.МИНОБРНАУКИ РОССИИ ФГБОУ ВО «**МИРЭА – Российский технологический университет»** *ИПТиИП* Кафедра ВМ-3	**ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 00** Дисциплина: Математический анализ *Для всех направлений подготовки* Форма обучения: *очная* Курс 2 *Семестр* 3	Утверждено на заседании кафедры (протокол № 1 от 23.08.24г.) Заведующий кафедрой А.А.Кытманов 2024-25 *учебный* год

Задание. Исследовать числовой ряд на сходимость

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^{n+1}}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2}{3n^5+5}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+4}{5n-3}\right)^{2n+1}$

Необходимо знать следующие теоремы и определения:
1. Необходимое условие сходимости числового ряда и его следствие.
2. Достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами: признак сравнения, предельный признак сравнения, признак Даламбера, признаки Коши радикальный и интегральный.
3. Определения: сходящегося ряда, расходящегося ряда, суммы ряда.

Задание 4. Исследовать знакочередующийся ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{3n^5+8}$

Необходимо знать следующие определения и теоремы:
определения абсолютной и условной сходимости знакочередующегося ряда. Достаточное условие сходимости знакочередующегося ряда: признак Лейбница.

Задание 5. Найти область сходимости данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot (x-4)^n}{\sqrt{n^4+4}}$

Необходимо знать следующие определения: степенного ряда, радиуса сходимости степенного ряда, интервала сходимости и области сходимости

Задание 6. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x) = x^2 \cdot e^{3x-5}$ по степеням x и указать область сходимости полученного ряда.

Необходимо знать разложения в ряд Маклорена следующих функций:

e^x , $\cos x$, $\sin x$, $sh\, x$, $ch\, x$, $arctg\, x$, $ln(1+x)$, $(1+x)^m$, $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{1-x}$

Определение ряда Тейлора, ряда Маклорена в общем виде.

Задание 7. Вычислить сумму ряда, используя, разложение элементарных функций в ряд Тейлора:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} + \frac{2^6}{6!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + \cdots$$

Необходимо знать разложения в ряд Маклорена следующих функций:

e^x , $\cos x$, $\sin x$, $sh\, x$, $ch\, x$, $arctg\, x$, $ln(1+x)$, $(1+x)^m$, $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{1-x}$

Определение ряда Тейлора, ряда Маклорена в общем виде.

Задание 8. Разложить периодическую функцию $f(x)$ в ряд Фурье:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi < x \le 0 \\ 2x, & 0 < x \le \pi \end{cases}$$

Необходимо знать определение ряда Фурье функции $f(x)$, для четной функции, нечетной функции, функции общего вида, периодичной с периодом 2π, $2l$. Уметь раскладывать функцию, заданную на полупериоде, по синусам или косинусам.
Выучить теорему Дирихле о разложимости функции $f(x)$ в ряд Фурье. Равенство Парсеваля.

Задание 9. Прочитайте текст и установите соответствие.

Необходимо знать вышеперечисленные определения и теоремы и так же:
определение числового ряда, функционального ряда, равномерной сходимости функционального ряда, теорему Вейерштрасса, определение мажоранты, свойства абсолютно сходящихся рядов, равномерно сходящихся рядов

Задание. Исследовать числовой ряд на сходимость

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^{n+1}}$

Решение. Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{5^{n+2}} \cdot \frac{5^{n+1}}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{5} = \left[\frac{\infty}{5}\right] = \infty > 1,$$

следовательно, исследуемый ряд расходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^{n+1}}$ расходится по признаку Даламбера

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2}{3n^5+5}$

Решение. Проверим необходимое условие сходимости числового ряда:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2}{3n^5+5} = \left|\begin{matrix}\text{разделим числитель} \\ \text{и знаменатель} \\ \text{на } n^3\end{matrix}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n^3}}{3n^2+\frac{5}{n^3}} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0.$$

Необходимое условие сходимости выполнено, но в процессе вычисления предела мы получили ориентир для подбора ряда при применении признака сравнения.

