13. Числовые характеристики дискретных случайных величин

Рассмотрим числовые характеристики дискретных случайных величин (д.с.в).

Закон распределения полностью определяет дискретную случайную величину. Однако иногда удобнее характеризовать её с помощью нескольких числовых характеристик, каждая из которых определяет одно из свойств этой случайной величины. Одной из таких числовых характеристик является математическое ожидание. В литературе встречаются различные обозначения для математического ожидания случайной величины ξ: $M(\xi)$, M_ξ, $M[\xi]$, $E(\xi)$, E_ξ, $E[\xi]$. Мы будем использовать первое обозначение.

Определение 13.1. *Математическим ожиданием $M(\xi)$ дискретной случайной величины ξ называется сумма произведений всех её значений на соответствующие вероятности:*

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \tag{13.1}$$

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание константы равно константе:

$$M(C) = C.$$

2. Постоянный множитель выносится за знак математического ожидания:

$$M(C \cdot \xi) = C \cdot M(\xi).$$

3. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин:

$$M(\xi + \eta) = M(\xi) + M(\eta). \tag{13.2}$$

4. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин:

$$M(\xi \cdot \eta) = M(\xi) \cdot M(\eta). \tag{13.3}$$

Замечание 13.1. *Свойства 2 и 3 позволяют для любого конечного числа случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и чисел $C_1, \ldots, C_n$ написать:*

$$M(C_1\xi_1 + \ldots + C_n\xi_n) = C_1 M(\xi_1) + \ldots + C_n M(\xi_n).$$

Поскольку рассматриваемые величины случайные, кроме среднего значения, полезно было бы знать характеристику степени их разброса вокруг среднего значения. В качестве такой характеристики нельзя рассматривать отклонение случайной величины от математического ожидания $\xi_c = \xi - M(\xi)$, т.к. оно случайно. В среднем это отклонение равно нулю:

$$M(\xi - M(\xi)) = M(\xi) - M(M(\xi)) = M(\xi) - M(\xi) = 0.$$

Отклонение случайной величины от математического ожидания $\xi_c = \xi - M(\xi)$ называется центрированной случайной величиной.

Поэтому в качестве характеристики разброса случайной величины вокруг её среднего значения рассматривают математическое ожидание квадрата отклонения.

Определение 13.2. *Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата её отклонения от математического ожидания:*

$$D(\xi) = M(\xi - M(\xi))^2. \tag{13.4}$$

Для дискретной случайной величины дисперсия вычисляется по формуле:

$$D(\xi) = \sum_i (x_i - M(\xi))^2 \cdot p_i. \tag{13.5}$$

Иногда для вычисления дисперсии удобнее пользоваться формулой:

$$D(\xi) = M(\xi^2) - (M(\xi))^2. \tag{13.6}$$

Свойства дисперсии

(1) $D(\xi) \geqslant 0$.

(2) $D(C) = 0$.

(3) $D(C \cdot \xi) = C^2 \cdot D(\xi)$.

(4) Для независимых случайных величин ξ и η: $D(\xi \pm \eta) = D(\xi) + D(\eta)$.

Для произвольных случайных величин ξ и η справедлива формула

$$D(\xi + \eta) = D(\xi) + D(\eta) + 2cov(\xi, \eta). \tag{13.7}$$

Определение 13.3. *Ковариацией двух случайных величин ξ и η, определённых на одном вариационном пространстве, называется математическое ожидание от произведения центрированных случайных величин ξ_c и η_c .*

$$cov(\xi, \eta) = M\big((\xi - M(\xi))(\eta - M(\eta))\big). \tag{13.8}$$

Эквивалентная формула для ковариации.

$$cov(\xi, \eta) = M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta). \tag{13.9}$$

Вероятностный смысл дисперсии заключается в том, что она характеризует степень рассеяния случайной величины около её среднего значения (математического ожидания).

Однако, если среднее значение $M(\xi)$ имеет ту же размерность, что и сама случайная величина, то $D(\xi)$ имеет другую размерность, равную квадрату размерности случайной величины. Это не всегда удобно, поэтому ввели другую характеристику рассеяния, имеющую ту же размерность, что и сама случайная величина.

Определение 13.4. ***Средним квадратическим отклонением*** *случайной величины ξ называют квадратный корень из её дисперсии:*

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)}. \tag{13.10}$$

Пример 13.1. *Случайная величина ξ определяется следующим рядом распределения:*

ξ	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
p	$\frac{1}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{4}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{6}{28}$	$\frac{7}{28}$

Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение данной случайной величины.

