שיטות חישוביות – תרגיל מחשב 2

מגיש:

ניר שניידר 316098052

שאלה 1 – פתרון משוואה בשיטת ניוטון-רפסון המניחה שורש פשוט

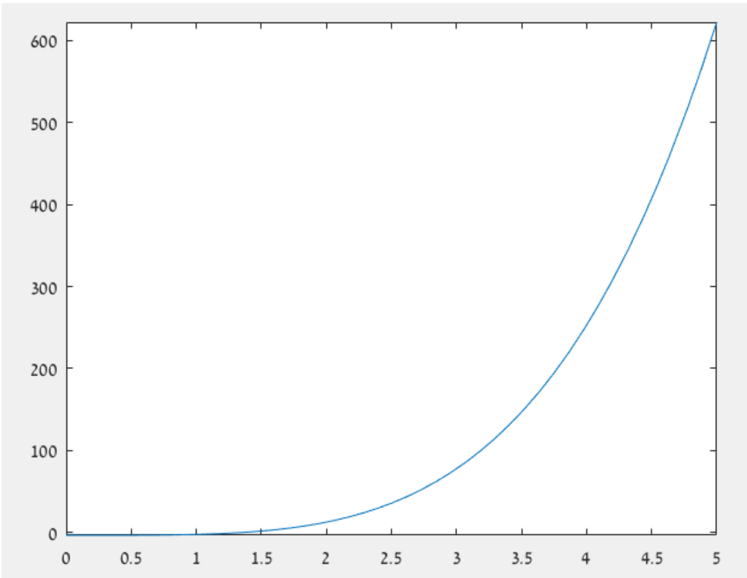
א) הנחה – b=5, $x^4 - 3 = 0$
מטרה – מציאת קטע [a,b] ובו לבחור ניחוש התחלתי לטובת התכנסות בשיטת ניוטון-רפסון עד לפתרון המדויק של $s = 3^{\frac{1}{4}}$.

ראינו בכיתה את המשפט הבא:

תהי *F(x)* פונקציה ממשית המוגדרת בקטע *[a,b]* המקיימת את התנאים הבאים:

1) $F'(x) \neq 0$ (פונקציה מונוטונית)
2) $F''(x) \neq 0$ (ללא נקודות פיתול בקטע)
3) $F(a) * F(b) < 0$ (השורש בתחום)
4) $\left|\frac{F(b)}{F'(b)}\right| < b - a$
5) $\left|\frac{F(a)}{F'(a)}\right| < b - a$
6) אז שיטת ניוטון-רפסון מתכנסת לפתרון מכל תנאי התחלה x_0 בקטע *[a,b]*.

להלן גרף הפונקציה של $f(x) = x^4 - 3$



1) הפונקציה מונוטונית עולה. $f'(x) = 4x^3 \rightarrow f'(x) \neq 0, \forall x \in (0,5]$
2) אין לפונקציה נקודות פיתול. $f''(x) = 12x^2 \rightarrow f''(x) \neq 0, \forall x \in (0,5]$
3) השורש בתחום.

$$f(a) * f(5) < 0 \rightarrow (a^4 - 3) * (5^4 - 3) < 0 \rightarrow a^4 < 3 \rightarrow a < \sqrt[4]{3} \rightarrow a < 1.316$$

עבור שלושת התנאים הנ"ל נסיק כי $a \in [0,1.316]$. נבחר *a=1* ונבדוק אם התנאים הבאים מתקיימים גם כן.

4) $\left|\frac{F(b)}{F'(b)}\right| < b - a \rightarrow \left|\frac{622}{500}\right| < 5 - a \rightarrow 1 = a < 3.756$ √

5) $\left|\frac{F(a)}{F'(a)}\right| < b - a - < \left|\frac{a^4-3}{4a^3}\right| > 5 - a \rightarrow \{a = 1\} \rightarrow \left|-\frac{2}{4}\right| < 5 - 1 \rightarrow 0.5 < 4$ √

עבור *a=1* כל התנאים יתקיימו להתכנסות ע"פ שיטת ניוטון-רפסון ולכן נבחר בקטע *[1,5]*.

