22. Непрерывная двумерная случайная величина

Определение 22.1. ***Функцией распределения*** *двумерной случайной величины* $(\xi;\eta)$ *называют*

$$F(x;y) = P\{\xi < x; \eta < y\}. \tag{22.1}$$

Определение 22.2. *Двумерная случайная величина* $(\xi;\eta)$ *называется* ***непрерывной***, *если её функция распределения* $F(x;y)$ *непрерывна и имеет непрерывные частные производные второго порядка всюду за исключением, быть может, конечного числа точек.*

Двумерная функция распределения обладает следующими свойствами:

(1) $0 \leqslant F(x;y) \leqslant 1$;

(2) $F(-\infty;y) = F(x;-\infty) = F(-\infty;-\infty) = 0 \quad F(+\infty;+\infty) = 1$;

(3) $F(x;y)$ есть неубывающая функция по каждому аргументу;

(4) Функции распределения каждой составляющей получаются предельным переходом:

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = F(x;+\infty),$$
$$F_\eta(y) = P\{\eta < y\} = F(+\infty;y);$$

(5) Вероятность попадания в прямоугольник выражается через функцию распределения по формуле:

$$\begin{gathered} P\{x_1 \leqslant \xi < x_2; y_1 \leqslant \eta < y_2\} = \\ = \big(F(x_2;y_2) - F(x_2;y_1)\big) - \big(F(x_1;y_2) - F(x_1;y_1)\big). \end{gathered} \tag{22.2}$$

Определение 22.3. ***Плотностью распределения*** *двумерной непрерывной случайной величины* $(\xi;\zeta)$ *называется вторая смешанная частная производная функции распределения:*

$$f(x;y) = \frac{\partial^2 F(x;y)}{\partial x \partial y}. \tag{22.3}$$

Двумерная плотность распределения обладает следующими свойствами:

(1) $f(x;y) \geqslant 0$;

(2) $f(-\infty; y) = f(x; -\infty) = f(\pm\infty; \pm\infty) = 0;$

(3) $F(x; y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(s; t) ds dt;$

(4) Вероятность попадания двумерной случайной величины $(\xi; \eta)$ в область G равна:

$$P((\xi; \eta) \in G) = \iint\limits_{G} f(x; y) dx dy;$$

(5) $\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x; y) dx dy = 1.$

Математические ожидания двумерной случайных величин ξ и η вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} M(\xi) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x; y) dx dy; \\ M(\eta) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f(x; y) dx dy. \end{aligned} \tag{22.4}$$

Плотности распределения составляющих двумерной непрерывной случайной величины получаются из её плотности $f(x; y)$ по формулам (22.5):

$$f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x; y) dy; \qquad f_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x; y) dx. \tag{22.5}$$

Определение 22.4. *Условной плотностью* $f(y/\xi = x)$ *распределения* η *при условии, что* $\xi = x$*, называется:*

$$f(y/\xi = x) = \begin{cases} 0, & f_\xi(x) = 0, \\ \dfrac{f(x; y)}{f_\xi(x)}, & f_\xi(x) \neq 0. \end{cases} \tag{22.6}$$

Условной плотностью $f(x/\eta = y)$ *распределения* ξ *при условии, что* $\eta = y$*, называется:*

$$f(x/\eta = y) = \begin{cases} 0, & f_\eta(y) = 0, \\ \dfrac{f(x; y)}{f_\eta(y)}, & f_\eta(y) \neq 0. \end{cases} \tag{22.7}$$

Определение 22.5. *Условным математическим ожиданием η при условии, что $\xi = x$, называется:*

$$M(\eta/\xi = x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f(y/\xi = x) dy. \tag{22.8}$$

Условным математическим ожиданием ξ при условии, что $\eta = y$, называется:

$$M(\xi/\eta = y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x/\eta = y) dx. \tag{22.9}$$

Теорема 22.1. *Для независимости непрерывных случайных величин ξ и η необходимо и достаточно, чтобы $f(x;y) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y)$.*

Для независимых непрерывных случайных величин ξ и η

$$f(y/\xi = x) = f_\eta(y) \text{ и } f(x/\eta = y) = f_\xi(x) \text{ при } f_\xi(x) \neq 0,\ f_\eta(y) \neq 0.$$

Т.е. закон распределения каждой из них не зависит от значений, принимаемых другой.

$$f(y/\xi = x) = \frac{f(x;y)}{f_\xi(x)} = \frac{f_\xi(x) \cdot f_\eta(y)}{f_\xi(x)} = f_\eta(y).$$

Пример 22.1. *Функция плотности $f(x,\, y)$ двумерной случайной величины (ξ, η) в области $D:\ 0 \leqslant x \leqslant \pi/2,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi/2$ принимает значения $A \cos x \cdot \cos y$ и равна нулю вне этой области.*
1) Найти функцию распределения данной случайной величины (ξ, η).
2) Найти вероятность попадания случайной величины (ξ, η) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0, x = \pi/3, y = 0, y = \pi/3$.

