matemática discreta II

relações de recorrência

INTRODUÇÃO

Muitos problemas de contagem não podem ser resolvidos facilmente utilizando os métodos convencionais (permutação, combinação, etc). *Por exemplo:* O número de bactérias em uma colônia dobra a cada hora. Se uma colônia se inicia com 5 bactérias, quantas existirão em n horas? E quantas cadeias de bits de extensão n não contêm dois zeros consecutivos?

RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA

Para resolver o problema da colônia de bactérias, primeiramente consideramos o *nº de bactérias ao final das n horas* como T_n. Como o nº de bactérias dobra a cada hora, a relação $T_n = 2T(n-1)$ é mantida sempre que n for um nº inteiro positivo. Considerando T(0) = 5, determinamos únicamente T_n. Isso trata-se, então, de uma **relação de recorrência** e podemos encontrar uma fórmula fechada para ela.

Já para resolver o problema do nº de cadeias de bits, consideramos T_n como o *nº de cadeias de extensão n*. Temos, então, $T_1 = 2,\ T_2 = 3,\ T(n) = T(n+1) + T(n-2)$. Podemos *resolver essa relação* ou *encontrar uma fórmula explícita* para ela, que irá nos permitir então encontrar o **termo geral da sequência**, ou seja, o termo que ocupa a n-ésima posição na sequência (T_n) .

Uma relação de recorrência para a sequência $\{T_n\}$ é uma equação que expressa T_n em termos de *um ou mais termos prévios da sequência*, ou seja, $T_0, T_1, ..., T_{n-1}$, para todos os números inteiros n com $n > n_0$ em que n_0 é um número inteiro não negativo. Já uma Uma sequência é chamada de solução de uma relação de recorrência se seus termos satisfazem a relação de recorrência.

Por exemplo: Considere $\{T_n\}$ como uma sequência que satisfaz a relação de recorrência $T_n = T_{n-1} - T_{n-2}$, para n = 2, 3, 4, ... e suponha que $T_0 = 3$ e $T_1 = 5$. Quais os valores de T_2 e T_3?

n = 2 ➜ $T_2 = T_{2-1} - T_{2-2} = T_1 - T_0 = 5 - 3 = 2$
n = 3 ➜ $T_3 = T_{3-1} - T_{3-2} = T_2 - T_1 = 2 - 5 = -3$

RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA E ALGORITMOS RECURSIVOS

Quando o problema é encontrar uma fórmula para uma sequência definida recursivamente, esta fórmula recursiva é chamada de relação de recorrência. Destaca-se que para definir uma sequência recursivamente, uma fórmula recursiva *deve* ser acompanhada por informações sobre o início da sequência, chamadas de **condições iniciais** da sequência (como a_0).

Ou seja, quando analisamos a complexidade de um algoritmo recursivo, obtemos uma relação de recorrência que expressa o número de operações necessárias para resolver um problema de tamanho n em termos do número de operações necessárias para resolver o problema para uma ou mais instâncias de tamanho menor.

Para encontrar a ordem de complexidade de um algoritmo recursivo:

1. Encontrar a relação de recorrência que o define.
2. Resolver a relação de recorrência (encontrar a sua forma fechada).

MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA

➜ MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO

Passos para encontrar uma *forma fechada* para uma relação de recorrência, usando o método da substituição:

1. Gerar casos simples a partir do caso base. Isso nos faz compreender melhor o problema.
2. Tentar achar uma expressão matemática para o caso geral (depende um pouco de intuição).
3. Provar a validade da expressão encontrada em 2 utilizando indução matemática.