ב) לניחוש ההתחלתי x_0 נשתמש בנוסחה: $x_0 = a + \frac{I_1}{I_1+I_2}(b-a), I_{1,2} = 316098052$

לכן הניחוש ההתחלתי הינו $x_0 = 3$

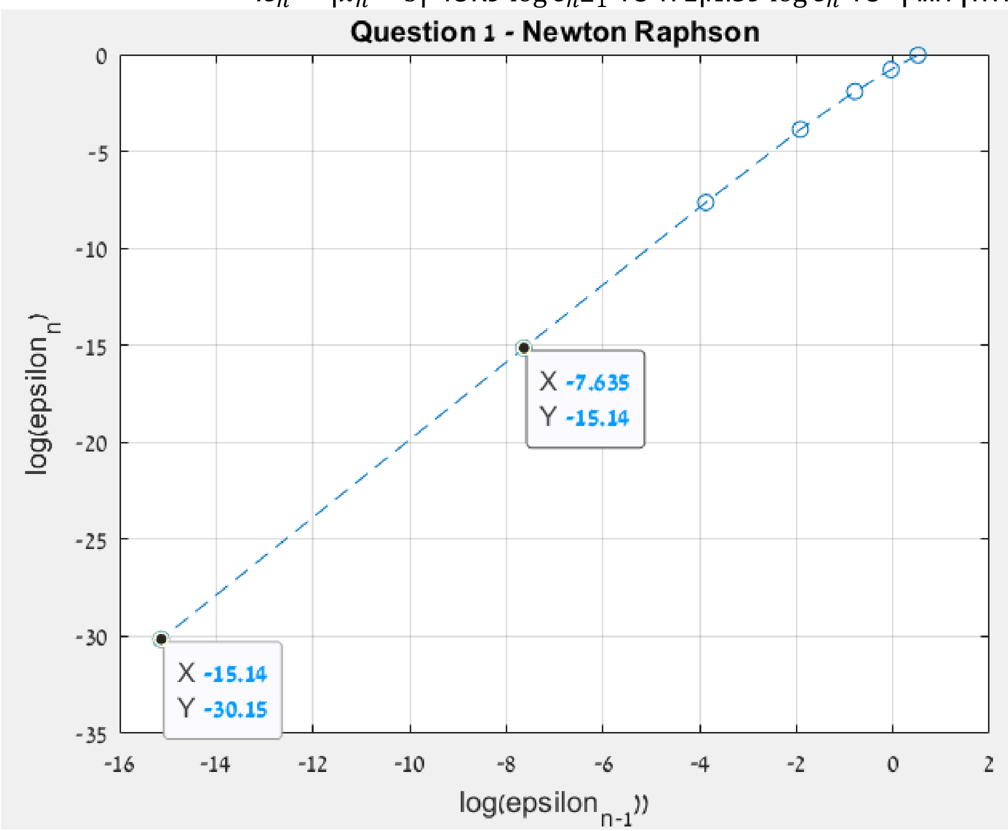
צעד איטרציה בשיטת ניוטון-רפסון: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

תנאי העצירה הוגדר להיות $|x_{n+1} - x_n| \leq tolerance = 10^{-12}$

להלן התוצאות של 8 האיטרציות עד ההגעה להתכנסות.

n	X_n	X_n_diff	error
1	3	0.722222222222222	1.68392598704751
2	2.27777777777778	0.505980478454398	0.961703764825285
3	1.77179729932338	0.308109196470072	0.455723286370887
4	1.46368810285331	0.126747107047715	0.147614089900816
5	1.33694099580559	0.0203835084351842	0.0208669828531005
6	1.31655748737041	0.000483208166391247	0.000483474417916296
7	1.31607427920402	2.66251444225318e-07	2.66251525049555e-07
8	1.31607401295257	8.08242361927114e-14	8.08242361927114e-14

ג) להלן הגרף של $\log \varepsilon_n$ כפונקציה של $\log \varepsilon_{n-1}$ כאשר $\varepsilon_n = |x_n - s|$:



קצב ההתכנסות הינו שיפוע הגרף ומקצב ההתכנסות ניתן לחלץ את קבוע ההתכנסות.

