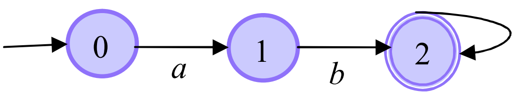
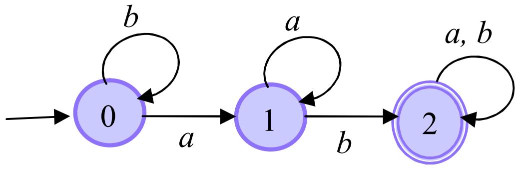
Série de TD N° : 02 - Corrigé

Automates Déterministes

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Exercice 2.1. On considère deux automates A_1 et A_2 sur l'alphabet $\{a,b\}$.

(A_1) 

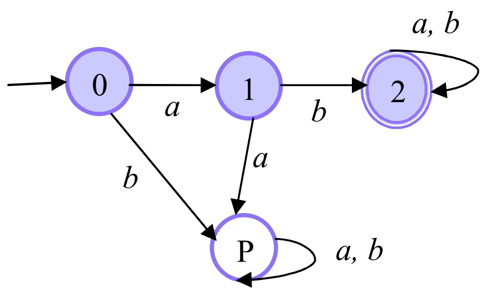
(A_2) 

1) Dans quel état se trouve l'automate A_1 après lecture des mots *a, ab, abb, abba* ? Après lecture du mot ε ?
2) Lesquels de ces mots sont reconnus par l'automate A_1 ?
3) Que se passe-t-il quand on donne le mot *aab* à lire à l'automate A_1 ?
4) Les mots aba^2b, a^2ba^2b, ab^4 et b^3a^2 sont-ils reconnus par l'automate A_1 ?
5) Décrire les mots reconnus par l'automate A_1.
6) Après lecture du mot b^3a^2, dans quel état se trouve l'automate A_2 ?
7) Y a-t-il des mots que l'automate A_2 ne peut pas lire jusqu'au bout ?
8) S'il n'a lu aucun *a*, dans quel état se trouve l'automate A_2 ?
9) Dans quels cas l'automate A_2 se trouve-t-il dans l'état 1 ?
10) Dans quels cas arrive-t-il à l'état final 2 ? Quels mots reconnaît-il ?
11) L'automate A_2 est-il complet ? sinon donner un automate complet équivalent à A_2.
12) Même question pour l'automate A_1.

Corrigé.

1) Après *a* dans l'état 1, après *ab* dans l'état 2, après *abb* dans l'état 2, après *abba* dans l'état 2, après ε dans l'état 0.
2) Les mots reconnus par A_1 : *ab, abb, abba.*
3) Après la lecture du premier *a,* il passe à l'état 1 puis il se bloque sur le deuxième *a*.
4) aba^2b **(oui)**, a^2ba^2b **(non)**, ab^4 **(oui)**, b^3a^2 **(non)**.
5) Les mots sur $\{a,b\}$ qui commencent par *ab.*
6) Dans état 1.
7) Non
8) Dans l'état 0.
9) Après la lecture d'une suite éventuellement vide de b suivi d'une suite d'au moins un *a*.
10) Il arrive à l'état final s'il lit un a suivi d'un b. Les mots reconnus par A_2 sont les mots contenant le facteur *ab*.
11) A_2 est complet.

12) A_1 n'est pas complet. Voici un automate équivalent complet :

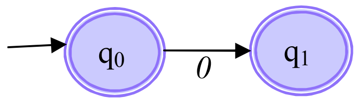


Exercice 2.2 Trouvez pour chacun des langages suivants, un AEFD le reconnaissant :