Сравним два ряда:

данный $\sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2}{3n^5+5}$

и

$\sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $-$ обобщенный гармонический ряд

или ряд Дирихле, ряд сходится, так как $\alpha = 2 > 1$,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ $-$ обобщенный гармонический ряд или ряд Дирихле,

ряд сходится при $\alpha > 1$, и расходится при $\alpha \le 1$

Применим предельный признак сравнения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^3+2}{3n^5+5}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n^3+2)\cdot n^2}{3n^5+5} = \left|\begin{array}{c}\text{разделим числитель}\\ \text{и знаменатель}\\ \text{на } n^5\end{array}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{n^3}\right)\cdot 1}{3+\frac{5}{n^5}} = \frac{1}{3}\left|\begin{array}{l}\neq 0\\ \\ \neq \infty\end{array}\right.$$

Предел равен константе, не равен нулю и бесконечности, следовательно, ряды ведут себя одинаково. В данном случае сходятся, т.к. сходится ряд

$$\sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2}{3n^5+5}$ сходится по предельному (второму) признаку сравнения.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+4}{5n-3}\right)^{2n+1}$

Решение. Применим радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{3n+4}{5n-3}\right)^{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+4}{5n-3}\right)^{\frac{2n+1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3+\frac{4}{n}}{5-\frac{3}{n}}\right)^{2+\frac{1}{n}} =$$

$= \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} < 1,$ следовательно исследуемый ряд сходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+4}{5n-3}\right)^{2n+1}$ сходится по радикальному признаку Коши.

Рассмотрим ряды, которые могут относиться к заданию «Исследовать числовой ряд на сходимость»:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3}{n\cdot ln^3 n}$$

Применим интегральный признак Коши.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{3}{x \cdot ln^3 x},$$

которая непрерывна при $x \geq 2$ и при $x = n$

$$f(n) = a_n = \frac{3}{n \cdot ln^3 n}$$

Исследуем несобственный интеграл на сходимость:

$$\int_2^{+\infty} f(x)dx = \int_2^{+\infty} \frac{3}{x \cdot ln^3 x} dx = \lim_{b \to \infty} \int_2^b \frac{3dx}{x \cdot ln^3 x} = 3 \lim_{b \to +\infty} \int_2^b \frac{dx}{x \cdot ln^3 x} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} t = lnx \\ dt = \dfrac{dx}{x} \\ t_1 = ln2 \; t_2 = lnb \end{array} \right| = 3 \lim_{b \to +\infty} \int_{ln2}^{lnb} \frac{dt}{t^3} = 3 \lim_{b \to +\infty} \frac{t^{-2}}{-2} \Bigg|_{ln2}^{lnb} =$$

$$= -\frac{3}{2} \cdot \lim_{b \to +\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{ln^3 b}}_{\text{стремится к } 0} - \frac{1}{ln^2 2} \right) = - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{ln^2 2} \right) \neq \infty$$

Следовательно, несобственный интеграл сходится, по интегральному признаку Коши ряд и несобственный интеграл сходятся и расходятся одновременно. В данном случае ряд сходится, т.к. сходится несобственный интеграл.

Ответ: ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{n \cdot ln^3 n}$ сходится по интегральному признаку Коши.

Задание 4. Исследовать знакочередующийся ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{3n^5 + 8}$$

Решение.

Составим ряд из модулей членов знакочередующегося ряда и исследуем его сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n \cdot n}{3n^5 + 8} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^5 + 8}$$

Применим предельный признак сравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n^5+8}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$ – обобщенный гармонический ряд

или ряд Дирихле, ряд сходится, так как $\alpha = 4 > 1$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n^5+8}:\frac{1}{n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot n^4}{3n^5+8}=$$

$$=\left|\begin{matrix}\text{разделим числитель}\\ \text{и знаменатель}\\ \text{на } n^5\end{matrix}\right|=\frac{1}{3}\Big|\begin{matrix}\neq 0\\ \neq\infty\end{matrix}$$

ряды ведут себя одинаково, в данном случае сходятся.

Ряд из модулей членов знакочередующегося ряда сходится и, следовательно, исходный знакочередующейся ряд сходится абсолютно.

(по теореме: если сходится ряд, составленный из модулей членов

знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n a_n|$, то

знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ тоже сходится, причем абсолютно.)

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{3n^5+8}$ сходится абсолютно.

Задание 5. Найти область сходимости данного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\cdot(x-4)^n}{\sqrt{n^4+4}}$$

Решение:

1) степенной ряд, для нахождения области сходимости воспользуемся:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{4^{n+1}\cdot(x-4)^{n+1}}{\sqrt{(n+1)^4+4}}\cdot\frac{\sqrt{n^4+4}}{4^n\cdot(x-4)^n}\right|=$$