PROBLEMA DA TORRE DE HANÓI

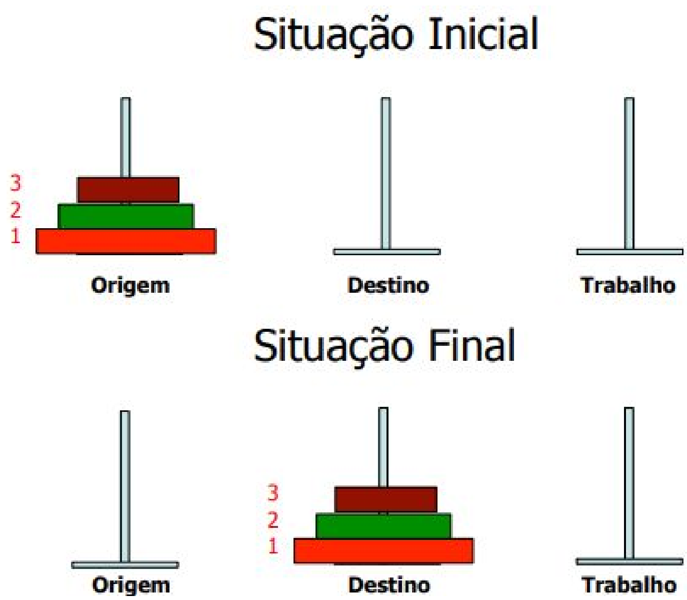
Considerando uma torre com n discos:

1. n–1 discos menores para pino intermediário (T_{n-1} movimentos)
2. maior disco (1 movimento)
3. n–1 discos menores em cima do maior (T_{n-1} movimentos)

Logo, a relação de recorrência é:

$$T_n = \begin{cases} 2T_{n-1} + 1 & , n > 1 \\ 1 & , n = 1 \end{cases}$$

É possível calcular T_{64} usando a relação de recorrência dada acima? Seria preciso calcular T_2, T_3, ..., T_{64}, o que seria bem demorado. ➡ Fórmula "fechada"



Vamos tabular T_n para alguns valores de n:

n	T_n
1	$1 = 2^1 - 1$
2	$3 = 2^2 - 1$
3	$7 = 2^3 - 1$
4	$15 = 2^4 - 1$
5	$31 = 2^5 - 1$

Suposição: $T_n = 2^n - 1$ ➡ $T_{64} = 2^{64} - 1$

Nem sempre temos intuição suficiente para dar um palpite correto. O método da iteração permite que se reconheça um padrão sem necessidade de "chutar". Quando funciona, a solução da relação de recorrência é obtida resolvendo-se um somatório.

➜ MÉTODO DA ITERAÇÃO OU DESDOBRAMENTOS SUCESSIVOS

O método consiste esquematicamente de:

- Algumas iterações do caso geral são expandidas até se encontrar uma *lei de formação*.
- O somatório resultante é resolvido substituindo-se os termos recorrentes por fórmulas envolvendo apenas o(s) caso(s) base.

OBS: O método iterativo ou de substituição, é útil para relações de recorrência do tipo: $a_n = a_{n-1} + f(n)$ para $n \geq 1$ e a_0 dado.

Resolva a relação de recorrência do Problema das Torres de Hanoi:

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ 2a_{n-1} + 1, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Método iterativo:

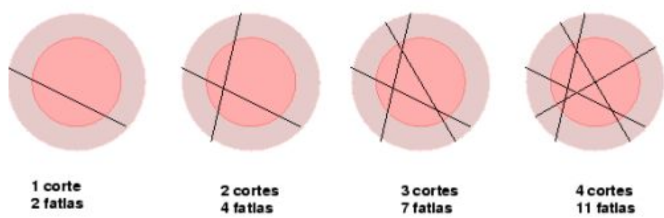
$$a_n = 2a_{n-1} + 1 = 2(2a_{n-2} + 1) + 1 = 2^2 a_{n-2} + 2 + 1 =$$

$$2^2(2a_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3 a_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 = \dots$$

$$2^{n-1} a_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2 + 1 =$$

$$2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2 + 1 =$$

$$2^n - 1$$



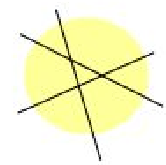
$T(n)=T(n-1)+n$

$T(n)=T(n-2)+(n-1)+n$

$T(n)=T(n-3)+(n-2)+(n-1)+n$

...

$$T(n)=T(n-i)+\sum_{i=1}^{n-1}(n-i+1)$$



pela seguinte relação de recorrência:

$$\begin{cases} T(0) = 1 \\ T(1) = 2 \\ T(n) = T(n-1) + n, \ n \geq 2 \end{cases}$$

O caso base é alcançado quando $i=n-1$.