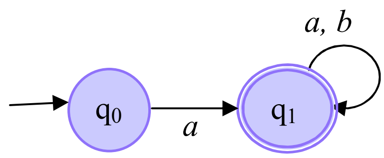
1) $L_1 = \{\varepsilon, 0\}$
2) $L_2 = \{a.w \mid w \in \Sigma^* \}$ *avec* $\Sigma = \{a, b\}$.
3) $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = 1$ *avec* $\Sigma = \{a, b, c, ..., z\}$.
4) $L_4 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_b \geq 2 \}$ *avec* $\Sigma = \{a, b\}$.
5) $L_5 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a$ *est pair et* $|w|_b$ *est impair*$\}$ *avec* $\Sigma = \{a, b\}$. ***Indication :*** *considérer 4 états, celui où* $|w|_a$ *et* $|w|_b$ *sont pairs, celui où* $|w|_a$ *et* $|w|_b$ *sont impairs, celui où* $|w|_a$ *est pair et* $|w|_b$ *est impair et celui où* $|w|_a$ *est impair et* $|w|_b$ *est pair.*
6) $L_6 = \{w.ab \mid w \in \Sigma^*\} \cup \{w.bba \mid w \in \in \Sigma^*\}$ *avec* $\Sigma = \{a, b\}$.
7) $L_7 = \{a^{5n+3} \mid n \geq 0 \}$ *avec* $\Sigma = \{a\}$.
8) $L_8 = \{a^{2n} \mid n \geq 0\} \cup \{a^{3n} \mid n \geq 0\}$ *avec* $\Sigma = \{a\}$.
9) $L_9 = \{0^m 1^n 2^p \mid m, n, p \geq 0\}$
10) L_{10} *= l'ensemble des mots dont l'avant-dernier symbole est un 1*
11) $L_{11} = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ *ne contient pas le facteur 110*$\}$
12) L_{12} *= l'ensemble des mots qui contiennent au plus deux 0 consécutifs et au plus deux 1 consécutifs*
13) $L_{13} = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ *avec* $\Sigma = \{a, b\}$ *(faites attention à ce langage...).*

Corrigé.

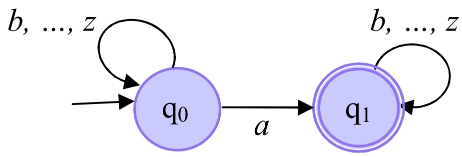
1) $L_1 = \{\varepsilon, 0\}$



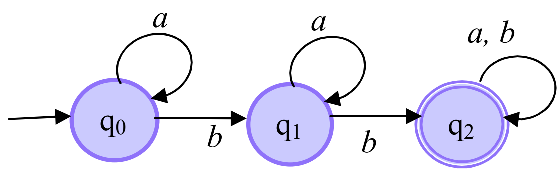
2) $L_2 = \{a.w \mid w \in \Sigma^* \}$ *avec* $\Sigma = \{a, b\}$.



3) $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = 1\}$ avec $\Sigma = \{a, b, c, ..., z\}$.

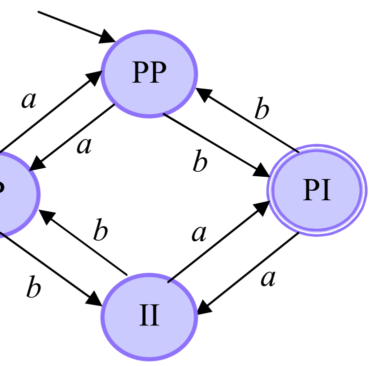


4) $L_4 = \{w \in \Sigma^* \mid \ |w|_b \geq 2\ \}$ avec $\Sigma = \{a, b\}$.

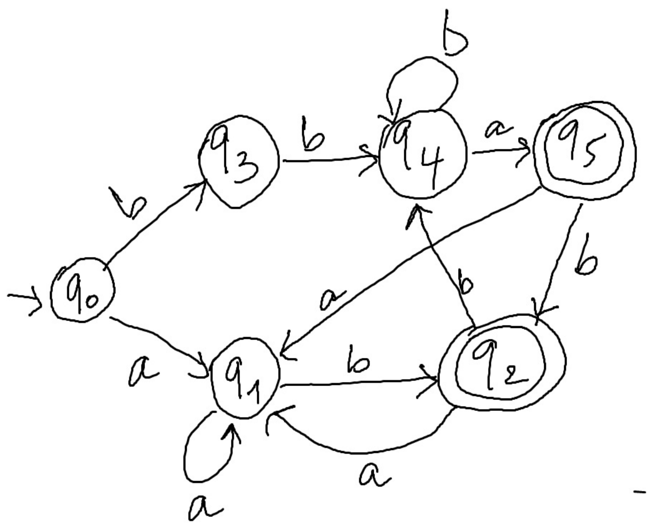


5) $L_5 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a$ *est pair et* $|w|_b$ *est impair*$\}$

- *Etat PP* $\rightarrow$ $|w|_a$ *est pair et* $|w|_b$ *est pair (état initial)*
- *Etat PI* $\rightarrow$ $|w|_a$ *est pair et* $|w|_b$ *est impair (état final)*
- *Etat IP* $\rightarrow$ $|w|_a$ *est impair et* $|w|_b$ *est pair*
- *Etat II* $\rightarrow$ $|w|_a$ *est impair et* $|w|_b$ *est impair*



6) $L_6 = \{w.ab \mid w \in \Sigma^*\} \cup \{w.bba \mid w \in \in \Sigma^*\}$ avec $\Sigma = \{a, b\}$.



