25. Корреляционная зависимость случайных величин

Определение 25.1. *Корреляционным моментом* $K_{\xi\eta}$ *случайных величин* ξ *и* η *называют:*

$$K_{\xi\eta} = M\left(\left(\xi - M(\xi)\right)\left(\eta - M(\eta)\right)\right).$$

Легко убедиться, что корреляционный момент можно также вычислять по формуле:

$$K_{\xi\eta} = M(\xi \cdot \eta) - M(\xi) \cdot M(\eta). \tag{25.1}$$

Вычисление корреляционного момента по формуле (25.1) для дискретных случайных величин сводится к вычислению суммы:

$$K_{\xi\eta} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} p_{ij} x_i y_j - M(\xi) \cdot M(\eta),$$

а для непрерывных — интеграла:

$$K_{\xi\eta} = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} xyf(xy)dxdy - M(\xi) \cdot M(\eta).$$

Теорема 25.1. *Для независимых случайных величин корреляционный момент равен нулю.*

Действительно, пользуясь свойствами математического ожидания из формулы (25.1), получаем для независимых ξ и η:

$$K_{\xi\eta} = M(\xi \cdot \eta) - M(\xi) \cdot M(\eta) = M(\xi) \cdot M(\eta) - M(\xi) \cdot M(\eta) = 0.$$

На практике пользуются безразмерной характеристикой — коэффициентом корреляции.

Определение 25.2. *Коэффициентом корреляции* $r_{\xi\eta}$ *случайных величин* ξ *и* η *называется*

$$r_{\xi\eta} = \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = \frac{M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta)}{\sigma_\xi \sigma_\eta}. \tag{25.2}$$

Перечислим свойства коэффициента корреляции.

(1) Для независимых ξ и η коэффициент корреляции равен нулю: $r_{\xi\eta} = 0$,

(2) $|r_{\xi\eta}| \leqslant 1$,

(3) $|r_{\xi\eta}| = 1 \iff \eta = k\xi + b$ или $\xi = k\eta + b$.

Замечание 25.1. *Из равенства нулю коэффициента корреляции не следует независимость случайных величин.*

Определение 25.3. *Случайные величины ξ и η называются* **некоррелированными**, *если их коэффициент корреляции равен нулю: $r_{\xi\eta} = 0$.*

Пример 25.1. *Дано распределение двумерного случайного вектора (ξ, η) с дискретными компонентами.*

ξ/η	-2	0	1
-1	0,1	0,1	0,2
2	0,1	0	0,1
4	0,3	0	0,1

Выяснить, коррелированы ли компоненты случайного вектора (ξ, η). Найти коэффициент корреляции.

◀ Сложив вероятности по строкам, получим закон распределения составляющей ξ:

ξ	-1	2	4
p	0,4	0,2	0,4

Если сложим вероятности по столбцам, то придем к закону распределения составляющей η:

η	-2	0	1
p	0,5	0,1	0,4

С помощью последних таблиц легко найдем математические ожидания компонент дискретного вектора $(\xi,\ \eta)$:

$$M(\xi) = -1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}4 = 1{,}6,$$

$$M(\eta) = -2 \cdot 0{,}5 + 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}4 = -0{,}6.$$

Умножая значения x_i на y_j компонентов случайного вектора (ξ, η) ξ и η и в качестве вероятностей принимая значения p_{ij} из закона распределения, получим закон распределения одномерной случайной величины $\xi\eta$:

$\xi\eta$	-8	-4	-1	0	2	4
P	0,3	0,1	0,1	0,1	0,1	0,3

$M(\xi\eta) = -8 \cdot 0{,}3 - 4 \cdot 0{,}1 - 1 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}3 = -1{,}5.$

Применяя формулу (21.8), найдём корреляционный момент
$K_{\xi\eta} = M(\xi\,\eta) - M(\xi) \cdot M(\eta) = -1{,}5 - 1{,}6 \cdot (-0{,}6 = -0{,}54.$

Корреляционный момент отличен от нуля, следовательно **компоненты случайного вектора (ξ, η) коррелированы**.

