18. Равномерное и показательное распределения

Из непрерывных законов на этом занятии изучим равномерное и экспоненциальное распределения.

Распределение непрерывной случайной величины называется *равномерным* на $[a;b]$, если плотность распределения постоянна и отлична от 0 на этом отрезке и равна нулю вне его:

$$f(x) = \begin{cases} C & \text{при} \quad x \in [a;b], \\ 0 & \text{при} \quad x \notin [a;b]. \end{cases}$$

Плотность равномерно распределённой на $[a;b]$ случайной величины определяется по формуле:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad x \in [a;b], \\ 0 & \text{при} \quad x \notin [a;b]. \end{cases} \tag{18.1}$$

Функция распределения равномерно распределённой на $[a;b]$ случайной величины:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при} \quad a \leqslant x \leqslant b, \\ 1 & \text{при} \quad b < x. \end{cases} \tag{18.2}$$

$$M(\xi) = \frac{a+b}{2}; \quad D(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}. \tag{18.3}$$

Пример 18.1. *Цена деления шкалы измерительного прибора равна* 0,1. *Показания прибора округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при снятии показаний прибора будет сделана ошибка, превышающая* 0,03.

◀ Ошибку округления до ближайшего целого деления можно рассматривать как случайную величину ξ, которая распределена равномерно между двумя целыми делениями. Плотность равномерного распределения находим по формуле (18.1), где длина интервала $b-a$ в данной задаче равна 0,1. Ошибка отсчёта превысит 0,03, если она будет заключена в интервале $(0{,}03; 0{,}07)$. По формуле

$$P(a < \xi < b) = \int\limits_a^b f(x)dx, \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при } x \in [0; 0{,}1], \\ 0 & \text{при } x \notin [0; 0{,}1]. \end{cases}$$

найдем:

$$P(0{,}03 < \xi < 0{,}07) = \int\limits_{0{,}03}^{0{,}07} 10\,dx = \mathbf{0{,}4}. \ \blacktriangleright$$

Ответ: $\boxed{\mathbf{0{,}4.}}$

Пример 18.2. *Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ, распределённой равномерно в отрезке [1,9].*

◀ Математическое ожидание и дисперсия определяются в данном случае выражениями (18.3). Так как $a = 1,\ b = 9$, то сразу найдем

$$M(\xi) = \frac{1+9}{2} = \mathbf{5}, \quad D(\xi) = \frac{(9-1)^2}{12} = \frac{16}{3} \approx \mathbf{5{,}333}. \ \blacktriangleright$$

Ответ: $\boxed{M(\xi) = 5,\ D(\xi) = 16/3 \approx 5{,}333.}$

Пример 18.3. *Случайная величина ξ распределена равномерно с $M(\xi) = 9/2$ и $D(\xi) = 25/12$. Найти функцию распределения случайной величины ξ.*

◀Функция распределения в формуле (18.2) зависит от параметров a и b. Используя (18.3), для определения a и b составим следующие уравнения:

$$\frac{a+b}{2} = \frac{9}{2}, \qquad \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{25}{12}.$$

Отсюда, с учётом того, что $b > a$, получим $a = 2,\ b = 7$. Функция распределения окончательно примет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 2, \\ \dfrac{x-2}{5} \text{ при } x \in (2,7], \\ 1 \text{ при } x > 7. \end{cases} \ \blacktriangleright$$

18.1. Показательное распределение

Определение 18.1. *Распределение непрерывной случайной величины называется* **экспоненциальным (показательным)**, *если плотность распределения имеет вид:*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad x < 0, \quad \text{где } \lambda > 0. \end{cases} \tag{18.4}$$

Экспоненциальное распределение определяется одним параметром $\lambda > 0$.

Функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases} \tag{18.5}$$

$$M(\xi) = \frac{1}{\lambda}; \quad D(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{18.6}$$

Пример 18.4. *Непрерывная случайная величина ξ распределена по показательному закону (18.4) с параметром $\lambda = 0{,}07$. Найти плотность распределения случайной величины ξ, её функцию распределения, построить графики этих функций. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ и вероятность того, что в результате испытания ξ попадёт в интервал (2, 10).*

◀ С учётом (18.6) математическое ожидание
$M(\xi) = 1/\lambda = 1/0{,}07 = 100/7 \approx 14{,}286$.

С другой стороны, используя выражение (18.5) для функции распределения, искомую вероятность найдем как приращение этой функции на интервале (2, 10):

$P(2 < \xi < 10) = F(10) - F(2) = 1 - e^{-0{,}7} - 1 + e^{-0{,}14} \approx$
$\approx 0{,}8693 - 0{,}4965 = \mathbf{0{,}373}$.

Эту же вероятность можно вычислить как

$P(2 < \xi < 10) = \int\limits_2^{10} 0{,}07 e^{-0{,}07t} dt = -e^{-0{,}07t}\Big|_2^{10} \approx 0{,}373.$ ▶

Ответ: $\boxed{P(2 < \xi < 10) \approx \mathbf{0{,}373}.}$

Пример 18.5. *Время безотказной работы элемента распределено по экспоненциальному закону $f(x) = 0{,}03 \cdot e^{-0{,}03t} (t > 0)$. Найти вероятность того, что элемент проработает безотказно в течение 200 часов.*

◀ Длительность времени безотказной работы элемента имеет экспоненциальное распределение, у которого функция распределения $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

Тогда вероятность безотказной работы t (так называемая функция надежности) имеет вид:

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t},$$

где λ — интенсивность отказов или среднее число отказов в единицу времени. В данном примере интенсивность отказов $\lambda = 0{,}03$. Искомая вероятность

$R(200) = e^{-0{,}03 \cdot 200} = e^{-6} \approx 0{,}003.$ ▶

Ответ: $\boxed{e^{-6} \approx \mathbf{0{,}003}.}$

Задания для самостоятельной работы

18.1. Непрерывная случайная величина ξ распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 3$. Выписать функцию распределения. Найти вероятность того, что ξ принимает значения меньше 0,8.

18.2. Непрерывная случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке $[A; 4]$. Математическое ожидание равно -2. Найти дисперсию случайной величины ξ.

18.3. Непрерывная случайная величина ξ распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 0{,}9$. Выписать функцию распределения. Найти вероятность того, что ξ принимает значения меньше трёх.

18.4. Время ожидания водителя на АЗС является случайной величиной ξ, распределённой по показательному закону со средним временем ожидания, равным 5 минут. Найти вероятности того, что: а) 5мин $< \xi <$10мин; б) $\xi \leqslant 15$ мин; в) $\xi \geqslant 10$.