ТВиМС. Практическое занятие №9

9. Подготовка к тесту

В тесте представлено 7 вопросов на 80 минут. Максимальный балл за тест — 10 баллов. Первые четыре задания оцениваются в один балл, а остальные в два балла. Проходной балл 6.

Внимание. Ответы во всех заданиях теста являются действительными числами. Это число надо записывать в виде десятичной дроби, округлив ее до четырех знаков после запятой. 2/3=0,6667. 1/3=0,3333 (Точка и запятая равнозначны). 1/5=0,2.

1. Студент выучил двенадцать вопросов из двадцати. Всего в билете пять вопросов. Чтобы сдать экзамен, необходимо ответить хотя бы на три любых вопроса. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен.

2. В куб была брошена точка. Найти вероятность того, что брошенная точка оказалась вне области шара, который вписан в куб.

3. На столе стоят три коробки, в каждой коробке лежат по 24 маркера: 9 красных, 8 синих и 7 зелёных. Из каждой коробки вынули по одному маркеру. Определить вероятность того, все три окажутся одного цвета.

4. Однотипные двигатели поступают на склад с трех заводов. Вероятность поступления бракованного двигателя с первого завода равна – 0,05, со второго – 0,03, с третьего – 0,06. Все поступающие двигатели складываются вместе. С первого завода поступает в два раза больше двигателей, чем со второго, а с третьего в два раза меньше, чем со второго. Взятый наугад двигатель оказался бракованным. Найдите вероятность того, что он выпущен на первом заводе.

5. Телеграфная линия передает сообщение, состоящее из символов двух типов – «точки» и «тире». Символы передаются независимо друг от друга. Вероятность передачи «точки» – 0,2; «тире» – 0,8. Найти вероятность того, что из 16 переданных символов будет 11 тире.

6. В цехе находится 300 станков. Вероятность того, что один станок в течение смены потребует к себе внимания, равна 0,1. Найти вероятности того, что за смену от 20 до 32 (включительно) станков потребуют к себе внимания.

7. Отметьте формулу Бернулли для n независимых повторных испытаний:

1. $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)$. 2. $P(A|H_i) = \dfrac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}$.

3. $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. 4. $P_n(k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$.

Решение примерного варианта теста №1

1. Студент выучил двенадцать вопросов из двадцати. Всего в билете пять вопросов. Чтобы сдать экзамен, необходимо ответить хотя бы на три любых вопроса. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен.

◀ Для решения данного задания используем классическое определение вероятности.

$$P(A) = \frac{M}{N},$$

где A – искомое событие, M– число благоприятствующих появлению событию A, N– общее число исходов данного испытания.

$N = C_{20}^5 = \dfrac{20!}{5!15!} = \dfrac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{120} = 19 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 3 = 15504.$

$M = M_3 + M_4 + M_5,$

где M_i — число исходов в которых студент знает i вопросов из доставшегося ему билета, $i = 3,\ 4,\ 5.$

$M = C_{12}^3 C_8^2 + C_{12}^4 C_8^1 + C_{12}^5 = \dfrac{12!}{3!9!} \cdot \dfrac{8!}{2!6!} + \dfrac{12!}{4!8!} \cdot \dfrac{8!}{1!7!} + \dfrac{12!}{5!7!} =$

$= \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10}{6} \cdot \dfrac{8 \cdot 7}{2} + \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{24} \cdot 8 + \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{120} =$

$= 11 \cdot (560 + 360 + 72) = 10912.$

$$P(A) = \frac{10912}{15504} = \frac{682}{969} \approx 0{,}7038. \ ▶$$

Ответ: $\boxed{0{,}7038.}$

2. В куб была брошена точка. Найти вероятность того, что брошенная точка оказалась вне области шара, который вписан в куб.

◀ Для решения данного задания используем формулу (4.1) геометрического определения вероятности.

Вероятность события A, состоящего в попадании случайной точки в заданную область, равна отношению мер областей:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

В данном примере $\mu(A)$ — разность между объёмом куба и шара, вписанного в куб, $\mu(\Omega)$ — объём куба.

Найдём эти два объёма в виде функции от стороны куба a. При этом радиус шара равен $r = \dfrac{a}{2}$. Получаем

$$\mu(\Omega) = a^3,\ \mu(A) = a^3 - \frac{4\pi r^3}{3} = a^3 - \frac{4\pi}{3}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^3 = a^3\left(1 - \frac{\pi}{6}\right).$$
$$P(A) = 1 - \frac{\pi}{6} \approx 0,4764.$$

Ответ: $\boxed{\mathbf{0{,}4764.}}$

3. На столе стоят три коробки, в каждой коробке лежат по 24 маркера: 9 красных, 8 синих и 7 зелёных. Из каждой коробки вынули по одному маркеру. Определить вероятность того, все три окажутся одного цвета.

◀ Искомое событие $A = A_к A_с A_з$. Где $A_к$ событие состоящее в том, что из всех трёх коробок вытащили красные маркеры, $A_с$ – синие, $A_з$ – зелёные.

$$P(A) = P(A_к A_с A_з) = P(A_к)P(A_с)P(A_з) = \left(\frac{9}{24}\right)^3 + \left(\frac{8}{24}\right)^3 + \left(\frac{7}{24}\right)^3 =$$
$$= \frac{1}{24^3}\left(9^3 + 8^3 + 7^3\right) = \frac{1584}{13824} = \frac{11}{96} \approx 0{,}1146.$$ ▶

Ответ: $\boxed{0{,}1146.}$

4. Однотипные двигатели поступают на склад с трех заводов. Вероятность поступления бракованного двигателя с первого завода равна – 0,05, со второго – 0,03, с третьего – 0,06. Все поступающие двигатели складываются вместе. С первого завода поступает в два раза больше двигателей, чем со второго, а с третьего в два раза меньше, чем со второго. Взятый наугад двигатель оказался бракованным. Найдите вероятность того, что он выпущен на первом заводе.

