ТВиМС. Практическое занятие №11

11. Подготовка к контрольной работе №1

11.1. Примерный вариант

1. В коробке находится 20 маркеров: 10 синих, 6 красных и 4 чёрных. Наугад взяли 5 маркеров. Найти вероятность того, что среди взятых маркеров: а) два красные и два синие; б) хотя бы один чёрный.

2. В область D, ограниченную двумя линиями: $D : \{y = x^2,\ y = 4\}$, брошена точка. Найти вероятность того, что она попадёт в область B, ограниченную также двумя линиями $B : \{y = x^2, \quad y = x\}$.

3. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность брака для первого станка равна — 0,03, для второго — 0,02, для третьего — 0,04. Производительность второго станка вдвое больше чем первого, а третьего вдвое меньше чем первого. Изготовленные детали попадают на общий конвейер. Определить вероятность, что а) наудачу взятая деталь будет годной; б) наудачу взятая деталь оказалась бракованной, какова вероятность, что она изготовлена на третьем станке.

4. Найти вероятность отказа схемы, рис. 29, если надёжности элементов $p(A_1) = 0{,}5$, $p(A_2) = 0{,}7$, $p(A_3) = 0{,}9$.

5. Найти вероятность того, что при 12 бросках кости шестёрка выпадет: а) 2 раза, б) не менее 3 раз.

6. Из урны, в которой 15 белых и 5 чёрных шара, вынимают подряд все находящиеся в нём шары. Найти вероятность того, что третьим по порядку будет вынут белый шар.

7. В урне 2 белых и 4 черных шара. Два игрока поочередно извлекают шар (без возвращения). Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар.

11.2. Решение задач из примерного варианта

Пример 11.1. *В коробке находится 20 маркеров: 10 синих, 6 красных и 4 чёрных. Наугад взяли 5 маркеров. Найти вероятность того, что среди взятых маркеров: а) два красные и два синие; б) хотя бы один чёрный.*

◀ а) Пусть A — событие состоящее в том, что из коробки взяли 5 маркеров: два красные, два синие и один оставшийся чёрный. Применяем формулу классического определения вероятностей $P(A) = \dfrac{M}{N}$.

Число всевозможных исходов события A равно

$N = C_{20}^5 = \dfrac{20!}{5!\cdot 15!} = \dfrac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 19\cdot 17\cdot 16\cdot 3 = 15504.$

Число исходов, благоприятствующих событию A, равно

$M = C_{10}^2\cdot C_6^2\cdot C_4^1 = \dfrac{10!\cdot 6!\cdot 4}{2!\cdot 8!\cdot 2!\cdot 4!} = 10\cdot 9\cdot 6\cdot 5 = 2700.$

Следовательно, $P(A) = \dfrac{10\cdot 9\cdot 6\cdot 5}{19\cdot 17\cdot 16\cdot 3} = \dfrac{10\cdot 9\cdot 5}{19\cdot 17\cdot 8} = \dfrac{225}{1292} \approx$ **0,174**.

б) Пусть B — искомое событие, состоящее в том, что из коробки взяли 5 маркеров и среди них оказался хотя бы один чёрный маркер. Тогда $B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4$. Где B_i события, состоящие в том, что выбрали i чёрных маркеров. События несовместны, поэтому можно применить теорему о сумме $P(B) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4)$. Однако, быстрее найти вероятность противоположного события

$P(\overline{B}) = P(B_0) = \dfrac{C_{16}^5}{C_{20}^5} = \dfrac{16!\cdot 5!\cdot 15!}{5!\cdot 11!\cdot 20!} = \dfrac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 17} =$

$= \dfrac{7\cdot 13}{19\cdot 17} = \dfrac{91}{323}.$

$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \dfrac{91}{323} = \dfrac{232}{323} \approx$ **0,718**.▶

Ответ: $\boxed{\textbf{а) } \dfrac{225}{1292} \approx 0{,}174;\ \textbf{б) } \dfrac{232}{323} \approx 0{,}718.}$

Пример 11.2. *В область D, ограниченную двумя линиями:*
$D : \{y = x^2, \quad y = 4\}$*, брошена точка. Найти вероятность того, что она попадёт в область B, ограниченную также двумя линиями*
$B : \{y = x^2, \quad y = x\}$.