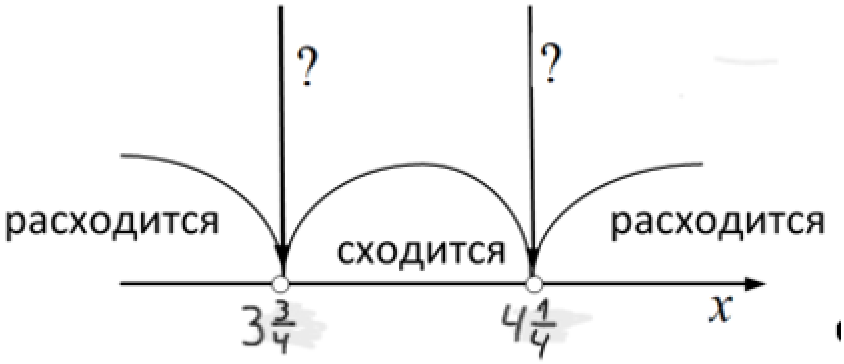
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot|x-4|\sqrt{n^4+4}}{\sqrt{(n+1)^4+4}}=4\cdot|x-4|\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{4}{n^4}}}{\sqrt{(1+\frac{1}{n})^4+\frac{4}{n^4}}}=4\cdot|x-4|$$

область сходимости степенного ряда, по признаку Даламбера:

$$4 \cdot |x-4| < 1 \quad => \quad |x-4| < \frac{1}{4} \quad =>$$

радиус сходимости равен $\frac{1}{4}$ и интервал сходимости:

$$-\frac{1}{4} < x-4 < \frac{1}{4} \quad => \quad 3\frac{3}{4} < x < 4\frac{1}{4}$$



2) Исследуем поведение ряда на концах интервал сходимости:

$$x = 4\frac{1}{4} \quad \text{и} \quad x = 3\frac{3}{4}$$

при $x = 4\frac{1}{4}$ получим

числовой ряд с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot \left(4\frac{1}{4} - 4\right)^n}{\sqrt{n^4+4}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\sqrt{n^4+4}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+4}}$$

при $x = 3\frac{3}{4}$ получим

числовой знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot \left(3\frac{3}{4} - 4\right)^n}{\sqrt{n^4+4}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^n}{\sqrt{n^4+4}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^4+4}}$$

Заметим, что первый ряд является для второго ряда – рядом, составленным из модулей членов знакочередующегося ряда.

Исследование начнем с первого ряда или ряда с положительными членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+4}}$$

Для исследования на сходимость данного ряда применим предельный признак сравнения, сравним с обобщенным гармоническим рядом, который сходится:

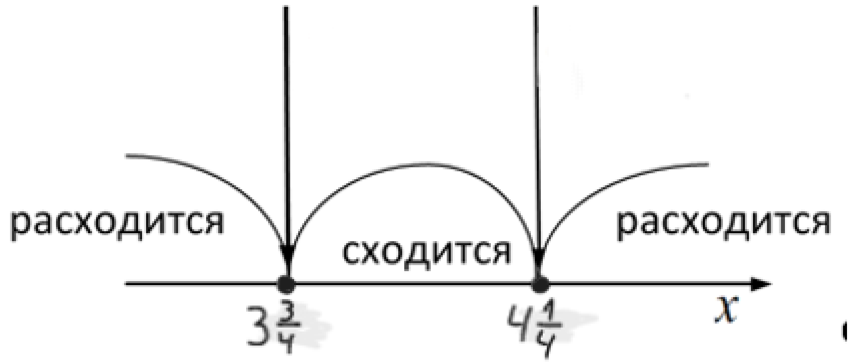
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^4+4}}:\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^4+4}}\cdot\frac{n^2}{1}=\left|\begin{matrix}\text{числитель и}\\ \text{знаменатель}\\ \text{разделим на } n^2\end{matrix}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{n^4}}}=1\ \left|\begin{matrix}\neq 0\\ \\ \neq\infty\end{matrix}\right.$$

Следовательно, по предельному признаку сравнения, исследуемый ряд и ряд Дирихле ведут себя одинаково, т.е. сходятся. Таким образом, первый ряд или степенной ряд при $x=4\frac{1}{4}$ сходится.

Вспомним, что первый ряд является для второго ряда – рядом, составленным из модулей членов знакочередующегося ряда , который только исследовали на сходимость.
Таким образом, ряд, составленный из модулей, знакочередующегося ряда сходит, следовательно, знакочередующийся ряд сходится абсолютно или степенной ряд при $x=3\frac{3}{4}$ сходится абсолютно.



Областью сходимости данного степенного ряда является отрезок $\left[3\frac{3}{4};\ 4\frac{1}{4}\right]$.

