ТВиМС. Практическое занятие №2

2. Алгебра событий

Алгебра событий. Случайные события. Действия над событиями. Аксиомы вероятностей. Вероятностные схемы. Классическое и статистическое определения вероятности.

2.1. Алгебра событий

Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие ***случайного события***.

Определение 2.1. ***Случайное событие*** *это подмножество множества элементарных исходов случайного эксперимента.*

Далее вводится понятие вероятностного пространства, и строится математически строгая теория вероятностей.

Вероятностное пространство

Рассмотрим конечное или счетное множество $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$, $N \in \mathbb{Z}$, $N \leqslant +\infty$. Каждому из элементов ω_i любой природы, ставится в соответствие неотрицательное число P_i, такое, что $\sum\limits_{i=1}^{N} P_i = 1$. Элементы ω_i называются *элементарными исходами*.

Случайное событие это любое подмножество A множества Ω, $A \subset \Omega$.

Например: $A = \varnothing, A = \{\omega_1\}, A = \{\omega_2, \omega_7\}, A = \Omega$.

Вероятность события A вычисляется по формуле

$$P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} P_i.$$

Случайные события будем обозначать большими латинскими буквами: A,B,C,..., X, Y, Z.

Всякое осуществление комплекса условий, при которых изучается конкретное случайное событие, будем называть опытом или *испытанием*.

Определение 2.2. *Событие называется* ***достоверным*** *(в дальнейшем Ω), если оно обязательно появится в результате данного испытания.*

Определение 2.3. *Событие называется* ***невозможным*** *(в дальнейшем $\varnothing$),если оно не может появится в результате данного испытания.*

Замечание 2.1. *Часто в литературе достоверное событие обозначают буквой U, а невозможное — V.*

Определение 2.4. *Два события A и B называются* ***несовместными****, если они не могут появиться в одном испытании. Если событий больше двух, они могут быть попарно несовместными, если любые два из них несовместны.*

Определение 2.5. ***Противоположным*** *событию A называется событие $\overline{A}$, состоящее в не появлении события A.*

Определение 2.6. ***Суммой*** *двух событий $A+B$ называется событие C, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий.*

Т.е. наступает событие A или B или оба одновременно.

Определение 2.7. ***Произведением*** *двух событий $A \cdot B$ называется событие, состоящее в наступлении каждого из этих событий.*

Т.е. наступают оба события одновременно.

Определение 2.8. *n событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют* ***полную группу****, если в результате испытания обязательно появится одно из них.*

Следовательно,

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega.$$

Отметим, что события A и $\overline{A}$ несовместны и образуют полную группу.

Пример 2.1. *Событие A означает, что хотя бы один из шести проверяемых двигателей неисправен, событие B – все двигатели исправны. Что означают события $A+B, AB$?*

◀ Из условия следует, что событие $\overline{A}$ означает, что все двигатели исправны, т.е. $\overline{A} = B$. Следовательно, A и B представляют собой противоположные события, для которых $A+B = A+\overline{A} = \Omega, AB = \varnothing$. ▶

Пример 2.2. *Пусть событие A — при аварии сработал первый сигнализатор, событие B — сработал второй сигнализатор. Опишите события:*

$$A+B,\ AB,\ A\,\overline{B},\ \overline{A}\,\overline{B},\ A\,\overline{B}+\overline{A}B.$$

◀ Сумма событий $A+B$ означает, что при аварии сработал либо первый сигнализатор, либо второй, либо оба. Событие AB – сработали оба сигнализатора одновременно; $A\overline{B}$ означает, что первый сигнализатор сработал, а второй нет; $\overline{A}\,\overline{B}$ – не сработали оба сигнализатора. $A\overline{B}+\overline{A}B$ – сработал один сигнализатор, первый или второй. ▶

Пример 2.3. *Доказать, что: а) $\overline{A+B} = \overline{A}\ \ \overline{B}$, б) $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$.*

◀ а) Событие $\overline{A}\ \ \overline{B}$ означает непоявление событий: ни A, ни B. Противоположное событие $\overline{A}\ \ \overline{B}$ состоит в том, что хотя бы одно из событий A или B имеет место, а это и есть сумма событий $A+B$; следовательно, $\overline{A}\cdot\overline{B} = \overline{A+B}$.