◀ Математическое ожидание равно сумме произведений всех её возможных значений на их вероятности:

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

или

$$M(\xi) = 1 \cdot \frac{1}{28} + 2 \cdot \frac{2}{28} + 3 \cdot \frac{3}{28} + 4 \cdot \frac{4}{28} + 5 \cdot \frac{5}{28} + 6 \cdot \frac{6}{28} + 7 \cdot \frac{7}{28} = \frac{140}{28} = \mathbf{5}.$$

Дисперсию найдём двумя способами.

1) По формуле (13.5)

$$D(\xi) = M(\xi - M(\xi))^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(\xi))^2 p_i =$$

$$= (1-5)^2 \cdot \frac{1}{28} + (2-5)^2 \cdot \frac{2}{28} + (3-5)^2 \cdot \frac{3}{28} + (4-5)^2 \cdot \frac{4}{28} + (5-5)^2 \cdot \frac{5}{28} +$$
$$+(6-5)^2 \cdot \frac{6}{28} + (7-5)^2 \cdot \frac{7}{28} = \frac{1}{28}(16+18+12+4+6+28) = \frac{84}{28} = \mathbf{3}.$$

2) Для нахождения дисперсии по формуле (13.6)

$$D(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2 .$$

Сначала найдем $M(\xi^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$:

$$M(\xi^2) = \frac{1}{28} + 2^2 \cdot \frac{2}{28} + 3^2 \cdot \frac{3}{28} + 4^2 \cdot \frac{4}{28} + 5^2 \cdot \frac{5}{28} +$$
$$+6^2 \cdot \frac{6}{28} + 7^2 \cdot \frac{7}{28} = \frac{1}{28}(1+8+27+64+125+216+343) = \frac{784}{28} = 28.$$

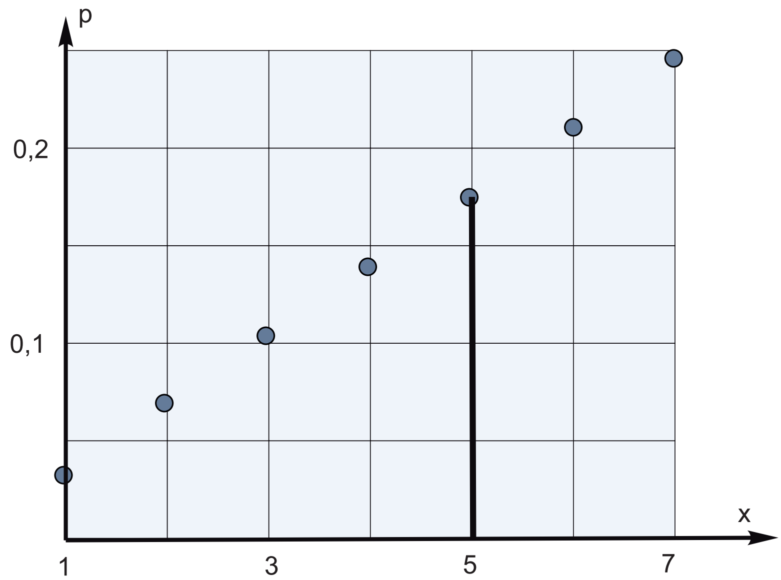

Рисунок 2. *К примеру 13.1*

Таким образом, дисперсия

$$D(\xi) = 28 - 25 = \mathbf{3}.$$

Среднее квадратичное отклонение найдем как корень квадратный из дисперсии:

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{3} \approx \mathbf{1{,}732}.$$

Ответ: $\boxed{M(\xi) = 5;\ D(\xi) = 3;\ \sigma(\xi) = \sqrt{3} \approx 1{,}732.}$

Пример 13.2. *Случайная величина ξ определяется следующим рядом распределения:*

ξ	*1,2*	*1,6*	*2,3*	*3,2*	*4,5*
p	*0,2*	*0,4*	*0,1*	*0,2*	*0,1*

Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение данной случайной величины.

◀ Математическое ожидание равно сумме произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i.$$

или Подставляя данные из таблицы, получаем

$$M(\xi) = 1{,}2 \cdot 0{,}2 + 1{,}6 \cdot 0{,}4 + 2{,}3 \cdot 0{,}1 + 3{,}2 \cdot 0{,}2 + 4{,}5 \cdot 0{,}1 = \mathbf{2{,}2}.$$

Дисперсию найдём двумя способами.

