ТВиМС. Практическое занятие №8

8. Локальная и интегральная теоремы Лапласа

Рассмотрим задачи с применением локальной и интегральной теорем Лапласа.

Вычисления по формуле Бернулли при больших n громоздки и требуют применение вычислительной техники и правильных алгоритмов нахождения результата. Локальная теорема Лапласа даёт асимптотическую формулу, позволяющую приближённо найти вероятность появления события ровно m раз в n испытаниях, если n достаточно велико.

8.1. Локальная теорема Муавра-Лапласа

Теорема 8.1 (Локальная теорема Муавра-Лапласа). *Если вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(m)$ того, что событие A появиться m раз в n испытаниях, приближённо равна (при $n \to \infty$, $p \not\approx 0,\ p \not\approx 1$):*

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\, f\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right), \quad \text{где } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{8.1}$$

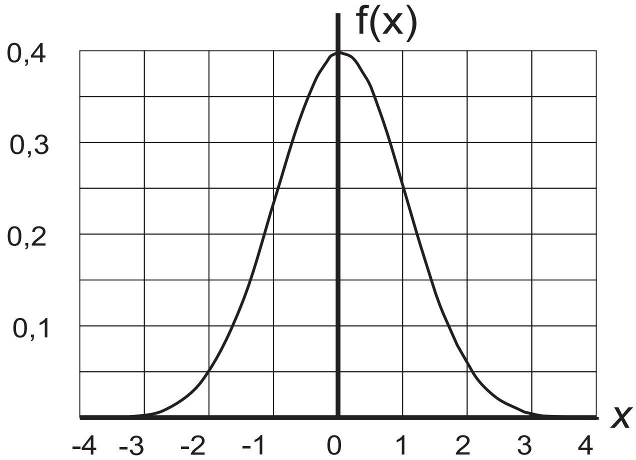

Рисунок 24. *Функция* $f(x)$

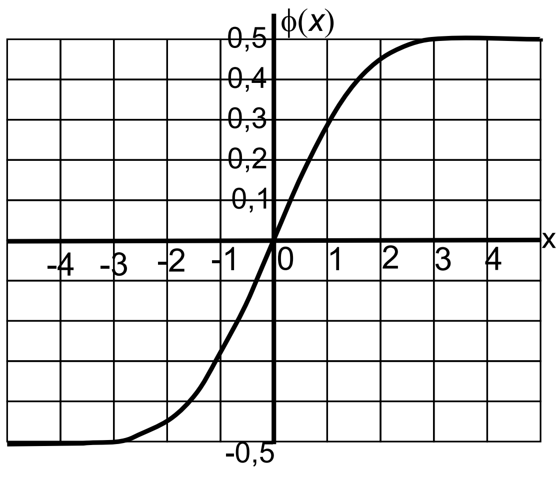

Рисунок 25. *Функция* $\Phi(x)$

Значение функции $f(x)$ можно найти в таблице приложение 1, или вычислить на калькуляторе. В Excel эта функция встроена и для её вызова надо написать =НОРМ.СТ.РАСП(x;0). На рис. 24 представлен график функции

$f(x)$. Из графика видно, что значения функции вне области $|x| < 3$ практически равны нулю. Например, $f(\pm 3) \approx 0{,}0044$, $f(\pm 4) \approx 0{,}0001$. Функция является чётной, максимальное значение функции равно $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}399$. Следовательно, максимальное значение вероятности достигается при $m = m^* = np$ и равно $P_n(m^*) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi npq}}$. Найдём значения m при котором вероятности $P_n(m)$ значимы. Решаем неравенство

$$\left|\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right| < 3 \;\Rightarrow -3\sqrt{npq} < m - np < 3\sqrt{npq} \;\Rightarrow$$
$$m \in (np - 3\sqrt{npq};\, np + 3\sqrt{npq}).$$

8.2. Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Для вычисления суммарной («интегральной») вероятности того, что число появлений события A находится в заданных пределах при больших n также используется асимптотическая формула, позволяющая вычислять эту вероятность приближённо.

Для пользования этой формулой познакомимся с функцией Лапласа.

Определение 8.1. *Функцией Лапласа $\Phi(x)$ называется:*

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \tag{8.2}$$

График функции Лапласа представлен на рис. 25. Функция является возрастающей, при этом $|\Phi(x)| < 0{,}5$, $\forall x \in (-\infty;\, \infty)$.

