8}{3}\cdot\frac{y^{-8/3}}{-8/3}\Big|_1^{+\infty}=1.$$

Используя формулу (20.1), вычислим математическое ожидание данной случайной величины η

$$M(\eta)=\int\limits_1^{+\infty}y\frac{8}{3}y^{-11/3}dy=\frac{8}{3}\int\limits_1^{+\infty}y^{-8/3}dy=\frac{8}{3}\frac{y^{-5/3}}{(-5/3)}\Big|_1^{+\infty}=$$
$$=-\frac{8}{5y^{2/3}}\Big|_1^{+\infty}=\frac{8}{5}.$$

Получили такое же значение, как и по формуле (20.3).

Найдём теперь дисперсию случайной величины η по двум формулам.

1) По формуле $D(\eta)=M(\eta^2)-M^2(\eta)$:

$$D(\eta)=\int\limits_1^{+\infty}y^2\frac{8}{3}y^{-11/3}dy-M^2(\eta)=\frac{8}{3}\int\limits_1^{+\infty}y^{-5/3}dy-\frac{64}{25}=$$
$$=\frac{8}{3}\frac{y^{-2/3}}{(-2/3)}\Big|_1^{+\infty}-\frac{64}{25}=4-\frac{64}{25}=\frac{36}{25}.$$

2) По формуле $D(\varphi(\xi))=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi^2(x)f(x)\,dx-M^2(\varphi(\xi))$:

$$D(\eta)=\int\limits_0^{+\infty}\left(e^{3x}\right)^2 8e^{-8x}dx-M^2(\eta)=8\int\limits_0^{+\infty}e^{-2x}dx-\left(\frac{5}{8}\right)^2=$$
$$=-\frac{8}{2e^{2x}}\Big|_0^{+\infty}-\frac{25}{64}=4-\frac{64}{25}=\frac{36}{25}.$$

По обеим формулам получили одинаковые результаты. ►

В примере 20.5 условие монотонности функции $\varphi(\xi)$ выполнялось на всей области определения. Рассмотрим теперь пример, в котором функция кусочно монотонна. В этом случае вместо формулы (20.6) применяется более общая формула

$$g(y) = \sum_{k=1}^{m} f[\psi_k(y)] \cdot |\psi'_k(y)|. \tag{20.6}$$

где m — число интервалов монотонности, $x = \psi_k(y)$ — уравнение обратной функции $y = \varphi(\xi)$ на k-том интервале монотонности этой функции.

Пример 20.6. *Непрерывная случайная величина ξ задана функцией плотности распределения $f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0;\pi/2], \\ \cos x, & x \in [0;\pi/2]. \end{cases}$ Найти плотность распределения непрерывной случайной величины $\eta = |\xi - \pi/6|$ и построить её график.*

◀ На рис. 25 приведен график функции преобразования в координатах (x, y), случайной величины ξ к величине η.

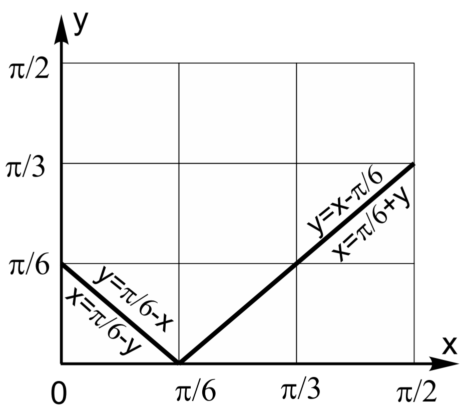

Рисунок 25. $\eta(\xi)$

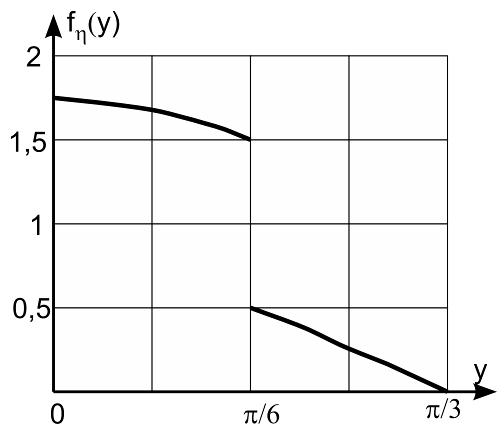

Рисунок 26. $f_\eta(y)$

Рисунки для примера 20.6

$$y = \begin{cases} 0, & x \notin [0;\pi/2], \\ \pi/6 - x, & x \in [0;\pi/6], \\ x - \pi/6, & x \in [\pi/6;\ \pi/2]. \end{cases}$$