Logo, $T(n)= (n^2+n+2)/2$

➜ ÁRVORE DE RECURSÃO

Maneira gráfica (mais intuitiva) de visualizar a estrutura de chamadas recursivas do algoritmo. Consiste em desenhar uma árvore cujos nós representam os tamanhos dos problemas correspondentes:

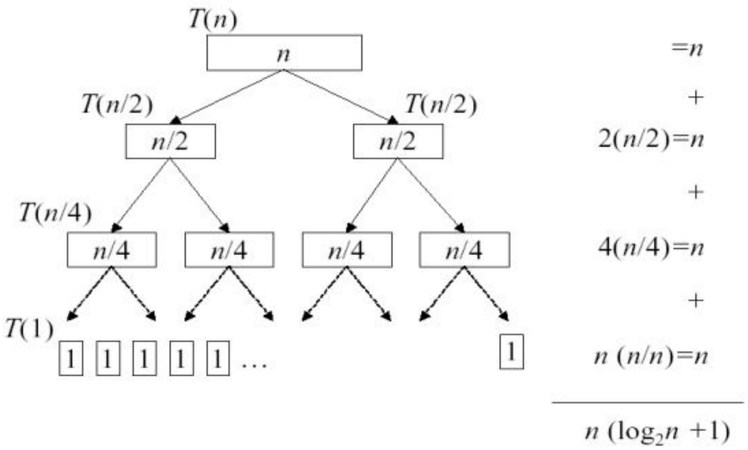
- Cada nó da árvore é uma instância (chamada recursiva do algoritmo).
- Se uma instância chama outras, estas são representadas como nós-filhos.
- Cada nó é rotulado com o tempo gasto apenas nas operações locais (sem contar as chamadas recursivas).
- Cada nível i contém todos os subproblemas de profundidade i.

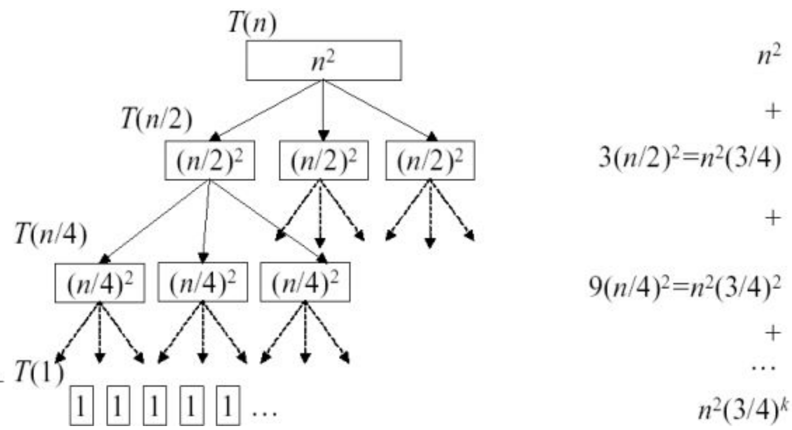
Dois aspectos importantes:

- A altura da árvore.
- O número de passos executados de cada nível.

A solução da recorrência (tempo de execução do algoritmo) é a soma de todos os passos de todos os níveis. No caso particular em que o total de passos de cada nível é o mesmo,

$l(n)$ por exemplo, a solução é: $T(n) = h \,.\, l(n)$, onde h é a altura da árvore. *Exemplo:* $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n,\ T(1) = 1$





Podemos observar que as fórmulas de recorrência provenientes de algoritmos do tipo *Dividir-para-Conquistar* são muito semelhantes: eles tendem a dividir o problema em **a** partes iguais, cada uma de tamanho **b** vezes menor que o problema original.