7) $L_7 = \{a^{5n+3} \mid n \geq 0\}$ *avec* $\Sigma = \{a\}$.

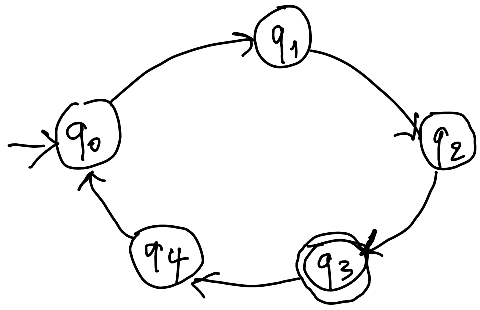
q_0 : état où on a un mot de la forme : a^{5n} *avec* $n \geq 0$ *(état initial)*

q_1 : état où on a un mot de la forme : a^{5n+1} *avec* $n \geq 0$

q_2 : état où on a un mot de la forme : a^{5n+2} *avec* $n \geq 0$

q_3 : état où on a un mot de la forme : a^{5n+3} *avec* $n \geq 0$ *(état final)*

q_4 : état où on a un mot de la forme : a^{5n+4} *avec* $n \geq 0$



8) $L_8 = \{a^{2n} \mid n \geq 0\} \cup \{a^{3n} \mid n \geq 0\}$ *avec* $\Sigma = \{a\}$.

q_0 : état où on a un mot de la forme : a^{6n} *avec* $n \geq 0$ *(état initial + final)*

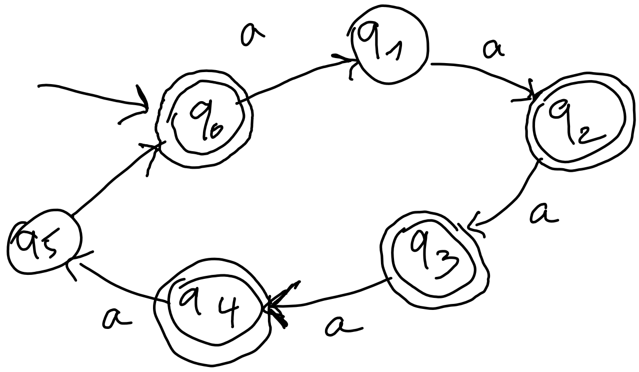
q_1 : état où on a un mot de la forme : n^{6n+1} *avec* $n \geq 0$

q_2 : état où on a un mot de la forme : n^{6n+2} *avec* $n \geq 0$ *(état final)*

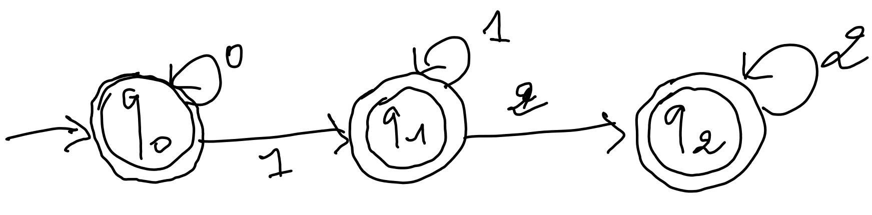
q_3 : état où on a un mot de la forme : n^{6n+3} *avec* $n \geq 0$ *(état final)*

q_4 : état où on a un mot de la forme : n^{6n+4} *avec* $n \geq 0$ *(état final)*

q_5 : état où on a un mot de la forme : n^{6n+5} *avec* $n \geq 0$



9) $L_9 = \{0^m 1^n 2^p \mid m, n, p \geq 0\}$



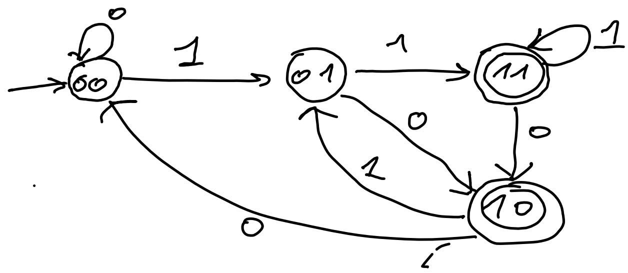
10) L_{10} = *l'ensemble des mots dont l'avant-dernier symbole est un 1*

