2

Fundamentos da Álgebra Linear

Sumário da Aula

Esta seção é baseada em Anton e Rorres Anton e Rorres[6]. Consulte a referência para mais detalhes.

2.1 Matrizes e Operações Matriciais

As matrizes ordenam e simplificam diversos problemas, sendo comumente utilizadas para resolver questões nas diversas áreas das ciências e engenharias.

Definição 2.1. Uma **matriz** é um agrupamento retangular de números. Dizemos que os números nesse agrupamento são as **entradas** da matriz.

O tamanho de uma matriz, ou a ordem, é descrito em termos do número de linhas e de colunas que ela possui. Uma matriz $m \times n$ (“lê-se m por n”), possui m linhas e n colunas e é representada pela seguinte notação:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Utiliza-se letras maiúsculas para denotar matrizes e sua ordem fica indicada no lado inferior direito da letra, ou seja, $A_{m\times n}$. Os elementos de uma matriz são, comumente, representadas pela mesma letra que a domina em minúsculo, ou seja a_{ij}. A linha e a coluna onde o elemento está posicionado na matriz é indicado, respectivamente, pelos índices i e j. Quando for desejada uma notação mais compacta, a matriz precedente pode ser escrita como

$$[a_{ij}]_{m\times n} \quad \text{ou} \quad [a_{ij}]$$

Vetores linha e coluna são tipos especiais de matriz e, normalmente, são denotados por letras minúsculas em vez de letras maiúsculas. Para essas matrizes, é desnecessário usar índices duplos para as entradas. Assim, um vetor linha $1 \times n$ arbitrário v e um vetor coluna $m \times 1$ arbitrário t podem ser escritos como:

$$v = [v_1\ v_2\ \cdots\ v_n] \qquad \text{ou} \qquad t = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_m \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Uma matriz A com n linhas e n colunas é chamada de **matriz quadrada de ordem** n. As entradas em destaque $(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$ formam a **diagonal principal** da matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

As notações apresentadas são usadas em Cálculo Numérico para abreviar o trabalho durante a resolução de sistemas de equações lineares. Para outras aplicações é preciso definir a “aritmética de matrizes” na qual algumas operações matemáticas são aplicadas em matrizes. Essas operações incluem a multiplicação por um escalar, a adição, a subtração e a multiplicação. A divisão não é uma operação permitida na álgebra matricial.

Definição 2.2. Igualdade de Matrizes: Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$. Elas são definidas como sendo **iguais** se tiverem o mesmo tamanho e suas entradas correspondentes forem iguais.

Em notação matricial, se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ possuem o mesmo tamanho e elementos idênticos, então $(A)_{ij} = (B)_{ij}$ ou, então, $a_{ij} = b_{ij}$, para quaisquer valores de i e j.

Definição 2.3. Adição e Subtração de Matrizes: Sejam A e B matrizes do mesmo tamanho. Então, definimos a **soma** $A+B$ a matriz resultante da soma de todas as entradas de B às entradas correspondentes de A, e a **diferença** $A - B$ a matriz resultante da subtração das entradas de B às entradas correspondentes de A.

Em notação matricial, se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ possuem o mesmo tamanho, então:

$$(A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \;\text{ e }\; (A-B)_{ij} = (A)_{ij} - (B)_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

para quaisquer valores de i e j.

Exemplo 1. Sejam as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

- As matrizes A e D são iguais, pois elas possuem o mesmo tamanho e todas as suas entradas correspondentes são iguais. As matrizes A e B são diferentes, pois apesar de possuírem o mesmo tamanho, as suas entradas correspondentes se diferem. Já as matrizes A e C, como possuem tamanhos distintos não são iguais.

- Como as matrizes A e B possuem o mesmo tamanho, definimos as operações $A+B$ e $A-B$ como:

$$A+B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 2\\ 3 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 7 & 6\end{bmatrix}\quad \text{e}\quad A-B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 2\\ 3 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & -8\end{bmatrix}$$

Note que expressões como $A+C$ ou $B-C$ não estão definidas.

Definição 2.4. Multiplicação por um Escalar: Seja uma matriz A e um escalar c. Define-se o **produto** cA como a matriz resultante da multiplicação de cada entrada da matriz A pela constante c. Dizemos também que cA é um **múltiplo escalar** da matriz A.

Em notação matricial, se $A=[a_{ij}]$, então $(cA)_{ij}=c(A)_{ij}=ca_{ij}$, para todos os valores de i e j.

Exemplo 2. Sejam as matrizes

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & -1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2\\ 7\end{bmatrix}\quad \text{e}\quad C=\begin{bmatrix}9 & -6 & -2\\ 1 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

Temos os seguintes múltiplos escalares:

$$2A=\begin{bmatrix}4 & 6\\ 8 & -2\end{bmatrix},\quad (-1)B=-B=\begin{bmatrix}-2\\ -7\end{bmatrix}\quad \text{e}\quad 2,2C=\begin{bmatrix}19,8 & -13,2 & -4,4\\ 2,2 & 6,6 & 0\end{bmatrix}$$

Definição 2.5. Multiplicação de Matrizes: Sejam as matrizes A do tipo $m\times p$ e B do tipo $p\times n$. O **produto** de A por B é a matriz $C=[c_{ij}]_{m\times n}$, cujo elemento da linha i e coluna j é obtido multiplicando da linha i de A pelos elementos correspondentes da coluna j de B e, posteriormente, somando os produtos obtidos.