б) Событие AB состоит в совместном появлении событий A и B; событие $\overline{AB}$ состоит в не появлении хотя бы одного из этих событий A, B или в появлении хотя бы одного из событий $\overline{A}$, $\overline{B}$, а это равносильно $\overline{A} + \overline{B}$. ▶

Пример 2.4. *Событие A состоит в том, что хотя бы один из имеющихся десяти цехов не выполняет план; событие B состоит в том, что цехов, не выполняющих план, среди них не менее двух. Описать события: а) $\overline{A}$ и $\overline{B}$, б) $A+B$, в) $A\ \overline{B}$, г) $\overline{A}\ B$.*

◀ а) $\overline{A}$ — все цеха выполняют план, $\overline{B}$ — цехов, не выполняющих план, один или нет ни одного; б) так как наступление события B означает также наступление события A, то $A+B = A$; в) один цех не выполняет план; г) $\overline{A}B = \varnothing$, т.к. события $\overline{A}$ и B несовместны. ▶

Пример 2.5. *Из множества супружеских пар наудачу выбирается одна. Событие A — мужу больше 30 лет, событие B — муж старше жены, событие C — жене больше 30 лет. Что означают события: ABC, $A\overline{B}$, $A\overline{B}C$?*

◀ ABC — оба супруга старше 30 лет, причём муж старше жены. $A\overline{B}$ — мужу больше 30 лет, но он не старше своей жены. $A\overline{B}C$ — оба супруга старше 30 лет, но муж не старше своей жены. ▶

Пример 2.6. *Пусть A, B, C — три произвольных события. Что означают следующие события:*

а) $A+B+C$, б) $AB+AB$, в) ABC, г) $AB\overline{C}$,
д) $A\overline{B}\ \overline{C}$, е) $\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$, ж) $A\ \overline{B}\ \overline{C} + \overline{A}\ B\overline{C} + \overline{A}\ \overline{B}\,C$,
з) $AB\overline{C} + A\ \overline{B}C + \overline{A}\ BC$, и) $A+B+C-ABC$?

◀ а) Произошло по крайней мере одно из трёх событий; б) произошли по крайней мере два события из трёх; в) произошли все три события; г) произошли A и B, а событие C не произошло; д) произошло A, а события B и C не произошли; е) ни одно событие не произошло; ж) произошло только одно событие; з) произошли только два события; и) произошло не более двух событий.

Если рассматривать событие A как попадание в область A, событие $\overline{A}$ как непопадание в область A и ввести аналогичные обозначения для событий B и C, то рассмотренные события можно представить, как попадание в области, заштрихованные на рис. 1.