$\lim_{n\to\infty}\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^{\eta}}=A,\qquad A-$ קבוע ההתכנסות$,\eta -$ קצב ההתכנסות

עבור n מספיק גדול נקבל את השוויון $\log\varepsilon_{n+1}=\log A+\eta\log\varepsilon_n$

מהפיתוח רואים כי קצב ההתכנסות הוא שיפוע הגרף ובעקבות זאת נוכל לחשב את קבוע ההתכנסות.

$$\eta=m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-7.635+30.15}{-3.87+15.14}=\ 1.998\approx 2$$

$$\log A=y-mx=\ -30.15-2*(-15.14)=0.13\ \rightarrow A=e^{0.13}=1.138$$

נשים לב כי לא הגענו לערך המדויק של סדר ההתכנסות כי זהו ערך אסימפטוטי ובשל מגבלות הייצוג של המחשב.

השיפוע אכן שואף ל2 כפי שציפינו משיטת ניוטון-רפסון עבור שורש פשוט ועבור קבוע ההתכנסות: $A=0.5*\left|\frac{f''(s)}{f'(s)}\right|=1.139$ (ראינו בכיתה את החישוב עד הגעה לנוסחה זו).

<u>שאלה 2 – פתרון שיטת המיתר</u>

א) בשיטה זו נצטרך שתי נקודות לניחוש ההתחלתי המחושבות על פי הנוסחאות הבאות:

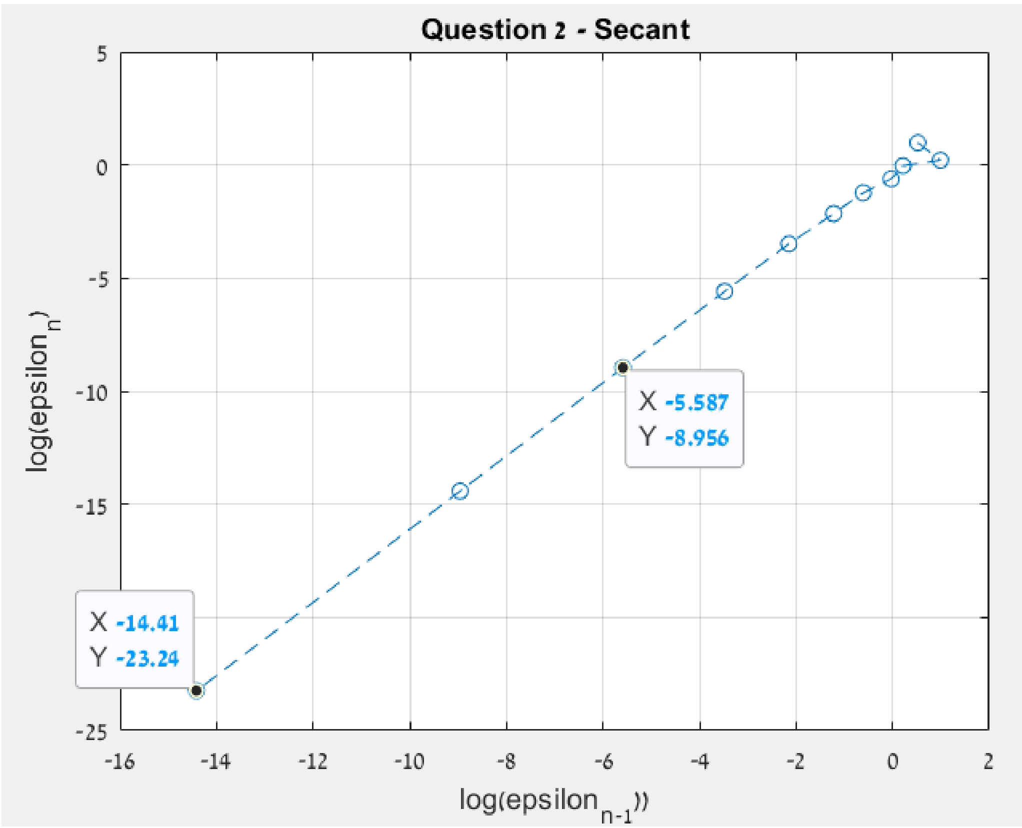
$$x_0 = a + \frac{I_1}{I_1 + I_2}(b - a) = 3, \qquad x_1 = x_0 + \frac{I_1}{I_1 + I_2}(b - x_0) = 4$$