Ответ: область сходимости ряда $\left[3\frac{3}{4};\ 4\frac{1}{4}\right]$ и радиус сходимости равен $\frac{1}{4}$.

Задание 6. Разложить в ряд Тейлора функцию

$$f(x)=x^2\cdot e^{3x-5}$$

по степеням x и указать область сходимости полученного ряда.
Решение:
Разложить функцию $f(x)=x^2\cdot e^{3x-5}$ в ряд по степеням $\boldsymbol{x}$, это значит нужно получить ряд, в степенях которого присутствует только x в разных степенях.

Преобразуем функцию
$f(x) = x^2 \cdot e^{3x-5} \ = x^2 \cdot e^{-5} \cdot e^{3x}$
Учитывая, что разложение функции e^x имеет вид:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

область сходимости $(-\infty; +\infty)$

разложим e^{3x} разложим в ряд Тейлора (Маклорена)

$$e^{3x} = 1 + 3x + \frac{3^2 \cdot x^2}{2!} + \frac{3^3 \cdot x^3}{3!} + \frac{3^4 \cdot x^4}{4!} + \cdots + \frac{3^n \cdot x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n \cdot x^n}{n!}$$

область сходимости $(-\infty; +\infty)$

Таким образом, данная функция $f(x)$ будет иметь следующее разложение в ряд Тейлора (Маклорена)

$$f(x) \ = x^2 \cdot e^{-5} \cdot e^{3x} =$$

$$= x^2 \cdot e^{-5} \cdot \left(1 + 3x + \frac{3^2 \cdot x^2}{2!} + \frac{3^3 \cdot x^3}{3!} + \frac{3^4 \cdot x^4}{4!} + \cdots + \frac{3^n \cdot x^n}{n!} + \cdots\right) =$$

$$= x^2 e^{-5} + x^3 \cdot 3e^{-5} + \frac{e^{-5} \cdot 3^2 \cdot x^4}{2!} + \frac{e^{-5} \cdot 3^3 \cdot x^5}{3!} + \cdots + \frac{e^{-5} \cdot 3^n \cdot x^{n+2}}{n!} + \cdots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-5} \cdot 3^n \cdot x^{n+2}}{n!}$$ область сходимости $(-\infty; +\infty)$

Ответ: $f(x) = x^2 e^{-5} + x^3 \cdot 3e^{-5} + \frac{e^{-5} \cdot 3^2 \cdot x^4}{2!} + \frac{e^{-5} \cdot 3^3 \cdot x^5}{3!} + \cdots +$
$+ \frac{e^{-5} \cdot 3^n \cdot x^{n+2}}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-5} \cdot 3^n \cdot x^{n+2}}{n!}$ область сходимости $(-\infty; +\infty)$

Задание 7. Вычислить сумму ряда, используя, разложение элементарных функций в ряд Тейлора:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} + \frac{2^6}{6!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + \cdots$$

Решение: рассмотрим разложение в ряд Тейлора (Маклорена) функции $f(x) = e^x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

и попробуем оценить на сколько оно похоже на данный ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} + \frac{2^6}{6!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + \cdots$$

$$e^x = \underbrace{1 + x}_{\text{нет таких слагаемых}} + \underbrace{\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots}_{\text{есть такие слагаемые, при } x=2}$$

Таким образом

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} + \frac{2^6}{6!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + \cdots =$$

$$= e^2 - \underbrace{1 + 2}_{\text{нет таких слагаемых}} = e^2 - 3$$

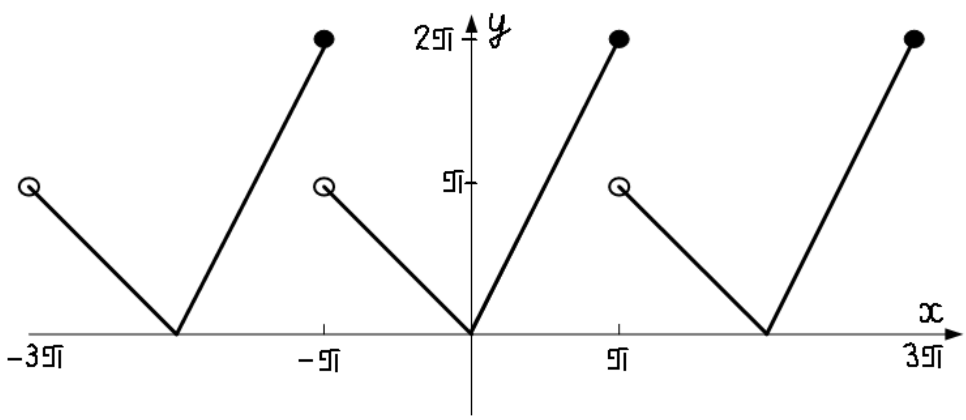
Ответ: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} + \frac{2^6}{6!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + \cdots = e^2 - 3.$

Задание 8. Записать ряд Фурье для периодической функции $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi < x \le 0 \\ 2x, & 0 < x \le \pi \end{cases}$$

с периодом 2π.