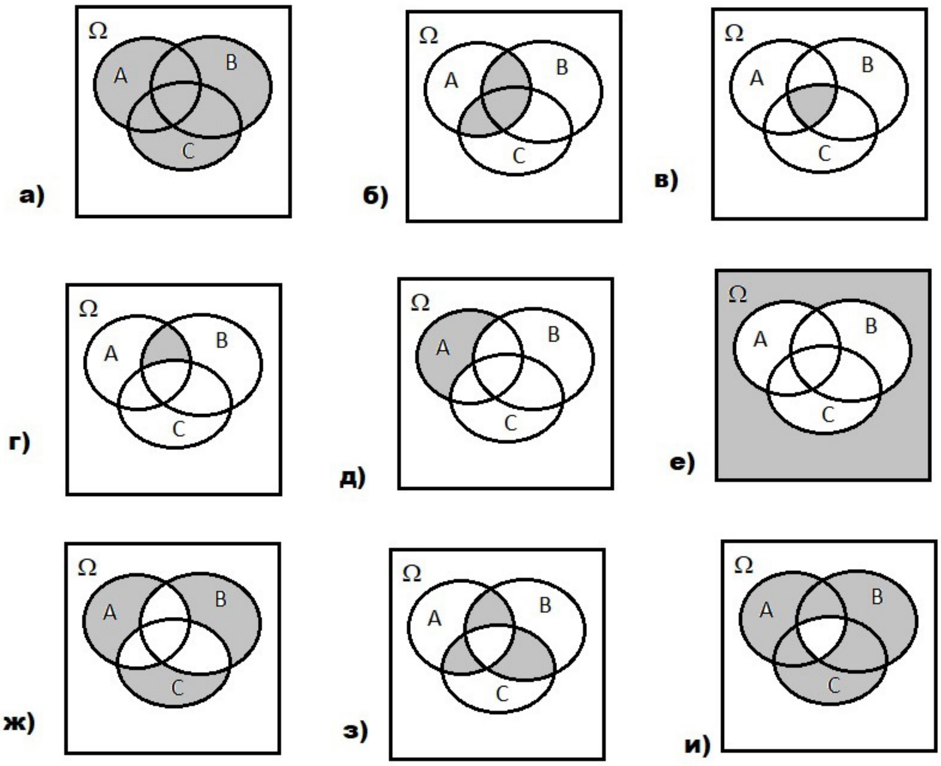

Рисунок 1. *Геометрическая иллюстрация операций над событиями*

Пример 2.7. *Доказать, что события* $A, \overline{A}B, \overline{A+B}$ *образуют полную группу попарно несовместных событий.*

◀ Учитывая, что $\overline{A+B} = \overline{A}\ \overline{B}$, будем рассматривать события $A, \overline{A}\ B, \overline{A}\ \overline{B}$. Их сумма

$$A + \overline{A}\ B + \overline{A}\ \overline{B} = A + \overline{A}\ (B + \overline{B})\ = A + \overline{A}\ \Omega = A + \overline{A} = \Omega,$$

а произведения

$$A \cdot \overline{A}B = (A\ \ \overline{A}) \cdot B = \varnothing B = \varnothing, \quad A \cdot \overline{A}\ \ \overline{B} = (A\ \overline{A})\ \overline{B} = \varnothing\ \overline{B} = \varnothing,$$

$$\overline{A}B \cdot \overline{A}\ \ \overline{B} = (\overline{A}\ \ \overline{A})(B\ \ \overline{B}) = \overline{A}\ \ \varnothing = \varnothing.$$

События с данными свойствами по определению образуют полную группу попарно несовместных событий. ▶

Пример 2.8. *Дана схема включения элементов. Элементы работают независимо и включены в цепь по приведенной схеме, рис. 2. Пусть событие A_i означает безотказную работу за время T элемента с номером i $(i = 1, 2, \ldots, 7)$, а событие B — безотказную работу схемы. Напишите формулу, выражающую события B через события A_i.*

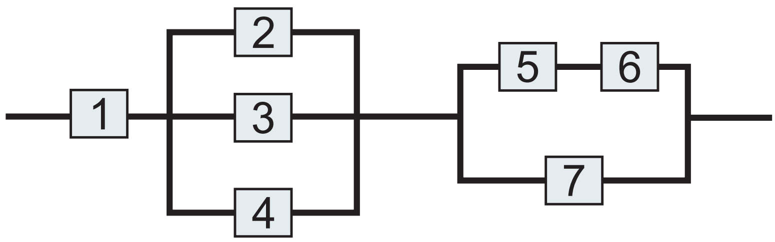

Рисунок 2. *К примеру 2.8*

◀ Логически схему можно разбить на три последовательно соединённых блока: Б1, Б2 и Б3, рис. 3.

При последовательном соединении схема работоспособна, если все элементы исправны. Для схемы, изображённой на рис. 3, получаем, что схема будет работать, если все три блока Б1, Б2, и Б3 исправны. Это записывается в виде произведения событий $B =$ Б1 $\cdot$ Б2$\cdot$ Б3.

Если схема соединена параллельно, рис. 4, то она исправна, если исправен хотя бы один элемент, то есть при параллельном соединении считаем, что элементы дублируют друг друга. Это записывается в виде суммы событий $C =$ В1 $+$ В2 $+$ В3.