צעד איטרציה בשיטת המיתר הינו: $x_{n+1} = x_n - f(x_n) * \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$

להלן התוצאות של 13 האיטרציות עד ההגעה להתכנסות

n	X_n	X_n_diff	error
1	3	1	1.68392598704751
2	4	1.44571428571429	2.68392598704751
3	2.55428571428571	0.268015688916007	1.23821170133322
4	2.28627002536971	0.427574237369172	0.970196012417215
5	1.85869578800054	0.248301457211682	0.542621775048044
6	1.61039433078885	0.177564626866606	0.294320317836362
7	1.43282970392225	0.085913540019338	0.116755690969756
8	1.34691616390291	0.0270945326960501	0.0308421509504184
9	1.31982163120686	0.00361872085169246	0.00374761825436831
10	1.31620291035517	0.000128348184623706	0.000128897402675854
11	1.31607456217054	5.49137372463093e-07	5.49218052148248e-07
12	1.31607401303317	8.06796851549052e-11	8.06796851549052e-11
13	1.31607401295249	0	0

ב) להלן הגרף של $\log \varepsilon_n$ כפונקציה של $\log \varepsilon_{n-1}$ כאשר $\varepsilon_n = |x_n - s|$:



$$\eta = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-23.24 + 8.956}{-14.41 + 5.587} = 1.618$$
$$\log A = y - mx = \ -23.24 + 2 * (-14.41) = 0.075 \ \rightarrow A = e^{0.075} = 1.07$$

נשים לב כי השיפוע שואף לערך 1.618 וקצב ההתכנסות שואף לקצב התיאורטי אליו ציפינו (יחס הזהב). כמו בן, ההתכנסות בשיטה זו איטית יותר מההתכנסות בשיטת ניוטון-רפסון.

להלן החישוב התיאורטי שהוכח בהרצאה 8 בכיתה:
נפתח שיטה דומה לניוטון-רפסון המצריכה רק את חישוב ערכי הפונקציה *F(x)*. לצורך כך נקרב את הנגזרת ע"י:

$$F'(x) = \lim_{u \to x} \frac{F(x) - F(u)}{x - u} \rightarrow F'(x_n) \cong \frac{F(x_n) - F(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$
$$Newton\ iteration: x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \rightarrow$$
$$\rightarrow x_{n+1} = x_n - F(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{F(x_n) - F(x_{n-1})} \ ; n \geq 1$$

ניתן לראות שסדר ההתכנסות בשיטת המיתר

$$|\varepsilon_{n+1}| = A|\varepsilon_n|^{\alpha} \ ; \begin{cases} \alpha = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618 < 2 \\ A = 0.5 \left|\dfrac{F''(s)}{F'(s)}\right|^{0.5} newton - raphson \end{cases}$$
$$\lim_{n \to inf} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^{\alpha}} = A$$
$$\alpha_{secant} < \alpha_{Newton-Raphson} = 2$$

ההתכנסות בשיטת המיתר איטית יותר משיטת ניוטון רפסון.

