ТВиМС. Практическое занятие №4

4. Задачи на геометрическое определение вероятности

Пусть задано некоторое измеримое множество Ω, такое, что его мера $\mu(\Omega) > 0$. Все точки этого множества $M \in \Omega$ и все измеримые подмножества множества Ω составляют множество событий $\mathcal{A}$, которое является σ-алгеброй. Предполагая, что вероятность попадания случайной точки в подобласть A, не зависит ни от ее формы, ни от ее расположения в области Ω, а пропорциональна его мере $\mu(A)$.

Определим вероятность события A, состоящего в попадании случайной точки в заданную область, как отношение мер областей:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}. \tag{4.1}$$

Формулу (4.1) можно применять для любого метрического пространства. В нашем компактном курсе мы будем рассматривать задачи, которые сводятся к одномерному, двумерному или трехмерному геометрическому пространству, изучаемому в курсе «линейная алгебра и аналитическая геометрия».

Определенная таким образом вероятность называется ***геометрической вероятностью***.

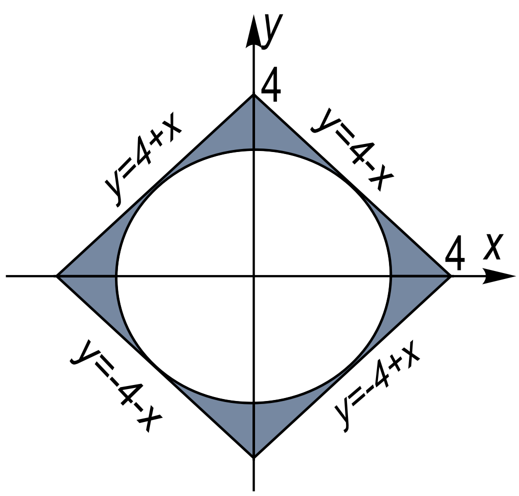

Рисунок 8. *К примеру 4.1*

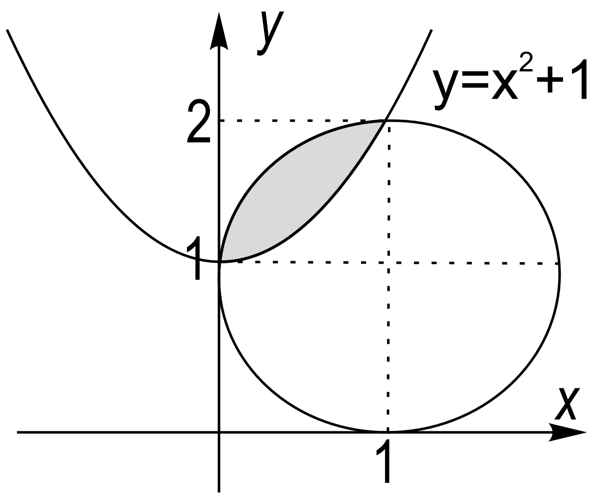

Рисунок 9. *К примеру 4.2*

Пример 4.1. *На комплексную плоскость в область* $|Imz| + |Rez| \leqslant 4$ *наудачу брошена точка. Найдите вероятность, что она попадёт внутрь области области* $|z| \geqslant 2\sqrt{2}$.

◀ Перейдём к действительным переменным. $z = x + i \cdot y$, $Rez = x$, $Imz = y$. Область Ω, на которую брошена точка, в действительных переменных имеет вид: $|x| + |y| \leqslant 4$.

Раскрываем модули

$$x = \begin{cases} \;\; x, \text{при } x \geqslant 0 \;\; \text{в I и IV четверти}, \\ -x, \;\; x < 0 \;\; \text{в II и III четверти}. \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} \;\; y, \;\text{при } y \geqslant 0 \;\; \text{в I и II четверти}, \\ -y, \;\; \text{при } y < 0 \;\; \text{в III и IV четверти}. \end{cases}$$

Получаем систему четырёх неравенств, соответствующих каждой четверти:

$$\begin{cases} y \leqslant 4 - x, \\ y \leqslant 4 + x, \\ y \geqslant -4 - x, \\ y \geqslant -4 + x. \end{cases}$$

На рис. 8 изображены границы области Ω. Сама область является квадратом со сторонами, равными $\sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$. Площадь её равна $S_\Omega = 32$.

Область, в которую должна попасть точка, представляет внешность круга радиуса $2\sqrt{2}$ с центром в начале координат. На рис. 8 данная область закрашена.

$$P(A) = \frac{32 - \pi(2\sqrt{2})^2}{32} = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0{,}215. \;\; ▶$$

Ответ: $\boxed{P(A) = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0{,}215.}$

Пример 4.2. *На комплексную плоскость в область $|z - i - 1| \leqslant 1$ наудачу брошена точка. Найдите вероятность, что она попадёт внутрь области $Imz - (Rez)^2 \geqslant 1$.*

◀Перейдём к действительным переменным. $z = x + i \cdot y$, $Rez = x$, $Imz = y$. Область Ω, на которую брошена точка, в действительных переменных представляет собой окружность радиуса 1 с центром в точке $M(1, 1)$.