00 : état où la suite lu est ε, 0 ou toute suite se terminant par *00 (état initial)*

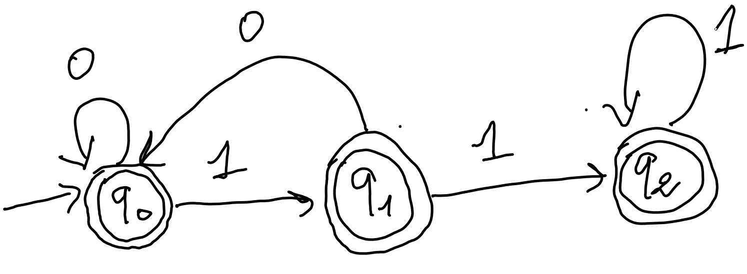
01 : état où la suite lu est 1 ou toute suite se terminant par *01*

10 : état où la suite lu est se termine par *10 (état final)*

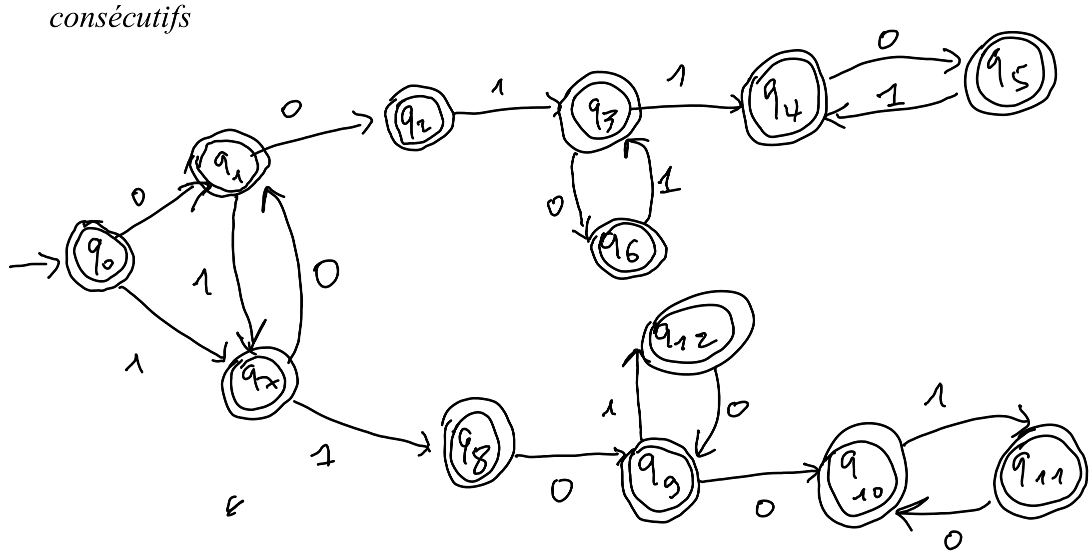
11 : état où la suite lu est se termine par *11 (état final)*



11) L_{11} = *{w ∈ {a, b}*| w ne contient pas le facteur 110}*



12) L_{12} = *l'ensemble des mots qui contiennent au plus deux 0 consécutifs et au plus deux 1 consécutifs*

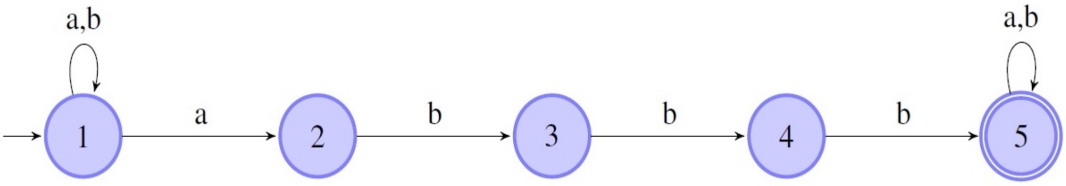


13) $L_{13} = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ *avec* $\Sigma = \{a, b\}$

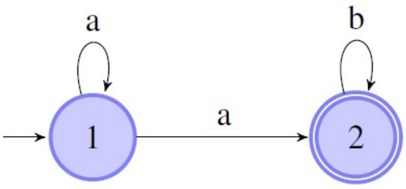
Ce n'est pas un langage régulier. On ne peut pas trouver un automate avec un nombre fini d'états qui reconnaît ce langage.