שאלה 3 – פתרון בשיטת ניוטון-רפסון המניחה שורש מרובה

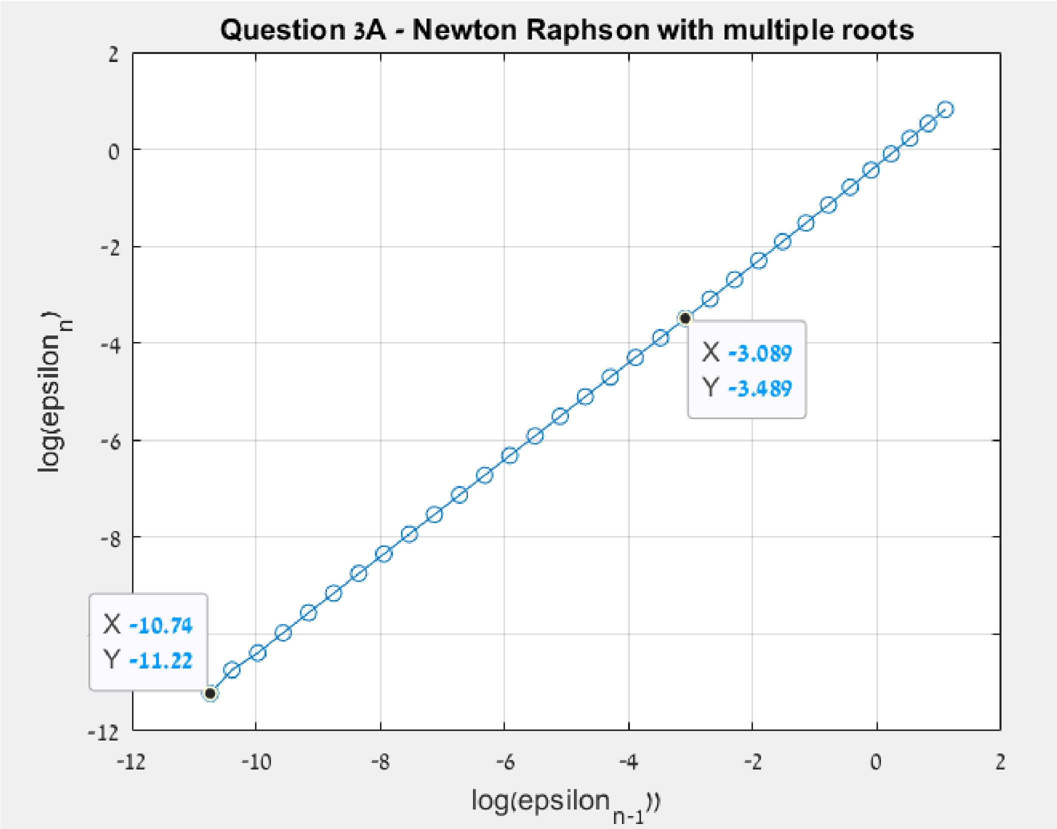
א) כעת נרצה לפתור המשוואה $f(x) = x^5 - 6x^4 + 14x^3 - 20x^2 + 24x - 16 = 0$

נעצור לאחר התייצבות של 12 הספרות הראשונות (בהתאם ל*tolerance*) כשאר הניחוש ההתחלתי הינו $x_0 = 5$

n	X_n	X_n_diff	error
1	5	0.72972972972973	3
2	4.27027027027027	0.573561577993864	2.27027027027027
3	3.69670869227641	0.446412663555897	1.69670869227641
4	3.25029602872051	0.342839992236089	1.25029602872051
5	2.90745603648442	0.25891841252475	0.90745603648442
6	2.64853762395967	0.191813677369928	0.648537623959669
7	2.45672394658974	0.139276011607369	0.456723946589741
8	2.31744793498237	0.0992141521984351	0.317447934982372
9	2.21823378278394	0.0695034162768882	0.218233782783937
10	2.14873036650705	0.0480303175349777	0.148730366507049
11	2.10070004897207	0.0328444013190401	0.100700048972071
12	2.06785564765303	0.0222863722337188	0.067855647653031
13	2.04556927541931	0.0150386428435234	0.0455692754193122
14	2.03053063257579	0.0101086469572631	0.0305306325757888
15	2.02042198561853	0.00677667985318164	0.0204219856185257
16	2.01364530576534	0.00453471609345213	0.0136453057653441
17	2.00911058967189	0.0030307366261062	0.00911058967189193
18	2.00607985304579	0.00202388602694858	0.00607985304578573
19	2.00405596701884	0.00135077236388437	0.00405596701883715
20	2.00270519465495	0.000901190148391073	0.00270519465495278
21	2.00180400450656	0.00060109361115801	0.00180400450656171
22	2.0012029108954	0.00040086403173234	0.0012029108954037
23	2.00080204686367	0.000267300930629766	0.000802046863671357
24	2.00053474593304	0.000178226070420617	0.000534745933041592
25	2.00035651986262	0.000118821152594428	0.000356519862620974
26	2.00023769871003	7.92389130341853e-05	0.000237698710026546
27	2.00015845979699	5.28779184358896e-05	0.000158459796992361
28	2.00010558187856	3.52307044617639e-05	0.000105581878556471
29	2.00007035117409	2.36069393553251e-05	7.03511740947071e-05
30	2.00004674423474	1.58974068078521e-05	4.67442347393821e-05
31	2.00003084682793	9.1265403110441e-06	3.08468279315299e-05
32	2.00002172028762	8.36716456875664e-06	2.17202876204858e-05
33	2.00001335312305	0	1.33531230517292e-05

נשים לב כי לקח לנו 33 איטרציות לטובת ההתכנסות לפתרון *x=2*.