◀ Для определения параметра A используем свойство (5) функции плотности

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x;y) dxdy = 1.$$

$$A \int\limits_0^{\pi/2} \cos x\, dx \int\limits_0^{\pi/2} \cos y\, dy = A \left(\sin x \Big|_0^{\pi/2} \right)^2 = A\left(\sin \pi/2 - 0\right)^2 = A.$$

Следовательно, $A = 1$.

Найдём функции распределения, используя её определение (22.1)

$$F(x; y) = P\{\xi < x; \eta < y\}.$$

Согласно данному определению, в областях $x \leqslant 0$ и $y \leqslant 0$ функция распределения равно нулю. А в области $x \leqslant \pi/2$ и $y \leqslant \pi/2$ функция распределения равна единице. Осталось найти значения функции распределения внутри прямоугольной области и внутри двух полубесконечных полос $0 < x < \pi/2, y > \pi/2$ и $0 < y < \pi/2, x > \pi/2$.

1) В области $D: \ 0 \leqslant x \leqslant \pi/2, \ 0 \leqslant y \leqslant \pi/2$.

$F(x; y) = P\{\xi < x; \eta < y\} = \int\limits_0^x \cos x \, dx \int\limits_0^y \cos y \, dy = \sin x\Big|_0^x \sin y\Big|_0^y = \sin x \, \sin y$.

2) В области $D1: \ 0 < x \leqslant \pi/2, \ \ y > \pi/2$.

$F(x; y) = \int\limits_0^x \cos x \, dx \int\limits_0^{\pi/2} \cos y \, dy = \sin x\Big|_0^x \sin y\Big|_0^{\pi/2} = \sin x.$

3) В области $D2: x > \pi/2 \, 0 \leqslant y \leqslant \pi/2$.

$F(x; y) = \int\limits_0^{\pi/2} \cos x \, dx \int\limits_0^y \cos y \, dy = \sin x\Big|_0^{\pi/2} \sin y\Big|_0^y = \sin y.$

$$F(x; y) = \begin{cases} 0, & (x < 0) \bigcup (y < 0), \\ 1, & (x > \pi/2) \bigcap (y > \pi/2), \\ \sin x, & (0 < x < \pi/2) \bigcap (y > \pi/2), \\ \cos y, & (x > \pi/2) \bigcap (0 < y < \pi/2), \\ \sin x \, \sin y, & (x; y) \in D. \end{cases} \tag{22.10}$$

Применяя формулу (22.3)

$$f(x; y) = \frac{\partial^2 F(x; y)}{\partial x \partial y},$$

легко проверить что функция распределения найдена правильно.

Для вычисления искомой вероятности, используем формулу (22.2):

$P(x_1 < \xi < x_2, \ y_1 < \eta < y_2) =$
$= (F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1)) - (F(x_1, y_2) - F(x_1, y_1)).$

Положив $x_1 = 0, \ x_2 = \pi/3, \ y_1 = 0, \ y_2 = \pi/3$, получим

$P = \left(\sin\frac{\pi}{3} \cdot \sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3} \cdot \sin 0\right) - \left(\sin 0 \cdot \sin\frac{\pi}{3} - \sin 0 \cdot \sin 0\right) = \frac{3}{4} = \mathbf{0{,}75}.$

Найти искомую вероятность можно используя свойство функции плотности (4).

$$P(0<\xi<\pi/3,\ 0<\eta<\pi/3)=\int\limits_0^{\pi/3}\cos x\,dx\int\limits_0^{\pi/3}\cos y\,dy=\sin x\Big|_0^{\pi/3}\ \sin y\Big|_0^{\pi/3}=$$

$=(\sin\pi/3-0)^2=0{,}75.$ ►

Пример 22.2. *Задана функция распределения двумерной случайной величины*

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-4y})\ ,\textit{при } x>0,\ y>0,\\ 0\ ,\textit{в противном случае.}\end{cases}$$

Найти двумерную плотность вероятности (ξ,η).