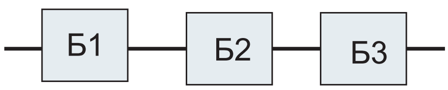

Рисунок 3. *Последовательное соединение*

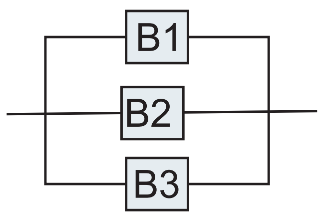

Рисунок 4. *Параллельное соединение*

Работоспособность блока Б1, совпадает с событием A – элемент номер 1 работоспособен.

Блок Б2 состоит из трёх параллельно соединенных элементов. Он работоспособен, если исправен хотя бы один из элементов 2, 3 или 4. Это можно записать формулой $A_2 + A_3 + A_4$.

Блок Б3 состоит из двух параллельных веток, причём в первой ветке два элемента соединены параллельно. Он работоспособен, если работоспособна хотя бы одна из веток. Это можно записать формулой $A_5 A_6 + A_3$.

Наконец, вся схема работоспособна, если все три блока Б1, Б2 и Б3 исправны. Получаем

$B = A_1(A_2 + A_3 + A_4)(A_5A_6 + A_7)$. ▶

Ответ: $\boxed{B = A_1(A_2 + A_3 + A_4)(A_5A_6 + A_7).}$

2.2. Относительная частота

Определение 2.9. *Пусть в N испытаниях событие A появилось M раз. Относительной частотой или просто частотой события A в данной серии испытаний называется отношение числа испытаний, в которых событие A появилось, к общему числу испытаний:*

$$P^*(A) = \frac{M}{N}. \tag{2.1}$$

Определение 2.10. *Условной частотой события A при условии появления B $P^*(A/B) = P^*_B(A)$ называется отношение числа испытаний, в которых появились оба события A и B, к числу испытаний, в которых появилось событие B.*

Если в N испытаниях событие B появилось L раз, а событие A появилось совместно с событием B K раз, то

$$P^*(A/B) = \frac{K}{L}\ , \tag{2.2}$$

$$P^*(B) = \frac{L}{N}\ , \tag{2.3}$$

$$P^*(AB) = \frac{K}{N}\ . \tag{2.4}$$

Теорема 2.1 (умножения частот)**.** *Относительная частота произведения двух событий равна произведению условной частоты одного из них при условии появления другого на относительную частоту другого события:*

$$P^*(AB) = P^*(B) \cdot P^*(A/B). \tag{2.5}$$

Если сомножителей больше двух, то:

$$\begin{gathered} P^*(A_1 \cdot A_2 \cdots A_k) = P^*(A_1) \cdot P^*(A_2/A_1) \cdot P^*(A_3/A_1 \cdot A_2) \cdots \\ \cdots P^*(A_k/A_1 \cdot A_2 \cdots A_{k-1}). \end{gathered} \tag{2.6}$$

Пример 2.9. *В университете 120 компьютеров. При проверке оказалось, что на 105 из них установлена операционная система Linux. Найти относительную частоту установки операционной системы Linux.*

◀Согласно формуле (2.1), частота установки операционной системы Linux равна:

$$P^*(A) = \frac{M}{N} = \frac{105}{120} = \frac{7}{8} \approx \mathbf{0{,}875}.\blacktriangleright$$

Ответ: $\boxed{P^*(A) = 7/8 \approx 0{,}875.}$

Пример 2.10. *Брошены 100 раз две игральные кости. При этом совпадение числа очков было 15 раз, а шестерка на обеих гранях костей выпала 4 раза. Определить условную частоту выпадения шестерок в случае совпадения числа очков.*

◀ Обозначим: событие A — появление шестерок на обеих гранях, событие B — совпадение числа очков. Тогда событие A появилось $K = 4$ раза, а событие B произошло $L = 15$ раз.