$|(x-1) + i(y-1)| \leqslant 1 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \leqslant 1 \Rightarrow$

$(x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 1$.

Площадь области Ω равна $S_\Omega = \pi$.

Область G, в которую должна попасть точка, в действительных переменных задана уравнением: $y \geqslant 1 + x^2$. Это внутренняя часть параболы $y = 1 + x^2$. На рис. 9 данная область закрашена. Найдём её площадь. Для этого от площади четверти круга вычтем площадь криволинейной трапеции, которую вырезает парабола от четверти круга.

$$S_G = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 x^2 dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}.$$

$$P(A) = \frac{S_G}{S_\Omega} = \frac{\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{3}}{\pi} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3\cdot\pi} \approx 0{,}144. \blacktriangleright$$

Ответ: $\boxed{P(A) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3\,\pi} \approx 0{,}144.}$

Пример 4.3. *Случайным образом выбраны два положительных числа, не превышающих значение 5. Найти вероятность того,что сумма этих чисел будет больше 5, а сумма их квадратов меньше 25?*

◀ Используем геометрическое определение вероятности. Так как числа x и y берутся из интервала $(0, 5)$, можно считать, что случайным образом выбирается точка внутри квадрата $0 < x, y < 5$. При этом $x + y > 5$ и $x^2 + y^2 < 25$. Изобразим области на рис. 10.

Площадь квадрата, в котором выбирается точка, равна
$S_\Omega = 25$.

Область G, в которую должна попасть точка, задана системой неравенств:
$\begin{cases} y > 5 - x, \\ y < \sqrt{25 - x^2}, \\ x \in [0, 5]. \end{cases}$ На рис. 10, она выделена.

$S_G = \dfrac{\pi \cdot 5^2}{4} - 0{,}5 \cdot 5^2 = \dfrac{25(\pi - 2)}{4}$.

$P(A) = \dfrac{S_G}{\Omega} = \dfrac{25(\pi - 2)}{4}/25 = \dfrac{\pi - 2}{4} \approx 0{,}285.$ ▶

Ответ: $\boxed{P(A) = \dfrac{\pi - 2}{4} \approx 0{,}285.}$

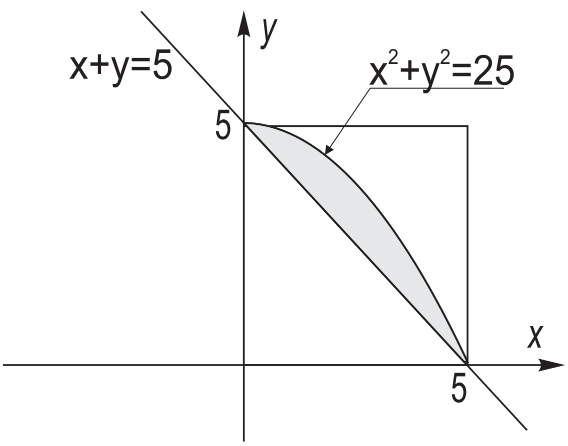

Рисунок 10. *К примеру 4.3*

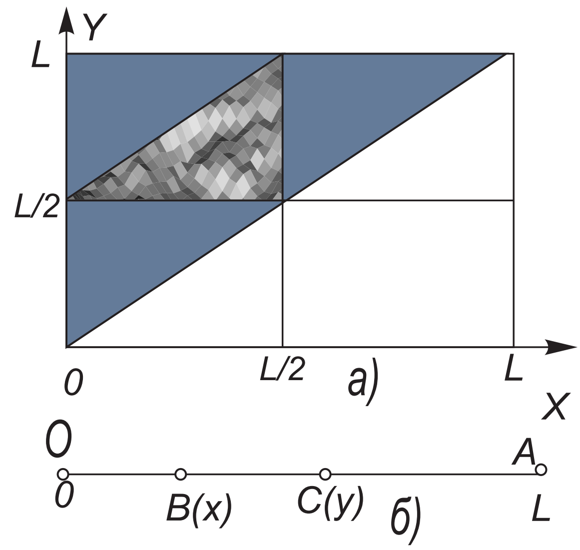

Рисунок 11. *К примеру 4.4*

Пример 4.4. *Одномерный стержень длины L случайным образом распилили на три части. Найдите вероятность того, что из этих частей можно составить треугольник.*

◀ На отрезке OA длины L, $|OA| = L$, (рис. 11б), введём две точки разлома стержня: $B(x)$ и $C(y)$. Пусть точка C находится правее точки, т.е. $x < y$. Тогда длины полученных отрезков будут равны: $x, y - x$ и $L - y$.

Из полученных отрезков можно составить треугольник, когда суммы двух отрезков больше длины третьего отрезка. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} x + (L - y) > (y - x), \\ x + (y - x) > (L - y), \\ (y - x) + (L - y) > x, \\ y > x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y < x + L/2, \\ y > L/2, \\ x < L/2, \\ y > x. \end{cases}$$

Площадь данной области равна $L^2/8$.

