16. Биномиальный закон распределения

16.1. Производящие функции

Пусть имеется случайная величина ξ, принимающая неотрицательные целочисленные значения $0, 1, 2, \dots k, \dots$ с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$, где $p_k = P(\xi = k)$.

ξ	0	1	2	$\dots$	k	$\dots$
p	p_1	p_2	p_2	$\dots$	p_k	$\dots$

Производящей функцией для дискретной случайной величины ξ называется функция вида

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, \tag{16.1}$$

где z – аргумент функции $(0 < z < 1)$.

Коэффициенты при z^k равны вероятностям того, что случайная величина ξ примет значение k.

Вычислим первую производную по z от производящей функции

$$\varphi'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k z^{k-1}. \tag{16.2}$$

Вычислим производную второго порядка по z от производящей функции

$$\varphi''(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) p_k z^{k-2}. \tag{16.3}$$

При $z = 0$, получаем

$$\varphi(0) = p_0 \geqslant 0, \qquad \varphi'(0) = p_1 \geqslant 0, \qquad \varphi''(0) = 2p_2 \geqslant 0. \tag{16.4}$$

При $z = 1$, получаем

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1. \tag{16.5}$$

$$\varphi'(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = M(\xi). \tag{16.6}$$

$$\varphi''(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k - \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = M(\xi^2) - M(\xi). \tag{16.7}$$

Найдём значение для дисперсии дискретной случайной величины ξ принимающие неотрицательные целые значения 0, 1, 2,…k, …, через производящую функцию. Для этого используем формулы (16.6), (16.7) для значений производных $\varphi'(1)$, $\varphi'(1)$ и формулу для дисперсии $D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi)$.

$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = (M(\xi^2) - M(\xi)) + M(\xi) - M^2(\xi) =$
$= \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2$.

$$D(\xi) = \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2. \tag{16.8}$$

Эти формулы пригодятся при вычислении математическое ожидание и дисперсии случайной величины ξ.

16.2. Биномиальный закон распределения

Пусть проведено n независимых испытаний с вероятностью p появления события A в каждом испытании (испытания Бернулли). Обозначим ξ — случайную величину, равную числу появлений события A в n испытаниях. По формуле Бернулли

$$P(\xi = m) = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \text{ где } q = 1-p, \ m = 0{,}1, \ \ldots, n. \tag{16.9}$$

Определение 16.1. *Распределение дискретной случайной величины, задаваемое нижеприведенной таблицей, называется* *биномиальным*.

ξ	0	1	2	…	k	…	$n-1$	n
p	q^n	npq^{n-1}	$C_n^2p^2q^{n-2}$	…	$C_n^kp^kq^{n-k}$	…	$np^{n-1}q$	p^n

Биномиальное распределение определяется двумя параметрами n и p.

Выведем формулу для производящей функции биномиального распределения, подставив в (16.1) вместо p_k формулу Бернулли и используя вормулу бином Ньютона $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$.

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{n} p_k z^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} z^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k q^{n-k} (pz)^k = (q+pz)^k.$$

Получили формулу для производящей функцией биномиального распределения

$$\varphi(z) = (q + pz)^n, \tag{16.10}$$

где z – аргумент функции $(0 < z < 1)$.

Если в каждом из независимых испытаниях вероятности наступления событий разные, то производящая функция примет вид

$$\varphi_n(z) = (q_1 + p_1 z)(q_2 + p_2 z) \cdots (q_n + p_n z). \tag{16.11}$$

При этом вероятности того, что в n опытах событие A наступит m раз, равна коэффициенту при m-й степени многочлена.

Пример 16.1. *Автомобилист движется по улице на которой расположены 4 светофора. Вероятность проехать светофор без остановки для каждого светофора различна и равна: $p_1 = 0{,}3$, $p_2 = 0{,}8$, $p_3 = 0{,}5$ и $p_4 = 0{,}7$. Какова вероятность, что автомобилист остановиться ровно на двух светофорах.*

◀ Применяем формулу (16.11) для $n = 4$ и $p_1 = 0{,}3$, $p_2 = 0{,}8$, $p_3 = 0{,}5$, $p_4 = 0{,}7$, $q_1 = 0{,}7$, $q_2 = 0{,}2$, $q_3 = 0{,}5$, $q_4 = 0{,}3$.
$\varphi_4(z) = (0{,}7 + 0{,}3z)(0{,}2 + 0{,}8z)(0{,}5 + 0{,}5z)(0{,}3 + 0{,}7z)$.