להלן הגרף של $\log \varepsilon_n$ כפונקציה של $\log \varepsilon_{n-1}$ כאשר $\varepsilon_n = |x_n - s|$:



שיפוע הגרף יניב את קצב ההתכנסות ובעזרתו נגלה את קבוע ההתכנסות

$$\eta = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3.489 + 11.22}{-3.089 + 10.74} = 1.0105 \approx 1$$

$$\log A = |y - mx| = |-11.22 - 1.01 * (-10.74)| = 0.372 \to A = e^{0.372} = 1.451$$

אכן תום לתיאוריה לפיה נצפה שהשיפוע שואף ל1 במקרה בו ריבוי השורש גדול מ-1 (שיפוע לינארי).

ב) נקבע פונקציה $u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ בעלת שורשי המשוואה אך במקום ריבוי q לפונקציה השורשים מריבוי q'=1. נפעיל על פונקציה זו את שיטת ניוטון-רפסון.

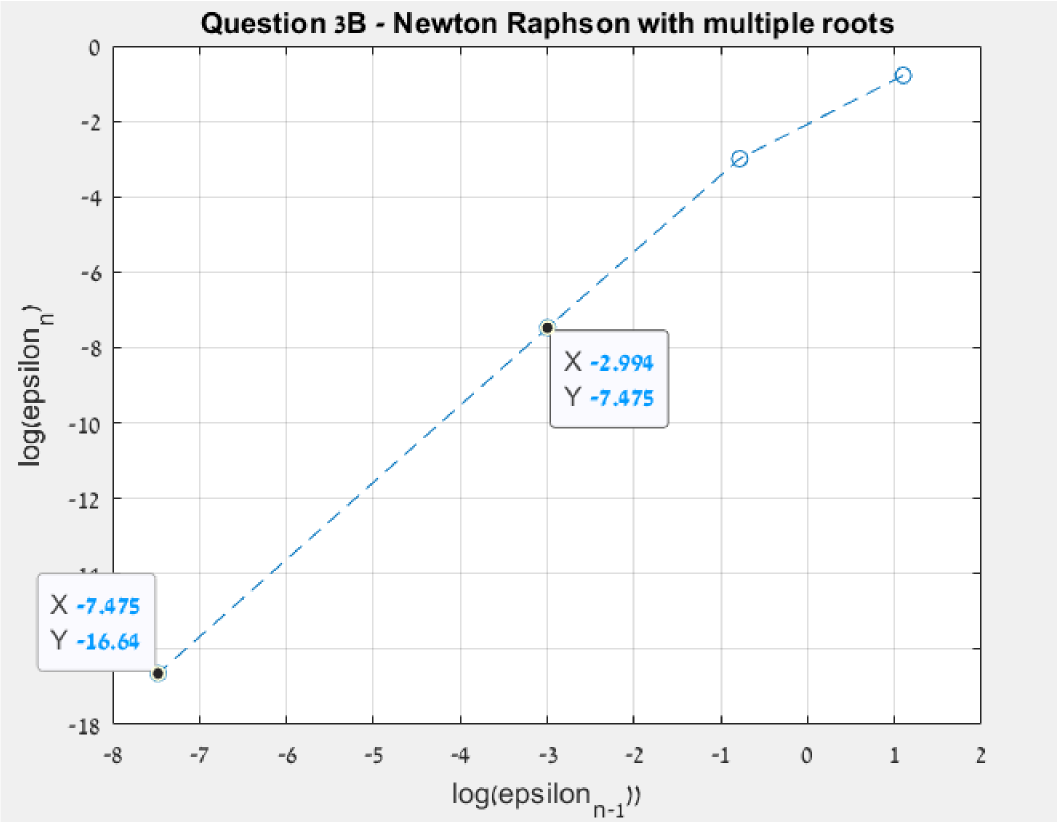
$$u'(x) = 1 - \frac{f(x) * f''(x)}{f'(x) * f'(x)}$$