1) По формуле (13.5)

$D(\xi) = M(\xi - M(\xi))^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - M(\xi))^2 p_i =$
$= (1{,}2 - 2{,}2)^2 \cdot 0{,}2 + (1{,}6 - 2{,}2)^2 \cdot 0{,}4 + (2{,}3 - 2,2)^2 \cdot 0{,}1 +$
$+ (3{,}2 - 2{,}2)^2 \cdot 0{,}2 + (4{,}5 - 2{,}2)^2 \cdot 0{,}1 = \mathbf{1{,}074}.$

2) Для нахождения дисперсии по формуле (13.6)

$$D(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2.$$

Сначала найдем $M(\xi^2) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$:

$M(\xi^2) = 1{,}2^2 \cdot 0{,}2 + 1{,}6^2 \cdot 0{,}4 + 2{,}3^2 \cdot 0{,}1 + 3{,}2^2 \cdot 0{,}2 + 4{,}5^2 \cdot 0{,}1 =$
$= 1{,}44 \cdot 0{,}2 + 2{,}56 \cdot 0{,}4 + 5{,}29 \cdot 0{,}1 + 10{,}24 \cdot 0{,}2 + 20{,}25 \cdot 0{,}1 = 5{,}914.$

Таким образом, дисперсия

$$D(\xi) = 5{,}914 - 2{,}2^2 = \mathbf{1{,}074}.$$

Среднее квадратичное отклонение найдем как корень квадратный из дисперсии:

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{1{,}074} \approx \mathbf{1{,}036}.$$

Ответ: $\boxed{M(\xi) = 2{,}2;\ D(\xi) = 1{,}074;\ \sigma(\xi) \approx 1{,}036.}$ ▶

Пример 13.3. *Найти математическое ожидание случайной величины ζ, если*
$\zeta = 5\xi - 4\eta, \quad M(\xi) = 6, \quad M(\eta) = 9.$

◀ Используем свойства математического ожидания: математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин, и постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания. Получаем

$M(\zeta) = M(5\xi - 4\eta) = M(5\xi) - M(4\eta) = 5 \cdot M(\xi) - 4 \cdot M(\eta) = 5 \cdot 6 - 4 \cdot 9 = = -6.$ ▶

Ответ: $\boxed{M(\xi) = -6.}$

Пример 13.4. *Случайные величины ξ и η независимы. Найти дисперсию случайной величины $\zeta = 3\xi - 6\eta$, если $D(\xi) = 2$, $D(\eta) = 0{,}5$.*

◀ С учётом того, что дисперсия разности независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых и что постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат, получим:

$D(\zeta) = D(3\xi - 6\eta) = D(3\xi) + D(6\eta) = 9 \cdot D(\xi) + 36 \cdot D(\eta) = 9 \cdot 2 + 36 \cdot 0{,}5 = = \mathbf{36}.$ ▶

Ответ: $\boxed{D(\xi) = 36.}$

Пример 13.5. *Случайная величина ξ определяется следующим неполным рядом распределения:*

ξ	x_1	2	6	8	12
p	p_1	0,2	0,3	0,1	0,1

Найти x_1 и p_1, зная, что математическое ожидание $M(\xi) = 4$.

◀ Так как в любом законе распределения сумма вероятностей равна 1, то $p_1 = 1 - (0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}1) = 0{,}3$. Подставляя в формулу (13.1) $M(\xi) = \sum\limits_{k=1}^{5} x_i p_i$ числовые данные, получим уравнение

$4 = x_1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}1 + 6 \cdot 0{,}3 + 8 \cdot 0{,}1 + 12 \cdot 0{,}1.$

$0{,}3x_1 = 0$

Отсюда найдем $x_1 = \mathbf{0}$. ▶

Ответ: $\boxed{x_1 = 0;\ p_1 = 0{,}3.}$

Пример 13.6. *Даны законы распределения двух независимых д.с.в ξ и η:*

ξ	1	2	3
p	0,3	0,5	0,2

и

η	-2	0
p	0,4	0,6

Найти законы распределения д.с.в $\xi+\eta$ и $\xi\cdot\eta$ и найти их математическое ожидание и дисперсию.

◀ Найдём $M(\xi), M(\eta), D(\xi)$ и $D(\eta)$.
$M(\xi) = 0{,}3 + 1 + 0{,}6 = \mathbf{1{,}9}$, $\quad M(\eta) = \mathbf{-0{,}8}$.
$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = 0{,}3 + 2 + 1{,}8 - 3{,}61 = \mathbf{0{,}49}$,
$D(\eta) = 1,6 - 0{,}64 = \mathbf{0{,}96}$.

Используем определения суммы (12.7) и произведения (12.8) независимых случайных величин. Складывая значения x_i на y_j случайных величин ξ и η, а в качестве вероятностей принимая значения произведения их вероятностей, получаем таблицу:

$\xi+\eta$	-1	0	1	1	2	3
p	0,12	0,2	0,08	0,18	0,3	0,12

Суммируем столбцы с одинаковыми значениями, получаем закон распределения д.с.в. $\xi+\eta$:

$\xi+\eta$	-1	0	1	2	3
p	0,12	0,2	0,26	0,3	0,12

$M(\xi+\eta) = -0{,}12 + 0{,}26 + 0{,}6 + 0{,}36 = \mathbf{1{,}1}$.
$M((\xi+\eta)^2) = 0{,}12 + 0{,}26 + 1{,}2 + 1{,}08 = 2{,}66$.
$D(\xi+\eta) = 2{,}66 - 1{,}21 = \mathbf{1{,}45}$.