◀ На рис. 28 изображены области D и B. Согласно геометрическому определению вероятности, вероятность искомого события A будет равна отношению площадей области B и D, обозначим их S_B и S_D. $P(A) = \dfrac{S_B}{S_D}$.

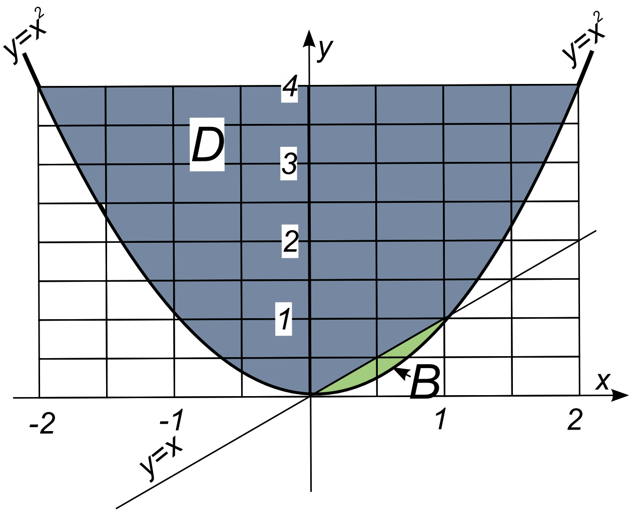

Рисунок 28. *К примеру 11.2*

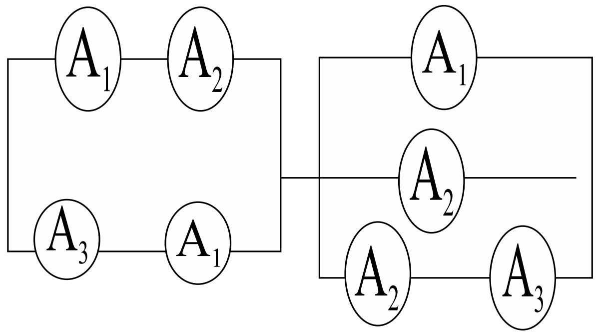

Рисунок 29. *К примеру 11.4*

Найдём их значения. Для этого от площади квадрата (или прямоугольного треугольника) вычитаем площадь криволинейной трапеции, сверху ограниченной параболой $y = x^2$, а снизу осью абсцисс.

$$S_D = 4 \cdot 4 - \int\limits_{-2}^{2} x^2\,dx = 16 - x^3/3\Big|_{-2}^{2} = \frac{32}{3}.$$

$$S_B = \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 - \int\limits_{0} 1x^2\,dx = \tfrac{1}{2} - x^3/3\Big|_{1}^{0} = \frac{1}{6}.$$

$$P(A) = \frac{1/6}{32/3} = \frac{1}{64} \approx 0{,}016. \ \blacktriangleright$$

Ответ: $P(A) = \dfrac{1}{64} \approx 0{,}016$.