В Excel для вызова этой функции надо ввести команду:
=НОРМ.СТ.РАСП(x,1)-0,5.

Теорема 8.2 (`Интегральная теорема Лапласа`). *Если вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2)$ того, что событие A появится не менее m_1, но не более m_2 раз в n испытаниях приближённо равна (при $n \to \infty$, $p \not\approx 0$, $p \not\approx 1$):*

$$P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \tag{8.3}$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — *функция Лапласа.*

Пример 8.1. *Предприятие за смену выпускает 120 изделий. Вероятность того, что выпущенное изделие будет отнесено к высшему сорту, равна* 0,56*. Чему равна вероятность того, что среди выпущенных за смену изделий* 67 *окажется высшего сорта?*

◀ В данной задаче $n = 120$, $p = 0{,}56$.

Следовательно, $q = 0{,}44$, $m = 67$, $npq = 29{,}568$.

Применим локальную теорему Лапласа (8.9). Найдём аргумент функции $\varphi(x)$

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{67 - 120 \cdot 0{,}56}{\sqrt{29{,}568}} \approx -0{,}04.$$

Используя таблицу, приложение 1, или используя калькулятор, находим значение функции $\varphi(x)$ $f(-0{,}04) = f(0{,}04) \approx 0{,}3986$.

Подставляем полученные значения в формулу (8.9)

$$P_{120}(67) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} \approx \frac{0{,}3986}{\sqrt{29{,}568}} \approx \mathbf{0{,}073}.$$

Нетрудно убедиться в том, что наивероятнейшее число здесь $m^* = 67$, однако вероятность появления m^*, как видим, сравнительно мала ($\approx 0{,}07$). Это объясняется тем, что значения вероятности распределены от $m = 0$ до $m = 120$.

Maxima-программа:

```
numer:true$
L_Lapl(m, n, p):=(y:1/sqrt(n*p*(1-p)), y/sqrt(2*%pi)* exp(-0.5*((m-n*p)*y)^2));
L_Lapl(67,120,0.56);
(%o3) 0.0733
```

Ответ: $\boxed{P_{120}(67) \approx 0{,}073.}$ ▶

Пример 8.2. *В цехе работают* 150 *автоматических станков. Вероятность того, что любой станок в течение смены сломается одинакова для всех станков и равна* 0,2. *Найти вероятности того, что: а) за смену* 35 *станков потребуют к себе внимания; б) от* 25 *до* 35 *станков потребуют к себе внимания.*

◀ а) В первом случае можно применить локальную теорему Лапласа, так как $n = 150$, $m = 35$, $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$ величина $npq = 24$. Найдём x по формуле (8.9)

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{35 - 150 \cdot 0{,}2}{\sqrt{24}} = \frac{5}{\sqrt{24}} \approx 1,02.$$

По таблице приложение 1, найдем $f(1{,}02) = 0{,}2371$ и, согласно (8.9), получим:

$$P_{150}(35) \approx 0{,}2371/\sqrt{24} \approx \mathbf{0{,}048}.$$

б) Во втором случае используем интегральную теорему (8.2). Здесь $m_1 = 25$, $m_2 = 35$,

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{25 - 30}{\sqrt{24}} \approx -1{,}02, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{35 - 30}{\sqrt{24}} \approx 1{,}02.$$

Применяя формулу (8.3) и таблицу для функции Лапласа, приложение 2, найдем искомую вероятность

$P_{150}(25 \leqslant m \leqslant 35) \approx \Phi(1{,}02) - \Phi(-1,02) = 2\Phi(1{,}02) \approx 2 \cdot 0{,}346 = \mathbf{0{,}692}$. ◀

Maxima-программа:

```
numer:true$ fpprintprec:4$ n:150$   p:0.2$   m1:25$   m2:35$
load(distrib)$
pdf_binomial(35,n,p);
(%o7) 0.067
c:1/sqrt(n*p*(1 — p)); x1:(m1—n*p)*c; x2:(m2 — n*p)*c;
(%o9) –1.021
(%o10) 1.021
/* Результаты по интегральной теореме Лапласа.*/
PL:cdf_normal(x2, 0, 1) — cdf_normal(x1, 0, 1);
(%o11) 0.693
```

Результаты по интегральной теореме Лапласа дают несколько заниженные значения.