Следовательно, $P^*(A) = \dfrac{4}{100}$ и $P^*(B) = \dfrac{15}{100}$. Согласно формуле (2.2), условная частота появления двух шестерок равна:

$$P^*(A/B) = \frac{K}{L} = \frac{4}{15} \approx \mathbf{0{,}267}. \ \blacktriangleright$$

Ответ: $\boxed{P^*(A/B) = 4/15 \approx 0{,}267.}$

Пример 2.11. *Из 300 произведённых изделий 20 обладают дефектом α, причём 5 из них имеют также дефект β. Найти относительную частоту появления изделия с обоими дефектами.*

◀Пусть событие A — появление дефекта β, а событие B — дефекта α. Тогда по формуле (2.5) относительная частота произведения этих двух событий определится как

$$P^*(AB) = \frac{20}{300} \cdot \frac{5}{20} = \frac{1}{60} \approx \mathbf{0{,}017}.$$

Ответ: $\boxed{P^*(AB) = 1/60 \approx 0{,}017.}$ ▶

2.3. Классическое определение вероятности

В приложениях теории вероятностей имеются задачи, в которых вероятность вычисляется с помощью классической формулы. Это задачи, в которых количество (N) элементарных исходов $\omega_i, i = 1, 2, \ldots, N$ конечно и при этом результаты опытов являются равновозможными.

В этом случае пространство элементарных исходов имеет вид

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_1, \ldots, \omega_N\}. \tag{2.7}$$

Рассмотрим теперь множество $\mathcal{A}$ подмножеств множества элементарных событий Ω.

$$\mathcal{A} = \Big\{\varnothing, \omega_1, \ldots, \omega_N, \{\omega_1, \omega_2\}, \ldots, \{\omega_1, \omega_N\}, \ldots, \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}\Big\}.$$

Согласно определению 2.1, каждый элемент данного множества является случайным событием. Будем рассматривать *равновозможные* элементарные события, образующие *полную группу попарно несовместных событий.* Такие события будем называть исходами или элементарными событиями.

Определение 2.11. *Элементарные исходы, при появлении которых интересующее нас событие наступает, назовем исходами,* ***благоприятствующими*** *данному событию.*

Так, при бросании игральной кости событию A: «выпало более четырёх очков» благоприятствуют два элементарных исхода — выпадение чисел пять или шесть.

Таким образом, событие A наблюдается, если в испытании наступает один из элементарных исходов, благоприятствующих ему.

Описанная схема носит название схемы случаев, а сами элементарные события, обладающие перечисленными свойствами, называются случаями.

Определение 2.12. *Вероятность события A равна отношению числа (M) благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех исходов данного испытания (N):*

$$P(A) = \frac{M}{N}. \tag{2.8}$$

Вычисление вероятности по формуле (2.8) верно только для схемы случаев, которая неприменима, например, если число возможных исходов бесконечно. Формула (2.8) во многих учебниках по теории вероятностей называется «***классическим определением вероятности***».

В теории множеств число $N = |\Omega|$ называется мощностью множеств Ω.

Из этой формулы вытекают следующие свойства вероятности, аналогичные свойствам относительной частоты событий $P^*(A)$:

Вероятность случайного события A является действительным числом принимающим любые значения от 0 до 1:

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1. \tag{2.9}$$

Действительно, для любого события $0 \leqslant M \leqslant N$, поэтому:
$0 \leqslant M/N \leqslant 1$.

Вероятность достоверного события равна единице:

$$P(\Omega) = 1. \tag{2.10}$$

Действительно, в случае достоверного события $M = N$ и $P(\Omega) = N/N = 1$.

Вероятность невозможного события равна нулю:

$$P(\varnothing) = 0. \tag{2.11}$$

Решение задач непосредственно по формуле (2.8) часто сводится к определению отдельно числителя и знаменателя.