Раскрываем скобки
$\varphi_4(z) = 0{,}084z^4 + 0{,}337z^3 + 0{,}395z^2 + 0{,}163z + 0{,}021$.

Искомыми вероятностями будут коэффициенты при соответствующих степенях данного многочлена.
$P_4(0) = 0{,}021$; $P_4(1) = 0{,}163$; $P_4(2) = \mathbf{0{,}395}$; $P_4(3) = 0{,}337$; $P_4(4) = 0{,}084$. ▶

Ответ: $\boxed{P_3(2) = 0{,}395.}$

Эту задачу можно решить без использования производящей функции.
$P_3(0) = q_1q_2p_3p_4 = 0{,}021$.
$P_4(1) = p_1q_2q_3q_4 + q_1p_2q_3q_4 + q_1q_2p_3q_4 + q_1q_2q_3p_4 = 0{,}163$.
$P_4(2) = q_1q_2p_3p_4 + q_1p_2q_3p_4 + q_1p_2p_3q_4 + p_1q_2q_3p_4 + p_1q_2p_3q_4 + p_1p_2p_3q_4 +$
$+ p_1p_2q_3q_4 = 0{,}395$.
$P_4(3) = p_1p_2p_3q_4 + p_1p_2q_3p_4 + p_1q_2p_3p_4 + q_1p + 2p_3p_4 = 0{,}337$.
$P_4(4) = p_1p_2p_3p_4 = 0{,}084$.

Пример 16.2. *Используя производящую функцию, вывести формулы для математического ожидания и дисперсии биномиального распределения.*

◀ Найдем производные первого и второго порядка производящей функции (16.10).

$$\varphi'(z) = ((q + pz)^n)' = np(q + pz)^{n-1}, \qquad \varphi''(z) = n(n-1)p^2(q + pz)^{n-2}.$$

$\varphi'(1) = np(p+q) = np.$

$\varphi''(1) = n(n-1)p^2(q+p)^{n-2} = n(n-1)p^2.$

$M(\xi) = np.$

$D(\xi) = \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2 =$

$= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p) = npq.$

Математическое ожидание и дисперсия для биномиального распределённой случайной величины ξ вычисляется по формулам:

$$M(\xi) = np; \quad D(\xi) = npq. \tag{16.12}$$

►

Пример 16.3. *Найдите значение производящей функции биномиального распределения с параметром* $p = 0,8$ *и* $n = 4$ *точке в точке 0,5.*

◄ $\varphi(z) = (0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}5)^4 = 0[,6^4 = 0{,}1296.$ ►

Ответ: $\boxed{0{,}1296.}$

Пример 16.4. *Вероятность попадания стрелком в мишень равна* 0,8. *Написать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины* ξ *— числа попаданий в мишень при трёх выстрелах. Найти* $M(\xi)$ *и* $D(\xi)$.

◄ Данная случайная величина имеет следующие возможные значения: 0 (стрелок не попал в мишень ни разу), 1 (попал один раз), 2 (попал два раза), 3 (ни разу не промахнулся). Здесь $p = 0{,}8$, $q = 1 - p = 0{,}2$, $n = 3$.

По формуле Бернулли (16.9) найдем:

$$P(0) = C_3^0 \cdot (0{,}8)^0 \cdot (0{,}2)^3 = \frac{1}{125}, \quad P(1) = C_3^1 \cdot (0{,}8)^1 \cdot (0{,}2)^2 = \frac{12}{125},$$

$$P(2) = C_3^2 \cdot (0{,}8)^2 \cdot (0{,}2)^1 = \frac{48}{125}, \quad P(3) = C_3^3 \cdot (0{,}8)^3 \cdot (0{,}2)^0 = \frac{64}{125}.$$

Отметим, что $P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = 1$.

Ряд распределения примет вид:

ξ	0	1	2	3
P	0,008	0,096	0,384	0,512

Ряд распределения можно получить используя производящую функцию:

$\varphi(z) = (0,2 + 0,8z)^3 = 0,008 + 0,096z + 0,384z^2 + 0,512z^3.$

Получили тот же результат.