Exemplo 3. Sejam as matrizes $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 4 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}_{3\times 2}$ e $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}_{2\times 2}$. A matriz $C=AB$ será uma matriz de tamanho 3×2, ou seja:

$$C=AB=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 4 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}_{3\times 2}\cdot\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}_{2\times 2}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\\ c_{31} & c_{32}\end{bmatrix}_{3\times 2}.$$

Para calcular a entrada da linha 1 e da coluna 1 da matriz C (termo c_{11}), na Expressão 2.3 foram destacadas a linha 1 da matriz A e a coluna 1 da matriz B. O termo é então calculado fazendo a operação $c_{11}=a_{11}*b_{11}+a_{12}*b_{21}=(0)*(2)+(1)*(0)=0$

$$C=AB=\begin{bmatrix}\color{blue}{0} & \color{blue}{1}\\ 4 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\color{blue}{2} & 1\\ \color{blue}{0} & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\color{blue}{0} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\\ c_{31} & c_{32}\end{bmatrix}\tag{2.3}$$

Para calcular a entrada da linha 3 e da coluna 2 da matriz C (termo c_{32}), na Expressão 2.4 foram destacadas a linha 3 da matriz A e a coluna 2 da matriz B. O termo é então calculado fazendo a operação $c_{32}=a_{31}*b_{12}+a_{32}*b_{22}=(2)*(1)+(3)*(3)=11$

$$C=AB=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 4 & -1\\ \color{red}{2} & \color{red}{3}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & \color{red}{1}\\ 0 & \color{red}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\\ c_{31} & \color{red}{11}\end{bmatrix}\tag{2.4}$$

Os demais termos c_{ij} são calculados de forma análoga. A matriz resultante do produto das matrizes A e B será:

$$C = AB = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 8 & 1 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$$

É importante destacar que a definição de multiplicação de matrizes exige que, para ser possível formar o produto entre duas matrizes, o número de colunas do primeiro fator tem que ser igual ao número de linhas do segundo fator, como mostra a Figura 2.1. Se essa condição não for satisfeita, o produto não será definido. A matriz resultante terá número de linhas igual ao da matriz do primeiro fator e o número de colunas igual ao da matriz do segundo fator.

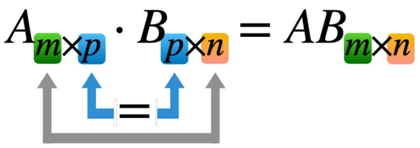

Figura 2.1: Condição de existência para a multiplicação de matrizes.

Definição 2.6. Transposta de uma Matriz: Seja A uma matriz qualquer $m \times n$. A matriz **transposta de** A, denotada por A^t, é definida como uma matriz $n \times m$ resultante da troca das linhas com as colunas da matriz A. Em outras palavras, a primeira coluna da matriz A^t é a primeira linha da matriz A; a segunda coluna da matriz A^t é a segunda linha da matriz A; e assim por diante.

Em notação matricial, $(A^t)_{ij} = (A)_{ji}$, para todos os valores de i e j.

Exemplo 4. Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

as suas transpostas são: $A^t = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad B^t = \begin{bmatrix} 2 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C^t = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ -6 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

Definição 2.7. Traço de uma Matriz: Seja A uma matriz quadrada qualquer. O **traço de** A, denotada por $tr(A)$, é definido pela soma dos elementos da diagonal principal de A.

Exemplo 5. Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Temos que

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \quad \text{e} \quad tr(B) = 1 + 4 + 2 + 7 = 14.$$

Observação:

O traço somente é definido em matrizes quadradas!

2.2 Exercícios

E. 1. Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{4\times 5}$, $B = [b_{ij}]_{4\times 5}$, $C = [c_{ij}]_{5\times 2}$, $D = [d_{ij}]_{4\times 2}$ e $E = [a_{ij}]_{5\times 4}$. Em cada parte, determine se a expressão matricial dada está definida. Para as que estão definidas, informe qual o tamanho da matriz resultante.

a) AB
b) $AB + B$
c) E^tA
d) $AC + D$
e) $E(A + B)$
f) $(A^t + E)D$
g) $AE + B$
h) $E(AC)$

E. 2. Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calcule, se possível, as expressões seguintes:

a) $D + E$
b) $-7C$
c) $2B - C$
d) $5A$
e) AB
f) BA
g) $A - A$
h) $4E - 2D$
i) $4tr(7B)$
j) $2A^t + C$
l) $D^t - E^t$
m) $(CD)E$
n) $tr(D)$
o) $3(D + 2E)$
p) $tr(C^tA^t + 2E^t)$

E. 3. Determine se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta.

( ) A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -9 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ não tem diagonal principal.

( ) Uma matriz $m \times n$ tem m vetores coluna e n vetores linha.

( ) Se A e B forem matrizes 2×2, então $AB = BA$.

( ) Dada qualquer matriz A, vale $(A^t)^t = A$.

( ) Se A e B forem matrizes quadradas de mesma ordem, então $tr(AB) = tr(A) * tr(B)$

( ) Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, então $(AB)^t = A^tB^t$

( ) Dada qualquer matriz quadrada A, vale que $tr(A^t) = tr(A)$.

( ) Se A for uma matriz 6×4 e B uma matriz $m \times n$ tal que B^tA^t é uma matriz 2×6, então $m = 4$ e $n = 2$.

( ) Se A for uma matriz $n \times n$ e c um escalar, então $tr(cA) = ctr(A)$.

( ) Se A, B e C forem matrizes do mesmo tamanho tais que $A - C = B - C$, então $A = B$.

( ) Se A, B e C forem matrizes quadradas do mesmo tamanho tais que $AC = BC$, então $A = B$.

( ) Se a soma de matrizes $AB+BA$ estiver definida, então A e B devem ser quadradas de mesmo tamanho.