Пример 2.12. *В урне* 13 *чёрных и* 8 *белых шаров. Из урны наугад вынимают один шар. Найти вероятность того, что он — белый.*

◀ Всего возможно $N = 13 + 8 = 21$ исход, в том числе $M = 8$ благоприятных, откуда $P(A) = \frac{8}{21}$. ▶

Ответ: $\boxed{\frac{8}{21}.}$

Пример 2.13. *Карта называется козырной, если она — туз, король, дама или трефовой масти. Из колоды в 36 карт вынимают одну. Какова вероятность того, что она — козырная?*

◀ Общее число исходов $N = 36$; число благоприятных исходов равно числу козырей, которых 9 треф и ещё по три карты (Д, К, Т) в трёх некозырных мастях, $M = 9 + 3 \cdot 3 = 18 \ \Rightarrow \ P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$. ▶

Ответ: $\boxed{\frac{1}{2}.}$

Пример 2.14. *В партии из 80 деталей 11 нестандартных. Взятые для контроля 5 деталей оказались стандартными. Определить вероятности того, что взятая затем деталь будет: а) стандартной, б) нестандартной.*

◀После первой проверки остались 64 стандартных и 11 нестандартных деталей. Число всех деталей перед второй проверкой $N = 75$.

а) Число благоприятствующих исходов — появлений стандартной детали (событие A) $M = 64$. Тогда $P(A) = 64/75 \approx$ **0,853**.

б) Число благоприятствующих исходов для этого случая — число появлений нестандартной детали (событие B) $M = 11$ и $P(B) = 11/75 \approx$ **0,147**.▶

Ответ: $\boxed{P(A) = 64/75 \approx 0{,}853; \ \ P(B) = 11/75 \approx 0{,}147.}$

Пример 2.15. *Бросаются три игральные кости. Найти вероятности того, что: а) сумма очков на выпавших гранях равна 4, б) на всех гранях выпадает одинаковое число очков, в) на всех гранях выпадает различное число очков.*

◀ Игральная кость представляет собой куб, на гранях которого нанесены 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков. Каждый из исходов бросания одной кости может сочетаться с каждым из исходов бросания второй и третьей, поэтому общее число возможных исходов испытания $N = 6^3$.

а) Здесь благоприятствующих событию A — появлению на трёх костях суммы очков, равной 4, будет $M = 3$ исхода: $1+1+2$, $1+2+1$, $2+1+1$. Тогда

$$P(A) = 3/6^3 = 1/72 \approx \mathbf{0{,}014}.$$

б) В этом случае число благоприятствующих исходов будет равно числу граней, т.е. M=6. Следовательно,

$$P(B) = 6/6^3 = 1/36 \approx \mathbf{0{,}028}.$$

в) Число исходов, когда на трёх гранях выпадает различное число очков, равно числу размещений $M = A_6^3 = 4 \cdot 5 \cdot 6$ и

$$P(C) = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6^3} = 5/9 \approx \mathbf{0{,}556}. \ ▶$$

Ответ: $\boxed{P(A) = 1/72 \approx 0{,}014;\ P(B) = 1/36 \approx 0{,}028;\ P(C) = 5/9 \approx 0{,}556.}$

Пример 2.16. *Из шести карточек с буквами А, В, Д, З, К, О выбираются наудачу в определённом порядке пять. Найти вероятность того, что при этом получится слово ЗАВОД.*

◀ Здесь производится выборка пяти букв из шести и в нужной последовательности. Порядок выбора букв существенен, поэтому число всевозможных исходов данного испытания равно $N = A_6^5$, а число исходов благоприятствующих получению слова ЗАВОД равно $M = 1$. Тогда вероятность искомого события A равна

$$P(A) = 1/A_6^5 = 1/720 \approx \mathbf{0{,}001}. \ ▶$$

Ответ: $\boxed{P(A) = 1/720 \approx 0{,}001.}$

Пример 2.17. *В коробке имеются десять букв: А, А, А, В, И, К, М, О, Т, Т. Найти вероятность того, что если наудачу вынимать одну букву за другой, то можно сложить слово АВТОМАТИКА.*