Exercice 2.3. Pour chacun des automates suivants, dire s'il est déterministe et s'il est complet. Décrire ensuite le langage reconnu par cet automate en donnant une caractérisation de l'ensemble des mots acceptés.

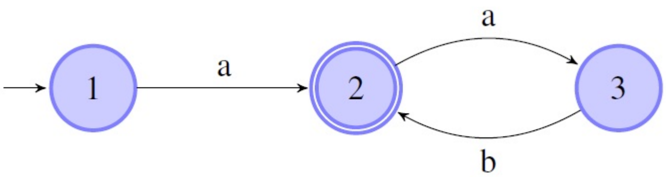
1.



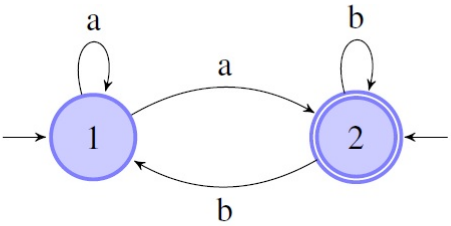
2.



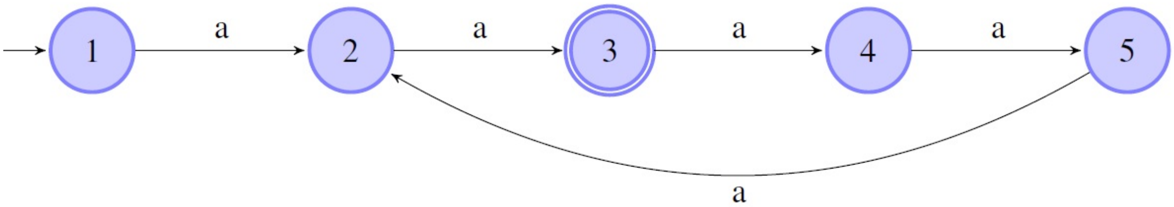
3.



4.



5.



1) *Non déterministe, non complet.* ***Langage*** *: les mots contenant le facteur abbb*
2) *Non déterministe, non complet.* ***Langage*** *: les mots formés d'une suite non vide de a suivi d'une suite (éventuellement vide) de b.*
3) *Déterministe, non complet.* ***Langage*** *: les mots commençant pas un a sui d'une suite éventuellement vide de ab*
4) *Non Déterministe, non complet.* ***Langage*** *: les mots commençant pas a*
5) *Déterministe, complet.* ***Langage*** *: les mots de la forme* a^{4n+2} *avec* $n \geq 0$

Exercice 2.4 Un passeur doit faire passer d'une rive à l'autre un loup, une chèvre et une salade. Toutefois, son bateau ne peut transporter qu'un seul passager en dehors de lui-même. Bien entendu, il ne peut laisser le loup et la chèvre seuls sans surveillance, sinon le loup mangera la chèvre. Même chose pour le couple chèvre-salade.

Chaque état représente les protagonistes sur la rive opposée. Ainsi l'état *CP* signifie et que la chèvre et le passeur sont sur la rive opposée (et que le loup et la salade n'ont pas encore traversé). Comme le précise l'énoncé, certains états sont interdits. L'état initial est ϕ et l'état final est *CLPS*. Les actions possibles (qui constituent l'alphabet de l'automate) sont :

(1) traverser seul *(P);* (2) traverser avec le loup *(L);* (3) traverser avec la chèvre *(C);*