Осталось найти коэффициент корреляции $r_{\xi\eta}$. Для этого найдём дисперсии компонент вектора $(\xi,\ \eta)$:

$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = (-1)^2 \cdot 0{,}4 + 2^2 \cdot 0{,}2 + 4^2 \cdot 0{,}4 - 1{,}6^2 = 5{,}04.$

$D(\eta) = M(\eta^2) - M^2(\eta) = (-2)^2 \cdot 0{,}5 + 1^2 \cdot 0{,}4 - (-0{,}6^2 = 2{,}04.$

$r_{\xi\eta} = \dfrac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = \dfrac{-0{,}54}{\sqrt{5{,}04 \cdot 2{,}04}} \approx -0{,}168.$ ►

Ответ: $\boxed{\xi \text{ и } \eta \text{ — коррелированы; } r_{\xi\eta} \approx -0{,}168.}$

Пример 25.2. *Случайный вектор (ξ, η) распределён равномерно внутри прямоугольного треугольника G с вершинами $O(0,0)$, $A(0,6)$, $B(6,0)$.*

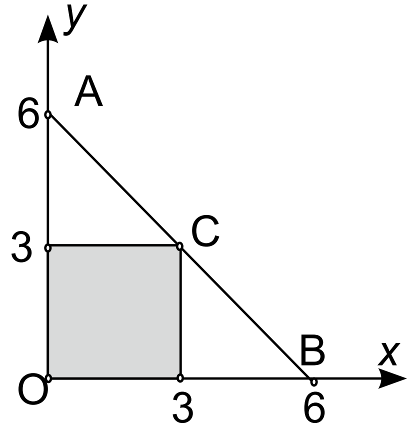

Рисунок 54. *Пример 25.2*

1) Найти плотность распределения вероятностей компонент случайного вектора.

2) Исследовать зависимость компонент случайного вектора.

3) Выяснить коррелированы ли компоненты случайного вектора (ξ, η). Найти коэффициент корреляции.

4) Найти $P((\xi, \eta) \in D)$, где $D = \{(x, y) | \quad 0 \leqslant x \leqslant 3, \quad 0 \leqslant y \leqslant 3\}$.

◄ 1) Распределение двумерной непрерывной случайной величины называют равномерным, если в области, которой принадлежат все возможные значения (x, y), плотность вероятности сохраняет постоянное значение, т.е. $f(x, y) = c$. Уравнение прямой AB есть $y = 6 - x$. Постоянную a найдем с помощью свойства 5 двумерной плотности. Тогда

$$\int_0^6 dx \int_0^{6-x} c dy = 1, \quad c\int_0^6 (6-x)dx = c\left(6x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^6 = c\cdot 18 = 1.$$

$\Rightarrow 18a = 1,\ a = 1/18,\ f(x,y) = 1/18$ внутри треугольника; вне этой области плотность равна нулю. Площадь треугольника OAB можно было найти по формуле: $S = \dfrac{1}{2}\cdot OA\cdot OB = 18$.

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y)\notin G, \\ \dfrac{1}{18}, & (x,y)\in G. \end{cases}$$

Согласно (22.6), плотности составляющих двумерной величины будут равны:

$$f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dy = \int_0^{6-x} \frac{1}{18}\,dy = \frac{6-x}{18}\ (0<x<6),$$

$$f_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dx = \int_0^{6-y} \frac{1}{18}\,dx = \frac{6-y}{18}\ (0<y<6).$$

Вне указанных интервалов эти функции равны нулю.

2) Теперь займёмся исследованием зависимости компонент случайного вектора (ξ,η).

Для этого найдём условные плотности компонент по формулам (22.6) и (22.7).

$$f(y/\xi=x) = \begin{cases} 0, & f_\xi(x)=0, \\ \dfrac{f(x;y)}{f_\xi(x)}, & f_\xi(x)\neq 0. \end{cases} \Rightarrow f(y/\xi=x) = \begin{cases} \dfrac{1}{6-x}, & x\in[0;6], \\ 0, & x\notin[0;6]. \end{cases}$$

$$f(x/\eta=y) = \begin{cases} 0, & f_\eta(y)=0, \\ \dfrac{f(x;y)}{f_\eta(x)}, & f_\eta(y)\neq 0. \end{cases} \Rightarrow f(x/\eta=x) = \begin{cases} \dfrac{1}{6-y}, & y\in[0;6], \\ 0, & y\notin[0;6]. \end{cases}$$

В рассмотренном примере условные плотности распределения $f(x/\eta=y)$ и $f(y/\xi=x)$ не совпадают с безусловными плотностями $f_\eta(y)$

и $f_\xi(x)$. Это имеет место тогда и только тогда, когда случайные величины ξ и η *зависимы.*

3) Выяснить коррелированы ли компоненты случайного вектора (ξ, η). По вычисленным плотностям распределения компонент случайного вектора найдём их математические ожидания.