Ответ: $\boxed{P_{150}(35) \approx 0{,}048;\ P_{150}(25 \leqslant m \leqslant 35) \approx 0{,}739.}$ ▶

Пример 8.3. *Доля изделий продукции завода высшего качества составляет* 40%. *Найти вероятности того, что из отобранных 300 изделий окажется высшего качества: а) от* 110 *до* 140 *изделий, б) не менее* 110 *изделий, в) не более* 109 *изделий.*

◀ Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа.
Здесь $n = 300$, $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$, $np = 120$.

а) Найдем аргументы функции Лапласа при $m_1 = 110$ и $m_2 = 140$:

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{110 - 300 \cdot 0{,}4}{\sqrt{72}} = -\frac{5}{3\sqrt{2}} \approx -1{,}18,$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{140 - 300 \cdot 0{,}4}{\sqrt{72}} = \frac{10}{3\sqrt{2}} \approx 2{,}36.$$

Тогда

$$P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 140) \approx \Phi(2{,}36) - \Phi(-1,18) \approx 0{,}491 + 0{,}381 = \mathbf{0{,}872}.$$

Эта вероятность оказалась довольно высокой вследствие того, что были просуммированы вероятности вблизи наивероятнейшего числа $m^* = 120$.

б) В этой части задачи нужно положить $m_1 = 110$, а $m_2 = 300$. Значение x_1 было найдено в пункте а, другой параметр

$$x_2 = \frac{300 - 120}{\sqrt{72}} = \frac{180}{6\sqrt{2}} \approx 21{,}21.$$

Используя нечетность функции Лапласа, находим соответствующую вероятность,

$$P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 300) \approx \Phi(21{,}21) - \Phi(-1{,}18) \approx 0{,}5 + 0{,}381 = \mathbf{0{,}881}.$$

в) Так как сумма вероятностей

$$P_{300}(0 \leqslant m \leqslant 109) \quad \text{и} \quad P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 300)$$

равна 1, то

$P_{300}(0 \leqslant m \leqslant 109) = 1 - P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 300) \approx 1 - 0{,}881 = \mathbf{0{,}119}$. ▶

Ответ: $P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 140) \approx 0{,}872$; $P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 300) \approx 0{,}881$; $P_{300}(0 \leqslant m \leqslant 109) \approx 0{,}119$.

Для случая, когда n велико и p мало (меньше 0,1), выражение (8.3) даёт плохую оценку. В этом случае пользуются асимптотической формулой Пуассона.

8.3. Формула Пуассона

Если вероятность p появления события A в испытании Бернулли близка к 0 или 1 , то теоремы 8.1 и 8.2 неприменимы. В этом случае следует пользоваться приближённой формулой Пуассона для вычисления $P_n(m)$ при больших n.

Теорема 8.3. *Если вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и близка к нулю, а n велико, то вероятность $P_n(m)$ того, что событие A появится m раз в n испытаниях приближённо равна (при $n \to \infty,\ p \to 0,\ np \to a$):*

$$P_n(m) \approx \frac{(np)^m}{m!} e^{-np}. \tag{8.4}$$

Замечание 8.1. *Случай, когда $p \approx 1$, сводится к рассмотренному, если вместо $P_n(m)$ вычислять равную ей вероятность $P_n(n-m)$ появления $n-m$ раз противоположного события $\overline{A}$, вероятность появления которого в одном испытании $q = 1 - p \approx 0$.*

Пример 8.4. *Вероятность того, что взятый наудачу с полки магазина компьютер неисправен, равна 0,003. В магазине находятся 200 компьютеров. Найти вероятности того, что в магазине три компьютера неисправны.*

◀ Поскольку $n = 200, m = 3,\ p = 0{,}003 \ \Rightarrow\ np = 0{,}6$, поэтому можно применить формулу Пуассона (8.4).

$$P_{200}(3) = \frac{0{,}6^3 \cdot e^{-0{,}6}}{3!} \approx \mathbf{0{,}019}. \ ▶$$

Ответ: $\boxed{P_{200}(3) \approx 0{,}019.}$

Пример 8.5. *Вероятность остановки автобуса из-за поломки в течение смены равна* 0,004. *Найти вероятности того, что в течение смены из* 1000 *машин, вышедших на линии, остановятся: а) две машины, б) пять машин, в) ни одна не остановится; г) менее пяти; д) более пяти.*

◀В данном случае $n = 1000$, $p = 0{,}004$, $np = 4$, поэтому можно применить формулу Пуассона (8.4).

