20. Числовые характеристики функции случайного аргумента

Для непрерывной случайной величины ξ

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \tag{20.1}$$

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - M^2(\xi). \tag{20.2}$$

Замечание 20.1. *Если $\eta = \varphi(\xi)$ — непрерывная функция случайного аргумента ξ, причём возможные значения ξ принадлежат всей оси Ox, то*

$$M(\varphi(\xi)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot f(x) dx, \tag{20.3}$$

где $f(x)$ — плотность распределения ξ.

$$D(\varphi(\xi)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) f(x)\, dx - M^2(\varphi(\xi)). \tag{20.4}$$

Замечание 20.2. *Если ξ— непрерывная случайная величина, заданная плотностью распределения $f(x)$, и если $y = \varphi(x)$ — дифференцируемая монотонно возрастающая или монотонно убывающая функция, обратная функция которой $x = \psi(y)$, то плотность распределения $g(y)$ случайной величины η определяется равенством*

$$g(y) = f[\psi(y)] \cdot |\psi'(y)|. \tag{20.5}$$

Пример 20.1. *Случайная величина ξ имеет плотность распределения $f(x) = \begin{cases} 0, x <\notin [0;1], \\ 3x^2, x \in [0;1]. \end{cases}$ Найти плотность распределения случайной величины $\eta = |x-2|$, $M(\eta)$ и $D(\eta)$.*

◀ $F_\eta = P(y < \eta) = P(y < |x-2|) = \int\limits_{2-y}^{2} 3x^2\, dx = x^3\Big|_{2-y}^{2} = 8 - (2-y)^3.$

$$f_\eta(y) = F'_\eta(y) = \begin{cases} 3(2-y)^2, & y \in [1;2], \\ 0, & y \notin [1;2]. \end{cases}$$

Вычислим числовые характеристики двумя способами.

1 способ. Используем формулы (20.3) и (20.4).

$$M(\varphi(\xi)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\cdot f(x)dx, \qquad D(\varphi(\xi)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) f(x)\,dx - M^2(\varphi(\xi)).$$

$$M(\eta) = \int\limits_0^1 |x-2|\cdot 3x^2\,dx = 3\int\limits_0^1 2x^2 - x^3\,dx = \left(2x^3 - \frac{3x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = 1{,}25.$$

$$D(\eta) = \int\limits_0^1 |x-2|^2\cdot 3x^2\,dx - \frac{25}{16} = 3\int\limits_0^1 \left(x^4 - 4x^3 + 4x\right)\,dx - \frac{25}{16} =$$

$$= 3\left(\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4x^3}{3}\right)\Big|_0^1 - \frac{25}{16} = \frac{8}{5} - \frac{25}{16} = \frac{3}{80}.$$

2 способ. Используем полученное значение для функции плотности случайной величины η

$$M(\eta) = \int\limits_1^2 3y(2-y)^2\,dy = 6y^2 - 4y^3 + \frac{3}{4}y^4\Big|_1^2 =$$

$$= 18 - 28 + 12 - \frac{3}{4} = 1{,}25.$$

$$D(\eta) = \int\limits_1^2 3y^2(2-y)^2\,dy = \int\limits_1^2 (12y^2 - 12y^3 + 3y^4)\,dy = \int\limits_1^2 4 - 3y^4 y^3 + \frac{3}{5}y^5\Big|_1^2 - \frac{25}{16} =$$

$$= \frac{8}{5} - \frac{25}{16} = \frac{3}{80}.$$

▶

Ответ: $\boxed{f_\eta(y) = \begin{cases} 3(2-y)^2, & y \in [1;2], \\ 0, & y \notin [1;2]; \end{cases} \quad M(\eta) = 1{,}25;\ D(\eta) = \frac{3}{80}.}$

Пример 20.2. *Случайная величина ξ имеет показательное распределение с плотностью* $f(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, x \geqslant 0. \end{cases}$ *Найти плотность распределения случайной величины* $\eta = \sqrt{\xi}$.