◄ Согласно (22.3), плотность вероятности есть вторая смешанная частная производная функции распределения. Производная по y отличной от нуля части равна:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=4(1-e^{-2x})e^{-4y}.$$

Дифференцируя это выражение по x, получим

$$f(x;y)=\frac{\partial^2F(x;y)}{\partial x\partial y}=8e^{-2x-4y}$$

при $x>0,\ y>0$ и, кроме того, $f(x,y)=0$ при $x<0$ или $y<0$. ►

Ответ: $\boxed{f(x,y)=\begin{cases}8e^{-2x-4y}\ \textbf{при } x>0,\ y>0,\\ 0\ \textbf{в противном случае.}\end{cases}}$

Пример 22.3. *Задана двумерная плотность вероятности* $f(x,y)=a/(x^2+y^2+1)^2$ *системы двух случайных величин* (ξ,η)*. Найти постоянную* a.

◄ Для определения параметра a используем свойство функции плотности (5):

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1.$$

Для вычисления двойного интеграла перейдём к полярным координатам: $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ dxdy=r\,dr\,d\varphi$.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{a}{(x^2+y^2+1)^2}dxdy = a\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{(r^2+1)^2}rdr =$$

$$= a\left(\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\right)\left(\int\limits_0^{\infty}\frac{d(r^2/2)}{(r^2+1)^2}\,dr\right) = a\pi\left(-\frac{1}{1+r^2}\Big|_0^{\infty}\right) = a\pi = 1.$$

Получили
$\pi a = 1 \Rightarrow a = 1/\pi.$ ▶

Ответ: $\boxed{a = 1/\pi}$**.**

Пример 22.4. *Двумерный случайный вектор* (ξ,η) *имеет плотность вероятности* $f(x,y) = a/((1+x^2)(1+y^2))$. *Определить параметр* a*; найти функцию распределения* $F(x,y)$*; вычислить вероятность попадания случайной точки* (ξ,η) *в квадрат* $G: x\in[0,1],\ y\in 0,1]$*; установить, являются ли величины* ξ *и* η *зависимыми.*

◀ Для определения параметра a используем свойства (5) плотности:

$$a\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2} = 1, \quad a\cdot\left(\operatorname{arctg}x\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty}\cdot\left(\operatorname{arctg}y\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1,$$

$a\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)^2 = 1, \quad a\cdot\pi^2 = 1, \quad a = \frac{1}{\pi^2}.$

Таким образом,

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Согласно свойству (3) двумерной плотности, функция распределения

$$F(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{dx}{1+x^2}\int\limits_{-\infty}^{y}\frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{\pi^2}\cdot\left(\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(\operatorname{arctg}y+\frac{\pi}{2}\right).$$

Вероятность попадания в прямоугольник G определим по формуле (22.2):

$$P((\xi,\eta)\in G) = F(1,1) - F(1,0) - (F(0,1) - F(0,0)) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\Bigg(\Big(\operatorname{arctg} 1 + \frac{\pi}{2}\Big) \cdot \Big(\operatorname{arctg} 1 + \frac{\pi}{2}\Big) - \Big(\operatorname{arctg} 1 + \frac{\pi}{2}\Big)\frac{\pi}{2} -$$

$$- \Big(\frac{\pi}{2}\Big(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} 1\Big) - \frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2}\Big)\Bigg) = \frac{1}{\pi^2}\Bigg(\Big(\frac{3\pi}{4}\Big)^2 - \frac{3\pi^2}{8} - \Big(\frac{3\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{4}\Big)\Bigg) = \frac{1}{16}.$$

Заметим, что эту же вероятность можно непосредственно найти с помощью плотности распределения согласно её свойству 4.

Плотности распределения составляющих найдем по формулам (22.5):

$$f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi^2(1+x^2)} \operatorname{arctg} y\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Аналогично найдем, что

$$f_\eta(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}.$$

Поскольку здесь $f(x,y) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y)$, то делаем вывод о том, что случайные величины ξ и η независимы. ►

Пример 22.5. *Дана плотность двумерной случайной величины*

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-x-y} \text{ при } x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 0 \text{ при } x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$$

Найти математические ожидания и дисперсии составляющих.

◄ Применяем формулу (22.4)

$$M(\xi) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty x \cdot f(x,y)dxdy = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty x \cdot e^{-x-y}dxdy = \int\limits_0^\infty x \cdot e^{-x}dx \cdot \int\limits_0^\infty e^{-y}dy.$$

Отдельно вычислим полученные определённые интегралы

$$\int\limits_0^\infty x \cdot e^{-x}dx = -\int\limits_0^\infty x \cdot de^{-x} = -xe^{-x}\Big|_0^\infty + \int\limits_0^\infty e^{-x}dx = 0 - e^{-x}\Big|_0^\infty = 1.$$

$$\int\limits_0^\infty e^{-y}dy = -e^{-y}\Big|_0^\infty = 1.$$

Получили, $M(\xi) = 1$. Ввиду симметрии функции плотности $M(\eta) = 1$.