а) Здесь $m = 2$ и

$$P_{1000}(2) = \frac{4^2 \cdot e^{-4}}{2!} = \frac{8}{e^4} \approx \mathbf{0{,}147}.$$

б) Так как $m = 5$, то

$$P_{1000}(5) = \frac{4^5 \cdot e^{-4}}{5!} \approx \frac{128}{15 \cdot 54{,}6} \approx \mathbf{0{,}156}.$$

в) При $m = 0$

$$P_{1000}(0) = \frac{1}{e^4} \approx \frac{1}{54{,}6} \approx \mathbf{0{,}018}.$$

г) $m < 5$

$$P_{1000}(m < 5) = P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2) + P_{1000}(3) + P_{1000}(4) =$$
$$= \frac{1}{e^4}\left(1 + \frac{4}{1} + \frac{4^2}{2} + \frac{4^3}{6} + \frac{4^4}{24}\right) \approx \mathbf{0{,}629}.$$

д) $m > 5$

$$P_{1000}(m > 5) = 1 - P_{1000}(m < 6) = 1 - (P_{1000}(m < 5) + P_{1000}(5) \approx \mathbf{0{,}215}.$$ ▶

Ответ: $P_{1000}(2) \approx 0{,}147$; $P_{1000}(5) \approx 0{,}156$; $P_{1000}(0) \approx 0{,}018$; $P_{1000}(m < 5) \approx 0{,}629$; $P_{1000}(m > 5) \approx 0{,}215$.

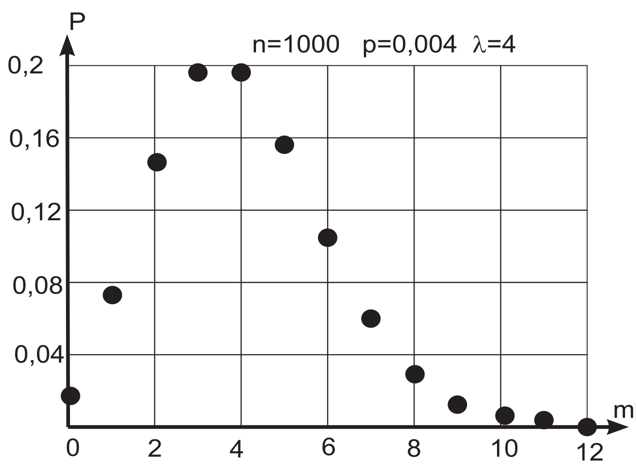

Рисунок 26. *К примеру 8.5*

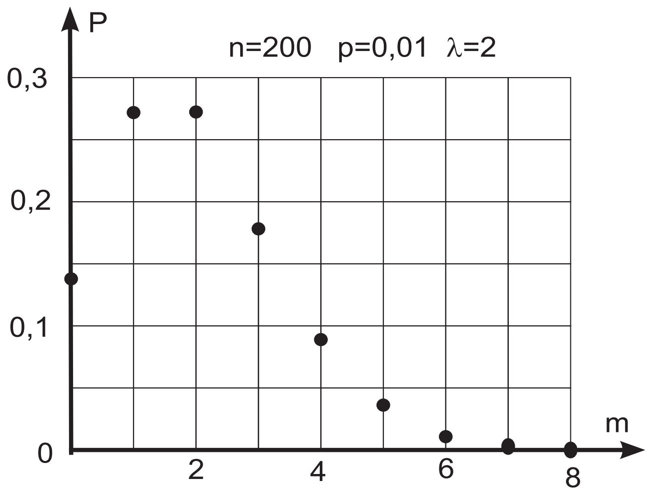

Рисунок 27. *К примеру 8.6*

Представим геометрическое изображение зависимости $P_n(m)$ примера 8.5, рис. 26.

```
kill(all)$ fpprintprec:4$
n:1000$ p:0.004$ L:n*p;  array(P,n)$
fillarray(P, makelist(L^k/k!*exp(-L), k, 0 ,12))$
G:makelist([k,P[k]], k, 0, 12);
plot2d([discrete,G], [x,0,12],[style,points],
[gnuplot_postamble, "set grid;"],[title, "n=1000 p=0.004"])$
```

Пример 8.6. *Продукция некоторого производства содержит 1% бракованных изделий. Найти вероятность того, что среди 200 изделий окажется бракованных: а) ровно три, б) менее трёх, в) более трёх, г) хотя бы одно.*