◀

1 способ основанный на применение формулы (20.5).

Т.к. функция $y = \sqrt{x}$ монотонно возрастающая на всей области определения $x \geqslant 0$, то для определения функции плотности случайной величины η можно применить формулу (20.5). Отметим, что случайная величина η не принимает отрицательные значения, поэтому ее плотность равна нулю при $Y < 0$.

Найдём функцию $\psi(y)$, обратную функция $y = \sqrt{x}$.

$x = y^2, y > 0 \;\Rightarrow\; x' = 2y.$

Применяем формулу (20.5):

$$f_\eta(y) = \begin{cases} 0, y < 0, \\ \lambda e^{-\lambda y^2} \cdot 2y, y \geqslant 0. \end{cases}$$

<u>*2 способ*</u> основанные на нахождении функции распределения $F_\eta(y)$ непрерывной случайной величины η. Пусть $y > 0$. Тогда

$$F_\eta(y) = P(\eta < y) = P(\sqrt{x} < y) = P(x < y^2) = \int\limits_0^{y^2} \lambda e^{-\lambda x}\, dx =$$

$$= -e^{-\lambda y^2}\Big|_0^{y^2} = -e^{-\lambda y^2} + 1.$$

Получили выражение для функции распределения случайной величины η

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, y < 0, \\ 1 - e^{-\lambda y^2} y \geqslant 0. \end{cases}$$

Находим функцию плотности вероятностей случайной величины η

$$\mathrm{f}_\eta(y) = F'_\eta(y) = \begin{cases} 0, y < 0, \\ 2\lambda y e^{-\lambda y^2} y \geqslant 0. \end{cases}$$

▶

Ответ: $\boxed{f_\eta(y) = \begin{cases} 0, y < 0, \\ 2\lambda y e^{-\lambda y^2}, y \geqslant 0. \end{cases}}$

Пример 20.3. *Пусть ξ $N(0,1), \eta = \xi^3$. Найти плотность распределения случайной величины η .*

◀ Найдём функцию плотности случайной величины η. Т.к. функция $y = x^3$ монотонно возрастающая на всей действительной оси, то для определения функции плотности случайной величины η можно применить формулу (20.5). Найдём функцию $\psi(y)$, обратную функция $y = x^3$. Для этого извлекаем кубический корень.

$$x = \sqrt[3]{y} \Rightarrow \ \psi(y) = \sqrt[3]{y} \Rightarrow \psi'(y) = \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}$$

Функцию плотности случайной величины η найдём по формуле (20.5) $g(y) = f[\psi(y)] \cdot |\psi'(y)|$.

Функция плотности заданной величины ξ равна:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\dfrac{x^2}{2}}.$$

Тогда функция плотности вероятностей величины η равна:

$$f_\eta(y) = \frac{1}{2\pi\sqrt[3]{y^2}} e^{-\dfrac{\sqrt[3]{y^2}}{2}}.$$ **Ответ:** $\boxed{f_\eta(y) = \frac{1}{2\pi\sqrt[3]{y^2}} e^{-\dfrac{\sqrt[3]{y^2}}{2}}.}$

Пример 20.4. *Пусть* ξ $N(0,1), \eta = \xi^2$. *Найти плотность распределения случайной величины* η .

◀ Функция плотности заданной величины ξ равна:

$f(x) = \dfrac{1}{2\pi}e^{-\dfrac{x^2}{2}}$.

Найдём функцию плотности случайной величины η. Т.к. функция $y = x^2$ имеет два интервала монотонности, поэтому обратная функция является двузначной $x = \pm\sqrt{y}$. Следовательно функция плотности $f_\eta(y)$ будет состоять из двух слагаемых, отображающих каждую ветку обратной функции.

Найдём модуль производной функции $\psi(y) = \pm\sqrt{y}$.