Пример 11.3. *Рабочий обслуживает три станка. Вероятность брака для первого станка равна — 0,03, для второго — 0,02, для третьего — 0,04. Производительность второго станка вдвое больше чем первого, а третьего вдвое меньше чем первого. Изготовленные детали попадают на общий конвейер. Определить вероятность, что а) наудачу взятая деталь будет годной; б) наудачу взятая деталь оказалась бракованной, какова вероятность, что она изготовлена на третьем станке.*

а) ◀ Это классическая задача на формулу полной вероятности. Обозначим буквой A событие состоящее в том, что наудачу взятая деталь будет годной, а H_i — несовместные и образующие полную группу события состоящие в том, что наудачу взятая с конвейера деталь изготовлена на i-том станке. Обозначим за x количество деталей выпущенных за определённое время третьим станком. Тогда первый и второй станки за это же время выпустят $2x$

и $4x$, соответственно. Следовательно, $P(H_1) = \dfrac{2x}{2x+4x+x} = \dfrac{2}{7}$. Аналогично $P(H_2) = \dfrac{4}{7}$ и $P(H_3) = \dfrac{1}{7}$.

Вероятность того, что деталь будет стандартная, при условии что она изготовлена на первом станке будет равна $1 - 0{,}03 = 0{,}97$. Это запишем в виде: $P(A/H_1) = 0{,}97$. Аналогично $P(A/H_2) = 0{,}98$ и $P(A/H_3) = 0{,}96$.

Применяя формулу полной вероятности (6.1) для случая трёх гипотез, получаем

$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) =$

$= \dfrac{1}{7}(2 \cdot 0{,}97 + 4 \cdot 0{,}98 + 1 \cdot 0{,}96) \approx 0{,}974$. ►

б) ◄ Это классическая задача на формулу Байеса.

Пусть событием B будет событие состоящее в том, что наудачу взятая деталь будет бракованной. Это событие будет противоположным событию A. Поэтому $P(B) = 1 - P(A) \approx 0{,}026$.

Применяем формулу Байеса (6.2) для определения условной вероятности происхождения гипотезы H_3, при условии, что событие B произошло.

$P(H_3/B) = \dfrac{P(H_3)P(B/H_3)}{P(B)} = \dfrac{1/7 \cdot 0{,}04}{0{,}026} \approx \mathbf{0{,}219}$.►

Ответ: **а)** $\approx 0{,}974$; **б)** $\approx 0{,}219$.

Пример 11.4. *Найти вероятность отказа схемы, рис. 29, если надёжности элементов* $p(A1) = 0{,}5$, $p(A2) = 0{,}7$, $p(A3) = 0{,}9$.

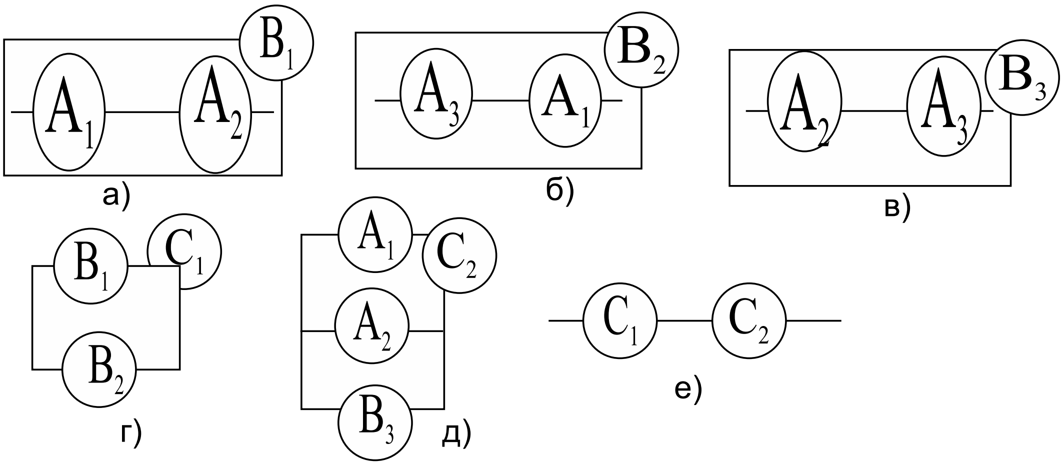

Рисунок 30. *К примеру 11.4*

◄ Событие состоящее в том, что схема работает безотказно в течении времени T обозначим A. Вероятность такого события A называется надёжностью схемы. Обозначим надёжности элементов

$P(A_1) = p_1 = 0{,}5, P(A_2) = p_2 = 0{,}7,\ P(A_3) = p_3 = 0{,}9.$

Тогда вероятности отказа элементов $q_i = 1 - p_i$ будут равны
$P(\overline{A_1}) = q_1 = 0{,}5$, $P(\overline{A_2}) = q_2 = 0{,}3$, $P(\overline{A_3}) = q_3 = 0{,}1$.