◀ Так как $n = 200$, $p = 0{,}01$, $np = 2$. Следовательно можно применить формулу Пуассона (8.4)

а) Вероятность того, что три ($m = 3$) изделия будут бракованными,

$$P_{200}(3) = \frac{2^3 \cdot e^{-2}}{3!} \approx \mathbf{0{,}180}.$$

б) Вероятность того, что менее трёх ($m < 3$) изделий будут бракованными, найдется как сумма

$$P_{200}(m < 3) = P_{200}(0) + P_{200}(1) + P_{200}(2) = \frac{2^0 \cdot e^{-2}}{0!} + \frac{2^1 \cdot e^{-2}}{1!} + \\ + \frac{2^2 \cdot e^{-2}}{2!} = e^{-2}(1 + 2 + 2) \approx \mathbf{0{,}677}.$$

в) Поскольку сумма

$$\sum_{m=0}^{200} P_{200}(m) = 1,$$

то вероятность наличия более трёх ($m > 3$) бракованных изделий

$$P_{200}(m > 3) = 1 - \sum_{m=0}^{3} P_{200}(m) \approx 1 - (0{,}677 + 0{,}180) = \mathbf{0{,}143}.$$

г) События «хотя бы одно изделие бракованное» и «ни одно изделие небракованное» противоположные, поэтому искомая вероятность

$$P = 1 - P_{200}(0) = 1 - e^{-2} \approx \mathbf{0{,}865}.$$

Представим геометрическое изображение зависимости $P_n(m)$ примера 8.6, рис. 27. ▶

Ответ: $\boxed{P_{200}(3) \approx 0{,}180;\ P_{200}(m < 3) \approx 0{,}677;\ P_{200}(m > 3) \approx 0{,}143.}$

Если в условиях применимости интегральной теоремы Лапласа требуется оценить отклонение относительной частоты появления события от соответствующей вероятности, то используют приближённую формулу (8.5).

8.4. Отклонение частоты от вероятности

Пусть проводятся испытания Бернулли с постоянной вероятностью p появления события A в каждом из них; событие A появилось m раз в n испытаниях. Найдем вероятность того, что отклонение относительной частоты $\dfrac{m}{n}$ от вероятности p по абсолютной величине не превышает заданного числа ε.

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right| \leqslant \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \tag{8.5}$$

Пример 8.7. *Вероятность появления события в каждом из* 800 *независимых испытаний равна* 0,6. *Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на* 0,03.

◀ Здесь $n = 800$, $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$, $\varepsilon = 0{,}03$. Нужно найти вероятность

$$P\left(\left|\frac{m}{800}-0{,}6\right| \leqslant 0{,}03\right).$$

По формуле (8.5) эта вероятность равна

$$2\cdot\Phi\left(0{,}03\cdot\sqrt{\frac{800}{0{,}6\cdot 0{,}4}}\right) \approx 2\cdot\Phi(1{,}73).$$

По таблицам найдем $\Phi(1{,}73) \approx 0{,}4582$. Следовательно, искомая вероятность равна $2\cdot 0{,}4582 =$ **0,9164**. ▶

Ответ: $\boxed{\approx 0{,}916.}$

Пример 8.8. *Вероятность появления события в каждом испытании равна* 0,2. *Сколько нужно провести испытаний, чтобы вероятность отклонения относительной частоты от вероятности этого события менее, чем* 0,05 *по абсолютной величине, была равно* 0,95*?*

◀ Применяем формулу (8.5) $P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\leqslant\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$.
Здесь $p=0{,}2,\ q=1-p=0{,}8,\ \varepsilon=0{,}05$. Левую часть уравнения приравниваем к 0,95. Получаем уравнение

$$0{,}95=2\Phi\left(0{,}05\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{0{,}16}}\right).$$

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{8}\right)=0{,}475.$$

Из таблицы для функции Лапласа находим значение аргумента, при котором функция равна 0,475. Получаем

$$\frac{\sqrt{n}}{8}=1{,}96 \quad\Rightarrow\quad n=(8\cdot 1{,}96)^2=245{,}86 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{n=246}.$$ ▶

Ответ: $\boxed{n=246.}$

Пример 8.9. *В жилом доме имеется 1200 ламп, вероятность включения каждой из них в вечернее время равна 0,25.*
1) Найти вероятность того, что число одновременно включенных ламп будет между 275 и 350.
2) Найти вероятность того, что относительная частота включенных лампочек будет отклоняться от вероятности менее чем на 0,01.
3) Найти наивероятнейшее число включенных лампочек m^* и значение вероятности $P_{1200}(m^*)$.