◀ В данном примере имеются повторяющиеся буквы. Число всех исходов равно всевозможным перестановкам из 10 букв, т.е. $N = 10!$ В числителе формулы для вероятности мы должны учесть, что букву А можно расположить на трёх местах 3! способами, а букву Т — 2! способами. Сочетая каждое расположение букв А с каждым расположением букв Т, найдем:

$$P(A) = \frac{3!\cdot 2!}{10!} = \frac{1}{302400} \approx 0{,}331\cdot 10^{-5}. \ \blacktriangleright$$

Ответ: $\boxed{P(A) = \dfrac{1}{302400} \approx 0{,}331\cdot 10^{-5}.}$

Пример 2.18. *В цехе из 80 рабочих не выполняют норму выработки 5 человек. По списку случайно отбирается 3 человека. Найти вероятность того что: а) все выбранные рабочие выполняют норму; б) все выбранные рабочие не выполняют норму; в) только два выбранные рабочие выполняют норму.*

◀ В данном примере порядок выбора рабочих не существенен. Поэтому для подсчёта числа исходом опыта (выбора трёх рабочих) применяется формула для сочетаний. Количество всех возможных исходов равно числу способов, которыми можно отобрать 3 человека из 80, т.е. числу сочетаний $N = C^3_{80}$.

а) Благоприятствующими будут те исходы, когда 3 человека отбираются только из тех рабочих, которые выполняют норму, т.е. из $80-5 = 75$ рабочих; их число равно $M_1 = C^3_{75}$. Вероятность данного события A

$$P(A) = \frac{M_1}{N} = \frac{C^3_{75}}{C^3_{80}} = \frac{75!}{3!72!}\cdot\frac{3!77!}{80!} = \frac{73\cdot 74\cdot 75}{78\cdot 79\cdot 80} = \frac{13505}{16432} \approx \mathbf{0{,}822}.$$

б) Здесь вычислим вероятность того, что трое рабочих выбираются именно из тех пяти, которые не выполняют норму (событие B). Число таких случаев равно $M_2 = C^3_5$; тогда

$$P(B) = \frac{M_2}{N} = \frac{C^3_5}{C^3_{80}} = \frac{5! \quad \cdot 3!\ 77!}{3!\ 2! \quad \cdot 80!} = \frac{3\cdot 4\cdot 5}{78\cdot 79\cdot 80} = \frac{1}{8216} \approx 0{,}1217\cdot 10^{-3}.$$

в) В этом случае два рабочих выполняют норму, а один не выполняет. Для определения количество исходов благоприятствующих появлению искомого случайного события C, применяем свойство умножения. Умножаем число комбинаций, в которых два рабочих выполняют норму $M_1 = C^2_{75}$, на число комбинаций, в которых один рабочий не выполняет норму $M_2 = C^1_5 = 5$. Получаем $M_3 = M_1\cdot M_2 = C^2_{75}\cdot C^1_5$.

$$P(C) = \frac{M_3}{N} = \frac{C^2_{75}\cdot 5}{C^3_{80}} = \frac{75!\cdot 5}{2!73!}\frac{3!77!}{80!} = \frac{75\cdot 74\cdot 5\cdot 3}{78\cdot 79\cdot 80} = \frac{2775}{16432} \approx \mathbf{0{,}1689}. \ \blacktriangleright$$

Ответ: $P(A) = \dfrac{13505}{16432} \approx 0{,}822$; $P(B) = \dfrac{1}{8216} \approx 0{,}1217\cdot 10^{-3}$; $P(C) = \dfrac{2775}{16432} \approx 0{,}1689.$

Задания для самостоятельной работы

2.1. В электрическую цепь последовательно подсоединены два выключателя. Каждый из них может быть, как включен, так и выключен. Рассмотрим события: A — включен первый выключатель, B включен второй выключатель, C — по цепи идет ток. Выразите события C и $\overline{C}$ через A и B.

2.2. В группе студентов несколько человек являются отличниками; группа делится также по цвету волос на шатенов, брюнетов и блондинов. Из группы наудачу отобраны два человека с разным цветом волос. Пусть событие A — выбран шатен, событие B — выбран брюнет, событие C — выбран отличник. Опишите события: AC, $\overline{A}\ \ \overline{B}$, ABC.