Выделим из исследуемой схемы три участка, состоящие из двух последовательно соединённых элементов. Это блоки B_1 рис. 30, а), B_2, рис. 30, б) и B_3, рис. 30, в). Найдём их надёжность . Последовательный блок работоспособен, если все элементы исправны. Так как элементы выходят из строя независимо, получаем:
$P(B_1) = P(A_1) \cdot P(A_2) = p_1 \cdot p2 = 0{,}5 \cdot 0{,}7 = \mathbf{0{,}35}$.
Аналогично, $P(B_2) = P(A_1) \cdot P(A_3) = p_1 \cdot p_3 = 0{,}5 \cdot 0{,}9 = \mathbf{0{,}45}$.
$P(B_3) = P(A_2) \cdot P(A_3) = p_2 \cdot p_3 = 0{,}7 \cdot 0{,}9 = \mathbf{0{,}63}$.

Найдём надёжность двух параллельных блоков C_1 и C_2, рис. 30, г) и д). При параллельном соединении элементов схема работоспособна, когда работает хотя бы один элемент. Для определения надёжности параллельного блока находим сначала вероятность противоположного события — вероятность того, что блок вышел из строя, т.е. что все элементы неработоспособны, а затем применяем формулу для противоположного события.
$P(C_1) = 1 - P(\overline{B_1}) \cdot P(\overline{B_2}) = 1 - \Big(1 - P(B_1)) \cdot (1 - P(B_2)\Big) =$
$= 1 - 0{,}65 \cdot 0{,}55 = \mathbf{0{,}6425}$.
$P(C_2) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{B_3}) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot (1 - P(B_3)) =$
$= 1 - 0{,}5 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}37 = \mathbf{0{,}9445}$.

Наконец, вычисляем надёжность схемы состоящей из двух последовательно соединённых подсхем D_1 и D_2, рис. 30, е). Используя теорему о произведении вероятностей для несовместных событий, получаем надёжность исследуемой схемы
$P(A) = P(C_1) \cdot P(C_2) = 0{,}6425 \cdot 0{,}9445 = 0{,}60684125$.

Находим вероятность отказа схемы:
$$P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A}) = \mathbf{0{,}39315875}. \ \blacktriangleright$$

Ответ: $\boxed{0{,}39315875 \approx 0{,}393}$.

Пример 11.5. *Найти вероятность того, что при 12 бросках кости шестёрка выпадет: а) 2 раза, б) не менее 3 раз.*

◀ В данном задании выполняются 12 повторных испытаний, т.е. независимых испытаний в каждом из которых вероятность выпадения шестёрки постоянна и равна $p = 1/6$. Вероятность невыпадения шестёрки равна $q = 5/6$.

а) Применяем формулу Бернулли (7.1) $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$.
$$P_{12}(2) = C_{12}^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{10} = \frac{12!}{2! \cdot 10!} \cdot \frac{5^{10}}{6^{12}} = \frac{11 \cdot 5^{10}}{6^{11}} \approx \mathbf{0{,}29609}.$$

б) Искомое A событие можно представить в виде суммы 9 независимых событий: $A = A_3 + A_4 + \cdots + A_{12}$, где A_i — события состоящие в том, что шестёрка выпадает i раз. Очевидно, что проще найти вероятность противоположного события $\overline{A} = A_0 + A_1 + A_2$, а затем использовать формулу $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2)$. Последнюю вероятность мы уже нашли, $P(A_2) = P_{12}(2) \approx 0{,}29609$.