(4) traverser avec la salade *(S)*

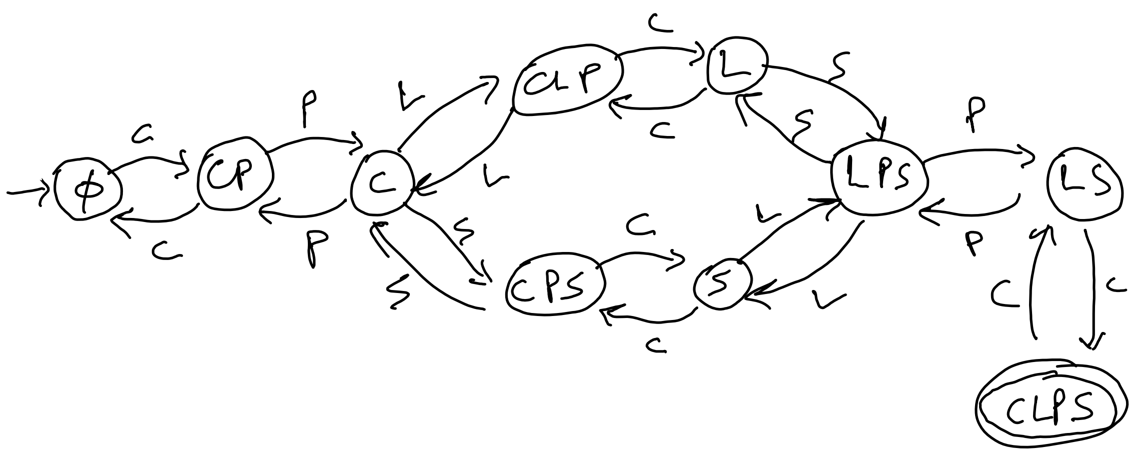
Dessinez un automate déterministe permettant de trouver toutes les solutions au problème.

Corrigé.

- L'ensemble des états *Q*: On prend tous les sous-ensembles de *{C, L, P, S}* sauf ceux qui expriment une situation où, sur une des deux rives, il y a le loup avec la chèvre ou la chèvre avec la salade en l'absence du passeur. Ces états sont : *P, PL, PS, CLS, CS, CL*. Donc :

$$Q = 2^{\{C, L, P, S\}} - \{ P, PL, PS, CLS, CS, CL \}.$$

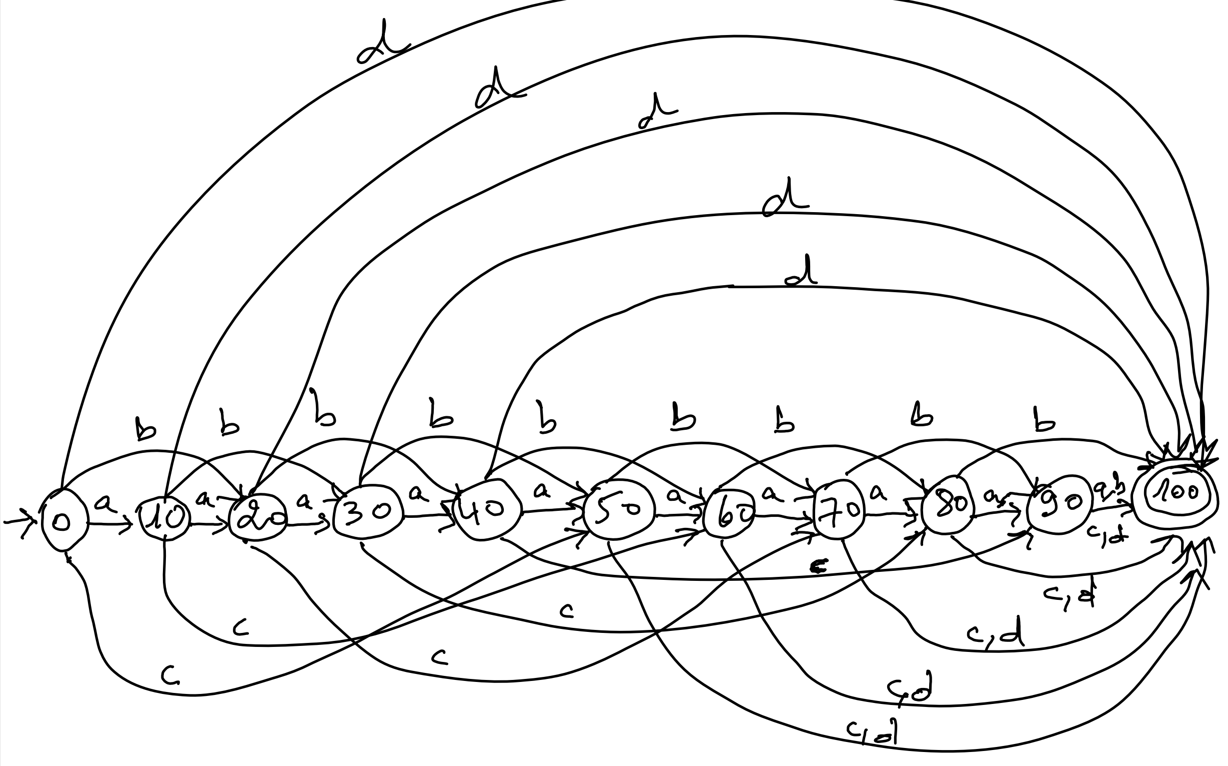
- L'alphabet : $\Sigma = \{P, L, C, S\}$
- L'état initial : ϕ, situation où la rive opposée est vide. Rien n'a encore bougé.
- L'état final : CLPS, situation où la rive de départ est vide.
- Fonction de transition : voir l'automate