Получим обратную функцию $x = \psi(y)$.

$$x = \psi(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty;0) \bigcup ((\pi/3;\infty), \\ \pi/6 - y, & x \in [0;\pi/6] \bigcap y \in [0;\pi/6], \\ \pi/6 + y, & x \in [\pi/6;\pi/2] \bigcap y \in [0;\pi/3]. \end{cases}$$

Модуль производной этой функции равен

$$|\psi'(y)| = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty; 0) \bigcup ((\pi/3; \infty), \\ 1, & y \in [0; \pi/3]. \end{cases}$$

Функция $x = \psi(y)$ на отрезке $y \in [0; \pi/6]$ двузначная, поэтому в функции плотности $f_\eta(y)$ этому отрезку соответствует сумма двух слагаемых. Получаем

$$f_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty; 0) \bigcup ((\pi/3; \infty), \\ \cos(\pi/6 + y) + \cos(\pi/6 - y), & y \in [0; \pi/6], \\ \cos(\pi/6 + y), & y \in [\pi/6; \pi/3]. \end{cases}$$

Отдельно вычислим

$$\cos(\pi/6 + y) + \cos(\pi/6 - y) =$$
$$= 2\cos\left(\frac{\pi/6 + y + \pi/6 - y}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi/6 + y - \pi/6 + y}{2}\right) = \sqrt{3}\cos y.$$

Получаем искомую функцию плотности

$$f_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty; 0) \bigcup ((\pi/3; \infty), \\ \sqrt{3}\cos y, & y \in [0; \pi/6], \\ \cos(\pi/6 + y), & y \in [\pi/6; \pi/3]. \end{cases}$$

Проверим, выполняется ли условие нормировки полученной функции плотности $\int\limits_1^{+\infty} f_\eta(y)dy = 1$.

$$\int\limits_0^{\pi/6} \sqrt{3}\cos y\, dy + \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{3}\cos(\pi/6 + y)\, dy =$$
$$= \sqrt{3}\sin y\Big|_0^{\pi/6} + \sin(\pi/6 + y)\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \sqrt{3}/2 + 1 - \sqrt{3}/2 = 1.$$

На рис. 26, представлен график полученной функции плотности $f_\eta(y)$. ►

Задания для самостоятельной работы

20.1. Случайная величина подчиняется нормальному закону распределения вероятностей с параметрами $a = 8, \sigma = 2$. Определить: 1)$P(|\xi - 4| < 2)$. 2) $P(|\xi - 8| < 2)$. 3) $P(2 < \xi < 14)$. 4) $P(\xi > 6)$. Представить геометрическую иллюстрацию полученного решения.

20.2. Автомат штампует детали. Известно,что длина изготавливаемой детали представляет собой случайную величину, распределённую по нормальному закону. Её среднее значение равно 100 см, а $\sigma = 0{,}2$ см. Какую точность длины детали можно гарантировать с вероятностью 0,95?

20.3. Производится взвешивание без систематических ошибок слитков из драгоценных металлов. Известно, что случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 1$ мг. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 2 мг.

20.4. Наблюдения показали, что внешний диаметр подшипников данного типа является нормально распределённой случайной величиной ξ со средним значением $a = 60$ мм и средним квадратическим отклонением $\sigma = 0{,}001$ мм. В каких границах можно практически гарантировать внешний диаметр подшипника, если за вероятность практической достоверности принять 0,9973.

20.5. Случайные ошибки измерения дальномера распределены нормально, и дальномер не имеет систематической ошибки. При определении дальности цели абсолютная величина ошибки с вероятностью 0,966 не превосходит 5м. Найти среднюю квадратическую ошибку.

20.6. Стандартная длина заготовки выпущенной автоматом составляет 50 см., а отклонение распределено по нормальному закону со средней квадратической ошибкой 0,5 см. Систематическая ошибка отсутствует. В каком интервале с вероятностью 0,99 длина заготовки?

20.7. Каким должен быть допуск отклонения размера детали от номинала, чтобы с вероятностью 0,899 отклонение было допустимым, если средняя квадратическая ошибка отклонения равна 12 мм, а систематическая ошибка равна нулю? (Закон распределения – нормальный).

20.8. Срок службы прибора является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Найти среднее время срока службы прибора, если с вероятностью 0,937 прибор работает более 300 ч. Среднее квадратическое отклонение 10 ч.

20.9. Случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке [-3; 2] . Найдите математическое ожидание случайной величины $\eta = 2|\xi|$.

20.10. Случайная величина ξ распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 2$. Найдите математическое ожидание случайной величины $\eta = |\xi - 3|$.