◀ 1) Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа (8.3)
$$P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right).$$
Здесь $n = 1200$, $m1 = 275$, $m2 = 350$, $p = 0{,}25$, $q = 0{,}75$. $\Rightarrow$
$np = 300$, $\sqrt{npq} = \sqrt{1200 \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{3}{4}} = \sqrt{225} = 15$.

Получаем
$$P_{1200}(275 \leqslant m \leqslant 350) \approx \Phi\left(\frac{50}{15}\right) - \Phi\left(\frac{-25}{15}\right) =$$
$= \Phi(3{,}33) + \Phi(1{,}67) \approx 0{,}49 + 0{,}4525 = \mathbf{0{,}9425}$.

2) Применяем формулу (8.5) $P\left(\left|\dfrac{m}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\dfrac{n}{pq}}\right)$.
$$P\left(\left|\frac{m}{1200} - 0{,}25\right| \leqslant 0{,}01\right) \approx 2\Phi\left(0{,}01 \cdot \sqrt{\frac{1200}{0{,}75 \cdot 0{,}25}}\right) =$$
$= 2\Phi\,(0{,}01 \cdot 80) = 2\Phi(0{,}8) = 2 \cdot 0{,}2881 = \mathbf{0{,}576}$.

3) Применяем формулу для наивероятнейшего числа (7.3)
$(n+1)p - 1 \leqslant m^* \leqslant (n+1)p$.

Эту формулу можно записать в виде $np - q \leqslant m^* \leqslant np + p$.

Получаем, $299{,}25 \leqslant m^* \leqslant 300{,}25 \ \Rightarrow m^* = 300$.

Применим локальную теорему Муавра-Лапласа. Находим искомую вероятность по формуле (8.9):
$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\, f\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right), \quad \text{где } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{x^2}{2}}.$$
Получаем
$$P_{1200}(300) \approx \frac{1}{15} f(0) = \frac{0{,}3989}{15} \approx \mathbf{0{,}027}. \ ▶$$

Ответ: $\boxed{1)\ \approx 0{,}9425;\ 2)\ \approx 0{,}576;\ 3)\ \approx 0{,}027.}$

Задания для самостоятельной работы

8.1. Брак выпускаемых цехом деталей составляет 6%. Определить наиболее вероятное число $m*$ годных деталей в партии из 500 штук и найти вероятность того, что в этой партии будет $m*$ бракованных деталей.

Ответ m*=30, P=0,073.

8.2. Предприятие выпускает 10% изделий второго сорта. Найти вероятность того, что из 200 выбранных случайным образом изделий, будет 15 изделий второго сорта.

Ответ: 0,05.

8.3. Вероятность того, что деталь не прошла проверку, равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей непроверенными окажутся от 70 до 90.

Ответ: 0,7888

8.4. Вероятность, что изделие фабрики будет отличного качества, равна 0,75. Найти вероятность того, что из 100 изделий фабрики отличного качества будет: а) не менее 71 и не более 80 изделий, б) не менее 71 изделий, в) не более 70 изделий.

8.5. Вероятность брака при производстве деталей равна 0,001. Найти вероятности того, что в партии из 5000 деталей окажется: а) две бракованные детали, б) не менее двух бракованных деталей.

8.6. В институте 2500 студентов. Вероятность того, что один студент заболеет в течение недели, равна 0,002. Найти вероятность того, что в течение недели заболеет менее четырёх студентов.

8.7. Отдел технического контроля проверяет 625 изделий на брак. Вероятность того, что изделие бракованное, равна 0,02. Найти с вероятностью 0,95 границы, в которых будет заключено число m бракованных изделий среди проверенных.

8.8. Вероятность того, что диаметр вала меньше допустимого, больше допустимого и в допустимых пределах, равны соответственно 0,05; 0,08; 0,87. Из общей партии берутся для проверки 100 валов. Определить вероятность того, что среди них будет два вала с меньшим диаметром и один вал с большим диаметром.

8.9. Вероятность изготовления подшипникового шарика ниже третьего класса равна 0,0002. а) Определить вероятность того, что в партии из 400 шариков содержится хотя бы один ниже третьего класса. б) Какой должен быть объём партии, чтобы вероятность наличия в ней хотя бы одного бракованного шарика была не более $p_1 = 0{,}03$?