$|\psi'(y)| = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$.

$$f_\eta(y) = \begin{cases} 0, y \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\dfrac{y}{2}}\dfrac{1}{2\sqrt{y}} + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\dfrac{y}{2}}\dfrac{1}{2\sqrt{y}} \end{cases} = \begin{cases} 0, y \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\dfrac{y}{2}}. \end{cases}$$

Ответ: $\boxed{\mathbf{f}_\eta(y) = \begin{cases} 0, y \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\dfrac{y}{2}}. \end{cases}}$

Пример 20.5. *Непрерывная случайная величина* ξ *задана функцией плотности распределения* $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 8e^{-8x}, & x \geqslant 0. \end{cases}$ *Найти* $M(\xi)$, $D(\xi)$, *плотность распределения непрерывной случайной величины* $k\eta = e^{3\xi}$, $M(\eta)$ *и* $D(\eta)$. *Числовые характеристики случайной величины найти двумя способами.*

◀ По формуле (20.1) найдём $M(\xi)$

$$M(\xi) = \int\limits_0^{+\infty} x\cdot 8e^{-8x}dx = -\int\limits_0^{+\infty} xde^{-8x} = -xe^{-8x}\Big|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} e^{-8x}dx =$$

$$= -\frac{1}{8e^{8x}}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{8}.$$

Отметим, что случайная величина ξ описывает показательное распределение и для него $M(\xi) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{8}$.

По формуле (20.3) найдём $M(\eta)$

$M(\eta) = \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{3x}\cdot 8e^{-8x}dx = 8\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-5x}dx = -\dfrac{8}{5}e^{-5x}\Big|_0^{+\infty} = \dfrac{8}{5}$.

$$g(y)=\begin{cases}0, & y<1,\\ \dfrac{8}{3y}e^{-8\frac{\ln y}{3}}, & y\geqslant 1\end{cases}=\begin{cases}0, & y<1,\\ \dfrac{8}{3y}\left(e^{\ln y}\right)^{(-8/3)}, & y\geqslant 1\end{cases}=$$
$$=\begin{cases}0, & y<1,\\ \dfrac{8}{3y}y^{-8/3}, & y\geqslant 1\end{cases}=\begin{cases}0, & y<1,\\ \dfrac{8}{3}y^{-11/3}, & y\geqslant 1.\end{cases}$$

Проверим выполняется ли условие нормировки полученной функции плотности

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{8}{3}y^{-11/3}dy=\frac{8}{3}\cdot\frac{y^{-8/3}}{-8/3}\Big|_1^{+\infty}=1.$$

Используя формулу (20.1), вычислим математическое ожидание данной случайной величины η

$$M(\eta)=\int\limits_1^{+\infty}y\frac{8}{3}y^{-11/3}dy=\frac{8}{3}\int\limits_1^{+\infty}y^{-8/3}dy=\frac{8}{3}\frac{y^{-5/3}}{(-5/3)}\Big|_1^{+\infty}=$$
$$=-\frac{8}{5y^{2/3}}\Big|_1^{+\infty}=\frac{8}{5}.$$

Получили такое же значение, как и по формуле (20.3).

Найдём теперь дисперсию случайной величины η по двум формулам.

1) По формуле $D(\eta)=M(\eta^2)-M^2(\eta)$:

$$D(\eta)=\int\limits_1^{+\infty}y^2\frac{8}{3}y^{-11/3}dy-M^2(\eta)=\frac{8}{3}\int\limits_1^{+\infty}y^{-5/3}dy-\frac{64}{25}=$$
$$=\frac{8}{3}\frac{y^{-2/3}}{(-2/3)}\Big|_1^{+\infty}-\frac{64}{25}=4-\frac{64}{25}=\frac{36}{25}.$$