צעד האיטרציה הינו $x_{n+1} = x_n - \frac{u(x)}{u'(x)}$

n	X_n	X_n_diff	error
1	5	3.45674740484429	3
2	1.54325259515571	0.406638300101928	0.456747404844291
3	1.94989089525764	0.0495421051161298	0.0501091047423634
4	1.99943300037377	0.000566940351703016	0.000566999626233633
5	1.99999994072547	1.9978866117043e-08	5.92745306171594e-08

נשים לב כי לקח לנו 5 איטרציות להתכנסות. מכיוון שההתכנסות כאן מהירה יותר נסיק כי יש ריבוי q של השורש.

להלן הגרף:



שיפוע הגרף יניב את קצב ההתכנסות ובעזרתו נגלה את קבוע ההתכנסות

$$\eta = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-7.475 + 16.64}{-2.994 + 7.475} = 2.04 \ \approx 2$$

$$\log A = |y - mx| = |-16.64 + 2.04 * (-7.475)| = 1.391 \ \rightarrow A = e^{1.391} = 4.019$$

אכן בהתאם לתיאוריה השיפוע בקירוב 2 (התכנסות ריבועית בהתאם לשאלה 1) עבור *u(x)* ואכן מה שמצופה משורש מריבוי 1 בשיטה זו. ע"י שימוש ב-*u(x)* ביטלנו למעשה את התאפסות הנגזרות הראשונה והשנייה ולאחר מכן הפעלנו את שיטת ניוטון-רפסון עבור שורשים מריבוי 1 עבור פונקציה המקיימת את תנאי ההתכנסות לשם קבלת התכנסות ריבועית.

ג) $\lim_{x\to s}\frac{u(x)}{x-s} = \frac{1}{q}$ – קשר לחישוב הריבוי *q*.

$$\lim_{x\to s}\frac{u(x)}{x-s} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{(x-2)(x^2+2)}{5x^2-4x+6}}{x-2} = \lim_{x\to s}\frac{x^2+2}{5x^2-4x+6} = \frac{1}{3} = \frac{1}{q} \quad \rightarrow \quad q = 3$$

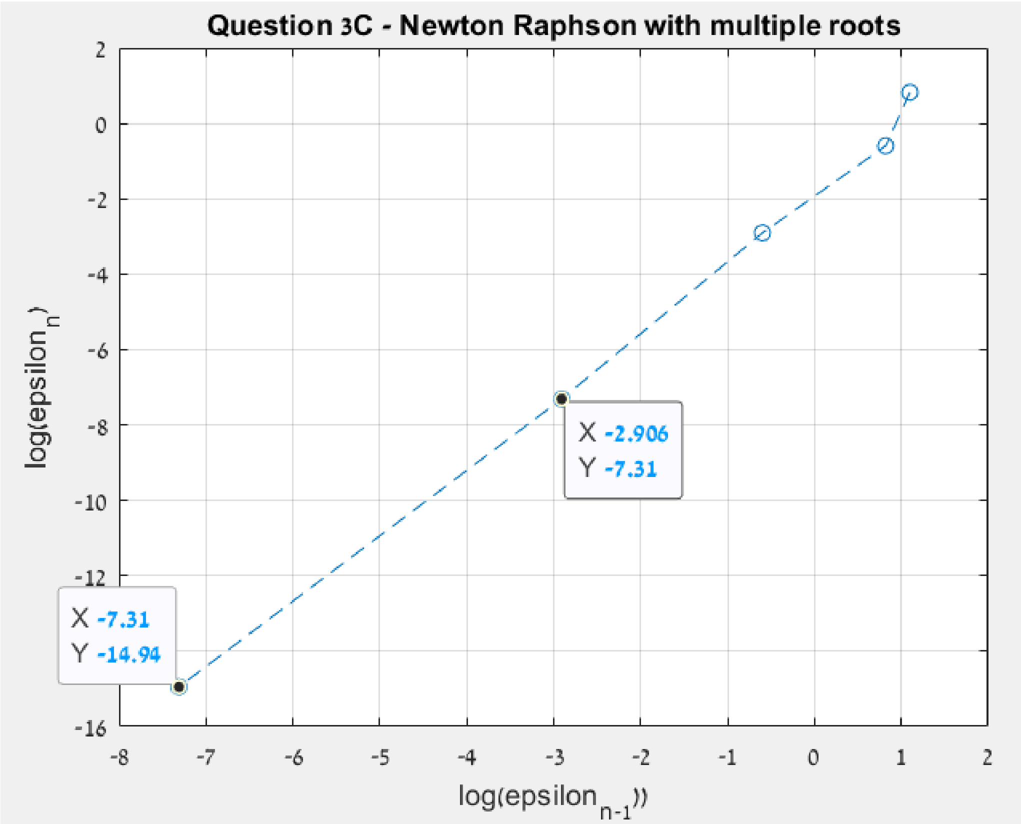
כעת נבצע את שיטת ניוטון-רפסון עבור *q=3*.