Для определения суммы математических ожиданий и дисперсий можно было применить их свойства.
$M(\xi+\eta) = M(\xi) + M(\eta) = 1{,}9 - 0{,}8 = 1{,}1$.
$D(\xi+\eta) = D(\xi) + D(\eta) = 0{,}49 + 0{,}96 = 1{,}45$.

Для вычисления произведения д.с.в используем определение 12.8. Умножаем значения x_i на y_j компонентов случайных величин ξ и η, а в качестве вероятностей принимая значения произведения их вероятностей, получаем таблицу:

$\xi\eta$	-2	-4	-6	0	0	0
p	0,12	0,2	0,08	0,18	0,3	0,12

Суммируем столбцы с одинаковыми значениями случайной величины $\xi\eta$:

$\xi\eta$	-6	-4	-2	0
p	0,08	0,2	0,12	0,6

$M(\xi\eta) = -0{,}48 - 0{,}8 - 0{,}24 =$ **-1,52**.

Д.с.в. ξ и η независимые, поэтому эту величину можно было найти используя свойство 4
$M(\xi\eta) = M(\xi) \cdot M(\eta) = 1{,}9 \cdot (-0{,}8) = -1{,}52.$

$M((\xi\eta)^2) = 36 \cdot 0{,}08 + 16 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}12 = 6{,}56.$

$D(\xi\eta) = 6{,}56 - 1{,}52^2 =$ **4,25**. ►

Пример 13.7. *Даны законы распределения д.с.в ξ:*

ξ	-2	-1	*0*	*1*	*2*
p	*0,1*	*0,3*	*0,3*	*0,1*	*0,2*

Найти закон распределения д.с.в $\eta = 3\xi^2$ и найти $M(\eta)$ и $D(\eta)$.

◄ Используя определения произведения д.с.в. на число (Определение 12.6) и возведение д.с.в. в степень (Определение 12.5), получаем следующую таблицу:

η	12	3	0	3	12
p	0,1	0,3	0,3	0,1	0,2

Суммируем столбцы с одинаковыми значениями случайной величины получаем закон распределения д.с.в. $\eta = 3\xi^2$:

η	0	3	12
p	0,3	0,4	0,3

$M(\eta) = 1{,}2 + 3{,}6 =$ **4,8**. $D(\eta) = M(\eta^2 - M^2(\eta) = 9 \cdot 0{,}4 + 144 \cdot 0{,}3 - 4{,}8^2 =$ **23,76**.
►

13.1. Функция распределения случайной величины

Дискретная случайная величина полностью определяется своим законом распределения — таблицей 13.1. Однако наряду с дискретными случайными величинами, принимающими отдельные значения, существуют другие, принимающие все значения из некоторого промежутка. Их невозможно задать перечислением всех принимаемых ими значений, поэтому был предложен универсальный способ задания случайной величины, пригодный во всех случаях.

Определение 13.5. ***Функцией распределения*** *$F(x)$ случайной величины ξ называется вероятность того, что ξ приняла значение меньшее x:*

$$F(x) = P(\xi < x). \tag{13.11}$$

Пример 13.8. *Случайная величина ξ — число очков, выпавших при однократном бросании игральной кости. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график.*

◀ Возможные значения данной случайной величины — числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. При этом, вероятность того, что ξ примет любое из этих значений, одна и та же и равна $1/6$. Таблица распределения имеет вид:

ξ	1	2	3	4	5	6
p	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

При $x \leqslant 1$ функция $F(x) = 0$, так как ξ не принимает значений, меньших единицы. Если $1 < x \leqslant 2$, то $F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = 1) = 1/6$. Если $2 < x \leqslant 3$, то событие, заключающееся в том, что случайная величина ξ удовлетворяет неравенству $\xi < x$, можно представить как сумму двух несовместных событий: $\xi < 2$ и $2 \leqslant \xi < 3$. Поэтому по теореме сложения имеем:

$$F(x) = P(\xi < x) = P((\xi < 2) + (2 \leqslant \xi < 3)) = P(\xi < 2) + P(2 \leqslant \xi < 3).$$

Но $P(\xi < 2) = 1/6$, а $P(2 \leqslant \xi < 3)$ также равно $1/6$, так как полуинтервалу $2 \leqslant x < 3$ принадлежит только одно возможное значение, принимаемое ξ, а именно 2. Таким образом, если $2 < x \leqslant 3$, то $F(x) = 1/6 + 1/6 = 1/3$.