$T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$, sendo $f(n)$ o custo associado para dividir o problema e combinar as soluções parciais em uma única solução

➜ EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA

Os métodos de resolução de relações de recorrências vistos até agora são considerados ad hoc. Algumas outras recorrências podem ser resolvidas de uma forma mais sistemática. Essas relações expressam os termos de uma sequência como combinações lineares de termos anteriores.

Uma relação de recorrência linear homogênea de grau k com coeficientes constantes é uma relação da forma:

$$T(n) = c_1T(n-1) + c_2T(n-2) + \dots + c_kT(n-k),\ c/\ c_1,\ c_2, \dots,\ c_k \in \Re\ e\ c_k \neq 0$$

(Este tipo de recorrência aparece frequentemente em resolução de problemas e podem ser resolvidas sistematicamente, ou seja, há um método preciso para resolvê-las)

Linear: o lado direito é a soma dos termos anteriores da sequência multiplicados por uma função de n.
Homogênea: nenhum termo aparece sem estar multiplicado por um T().

Constante: todos os termos são multiplicados por constantes e não por funções que dependam de n.
Grau k: T(n) é expressa pelos k termos anteriores da sequência.

Exemplos:

$T(n) = 2.5T(n-1)$ ➜ grau 1
$T(n) = T(n-1) + T(n-2)$ ➜ grau 2
$T(n) = T(n-5)$ ➜ grau 5
$T(n) = T(n-1) + T^2(n-2)$ ➜ não é linear
$T(n) = 2T(n-1) + 2^n$ ➜ não é homogênea
$T(n) = nT(n-1)$ ➜ não tem coeficiente constante

Neste curso, voltaremos a nossa atenção para um método de resolução das relações de recorrência lineares e homogêneas com coeficientes constantes de segunda ordem, da forma: $T(n) = c_1 T(n-1) + c_2 T(n-2)$ e não trataremos das relações de recorrência com raízes características complexas.

Teorema 1

Considere a equação característica $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$, onde:

- c_1 e c_2 são números reais, e
- $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ possui duas raízes características distintas, r_1 e r_2.

A solução para a relação de recorrência $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ é:

$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$, com $n \geq 0$ inteiro e α_1 e α_2 constantes.

Teorema 2

Considere a equação característica $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$, onde:

- c_1 e c_2 são números reais,
- e $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ possui exatamente uma raiz característica, r_0.

A solução para a relação de recorrência $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ é

$a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$, com $n \geq 0$ inteiro e α_1 e α_2 constantes

Então o que devemos fazer para resolver uma relação de recorrência linear homogênea de segundo grau com coeficientes constantes? A relação de recorrência tem o n-ésimo termo dado por: $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$. Então sua equação característica é: $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$. Resolva a equação característica.

Se encontrar duas raízes distintas r_1 e r_2, então a solução da relação de recorrência é: $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$. Para encontrar α_1 e α_2, levamos em consideração que é uma relação de recorrência de segundo grau: portanto, é escrita em função dos termos anteriores a_{n-1} e a_{n-2}. Então, a definição da relação de recorrência deve conter os valores dos dois primeiros termos, a0 e a1, de forma que se possa calcular o próximo.

➜ $a_0 = \alpha_1 r_1^0 + \alpha_2 r_2^0 = \alpha_1 + \alpha_2$

➜ $a_1 = \alpha_1 r_1^1 + \alpha_2 r_2^1 = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2$

Para encontrar a_1 e a_2, resolva o sistema de equações lineares: $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = & a_0 \\ \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 = & a_1 \end{cases}$

T(n) = c_1T(n-1) + c_2T(n-2)

- $c_1 \neq 0$ e $c_2 \neq 0$, T(0) e T(1) conhecidos.
- Achar as raízes da equação característica $x^2 - c_1 x - c_2 = 0$ (equação do 2º grau)
- Se a equação tem 2 soluções diferentes r_1 e r_2, então
  $T(n) = \alpha_1.r_1^n + \alpha_2.r_2^n$ α_1, α_2 constantes
- Se a equação tem uma única solução r, então
  $T(n) = \alpha_1.r^n + \alpha_2.n.r^n$ α_1, α_2 constantes
- Os valores de α_1 e α_1 podem ser encontrados fazendo n=0 e n=1 em T(n), uma vez que T(0) e T(1) são conhecidos.