2) По формуле $D(\varphi(\xi))=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi^2(x)f(x)\,dx-M^2(\varphi(\xi))$:

$$D(\eta)=\int\limits_0^{+\infty}\left(e^{3x}\right)^2 8e^{-8x}dx-M^2(\eta)=8\int\limits_0^{+\infty}e^{-2x}dx-\left(\frac{5}{8}\right)^2=$$
$$=-\frac{8}{2e^{2x}}\Big|_0^{+\infty}-\frac{25}{64}=4-\frac{64}{25}=\frac{36}{25}.$$

По обеим формулам получили одинаковые результаты. ▶

В примере 20.5 условие монотонности функции $\varphi(\xi)$ выполнялось на всей области определения. Рассмотрим теперь пример, в котором функция кусочно монотонна. В этом случае вместо формулы (20.6) применяется более общая формула

$$g(y) = \sum_{k=1}^{m} f[\psi_k(y)] \cdot |\psi_k'(y)|. \tag{20.6}$$

где m — число интервалов монотонности, $x = \psi_k(y)$ — уравнение обратной функции $y = \varphi(\xi)$ на k-том интервале монотонности этой функции.

Пример 20.6. *Непрерывная случайная величина ξ задана функцией плотности распределения* $f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0; \pi/2], \\ \cos x, & x \in [0; \pi/2]. \end{cases}$ *Найти плотность распределения непрерывной случайной величины $\eta = |\xi - \pi/6|$ и построить её график.*

◀ На рис. 25 приведен график функции преобразования в координатах (x, y), случайной величины ξ к величине η.

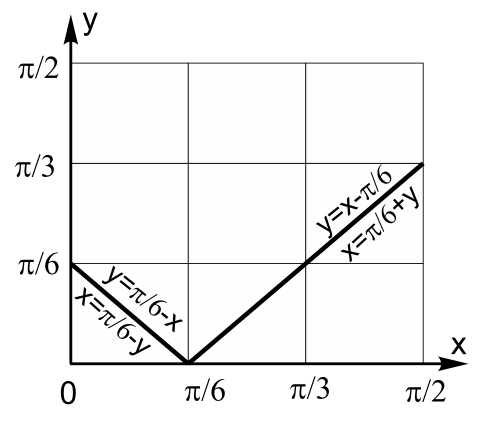

Рисунок 25. $\eta(\xi)$

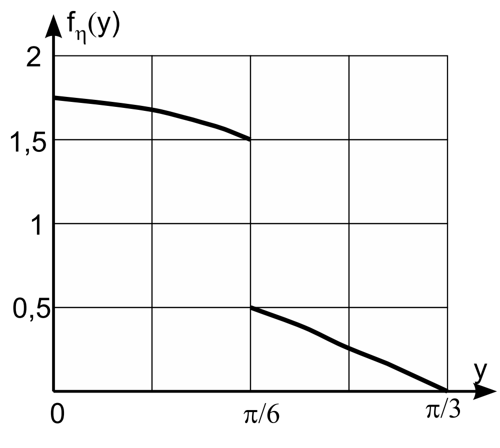

Рисунок 26. $f_\eta(y)$

Рисунки для примера 20.6

$$y = \begin{cases} 0, & x \notin [0; \pi/2], \\ \pi/6 - x, & x \in [0; \pi/6], \\ x - \pi/6, & x \in [\pi/6;\ \pi/2]. \end{cases}$$

Получим обратную функцию $x = \psi(y)$.

$$x = \psi(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty; 0) \bigcup ((\pi/3; \infty), \\ \pi/6 - y, & x \in [0; \pi/6] \bigcap y \in [0; \pi/6], \\ \pi/6 + y, & x \in [\pi/6; \pi/2] \bigcap y \in [0; \pi/3]. \end{cases}$$

Модуль производной этой функции равен

$$|\psi'(y)| = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty; 0) \bigcup ((\pi/3; \infty), \\ 1, & y \in [0; \pi/3]. \end{cases}$$