$$P_{12}(0) = C_{12}^0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^{12} \approx 0{,}11216.$$

$$P_{12}(1) = C_{12}^1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^{11} \approx 0{,}26918.$$

$P(A) \approx 1 - (0{,}11216 + 0{,}26918 + 0{,}29609) \approx \mathbf{0{,}322}$. ►

Ответ: $\boxed{\text{а) } \approx 0{,}296; \quad \text{б) } \approx 0{,}322.}$

Замечание 11.1. *В некоторых вариантах контрольной работы число испытаний достаточно велико, поэтому необходимо применять либо формулу Пуассона (8.4), когда np близко к 0 или 1, либо локальную или интегральную теоремы Муавра-Лапласа (8.9) для других случаев. Для тренировки разберите решения примеров (8.1 — 8.5).*

Пример 11.6. *Из урны, в которой 15 белых и 5 чёрных шаров, вынимают подряд все находящиеся в нём шары. Найти вероятность того, что третьим по порядку будет вынут белый шар.*

◄ Искомое случайное событие произойдет, когда будут вынуты первые два любых шара, а третий обязательно белый шар. Это событие можно записать в виде четырёх событий:

$A = A_ч A_ч A_б + A_ч A_б A_б + A_б A_ч A_б + A_б A_б A_б$.

Эти четыре события независимы, поэтому можно применить теорему о сумме несовместных событий, а для каждого из четырёх слагаемых применяем теорему произведения уже совместных событий:

$P(ABC) = P(A)P(B/A)P(C/AB)$:

$$P(A) = P(A_ч A_ч A_б) + P(A_ч A_б A_б) + P(A_б A_ч A_б) + P(A_б A_б A_б) =$$
$$= \frac{5}{20}\cdot\frac{4}{19}\cdot\frac{15}{18} + \frac{5}{20}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{14}{18} + \frac{15}{20}\cdot\frac{5}{19}\cdot\frac{14}{18} + \frac{15}{20}\cdot\frac{14}{19}\cdot\frac{13}{18} =$$
$$= \frac{15\cdot(5(4+14+14)+14\cdot 13)}{20\cdot 19\cdot 18} = \frac{15\cdot 342}{20\cdot 19\cdot 18} = \frac{3}{4}.$$

Задачу можно было решить проще, используя свойство событий:

$$A = A_ч A_ч A_б + A_ч A_б A_б + A_б A_ч A_б + A_б A_б A_б =$$
$$= (A_ч A_ч + A_ч A_б + A_б A_ч + A_б A_б)A_б = \Omega A_б = A_б.$$

$$P(A_б) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}.$$ ►

Ответ: $\boxed{0{,}75.}$

Пример 11.7. *В урне 2 белых и 4 черных шара. Два игрока поочередно извлекают шар (без возвращения). Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар. Найдите вероятность выигрыша каждым игроком.*

◀ Возможные исходы данного опыта заканчиваются вытаскиванием белого шара — событие $A_б$:
$A_б,\ A_ч A_б,\ A_ч A_ч A_б,\ A_ч A_ч A_ч A_ч A_б,\ A_ч A_ч A_ч A_ч A_б.$

Исходы в которых выиграет первый участник (событие A_1):
$A_1 = A_б + A_ч A_ч A_б + A_ч A_ч A_ч A_ч A_б.$

Исходы в которых выиграет второй участник (событие A_2):
$A_2 = A_ч A_б + A_ч A_ч A_ч A_б.$

Найдём вероятности этих событий.

$$P(A_1) = \frac{2}{6} + \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} + \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} = \frac{3}{5}.$$

$$P(A_2) = \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5} + \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{15} + \frac{2}{15} = \frac{2}{5}.\ ▶$$