Закрашенная, (рис. 11а) область удовлетворяет всем неравенствам системы. При этом область Ω определяется системой неравенств: $y > x$, $0 < x < L$, $0 < y < L$. Это треугольник выше диагонали квадрата. Площадь его равна $L^2/2$.

$$P = \frac{L^2/8}{L^2/2} = \frac{1}{4} = \mathbf{0{,}25}. \ ▶$$

Ответ: $\boxed{P = 0{,}25.}$

Пример 4.5. *Сергей заказал в двух итернет-магазинах монитор и SSD диск. Позвонили оба курьера и сказали, что приедут с 10:00 до 11:00. Для приема монитора необходимо 20 минут, а SSD диска — 15 минут. Найти вероятность, что ни одному из курьеров не придётся ждать.*

◀ Пусть A — событие состоящее, в том, что ни одному из курьеров не придётся ждать. Введём две переменные: x — число минут, прошедших с 10 часов до прихода первого курьера с монитором; y — число минут, прошедших с 10 часов до прихода курьера с диском.

Пространство всех элементарных исходов, рис. 12

$$\Omega = \{(x,\ y)\, \big| (0 \leqslant x \leqslant 60,\ 0 \leqslant y \leqslant 60).$$

Если два курьера приходят одновременно тогда $x = y$.

Если первым приходит курьер с диском $x > y$ (точки ниже прямой $y = x$), то чтобы курьеры не встретились при передаче и оформлении покупки, должно выполняться условие $y < x - 15$. Множество элементарных исходов, соответствующих таким условиям — нижняя часть области G, рис. 12.

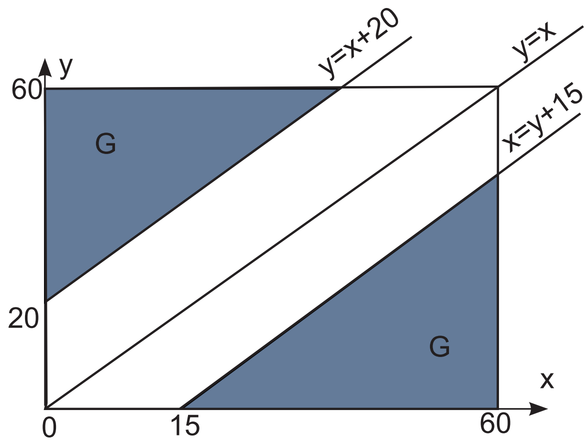

Рисунок 12. *К примеру 4.5*

Если первым приходит курьер с монитором $y > x$ (точки выше прямой $y = x$), то должно выполняться условие или $y > x + 20$. Множество элементарных исходов, соответствующих таким условиям — верхняя часть области G, рис. 12.

Событие A происходит когда точки лежат внутри закрашенной области G, рис. 12. Тогда вероятность искомого события A равна отношению площадей области G и квадрата, то есть

$$P(A) = \frac{45^2/2 + 40^2/2}{60^2} = \frac{145}{288} \approx 0{,}503 \quad \blacktriangleright$$

Ответ: $\boxed{\frac{145}{288} \approx 0{,}503.}$

Задания для самостоятельной работы

4.1. В прямоугольный параллелепипед, основанием которого является квадрат, вписан круговой конус. Найти вероятность того, что выбранная наудачу внутри параллелепипеда точка окажется внутри конуса.

4.2. Задуманы три положительные числа a, b и c, причём значения a и b не превышают c. Найти вероятность того, что эти числа удовлетворяют неравенствам $\frac{a^2}{c} \leqslant b \leqslant a$.

4.3. Отрезок имеет длину 100 сантиметров. Пусть G – случайно брошенная точка на этом отрезке. Найти вероятность того, что меньший из отрезков G и G имеет длину больше, чем 20 сантиметров.

4.4. В была брошена точка. Найти вероятность того, что брошенная точка оказалась вне области прямоугольного треугольника, который вписан в круг, учитывая, что один из углов треугольника равен 60°.

4.5. Миша и Маша договорились встретиться в обеденный перерыв (50 мин.) в студенческом кафе. Первый пришедший занимает очередь, которая проходит за 20 минут, покупает пищу и уходит. Какова вероятность того, что Миша и Маша встретятся в кафе?

4.6. В куб была брошена точка. Найти вероятность того, что брошенная точка оказалась вне области шара, который вписан в куб.

4.7. Наудачу выбирается два действительных положительных числа, каждое из которых не больше двух. Найдите вероятность того, что их произведение больше 1.

4.8. На комплексной плоскости в область D заданную условием: $|Rez| + |Imz| < 4$ брошена точка. Найдите вероятность того, что точка так же попадет в область $2 < |z| < 2\sqrt{2}$.

4.9. В область $D : \{y < 4 - x^2, y > 0\}$, брошена точка. Найти вероятность того, что она попадёт в область B, ограниченную линиями $B : \{y > 4 - 2x\}$.

4.10. 2. В квадрат с вершинами (0;0),(2;0),(2;2) и (0;2) наудачу брошена точка. Найдите вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют неравенству $y < 2x$.