Аналогично, если $3 < x \leqslant 4$, то

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi < 3) + P(3 \leqslant \xi < 4) = 1/3 + 1/6 = 1/2.$$

Для $4 < x \leqslant 5$

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi < x) + P(4 \leqslant \xi < 5) = 1/2 + 1/6 = 2/3,$$

а для $5 < x \leqslant 6$ $F(x) = 2/3 + 1/6 = 5/6$. Наконец, если $x \geqslant 6$, то

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi < 6) + P(6 \leqslant \xi < x) = 5/6 + 1/6 = 1.$$

График этой функции $F(x)$ оказывается ступенчатой линией со скачками в точках 1, 2, 3, 4, 5, 6, равными $1/6$, рис. 3.

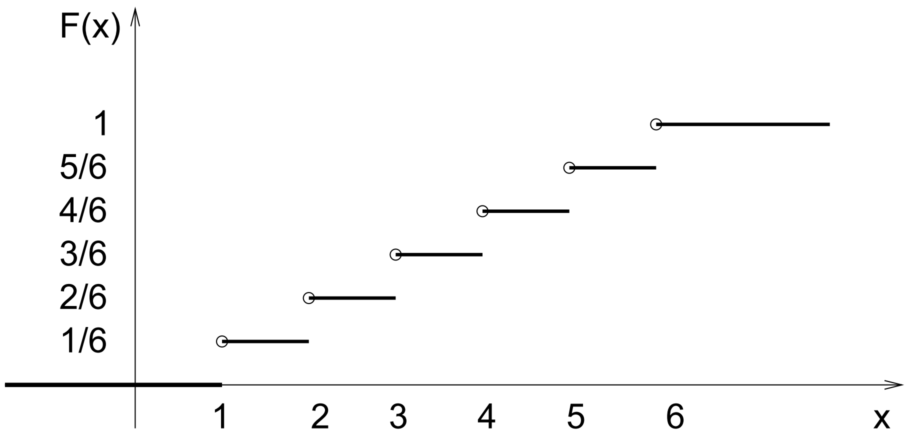

Рисунок 3. *Решение примера 13.8*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \leqslant 1, \\ 1/6, & \text{при} \quad 1 < x \leqslant 2, \\ 1/3, & \text{при} \quad 2 < x \leqslant 3, \\ 1/2, & \text{при} \quad 3 < x \leqslant 4, \\ 2/3, & \text{при} \quad 4 < x \leqslant 5, \\ 5/6, & \text{при} \quad 5 < x \leqslant 6, \\ 1, & \text{при} \quad 6 < x. \end{cases}$$

►Рассмотрим решение двух примерных задач 1.7 из типового расчёта.

Пример 13.9. *Стрелку дали 5 патронов для поражения мишени. Мишень поражается первым попаданием. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле постоянна и равна $p = 0{,}6$. Найдите ряд распределения случайной величины ξ числа оставшихся патронов, постройте график функции распределения случайной величины ξ, найдите $M(\xi)$ и $D(\xi)$.*

◄ Возможные значения данной случайной величины ξ — числа $0, 1, 2, 3, 4$. При этом случайная величина ξ принимает значение 0, когда либо цель не будет поражена, т.е. совершено 5 промахов, либо цель поражена только пятым выстрелом. Пусть $q = 1 - p = 0{,}4$ вероятность промаха.

Тогда $P(\xi = 0) = qqqqq + qqqqp = qqqq(q + p) = qqqq = 0{,}4^4 = 0{,}0256$.
$P(\xi = 1) = qqqp = 0{,}4^3 \cdot 0{,}6 = 0{,}0384$.
$P(\xi = 2) = qqp = 0{,}4^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}096$.
$P(\xi = 3) = qp = 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}25$.
$P(\xi = 4) = 0{,}6$.

Ряд распределения случайной величины ξ имеет вид:

ξ	0	1	2	3	4
p	$qqqqq+qqqqp$	$qqqp$	qqp	qp	p

Или

ξ	0	1	2	3	4
p	0,0256	0,0384	0,096	0,24	0,6

Функция распределения данной случайной величины имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \leqslant 0, \\ 0{,}0256, & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 0{,}0256 + 0{,}0384 = 0{,}064, & \text{при} \quad 1 < x \leqslant 2, \\ 0{,}064 + 0{,}096 = 0{,}16, & \text{при} \quad 2 < x \leqslant 3, \\ 0{,}16 = 0{,}24 = 0{,}4, & \text{при} \quad 3 < x \leqslant 4, \\ 0{,}4 + 0{,}6 = 1, & \text{при} \quad x > 4. \end{cases}$$