Ответ: $\boxed{P(A_1) = 0{,}6;\ P(A_2) = 0,4.}$

Пример 11.8. *На окружность радиуса R наугад ставится три точки A, B, C. Какова вероятность, что треугольник ABC остроугольный.*

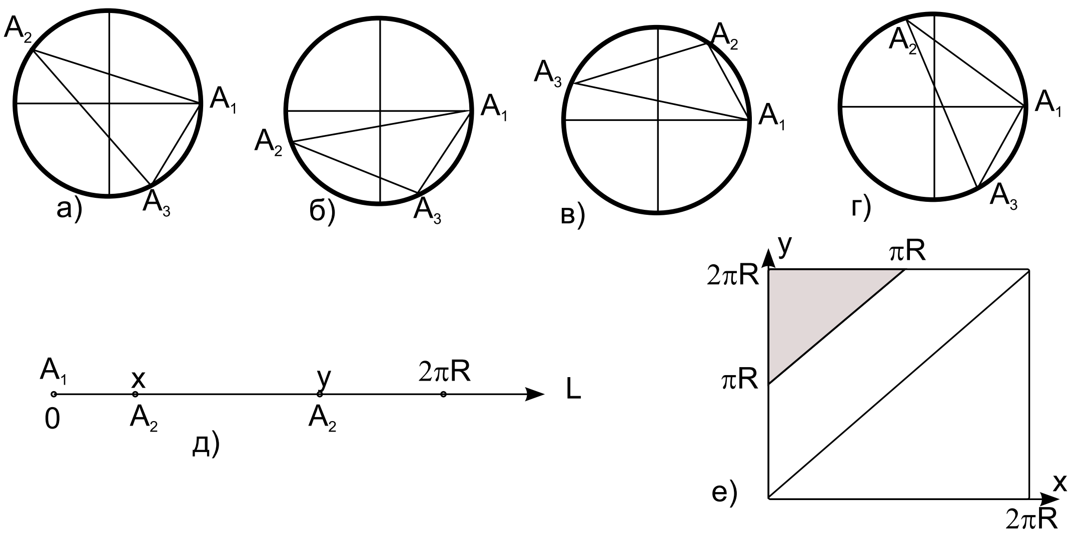

Рисунок 31. *К примеру 11.8*

◀ Переименуем эти точки по следующему правилу. Обозначим точку A — A_1. Точка которая находится следующей за точкой A при движении против часовой стрелке обозначив — A_2 и третью точку — A_3. Можно изобразить окружность и точки на рисунке, поместив точку A_1 на ось ординат. Чтобы треугольник был остроугольным, необходимо чтобы центр окружности был внутри треугольника, рис. 31 а). Очевидно, что точка A_2 не может находится в третьем или четвертом квадрантах, т.к. в этом случае угол $A_2A_3A_1$ будет тупым, рис. 31 б). Аналогична и точка A_3 не может находиться в верхней полуплоскости, т.к. в этом случае угол $A_1A_2A_3$ будет тупым, рис. 31 в). Чтобы угол $A_3A_1A_2$ был острым, надо чтобы разность полярных углов точек A_2 и A_1 было меньше π, рис. 31 г).

Для наглядности разрежем окружность в точке A_1 и развернём её в отрезок длины $2\pi R$, рис. 31 д). Введем одномерную систему координат с началом в точке A_1. Обозначим координаты точки A_1 переменной x, а A_2 — y. Получаем систему неравенств: $0 < x < \pi R, \quad \pi R < y < 2\pi R$, $y - x < \pi R$. Последнее неравенство запишем в виде: $y < \pi x$. Изобразим на плоскости Oxy решение данной системы неравенств, рис. 31 е).

$$P(A) = \frac{S_\triangle}{S_\square} = \frac{0{,}5 \cdot (\pi r)^2}{(2\pi R)^2} = \frac{1}{8}. \quad \blacktriangleright$$

Ответ: $\boxed{P(A) = 0{,}125.}$