T(n) = 6T(n-1) - 9T(n-2)
T(0) = 1, T(1) = -3

- Achar as raízes da equação $x^2 - 6x + 9 = 0$
- A equação tem uma única solução r = 3, logo
  $T(n) = \alpha_1.3^n + \alpha_2.n.(3)^n$

$T(0) = \alpha_1.3^0 + \alpha_2.0.3^0$
$T(1) = \alpha_1.3^1 + \alpha_2.1.3^1$
$\alpha_1 = 1$
$3\alpha_1 + 3\alpha_2 = -3$, $\alpha_2 = -2$

$T(n) = 3^n + (-2).n.3^n$

T(n) = T(n-1) + 2T(n-2)
T(0) = T(1) = 3

- Achar as raízes da equação $x^2 - x - 2 = 0$
- A equação tem 2 soluções diferentes 2 e -1, logo
  $T(n) = \alpha_1.2^n + \alpha_2.(-1)^n$

$T(0) = \alpha_1.2^0 + \alpha_2.(-1)^0$
$T(1) = \alpha_1.2^1 + \alpha_2.(-1)^1$
$\alpha_1 + \alpha_2 = 3$
$2\alpha_1 - \alpha_2 = 3$
$\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$

$T(n) = 2^{n+1} + (-1)^n$

Exemplo: Resolva a relação de recorrência:

$$a_n = \begin{cases} 2, & \text{se } n = 0, \\ 7, & \text{se } n = 1, \\ a_{n-1} + 2a_{n-2}, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Primeiro, devemos encontrar a equação característica:

coeficiente de a_{n-1}: 1

coeficiente de a_{n-2}: 2

equação característica: $r^2 - 1r - 2 = 0$.

Para encontrar os valores de α_1 e α_2, resolvemos o sistema com valores de r_1, r_2, a_0 e a_1:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = & a_0 \\ \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 = & a_1 \end{cases}$$

Como $a_0 = 2$, $a_1 = 7$, $r_1 = 2$ e $r_2 = -1$, temos:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = & 2 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = & 7 \end{cases}$$

equação característica: $r^2 - 1r - 2 = 0$.

Resolvendo a equação, encontramos as **raízes características:** $r_1 = 2$ e $r_2 = -1$.

Então a solução é $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 (-1)^n$.

Falta saber quanto valem α_1 e α_2.

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = & 2 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = & 7 \end{cases}$$

Então $\alpha_2 = 2 - \alpha_1$.

Substituindo α_2 na segunda equação: $2\alpha_1 - (2 - \alpha 1) = 7$.

Então $3\alpha_1 = 7 + 2$. Logo $\alpha_1 = 3$.

Logo, $\alpha_2 = 2 - \alpha_1 = 2 - 3 = -1$

A solução da relação de recorrência é $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$

$a_n = 3 \cdot 2^n - 1 \cdot (-1)^n$.

TRUQUES

$$\begin{cases} T(2) = 1 \\ T(n) = \sqrt{n}\, T(\sqrt{n}) + n, \; n>1 \end{cases}$$

Truque: dividir T(n) por n e renomear T(n)/n = S(n)

$$\begin{cases} T(0) = 8 \\ T(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ T(n) = \sqrt{\frac{T(n-2)}{T(n-1)}} \end{cases}$$

Truque: aplicar lg T(n), renomear lg T(n) = S(n) e usar o método da equação característica.

$$\begin{cases} T(0) = 1 \\ T(1) = 2 \\ T(n) = \frac{T(n-2).T(n-2)}{T(n-1)} \end{cases}$$

Truque: aplicar lg T(n), renomear lg T(n) = S(n) e usar o método da equação característica.