Exercices supplémentaires.

Exercice 2.5 On désire modéliser le comportement d'un distributeur de cannettes. La machine accepte les pièces de *10, 20, 50 et 100 DA*, représentées respectivement par les symboles *a, b, c* et *d*. Lorsque l'utilisateur introduit une somme correspondant à au moins *100 DA*, la machine laisse tomber une cannette. Représenter une telle machine sous la forme d'un AEFD.

Corrigé.

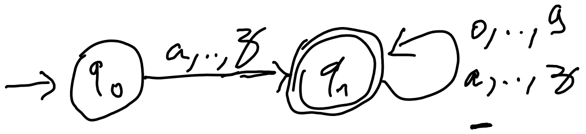


Exercice 2.6 Trouvez pour chacun des langages suivants, un AEFD le reconnaissant :

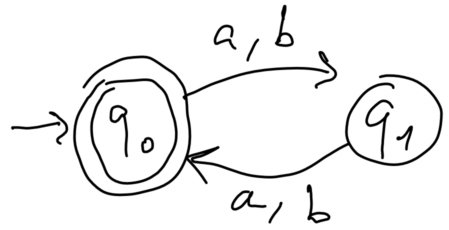
1) L_1 = *< langage des identi_cateurs >, i.e. mots débutants par une lettre, et constitués uniquement de lettres, chiffres ou du caractère '_'.*
2) $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \text{ est pair}\}$ avec $\Sigma = \{a, b\}$.
3) $L_3 = \{u00 \mid u \in \{0, 1\}^*\}$
4) $L_4 = \{u \in \{a, b\}^* \mid$ *dans u, tout bloc de a est de longueur* $\geq 2\}$.
5) $L_5 = \{u \in \{a, b\}^* \mid$ *dans u, tout a est suivi d'un seul b*$\}$.
6) L_6 = *l'ensemble des représentations binaires des nombres pairs*
7) L_7 = *l'ensemble des mots ayant au moins 3 zeros consécutifs*
8) $L_8 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid$ *w contient au moins trois 1*$\}$
9) $L_9 = \{w.b / w \in \Sigma^*\}$ avec $\Sigma = \{a, b\}$.
10) $L_{10} = \{a^{2n} \mid n \geq 0\}$

Corrigé.

1) *L_1 = < langage des identi_cateurs >, i.e. mots débutants par une lettre, et constitués uniquement de lettres, chiffres ou du caractère '_'.*

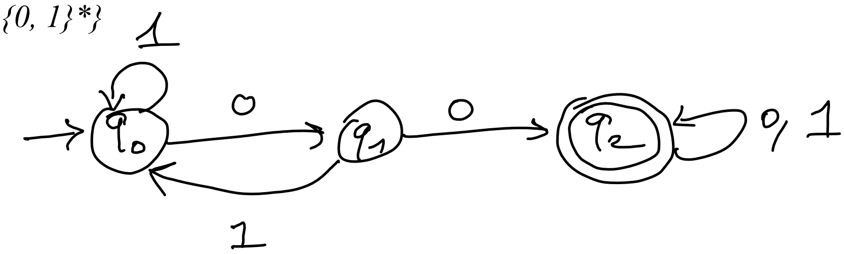


2) *$L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|$ est pair$\}$ avec $\Sigma = \{a, b\}$.*