◀ Для решения данного примера применяется формула полной вероятности и формула Байеса.

Формула полной вероятности (6.1). Вероятность события A, которое может наступить только вместе с одним из попарно **несовместных событий образующих полную группу, $H_1, H_2 \ldots H_n$,** называемых **гипотезами**, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \ldots + P(H_n)P(A/H_n).$$

Формула Байеса (6.2). В условиях формулы полной вероятности для $i = 1, \ldots, n$:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(H_1)P(A/H_1) + \cdots + P(H_n)P(A/H_n)}.$$

Введём следующие обозначения. A – взятый наудачу двигатель бракованный, H_i – взятый наудачу двигатель изготовлен на i-том заводе.

Пусть на складе x двигателей с третьего завода.
Тогда на складе $2x$ двигателей со второго завода, $4x$ с первого завода.

Находим вероятности гипотез H_1, H_2 и H_3.

$P(H_1) = \dfrac{4}{7}$, $P(H_2) = \dfrac{2}{7}$, $P(H_1) = \dfrac{1}{7}$.

Из условия задачи получаем значения для условных вероятностей $P(A/H_i)$.

$P(A/H_1) = 0{,}05$; $P(A/H_2) = 0{,}03$; $P(A/H_3) = 0{,}06$.

Применяя формулу полной вероятности, находим

$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) =$
$= \dfrac{1}{7}(4 \cdot 0{,}05 + 2 \cdot 0{,}03 + 0{,}06) = \dfrac{0{,}32}{7}$.

Используя формулу Байеса находим искомую вероятность $P(H_1/A)$

$P(H_1/A) = \dfrac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \dfrac{4/7 \cdot 0{,}05}{0{,}32/7} = \dfrac{20}{32} = \dfrac{5}{8} = 0{,}625.$ ►

Ответ: $\boxed{\mathbf{0{,}625.}}$

5. Телеграфная линия передает сообщение, состоящее из символов двух типов – «точки» и «тире». Символы передаются независимо друг от друга. Вероятность передачи «точки» – 0,2; «тире» – 0,8. Найти вероятность того, что из 16 переданных символов будет 11 тире.

◄ В данном задании необходимо найти вероятность 11 кратного происхождения события A при 16 повторных независимых испытаниях.

Для вычисления $P_n(m)$ используется формула Бернулли (7.1)

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Здесь $n = 16$, $p = 0{,}8$, $q = 1 - p = 0{,}2$, $m = 11$. Применяя формулу Бернулли, получаем

$P_{16}(11) = C_{16}^{11} \cdot p^{11} q^5 = \dfrac{16!}{11!5!} \cdot 0{,}8^{11} \cdot 0.2^5 =$
$= \dfrac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{120} \cdot 0{,}8^{11} \cdot 0.2^5 = 8 \cdot 3 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 0{,}8^{11} \cdot 0.2^5 \approx 0{,}12.$ ►

2 способ. Так как число испытаний больше 15, то можно применить локальную теорему Муавра-Лапласа. Если вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(m)$ того, что событие A появиться m раз в n

испытаниях, приближённо равна (8.9):

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\, f\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right), \quad \text{где } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{x^2}{2}}.$$

$\sqrt{npq} = \sqrt{16 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2} = \sqrt{2{,}56} = 1{,}6.$

$x = \dfrac{m-np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{11 - 16 \cdot 0{,}8}{1{,}6} = \dfrac{-1{,}8}{1,6} = -1{,}25.$

Из таблицы приложения 1, находим $f(-1{,}25) = 0{,}1826.$

$P_{16}(11) = \dfrac{0{,}1826.}{1{,}6} \approx 0{,}1141.$

Мы видим, что при использовании приближённой формулы (8.9) получен результат с точностью 0,006. Отметим, что по обоим формулам пришлось использовать калькулятор. Поэтому в тестовых задачах, до $n = 40$, лучше применять формулу Бернулли. Однако, отметим, что в тестовых задачах учитывается, что тестируемый может применять обе формулы, поэтому в заданиях заложен приближенный ответ с нужной точностью. Т.е. оба ответа будут засчитаны.

Ответ: $\boxed{0{,}12.}$

6. В цехе находится 300 станков. Вероятность того, что один станок в течение смены потребует к себе внимания, равна 0,1. Найти вероятности того, что за смену от 20 до 32 (включительно) станков потребуют к себе внимания.

◀ Для решения данного задания необходимо использовать интегральную теорему Муавра-Лапласа.

$$P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Здесь $n = 300,\ m_1 = 20,\ m_2 = 32,\ p = 0{,}1,\ q = 0{,}9. \Rightarrow$

$np = 30,\ \sqrt{npq} = \sqrt{30 \cdot 0{,}9} = \sqrt{27}.$

Получаем

$$P_{300}(20 \leqslant m \leqslant 32) \approx \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{27}}\right) - \Phi\left(\frac{-10}{\sqrt{27}}\right) =$$

$$= \Phi(0{,}3849) + \Phi(1{,}9245) \approx 0{,}15 + 0{,}473 = \mathbf{0{,}623}. \quad ▶$$

Ответ: $\boxed{\mathbf{0{,}623.}}$

7. Отметьте формулу Бернулли для n независимых повторных испытаний:

1. $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i).$ 2. $P(A|H_i) = \dfrac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}.$

3. $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$ 4. $P_n(k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$

◀ Здесь даны 4 правильные формулы:

1) Формула полной вероятности.

2. Формула Байеса.

3. Формула Бернулли.

4. Формула Пуассона.

▶

Ответ: $\boxed{\textbf{3.}}$