Функция $x = \psi(y)$ на отрезке $y \in [0; \pi/6]$ двузначная, поэтому в функции плотности $f_\eta(y)$ этому отрезку соответствует сумма двух слагаемых. Получаем

$$f_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty; 0) \bigcup ((\pi/3; \infty), \\ \cos(\pi/6 + y) + \cos(\pi/6 - y), & y \in [0; \pi/6], \\ \cos(\pi/6 + y), & y \in [\pi/6; \pi/3]. \end{cases}$$

Отдельно вычислим

$$\cos(\pi/6 + y) + \cos(\pi/6 - y) =$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi/6 + y + \pi/6 - y}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi/6 + y - \pi/6 + y}{2}\right) = \sqrt{3}\cos y.$$

Получаем искомую функцию плотности

$$f_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty; 0) \bigcup ((\pi/3; \infty), \\ \sqrt{3}\cos y, & y \in [0; \pi/6], \\ \cos(\pi/6 + y), & y \in [\pi/6; \pi/3]. \end{cases}$$

Проверим, выполняется ли условие нормировки полученной функции плотности $\int\limits_1^{+\infty} f_\eta(y)dy = 1$.

$$\int\limits_0^{\pi/6} \sqrt{3}\cos y\, dy + \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{3}\cos(\pi/6 + y)\, dy =$$

$$= \sqrt{3}\sin y\Big|_0^{\pi/6} + \sin(\pi/6 + y)\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \sqrt{3}/2 + 1 - \sqrt{3}/2 = 1.$$

На рис. 26, представлен график полученной функции плотности $f_\eta(y)$. ►

Задания для самостоятельной работы

20.1. Случайная величина подчиняется нормальному закону распределения вероятностей с параметрами $a = 8, \sigma = 2$. Определить: 1)$P(|\xi - 4| < 2)$. 2) $P(|\xi - 8| < 2)$. 3) $P(2 < \xi < 14)$. 4) $P(\xi > 6)$. Представить геометрическую иллюстрацию полученного решения.

20.2. Автомат штампует детали. Известно,что длина изготавливаемой детали представляет собой случайную величину, распределённую по нормальному закону. Её среднее значение равно 100 см, а $\sigma = 0{,}2$ см. Какую точность длины детали можно гарантировать с вероятностью 0,95?

20.3. Производится взвешивание без систематических ошибок слитков из драгоценных металлов. Известно, что случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 1$ мг. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 2 мг.

20.4. Наблюдения показали, что внешний диаметр подшипников данного типа является нормально распределённой случайной величиной ξ со средним значением $a = 60$ мм и средним квадратическим отклонением $\sigma = 0{,}001$ мм. В каких границах можно практически гарантировать внешний диаметр подшипника, если за вероятность практической достоверности принять 0,9973.

20.5. Случайные ошибки измерения дальномера распределены нормально, и дальномер не имеет систематической ошибки. При определении дальности цели абсолютная величина ошибки с вероятностью 0,966 не превосходит 5м. Найти среднюю квадратическую ошибку.

20.6. Стандартная длина заготовки выпущенной автоматом составляет 50 см., а отклонение распределено по нормальному закону со средней квадратической ошибкой 0,5 см. Систематическая ошибка отсутствует. В каком интервале с вероятностью 0,99 длина заготовки?

20.7. Каким должен быть допуск отклонения размера детали от номинала, чтобы с вероятностью 0,899 отклонение было допустимым, если средняя квадратическая ошибка отклонения равна 12 мм, а систематическая ошибка равна нулю? (Закон распределения – нормальный).

20.8. Срок службы прибора является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Найти среднее время срока службы прибора, если с вероятностью 0,937 прибор работает более 300 ч. Среднее квадратическое отклонение 10 ч.

20.9. Случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке [-3; 2] . Найдите математическое ожидание случайной величины $\eta = 2|\xi|$.

20.10. Случайная величина ξ распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 2$. Найдите математическое ожидание случайной величины $\eta = |\xi - 3|$.