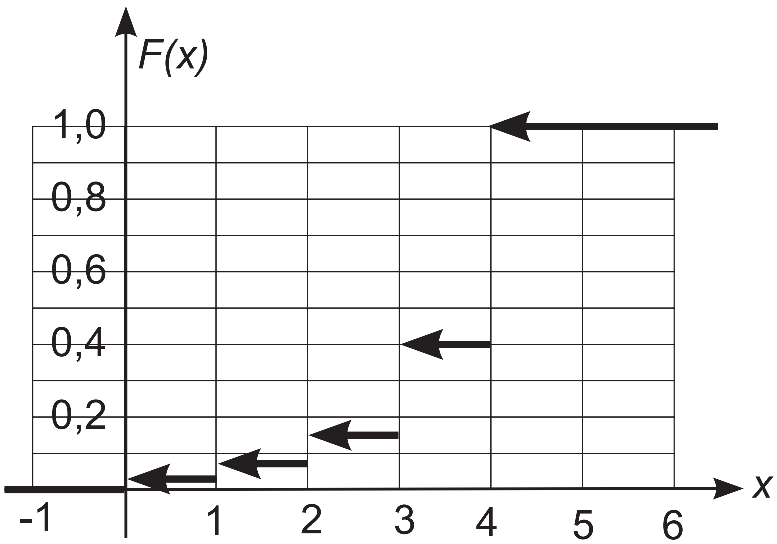

Рисунок 4. *Функция распределения примера 13.9*

Графиком данной функции будет кусочно постоянная функция, имеющая такой же вид, как и для предыдущего примера, см. рис. 4.

Найдём числовые характеристики случайной величины ξ.

$M(\xi) = \sum\limits_{k=0}^{4} kP_k = 0 \cdot 0{,}0256 + 1 \cdot 0{,}0384 + 2 \cdot 0{,}096 + 3 \cdot 0{,}24 + 4 \cdot 0{,}6 =$
$= \mathbf{3{,}3504}$.

$D(\xi) = \sum\limits_{k=0}^{4} k^2 P_k - M^2\xi =$
$= 1^2 \cdot 0{,}0384 + 2^2 \cdot 0{,}096 + 3^3 \cdot 0{,}24 + 4^2 \cdot 0{,}6 - 3{,}3504^2 = \mathbf{0{,}9572}$. ►

13.2. Задачи из типового расчета на случайные величины

Задача 1.7

Пример 13.10. *На переэкзаменовку по теории вероятностей явились 4 студента. Вероятность того, что первый сдаст экзамен, равна* 0,6*, второй —* 0,7*, третий —* 0,8*, а четвертый —* 0,9 . *Найдите ряд распределения случайной величины* ξ *числа студентов, сдавших экзамен, постройте график функции распределения, найдите* $M(\xi)$, $D(\xi)$ *и* $\sigma(\xi)$.

► Дискретная случайная величина ξ — число числа студентов, сдавших экзамен, принимает следующие возможные значения:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 3, \quad x_4 = 4.$$

Введем обозначения: A_i, $i = 1, 2, 3, 4$ — событие состоящее в том, что i-тый студент сдал экзамен. $p_i = P(A_i)$, $q_i = P(\overline{A}_i) = 1 - p_i$.

Тогда событие B_i, состоящее в том i студентов сдадут экзамен можно записать следующими выражениями:

$B_0 = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4$,

$B_1 = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4 + \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4$,

$B_2 = A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4 + A_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4 + A_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4 +$

$+ \overline{A}_1A_2A_3\overline{A}_4 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3A_4 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3A_4$,

$B_3 = A_1A_2A_3\overline{A}_4 + A_1A_2\overline{A}_3A_4 + A_1\overline{A}_2A_3A_4 + \overline{A}_1A_2A_3A_4$.

$B_4 = A_1A_2A_3A_4$.

Находим вероятности данных событий.

$P(B_0) = q_1q_2q_3q_4 = 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}0024$

$P(B_1) = p_1q_2q_3q_4 + q_1p_2q_3q_4 + q_1q_2p_3q_4 + q_1q_2q_3p_4 =$

$= 0{,}6\cdot0{,}3\cdot0{,}2\cdot0{,}1+0{,}4\cdot0{,}7\cdot0{,}2\cdot0{,}1+0{,}4\cdot0{,}3\cdot0{,}8\cdot0{,}1+0{,}4\cdot0{,}3\cdot0{,}2\cdot0{,}9 = 0{,}0404$,

$P(B_2) = p_1p_2q_3q_4 + p_1q_2p_3q_4 + p_1q_2q_3p_4 + q_1p_2p_3q_4 + q_1p_2q_3p_4 + q_1q_2p_3p_4 =$

$= 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 +$

$+ 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}2144$,

$P(B_3) = p_1p_2p_3q_4 + p_1p_2q_3p_4 + p_1q_2p_3p_4 + q_1p_2p_3p_4 =$

$= 0{,}6\cdot0{,}7\cdot0{,}8\cdot0{,}1+0{,}6\cdot0{,}7\cdot0{,}2\cdot0{,}9+0{,}6\cdot0{,}3\cdot0{,}8\cdot0{,}9+0{,}4\cdot0{,}7\cdot0{,}8\cdot0{,}9 = 0{,}4404$.