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)dx = \int\limits_0^6 x\frac{6-x}{18}dx = \frac{1}{18}\cdot\left(3x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^6 =$$
$$= \frac{1}{18}\cdot(3\cdot 6^2 - \frac{6^3}{3}) = 2.$$

$$M(\eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f_\eta(y)dy = \int\limits_0^6 y\frac{6-y}{18}dy = 2.$$

Следовательно, математическое ожидание случайного вектора (ξ, η) равно вектору $(2; 2)$.

$$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x)dx - M^2(\xi) = \int\limits_0^6 x^2\frac{6-x}{18}dx - 2^2 =$$
$$= \frac{1}{18}\cdot\left(2x^3 - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^6 - 4 = \frac{6^3}{3\cdot 6}\cdot\left(2 - \frac{3}{2}\right) - 4 = 12\cdot\frac{1}{2} - 4 = 2.$$

$D(\eta) = 2.$

Корреляционный момент (ковариация) $K_{\xi\eta}$ вычисляется по формуле (25.1)

$$K_{\xi\eta} = M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta).$$

Вычислим математическое ожидание случайной величины $\xi\eta$

$$M(\xi\eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xy\, f(x,y)\, dx\, dy = \frac{1}{18}\iint\limits_{G} xy\, dxdy = \frac{1}{18}\int\limits_{0}^{6} x\, dx \int\limits_{0}^{-x+6} y\, dy =$$

$$= \frac{1}{18}\int\limits_{0}^{6} x \cdot \frac{y^2}{2}\Bigg|_{0}^{-x+6} dx = \frac{1}{36}\int\limits_{0}^{6}(x^3 - 12x^2 + 36x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{36}\left(\frac{x^4}{4} - 4x^3 + 18x^2\right)\Big|_0^6 = \frac{1}{36}6^2\left(\frac{36}{4} - 4\cdot 6 + 18\right) = 9 - 24 + 18 = 3.$$

Теперь найдем корреляционный момент

$$K_{\xi\eta} = M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta) = 3 - 4 = -1.$$

Следовательно, случайные величины ξ и η находятся в корреляционной зависимости.

Используя формулу (25.2), найдём коэффициент корреляции.

$$r_{\xi\eta} = \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi\sigma_\eta} = \frac{-1}{\sqrt{2\cdot 2}} = -0{,}5.$$

4) Найти $P((\xi,\eta)\in D)$, где $D = \{(x,y)|0 \leqslant x \leqslant 3; 0 \leqslant y \leqslant 3\}$.

$P((\xi,\eta)\in D) = \iint\limits_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint\limits_D \frac{1}{18}\, dx\, dy = \frac{1}{18}\cdot S_D = \frac{9}{18} = 0{,}5.$ ►

Пример 25.3. *Случайный вектор (ξ,η) распределен равномерно в области G, рис.55.*

1) Найти плотность распределения вероятностей компонент случайного вектора и проверить, являются ли они зависимыми.

2) Выяснить, коррелированы ли компоненты случайного вектора (ξ,η). Найти коэффициент корреляции.

3) Найти $P((\xi,\eta)\in D)$, где $D = \{(x,y)|x^2 + y^2| \leqslant 1\}$.

◄ 1) На рис. 55 представлена область равномерного распределения случайного вектора G и область D. Из свойств плотности распределения следует, что функция плотности постоянна и равна $1/S$ (S площадь фигуры) на области G и равна нулю вне её. $S = ED\cdot CD - 0{,}5AO\cdot OB = 7/2$. Следовательно, функция плотности двумерного распределения равна

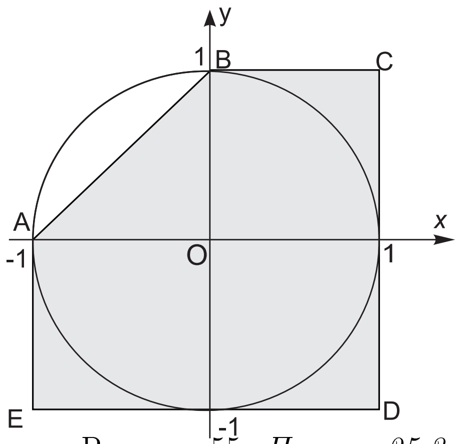

Рисунок 55. *Пример 25.3*

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)\notin G,\\ \dfrac{2}{7}, & (x,y)\in G.\end{cases}$$