два блондина, ABC — выбранные блондин и брюнет являются отличниками.

2.3. Доказать, что

а) $\overline{\overline{A}_1\ \overline{A}_2\ ...\ \overline{A}_n} = A_1 + A_2 + ... + A_n$,

б) $\overline{A_1 A_2 ... A_n} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + ...\overline{A}_n$.

2.4. Доказать, что $(A+B)(A+C) = A+BC$.

2.5. Событие A — первый узел автомобиля работает безотказно, событие B — второй узел автомобиля работает безотказно. Опишите события: $\overline{A}$ и $\overline{B}$, $A+B$, AB, $A\ \overline{B}$, $\overline{A}\ B$, $A\ \overline{B}\ +\ \overline{A}\ B$; как и в примере 2.6, сделайте рисунки.

2.6. Дана схема включения элементов. Элементы работают независимо и включены в цепь по приведенной схеме, рис. 5 Пусть событие A_i означает безотказную работу за время T элемента с номером i (i=1,2,3), а событие B — безотказную работу цепи. Напишите формулу, выражающую события B и $\overline{B}$ через события A_i.

2.7. Дана схема включения элементов. Элементы работают независимо и включены в цепь по приведенной схеме, рис.6. Пусть событие A_i означает элемент с номером i за время T вышел из строя (i=1,2,3), а событие B — схема вышла из строя. Напишите формулу, выражающую события B и $\overline{B}$ через события A_i.

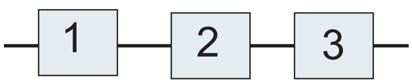

Рисунок 5. *К примеру 2.6*

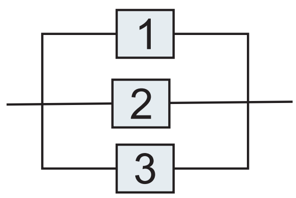

Рисунок 6. *К примеру 2.7*

2.8. Релейная схема, рис. 7 , состоит из семи элементов: $V_1, V_2, \ldots, V_7$. Событие A_i состоит в том, что элемент V_i работает безотказно в течение времени T. Выразить событие A, состоящее в том, что за время T а) схема работает безотказно; б) схема выйдет из строя.

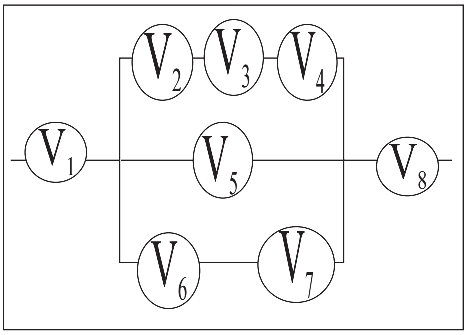

Рисунок 7. *К примеру 2.8*

2.9. Процент выполнения задания предприятием в течение 10 дней соответственно равняется $107, 111, 109, 116, 115, 105, 112, 114, 121, 124$. Какова относительная частота дней, в которые задание было выполнено более чем на 110 процентов?

2.10. В ящике «Спортлото» находится 36 шаров, помеченных номерами от 1 до 36. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется с номером, кратным 3?

2.11. Найдите вероятность того, что взятое наудачу двузначное число кратно 5.

2.12. Буквы, составляющие слово РАКЕТА, написаны по одной на шести карточках; карточки перемешаны и положены в пакет. а) Чему равна вероятность того, что, вынимая четыре буквы, получим слово РЕКА? б) Какова вероятность сложить слово КАРЕТА при вынимании всех букв?

2.13. В цех сборки привезли 25 деталей, из которых 20 изготовлены Московским заводом. Найти вероятность того, что среди 10 взятых наудачу деталей окажутся: а) все детали Московского завода, б) 7 деталей Московского завода.

2.14. Полная колода содержит 52 карты взяли 5 карт. Найти вероятность того, что среди этих карт будет шестерка трефовой масти.

2.15. Бригада, состоящая из 20 мужчин и 4 женщин, делится наудачу на два равных звена. Найти вероятность того, что в каждом звене окажется по две женщины.