Решение: данная функция $f(x)$- функция общего вида, её график



Ряд Фурье функции $f(x)$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad , \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx \, dx \quad ,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx$$

Вычислим коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} -x dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} 2x dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{-x^2}{2} \Bigg|_{-\pi}^{0} + x^2 \Bigg|_{0}^{\pi} \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{2} + \pi^2 \right) = \frac{3\pi}{2} = a_0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} -x \cdot \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} 2x \cdot \cos nx \, dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{интегрируем} \\ \text{по частям} \\ \int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du \end{matrix} \right| =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = -x & du = -dx \\ dv = \cos nx \, dx & v = \dfrac{\sin nx}{n} \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} u = 2x & du = 2dx \\ dv = \cos nx \, dx & v = \dfrac{\sin nx}{n} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\underbrace{-x \cdot \frac{\sin nx}{n} \Bigg|_{-\pi}^{0}}_{=0} + \int_{-\pi}^{0} \frac{\sin nx}{n} dx \right) + \frac{1}{\pi} \left(\underbrace{2x \cdot \frac{\sin nx}{n} \Bigg|_{0}^{\pi}}_{=0} - \int_{0}^{\pi} \frac{2 \sin nx}{n} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{-\cos nx}{n^2} \Bigg|_{-\pi}^{0} - 2 \cdot \frac{-\cos nx}{n^2} \Bigg|_{0}^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi \cdot n^2} (-1 + (-1)^n + 2(-1)^n - 2) =$$

$$= \frac{3\cdot((-1)^n-1)}{\pi\cdot n^2} = \begin{cases} 0, & n=2k \\ \dfrac{-6}{\pi\cdot n^2}, & n=2k-1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & n=2k \\ \dfrac{-6}{\pi\cdot(2k-1)^2}, & n=2k-1 \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x\cdot\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2x\cdot\sin nx\,dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{интегрируем} \\ \text{по частям} \\ \int_a^b udv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b vdu \end{matrix} \right| =$$

$$= \left| \begin{matrix} u=-x & du=-dx \\ dv=\sin nx\,dx & v=\dfrac{-\cos nx}{n} \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} u=2x & du=2dx \\ dv=\sin nx\,dx & v=\dfrac{-\cos nx}{n} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(x\cdot\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0}\frac{\cos nx}{n}dx \right) + \frac{1}{\pi}\left(2x\cdot\frac{-\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi} + \int_{0}^{\pi}\frac{2\cos nx}{n}dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi\cdot n}\left(\pi\cdot(-1)^n - \underbrace{\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}}_{=0} \right) + \frac{1}{\pi\cdot n}\left(-2\pi\cdot(-1)^n + \underbrace{2\frac{\sin nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}}_{=0} \right) =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n} = b_n$$

Ответ: ряд Фурье для данной функции имеет вид:

$$S(x) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-6}{\pi\cdot(2k-1)^2}\cdot\cos(2k-1)x + \frac{(-1)^{k+1}}{k}\cdot\sin kx$$

$\forall\, x \neq \pi\cdot(2k+1),\ \ k \in Z$

и

$S(x) = \dfrac{\pi+2\pi}{2} = \dfrac{3}{2}\pi \qquad \forall\, x = \pi\cdot(2k+1),\ \ k \in Z.$

$$f(x) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-6}{\pi \cdot (2k-1)^2} \cdot \cos(2k-1)x + \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot \sin kx$$

при всех x, в которых функция $f(x)$ непрерывна ($\forall\, x \neq \pi \cdot (2k+1),\ \ k \in Z$).

Задание 9. Теоретический вопрос.

например

Задание **9.** Выбрать правильный ответ (обосновать ответ).

Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ \ a_n \geq 0$ сходится и если существует $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, то

1. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$
2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq 1$
3. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$
4. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \geq 1$

Решение:

Известно, что числовой ряд с положительными членами сходится и существует предел корня степени n из общего члена ряда, следовательно этот предел **не может быть** больше единицы, иначе бы числовой ряд расходился по радикальному признаку Коши. Таким образом, исследуемый предел меньше или равен единице.