Найдём $M(\xi)$ и $D(\xi)$ двумя способами.

1 способ. По общим формулам для дискретной случайной величины.

$M(\xi)=\sum\limits_{k=0}^{3} x_k p_k = 0\cdot 0{,}008+1\cdot 0{,}096+2\cdot 0{,}384+3\cdot 0{,}512=\mathbf{2{,}4}.$

$D(\xi)=M(\xi^2)-M^2(\xi)=$

$=0^2\cdot 0{,}008+1^2\cdot 0{,}096+2^2\cdot 0{,}384+3^2\cdot 0{,}512-2{,}4^2=\mathbf{0{,}48}.$

2 способ. По формулам (16.12) для биномиального распределения.

$M(\xi)=np=3\cdot 0{,}8=\mathbf{2{,}4}\qquad D(\xi)=npq=2{,}4\cdot 0{,}2=\mathbf{0{,}48}.$ ►

Ответ: $\boxed{M(\xi)=2{,}4,\ \ D(\xi)=0{,}48.}$

Пример 16.5. *На складе 20% приборов являются неточными. Взяты 5 приборов для проверки. Составить таблицу распределения случайной величины ξ — число точных приборов среди проверенных. Определить математическое ожидание $M(\xi)$ и $D(\xi)$.*

◄ Вероятность отбора неточного прибора $q=0{,}2$, а точного прибора $p=1-q=0{,}8$. В данной задаче имеем биномиальное распределение. Запишем ряд распределения:

ξ	0	1	2	3	4	5
P	$0{,}2^5$	$C_5^1\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2^4$	$C_5^2\cdot 0{,}8^2\cdot 0{,}2^3$	$C_5^3\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2^2$	$C_5^4\cdot 0{,}8^4\cdot 0{,}2$	$0{,}8^5$

Для получения числовых значений используем Maxima-программу:

```
load(distrib)$   fpprintprec:4$
P:makelist(pdf_binomial(k, 5, 0.8), k, 0, 5);
```

(%o4) $[3.2*10^{-4},\ \ 0.0064,\ \ 0.0512,\ \ 0.205,\ \ 0.41,\ \ 0.328]$

Или другой вариант программы с использованием производящей функции

expand((0.2+0.8*z)^5);

(%o4) $0.32768*z^5+0.4096*z^4+0.2048*z^3+0.0512*z^2+0.0064*z+3.2*10^-4$

Согласно формулам (16.12), математическое ожидание

$M(\xi)=np=5\cdot 0{,}8=\mathbf{4}$, а дисперсия $D(\xi)=npq=5\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2=\mathbf{0{,}8}.$ ►

Ответ: $\boxed{M(\xi)=4,\ \ D(\xi)=0{,}8.}$

Пример 16.6. *В партии поступивших на склад деталей 10% бракованные. Случайным образом выбрали n=15 деталей. Случайная величина ξ — число бракованных деталей среди выбранных. Составить ряд распределения случайной величины ξ. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ. Какова вероятность, что будет выбрано более трёх бракованных деталей. Построить график ряда распределения случайной величины ξ.*

◀ По формуле Бернулли (16.9) найдем:

$$P(\xi = k) = C_n^k \cdot (0{,}1)^k \cdot (0{,}9)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, 15.$$

Для вычисления математического ожидания применяем формулу $M(\xi) = \sum\limits_{k=0}^{15} k \cdot P(\xi = k)$.

Для вычисления дисперсии применяем формулу

$$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi), \quad \text{где } M(\xi^2) = \sum_{k=0}^{15} k^2 \cdot P(\xi = k).$$

Для вычисления вероятности, что будет выбрано более трёх бракованных деталей находим

$P\_3\_15 = \sum\limits_{k=4}^{15} P(\xi = k)$ или $P\_3\_15 = 1 - \sum\limits_{k=0}^{3} P(\xi = k)$.