Плотности распределения составляющих двумерной непрерывной случайной величины получаются из её плотности $f(x;y)$ по формулам (22.6). Найдём плотность компоненты ξ, т.е. функцию $f_\xi(x)$. При $x\notin[-1;1]$ $f_\xi(x)=0$, т.к. $f(x,y)=0$. При закрашивании области G слева направо вертикальными линиями область интегрирования разбивается на две подобласти. Первая подобласть ограничена прямыми: $y=-1, x=-1$, $y=x+1$ и $x=0$. Вторая подобласть ограничена прямыми: $y=-1$, $x=0$, $y=1$ и $x=1$.

$$f_\xi(x)=\begin{cases}0, x\notin[-1;1],\\ \int\limits_{1}^{x+1}\dfrac{2}{7}dy=\dfrac{2}{7}y\Big|_{-1}^{x+1}=\dfrac{2}{7}(x+1+1)=\dfrac{2}{7}\,(x+2), x\in[-1;0),\\ \int\limits_{-1}^{1}\dfrac{2}{7}dy=\dfrac{2}{7}y\Big|_{-1}^{1}=\dfrac{2}{7}(1+1)=\dfrac{4}{7}, x\in[0;1].\end{cases}$$

Следовательно, случайная величина ξ распределена кусочно-линейна на отрезке $[-1;1]$ и её функция плотности равна

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{7}\,(x+2), & x\in[-1;0],\\ \dfrac{4}{7}, & x\in([0;1],\\ 0, & x\notin[-1;1].\end{cases}$$

Аналогично получим плотность распределения компоненты η. При $y \notin [-1;1]$ $f_\eta(y) = 0$, т.к. $f(x,y) = 0$. При закрашивании области G горизонтальными линиями необходимо разбить область на две подобласти. Первая подобласть ограничена прямыми:$y = -1, y = 0$, $x = -1$ и $x = 1$. Вторая подобласть ограничена прямыми:$y = 0$, $y = 1$, $x = y - 1$ и $x = 1$. Находим функцию $f_\eta(x)$.

$$f_\eta(y) = \begin{cases} 0, y \notin [-1;1], \\ \int\limits_1^1 \frac{2}{7}dx = \frac{2}{7}x\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{7}(1+1) = \frac{4}{7}, y \in [-1;0), \\ \int\limits_{y-1}^{1} \frac{2}{7}\,dx = \frac{2}{7}\,x\Big|_{y-1}^{1} = \frac{2}{7}(1-y+1) = \frac{2}{7}(2-y), y \in [0;1]. \end{cases}$$

Следовательно, плотность распределения компоненты η имеет равна:

$$f_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \notin [-1;1], \\ \frac{4}{7}, & y \in [-1;0), \\ \frac{2}{7}(2-y) & y \in [0;1]. \end{cases}$$

На рис. 56, представлены графики плотности распределения вероятностей

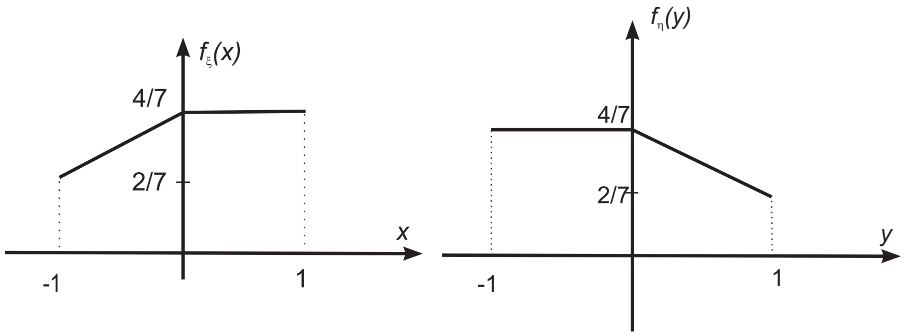

Рисунок 56. *Компоненты плотности вектора* $(\xi;\, \eta)$

компонент случайного вектора $(\xi;\, \eta)$. Отметим, что все свойства функции плотности выполняются. Функции неотрицательные и площадь фигуры, ограниченной графиками функций, осью абсцисс и штриховыми линиями, равна 1.

Согласно теореме 22.1, которая утверждает, что для независимости непрерывных случайных величин ξ и η необходимо и достаточно, чтобы $f(x;y) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y)$, делаем вывод, что случайные величины ξ и η зависимы.