Дисперсию вычислим, используя формулу

$$D(\xi) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x^2 \cdot f(x,y)dxdy - M^2(\xi).$$

$M(\xi^2) = \int\limits_0^{\infty} \int\limits_0^{\infty} x^2 \cdot f(x,y)dxdy = \int\limits_0^{\infty} \int\limits_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-x-y}dxdy = \int\limits_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-x}dx \cdot \int\limits_0^{\infty} e^{-y}dy.$

Дважды интегрируя по частям, вычислим интеграл по переменной x

$\int\limits_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-x}dx = -\int\limits_0^{\infty} x^2 \cdot de^{-x} = -x^2e^{-x}\Big|_0^{\infty} + 2\int\limits_0^{\infty} e^{-x}xdx = -2\int\limits_0^{\infty} xe^{-x}dx =$

$= -2xe^{-x}\Big|_0^{\infty} + 2\int\limits_0^{\infty} e^{-x}dx = -2e^{-x}\Big|_0^{\infty} = 2.$

Получили, $M(\xi^2) = 2$.

$$D(\xi) = 2 - 1 = 1.$$

Аналогично, $D(\eta) = 1$. ▶

Ответ: $\boxed{M(\xi) = 1;\ M(\eta) = 1;\ D(\xi) = 1;\ D(\eta) = 1.}$

Задания для самостоятельной работы

22.1. Задан закон распределения случайного вектора $(\xi;\eta)$

$\xi\backslash\eta$	0	1	3
-1	0,15	0	0,18
2	0,33	0,1	0,24

Найдите $M(\xi),\ M(\eta), D(\xi),\ D(\eta)$ и $K_{\xi\eta}$.

22.2. Задан закон распределения случайного вектора $(\xi;\eta)$

$\xi\backslash\eta$	-1	4
-1	0,5	0,1
2	0,2	0,05
3	0,05	0,1

Найдите $M(\xi),\ M(\eta), D(\xi),\ D(\eta)$ и $K_{\xi\eta}$.

22.3. Двумерная случайная величина (ξ,η) имеет плотность распределения вероятностей $f(x,y) = \dfrac{a}{\left(\frac{1}{3} + x^2\right)(3 + y^2)}, x \in R, y \in \mathbb{R}$.

Найти: 1) значение величины a;

2) функцию распределения вероятностей $F(x;y)$;

3) плотности распределения компонент $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$;
4) $P(\xi < 1, \eta < \sqrt{3})$.

22.4. Задана функция плотности распределения двумерной случайной величины (ξ, η): $f(x,y) = \begin{cases} a \cdot xy \text{ при } (x;y) \in D, \\ 0 \text{ при } (x;y) \notin D, \end{cases}$ где D — треугольник OAB, $O(0;0)$, $A(0,1)$ и $B(1;0)$. Найти: 1) значение параметра a; 2) плотности распределения компонент $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$; 3) функции распределения отдельных компонент; 4) вероятность попадания случайной точки (ξ, η) в область $P(\xi > 0{,}5; \eta < 1)$.

22.5. Дана функция распределения системы двух случайных величин

$$F(x,y) = k(1 - e^{-x^2})(1 - e^{-y^2}), (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0);$$

Вне первой четверти $F(x,y)$ равняется нулю. Найти выражение для плотности вероятности и коэффициент k. Определить вероятность попадания случайной точки в область D, которая представляет собой четверть круга радиуса R $(x \geqslant 0, y \geqslant 0)$.

22.6. Плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины имеет следующий вид:

$$f(x,y) = \begin{cases} a(x+y) \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x, \\ 0 \text{ вне указанной области.} \end{cases}$$

Определить константу a и вычислить центр распределения.

22.7. Дана плотность вероятности двумерной случайной величины (ξ, η):

$$f(x,y) = \begin{cases} A\sin(x+y), & x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ y \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \\ 0, & \text{вне этой области.} \end{cases}$$

Найти параметр A, определить функцию распределения системы и математические ожидания величин ξ и η.

22.8. Двумерная случайная величина (ξ, η) распределена равномерно внутри квадрата $D: \ |x| + |y| \leqslant 1$. Найти выражение для плотности вероятности случайной величины (ξ, η), математические ожидания $M(\xi), M(\eta)$ и дисперсии $D(\xi), D(\eta)$.