Выполнять такой огромный объём работы долго и неинтересно, поэтому пишем Maxima-программу, которая по приведённым формулам получит и выведет все требуемые результаты. Программа очень простая и понятная. При помощи встроенной функцией ***pdf_ binomial***(k, n, p) которая вычисляет по формулам (16.9) значения полученного ряда распределения. Создаём массив P, в который записываем полученные значения. В список G записываем значения координат точек для построения графика. Функция plot2d, по координатам списка G строит график, рис. 16. Используя функцию ***sum***, находим математическое ожидание M, дисперсию D случайной величины ξ и искомую вероятность P_3_15.

```
kill(all)$  load(distrib)$ fpprintprec:3$ n:15$ p:0.1$
array(P,n)$ /*нумерация массива с 0 начинается, а списка с 1*/
fillarray(P,makelist(pdf_binomial(k, n, p), k, 0, n))$
G:makelist([k,P[k]],k,0,n);
plot2d([discrete,G], [x,0,8],[style,points],
          [gnuplot_postamble, "set grid;"])$
M:sum(k*P[k],k,0,n);
D:sum(k^2*P[k],k,0,n)-M^2;
P_3_15:sum(P[k],k,4,n);
Результаты
(G)[[0,0.206],[1,0.343],[2,0.267],[3,0.129],[4,0.043],[5,0.011],
 [6,0.00194],[7,2.77*10^-4],[8,3.08*10^-5],[9,2.66*10^-6],
 [10,1.77*10^-7],[11,8.96*10^-9],[12,3.32*10^-10],
 [13,8.51*10^-12], [14,1.35*10^-13],[15,1.0*10^-15]]
```

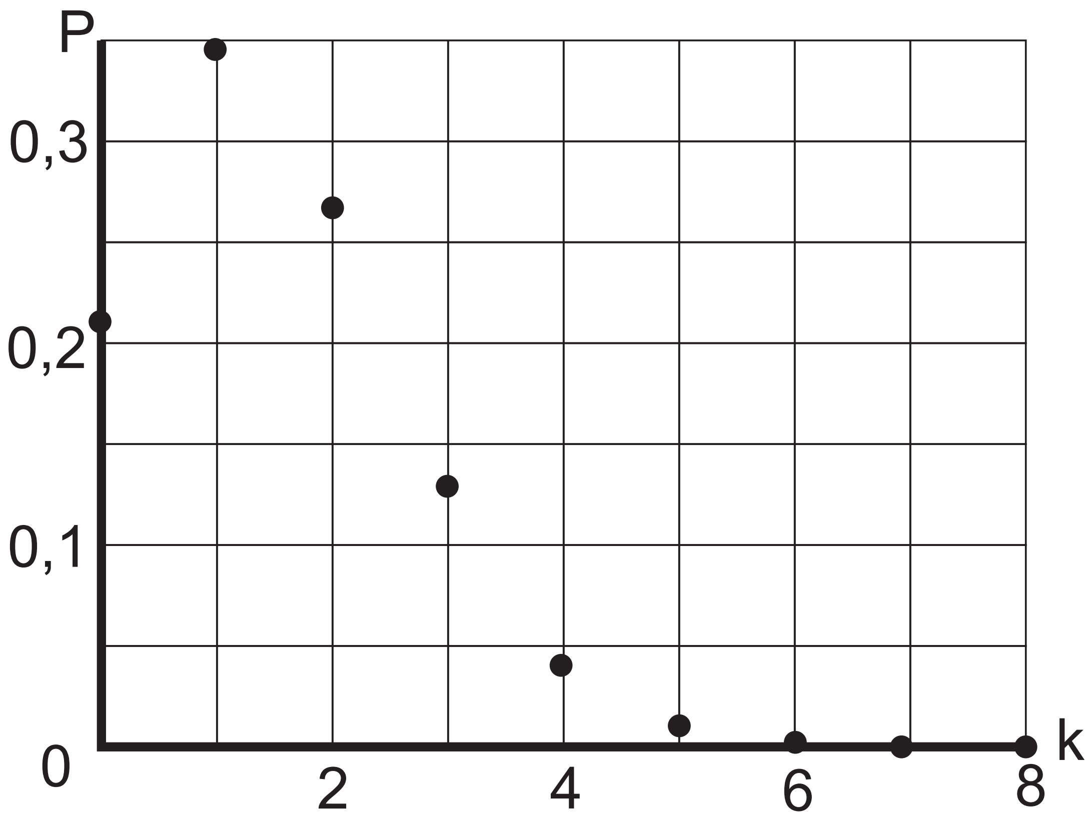

Рисунок 16. *Биномиальное распределения для примера 16.6*

```
(M) 1.5
(D) 1.35
(P_3_15) 0.0556
```