2) Выяснить, коррелированы ли компоненты случайного вектора (ξ, η). По вычисленным плотностям распределения компонент случайного вектора найдём их математические ожидания.

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx = \int\limits_{-1}^{0} \frac{2}{7} x(x+2) dx + \int\limits_{0}^{1} \frac{4}{7} x dx = \frac{2}{7} \left(\frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_{-1}^{0} + \frac{4}{7} \frac{x^2}{2} \Big|_{0}^{1} = \\ = \frac{2}{7} \left(-\frac{2}{3} \right) + \frac{2}{7} = \frac{2}{21}.$$

$$M(\eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f_\eta(y) dy = \int\limits_{-1}^{0} \frac{4}{7} y \, dy + \int\limits_{0}^{1} \frac{2}{7} (2y - y^2) \, dy = \\ = \frac{2}{7} y^2 \Big|_{-1}^{0} + \frac{2}{7} \left(y^2 - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{0}^{1} = -\frac{2}{7} + \frac{2}{7} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = -\frac{2}{21}.$$

Следовательно, математическое ожидание случайного вектора (ξ, η) равно нуль-вектору $\left(\frac{2}{21}; -\frac{2}{21} \right)$.

Корреляционный момент (ковариация) $K_{\xi\eta}$ вычисляется по формуле (25.1)

$$K_{\xi\eta} = M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta).$$

Вычислим $M(\xi\eta)$

$$M(\xi\eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xy \, f(x, y) \, dx \, dy = \frac{2}{7} \iint\limits_{G} xy \, dx dy = \frac{2}{7} \int\limits_{-1}^{0} x \, dx \int\limits_{-1}^{x+1} y \, dy + \\ + \frac{2}{7} \int\limits_{0}^{1} x \, dx \int\limits_{-1}^{1} y \, dy = \frac{2}{7} \int\limits_{-1}^{0} x \frac{y^2}{2} \Big|_{-1}^{x+1} dx + \frac{2}{7} \int\limits_{0}^{1} x \frac{y^2}{2} \Big|_{-1}^{1} dx = \\ = \frac{1}{7} \int\limits_{0}^{1} (x^3 + 2x^2) dx = \frac{1}{7} \left(\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_{0}^{1} = \frac{11}{84}.$$

Теперь найдем корреляционный момент

$$K_{\xi\eta} = M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta) = \frac{11}{4 \cdot 21} + \frac{4}{21 \cdot 21} = \frac{247}{1764} \approx 0{,}001.$$

Следовательно случайные величины ξ и η находятся в корреляционной зависимости.

Используя формулу (25.2) найдём коэффициент корреляции. Для этого найдём $D(\xi)$ и $D(\eta)$. Находим $M(\xi^2)$ и $M(\eta^2)$.

$$M(\xi^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x)dx = \frac{2}{7}\int\limits_{-1}^{0} x^3 + 2x^2\,dx + \frac{4}{7}\int\limits_{0}^{1} x^2\,dx = \frac{13}{42}.$$

$$M(\eta^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_\eta(y)dy = \frac{4}{7}\int\limits_{-1}^{0} y^2\,dy + \frac{2}{7}\int\limits_{0}^{1} 2y^2 - y^3\,dy = \frac{13}{42}.$$

$$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \frac{13}{42} - \frac{4}{21^2} = \frac{265}{882}.$$

$$D(\eta) = M(\eta^2) - M^2(\eta) = \frac{13}{42} - \frac{4}{21^2} = \frac{265}{882}.$$

$$r_{\xi\eta} = \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = \frac{\frac{247}{1764}}{\frac{265}{882}} =\approx 0{,}466.$$

3) Найти $P((\xi,\eta)\in D)$, где $D = \{(x,y)|x^2+y^2| \leqslant 1\}$.

Найдём площадь круга радиуса 1, за вычетом двух сегментов круга, выходящих за пределы параллелограмма. Эта площадь состоит из трёх четвертей окружности и прямоугольного треугольника: $S_1 = \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3\pi+2}{4}$.

$$P((\xi,\eta)\in D) = \iint\limits_{D\cdot G} \frac{2}{7}dxdy = \frac{2S_1}{7} = \frac{3\pi+2}{14} \approx 0{,}816. \ \blacktriangleright$$

Пример 25.4. *Плотность вероятности двумерной случайной величины (ξ,η) равна:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\cos(x-y) \ \textit{при}\ x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right],\ y \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right], \\ 0 \ \textit{при}\ x \notin \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right] \ \textit{или}\ y \notin \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Найти коэффициент корреляции случайных величин ξ и η.