$P(B_4) = p_1p_2p_3p_4 = 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}3024$.

Закон распределения примет вид:

ξ	0	1	2	3	4
p	0,0024	0,0404	0,2144	0,4404	0,3024

Отметим, что сумма вероятностей равна единице.

Функция распределения $F(x) = P(\xi < x)$ данной случайной величины имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \leqslant 0, \\ 0{,}0024, & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 0{,}0428, & \text{при} \quad 1 < x \leqslant 2, \\ 0{,}2572, & \text{при} \quad 2 < x \leqslant 3, \\ 0{,}6976, & \text{при} \quad 3 < x \leqslant 4, \\ 1, & \text{при} \quad x > 4. \end{cases}$$

На рис. 5 изображён график функции распределения.

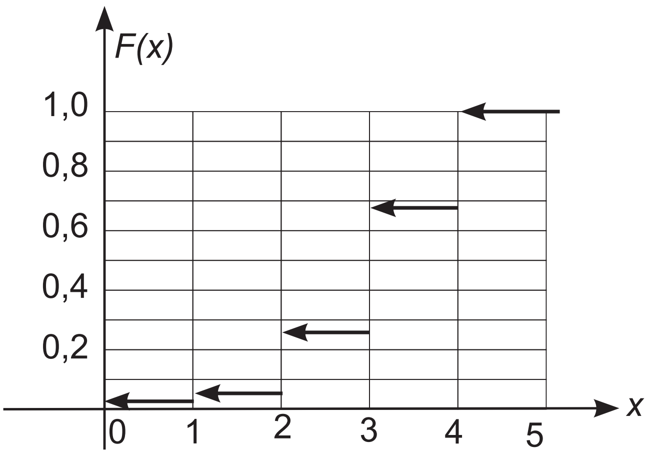

Рисунок 5. *Функция распределения примера 13.10*

Найдём числовые характеристики случайной величины ξ.

$M(\xi) = 0 \cdot 0{,}0024 + 1 \cdot 0{,}0404 + 2 \cdot 0{,}2144 + 3 \cdot 0{,}4404 + 4 \cdot 0{,}3024 = \mathbf{3}$.

$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = 0^2 \cdot 0{,}0024 + 1^2 \cdot 0{,}0404 + 2^2 \cdot 0{,}2144 +$
$+ 3^2 \cdot 0{,}4404 + 4^2 \cdot 0{,}3024 - 3^2 = \mathbf{0{,}7}$.

$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{0{,}7} \approx \mathbf{0{,}837}$.

Пример 13.11. *Карлсону на день рождения подарили 5 банок с вишнёвым, 4 банки с малиновым и 7 банок со сливовым вареньем. Карлсон сразу же съел 3 банки варенья. 1) Найдите ряд распределения случайной величины ξ — число банок со сливовым вареньем, оставшихся на следующий день после дня рождения. 2) Найдите функцию распределения $F(x)$ случайной величины ξ и постройте её график. 3) Найдите числовые характеристики случайной величины ξ: $M(\xi)$, $D(\xi)$ и $\sigma(\xi)$.*

◀ 1) Очевидно, что на следующий день осталось 13 банок с вареньем. При этом случайная величина ξ может принимать следующие значения: 4, 5, 6, 7. Найдем вероятности, с которыми она принимает эти значения.

Случайная ξ принимает значение 4, если в день рождения Карлсон съел три банки со сливовым вареньем.

$P(\xi = 4) = \dfrac{C_7^3}{C_{16}^3} = \dfrac{5}{80}.$

Аналогично, $\xi = 5$, если в день рождения Карлсон съел две банки со сливовым и одну не со сливовым вареньем.

$P(\xi = 5) = \dfrac{C_7^2 \cdot C_9^1}{C_{16}^3} = \dfrac{27}{80}.$

Аналогично:

$P(\xi = 6) = \dfrac{C_7^1 \cdot C_9^2}{C_{16}^3} = \dfrac{36}{80}.$

$P(\xi = 7) = \dfrac{C_9^3}{C_{16}^3} = \dfrac{12}{80}.$

Проверим сумму вероятностей

$P(\xi = 4) + P(\xi = 5) + P(\xi = 6) + P(\xi = 7) = \dfrac{5 + 27 + 36 + 12}{80} = 1.$

Таким образом, таблица распределения имеет вид:

ξ	4	5	6	7
p	5/80	27/80	36/80	12/80

2) Функция распределения $F(x) = P(\xi < x)$ данной случайной величины имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \leqslant 4, \\ 5/80, & \text{при} \quad 4 < x \leqslant 5, \\ 5/80 + 27/80 = 32/80, & \text{при} \quad 5 < x \leqslant 6, \\ 32/80 + 36/80 = 68/80, & \text{при} \quad 6 < x \leqslant 7, \\ 68/80 + 12/80 = 1, & \text{при} \quad x > 7. \end{cases}$$

На рис. 6 изображён график функции распределения.