Пример 16.7. *Случайная величина ξ имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 5$ и $p = \frac{1}{2}$. Получить ряд распределения случайной величины $\eta = \xi^4$ и найти $M(\eta)$.*

◀ Применяя формулу Бернулли $P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$, получаем ряд распределения случайной величины ξ:

ξ	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{2^5}$	$C_5^1 \cdot \frac{1}{2^5}$	$C_5^2 \cdot \frac{1}{2^5}$	$C_5^3 \cdot \frac{1}{2^5}$	$C_5^4 \cdot \frac{1}{2^5}$	$\frac{1}{2^5}$

Или

ξ	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

Возводя в четвёртую степень значения в первой строке, получаем ряд распределения искомой случайной величины η:

η	0	1	16	81	256	625
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

Находим её математическое ожидание:
$M(\eta) = \dfrac{1}{32} \cdot 0 + \dfrac{5}{32}(1 + 16 + 81 + 256 + 256) + \dfrac{625}{32} = 90.$ ►

Ответ: $\boxed{\mathbf{90.}}$

Пример 16.8. *Случайная величина ξ имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 16$ и $p = 0{,}25$. Найти математическое ожидание случайной величины $\eta = \xi^2 - 4\xi + 2$.*

◄ 1 способ. Получаем 16 значений вероятностей $P_k = C_n^k p^k (1-p)^{16-k}$, $k = 1, 2, \ldots, 16$, и находим $M(\xi) = \sum\limits_{k=1}^{16} P_k$. Без использования математического пакета трудно обойтись. Пишем простую и понятную Maxima-программу.

```
kill(all)$  load(distrib)$ fpprintprec:3$ n:16$ p:0.25$
array(P,n)$
fillarray(P,makelist(pdf_binomial(k, n, p), k, 0, n))$
MK:sum(k^2*P[k],k,0,n)-4*sum(k*P[k],k,0,n)+2;
(MK)  5.0
```

2 способ без использования компьютерной техники. Используя формулы для математического ожидания и дисперсии биномиального распределения, получаем:

$M(\xi) = np = 16 \cdot \dfrac{1}{4} = 4.$

$D(\xi) = npq = 16 \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{3}{4} = 3.$

Находим $M(\xi^2)$

$D(\xi) = M\xi^2 - M^2(\xi) \ \Rightarrow \ M\xi^2 = D(\xi) + M^2(\xi) = 3 + 16 = 19.$

$M(\eta) = M(\xi^2 - 4\xi + 2) = M(\xi^2) - 4M(\xi) + M(2) = 19 - 16 + 2 = 5.$ ◄

Ответ: $\boxed{\mathbf{5.}}$

Пример 16.9. *Случайная величина ξ распределена по биномиальному закону с параметрами $n = 4,\ p = \dfrac{1}{3}$. Найти ряд распределения случайной величины $\eta = sin^2\dfrac{\pi x}{2}$.*

◀ Применяя формулу Бернулли $P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$ получаем ряд распределения случайной величины ξ:

ξ	0	1	2	3	4
P	$(2/3)^4$	$4 \cdot (2/3)^3 \cdot (1/3)$	$C_4^2 \cdot (2/3)^2 \cdot (1/3)^2$	$4 \cdot (2/3) \cdot (1/3)^3$	$(1/3)^4$

После вычислений, получаем такую ряд распределения заданной случайной величины ξ:

ξ	0	1	2	3	4
P	16/81	32/81	24/81	8/81	1/81

К первой строке полученной таблицы применяем функцию $sin^2\dfrac{\pi x}{2}$. Получаем таблицу

ξ	0	1	0	1	0
P	16/81	32/81	24/81	8/81	1/81

Путем объединения столбцов с одинаковыми значениями, получаем ряд распределения искомой случайной величины η:

η	0	1
P	41/81	40/81

▶

Задания для самостоятельной работы

16.1.
16.2.
16.3.
16.4.
16.5.
16.6.
16.7.
16.8.
16.9.
16.10.