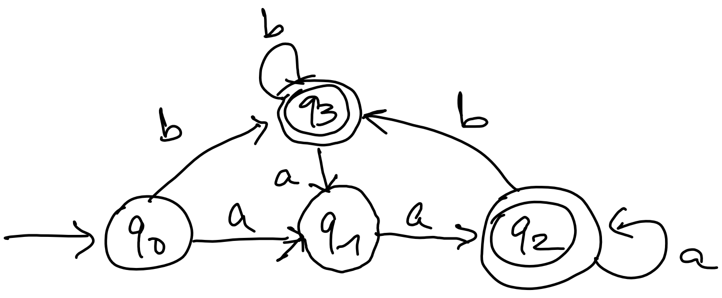


3) *$L_3 = \{u00 \mid u \in \{0, 1\}^*\}$*

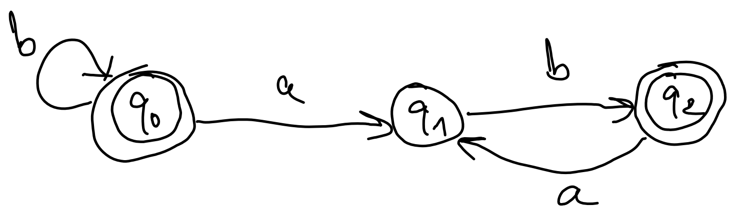
.



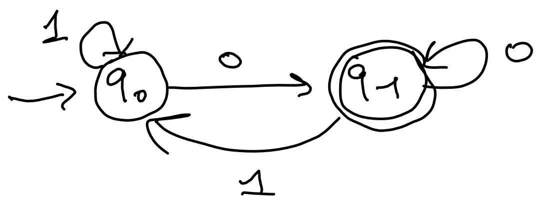
4) *$L_4 = \{u \in \{a, b\}^* \mid$ dans u, tout bloc de a est de longueur $\geq 2\}$.*



5) *$L_5 = \{u \in \{a, b\}^* \mid$ dans u, tout a est suivi d'un seul b$\}$.*

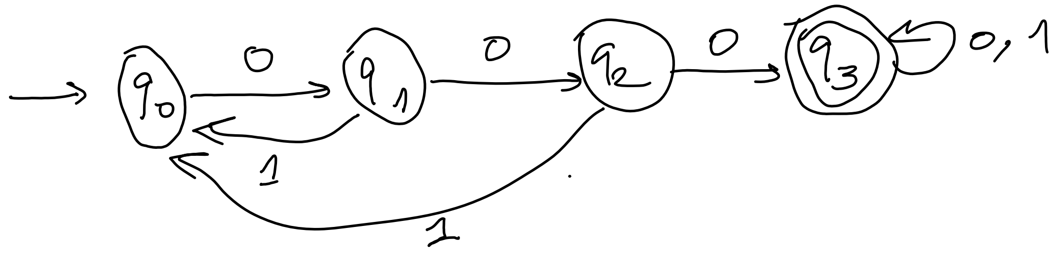


6) *L_6 = l'ensemble des représentations binaires des nombres pairs*

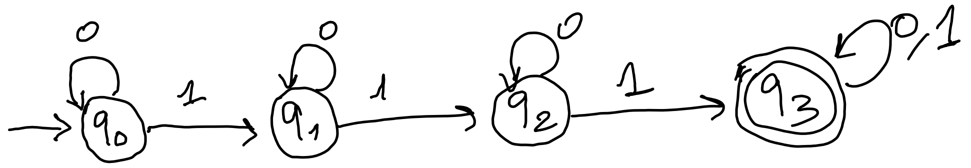


Corrigé.

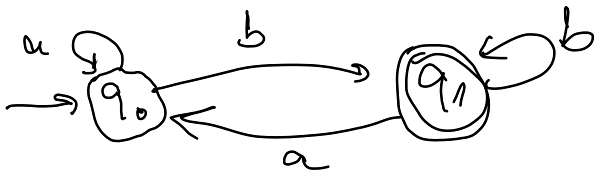
7) *L_7 = l'ensemble des mots ayant au moins 3 zeros consécutifs*



8) *L_8 = {w ∈ {0, 1}*| w contient au moins trois 1}*



9) *L_9 = {w.b / w ∈ Σ*} avec Σ = {a, b}*



10) *$L_{10} = \{a^{2n} \mid n \geq 0\}$*