◀ Поскольку здесь система случайных величин является непрерывной, то математические ожидания величин ξ и η определим по формулам:

$$M(\xi) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy, \qquad M(\eta) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy.$$

Тогда, вычисляя интеграл по x по частям, найдем

$$M(\xi) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} xdx \int_0^{\pi/2} \cos(x-y)dy = \frac{\pi}{4}.$$

Из симметрии плотности вероятности относительно ξ и η (функция $\cos(x-y)$ чётная) следует, что $M(\eta) = M(\xi) = \pi/4$. Дисперсия

$$D(\xi) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x,y)dxdy - M^2(\xi).$$

или

$$D(\xi) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x^2dx \int_0^{\pi/2} \cos(x-y)dy - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2.$$

Здесь интеграл по x вычисляли два раза по частям. Дисперсия $D(\eta) = D(\xi)$. Кроме того, необходимо найти математическое ожидание произведения случайных величин. Тогда в общем случае

$$M(\xi\cdot\eta) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy,$$

а при данной плотности вероятности

$$M(\xi\cdot\eta) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} xdx \int_0^{\pi/2} y\cos(x-y)dy = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{2} + 1.$$

Последний интеграл по x и по y вычисляли по частям. Подставляя найденные значения в формулу (25.2), определим коэффициент корреляции:

$$r_{\xi\eta} = \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{\pi^2}{16}\right)\Big/\left(\frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2\right) = \frac{\pi^2 - 8\pi + 16}{\pi^2 + 8\pi - 32} \approx \mathbf{0{,}245}. \quad ▶$$

Ответ: $\boxed{r_{\xi\eta} \approx 0{,}245.}$

Задания для самостоятельной работы

25.1. Изготавливаемые детали цилиндрической формы сортируются по отклонению их длины от планируемого размера на 0,1; 0,2; 0,3 мм и по разбросу их диаметра на 0,02; 0,04 мм. Совместное распределение отклонений длины ξ и диаметра η задано таблицей

$\xi\backslash\eta$	0,1	0,2	0,3
0,02	0,2	0,2	0,25
0,04	0,05	0,1	0,2

Найти математические ожидания случайных величин ξ и η и коэффициент корреляции ξ и η.

25.2. Задан закон распределения случайного вектора $(\xi;\eta)$

$\xi\backslash\eta$	-0,4	2,3
-2,2	0,4	0
2,5	0,3	0,05
3,7	0,05	0,2

Найдите коэффициент корреляции $r_{\xi\eta}$.

25.3. Случайный вектор $(\xi;\eta)$ распределен равномерно в многоугольнике $ABCDEA$, изображенном на рисунке 57. 1) Найти плотность распределения вероятностей компонент случайного вектора $(\xi;\eta)$. 2) Найти коэффициент корреляции $r_{\xi\eta}$.

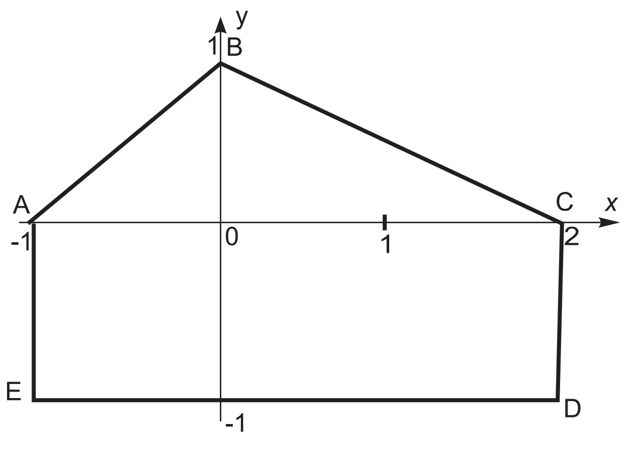

Рисунок 57. К заданию 25.3

25.4. Задана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (ξ, η): $f(x, y) = A \sin x \sin y$ в квадрате $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$; вне квадрата $f(x, y) = 0$. Найти коэффициент корреляции $r_{\xi\eta}$.

25.5. Система случайных величин (ξ, η) подчинена закону распределения с плотностью

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(x+y) \text{ при } x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ y \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ 0 \text{ при } x \notin [0, \frac{\pi}{2}] \text{ или } y \notin [0, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

Найти коэффициент корреляции $r_{\xi\eta}$.