3) Найдём числовые характеристики случайной величины ξ.

$M(\xi) = \sum\limits_{k=4}^{7} kP_k = 4 \cdot \dfrac{5}{80} + 5 \cdot \dfrac{27}{80} + 6 \cdot \dfrac{36}{80} + 7 \cdot \dfrac{12}{80} = \dfrac{91}{16} = \mathbf{5{,}6875}.$

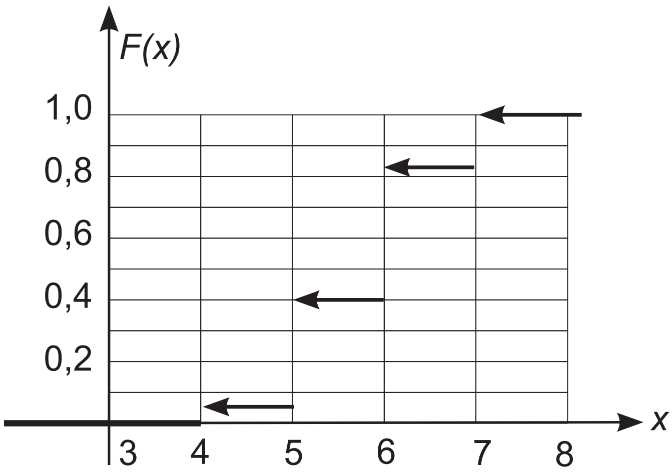

Рисунок 6. *Функция распределения примера 13.11*

$$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \sum_{k=4}^{7} k^2 P_k - M^2(\xi) =$$
$$= 4^2 \cdot \frac{5}{80} + 5^2 \cdot \frac{27}{80} + 6^2 \cdot \frac{36}{80} + 7^2 \cdot \frac{12}{80} - \left(\frac{91}{16}\right)^2 =$$
$$= \frac{2639}{80} - \frac{6964321}{6400} = \frac{819}{1280} = \mathbf{0{,}639844}.$$

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{0{,}639844} \approx \mathbf{0{,}8}. \blacktriangleright$$

Задания для самостоятельной работы

13.1. Дискретная случайная величина (д.с.в.) задана следующим законом распределения:

ξ	-2	0	2	4	8
p	0,1	0,2	0,3	0,1	a

Найти a, математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и построить график многоугольника распределения д.с.в. ξ.

13.2. Даны законы распределения двух независимых д.с.в ξ и η:

ξ	-1	2	4
p	0,3	0,5	0,2

и

η	-1	1
p	0,4	0,6

Найти законы распределения д.с.в $\xi+\eta$ и $\xi\cdot\eta$ и найти их математическое ожидание и дисперсию.

13.3. Даны законы распределения д.с.в ξ:

ξ	-2	-1	0	1	2
p	0,1	0,3	0,3	0,1	0,2

Найти закон распределения д.с.в $\eta = 2\xi^3$ и найти $M(\eta)$ и $D(\eta)$. Найти функцию распределения $F(x)$ д.с.в. η и построить её график.

13.4. В коробке 3 красных фломастера и 3 чёрных. Из коробки последовательно вынимают фломастеры до появления чёрного. Построить ряд распределения дискретной случайной величины ξ — числа извлеченных фломастеров. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение д.с.в. ξ. Найти функцию распределения $F(x)$ д.с.в. ξ и построить её график.

13.5. В урне имеются три белых и четыре чёрных шара. Вынули три шара. Д.с.в. ξ — число извлеченных белых шаров. Найти закон распределения случайной величины ξ. Найти функцию распределения $F(x)$ д.с.в. ξ и построить её график.

13.6. На столе экзаменатора 12 карточек с вопросами для экзамена, среди которых 4 сложных. Студент случайным образом берет 3 карточки с вопросами. Составить закон д.с.в. ξ — количество сложных заданий, доставшихся студенту. Найти функцию распределения $F(x)$ д.с.в. ξ и построить её график.

13.7. Стрелок последовательно стреляет по двум одинаковым мишеням. Вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,4. На каждую мишень даётся не более двух выстрелов. В случае попадания в мишень стрелок переходит к следующей мишени, а если мишень не поражена, стрелок заканчивает стрельбу. Составить закон распределения д.с.в. ξ — числа произведённых выстрелов. Найти функцию распределения $F(x)$ д.с.в. ξ и построить её график.

13.8. Дискретная случайная величина (д.с.в.) задана следующим законом распределения:

ξ	-2	0	2	4	8
p	0,1	0,2	0,3	0,1	0,3

Найти функцию распределения и построить её график.