צעד האיטרציה - $x_{n+1} = x_n - q\frac{f(x_n)}{f\prime(x_n)}$

נמנע משגיאת חישוב של צמצום בביטוי ע"י קביעת *q=2.999*.

n	X_n	X_n_diff	error
1	5	0.72972972972973	3
2	4.27027027027027	1.7201111724036	2.27027027027027
3	2.55015909786667	0.495475474229761	0.550159097866673
4	2.05468362363691	0.0540150934167967	0.0546836236369121
5	2.00066853022012	0.000668206814975925	0.000668530220115482
6	2.00000032340514	0	3.23405139557309e-07

נשים לב כי לקח להתכנסות 6 איטרציות.



שיפוע הגרף יניב את קצב ההתכנסות ובעזרתו נגלה את קבוע ההתכנסות

$$\eta = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-7.31 + 14.94}{-2.906 + 7.31} = 1.732 \ \approx 2$$

$$\log A = y - mx = -14.94 - 1.732 * (-7.31) = -2.279 \ \rightarrow A = e^{-2.279} = 0.102$$

נשים לב כי השיפוע בקירוב 2, כלומר התכנסות ריבועית כפי שציפינו מבחינה תיאורטית לשיטת ניוטון-רפסון.

נצרף כאן את סיכום הטבלאות של הסעיפים הנ"ל לצורך השוואה חזותית:

n	X_n	X_n_diff	error
1	5	0.72972972972973	3
2	4.27027027027027	0.573561577993864	2.27027027027027
3	3.69670869227641	0.446412663555897	1.69670869227641
4	3.25029602872051	0.342839992236089	1.25029602872051
5	2.90745603648442	0.25891841252475	0.90745603648442
6	2.64853762395967	0.191813677369928	0.648537623959669
7	2.45672394658974	0.139276011607369	0.456723946589741
8	2.31744793498237	0.0992141521984351	0.317447934982372
9	2.21823378278394	0.0695034162768882	0.218233782783937
10	2.14873036650705	0.0480303175349777	0.148730366507049
11	2.10070004897207	0.0328444013190401	0.100700048972071
12	2.06785564765303	0.0222863722337188	0.067855647653031
13	2.04556927541931	0.0150386428435234	0.0455692754193122
14	2.03053063257579	0.0101086469572631	0.0305306325757888
15	2.02042198561853	0.00677667985318164	0.0204219856185257
16	2.01364530576534	0.00453471609345213	0.0136453057653441
17	2.00911058967189	0.0030307366261062	0.00911058967189193
18	2.00607985304579	0.00202388602694858	0.00607985304578573
19	2.00405596701884	0.00135077236388437	0.00405596701883715
20	2.00270519465495	0.000901190148391073	0.00270519465495278
21	2.00180400450656	0.00060109361115801	0.00180400450656171
22	2.0012029108954	0.00040086403173234	0.0012029108954037
23	2.00080204686367	0.000267300930629766	0.000802046863671357
24	2.00053474593304	0.000178226070420617	0.000534745933041592
25	2.00035651986262	0.00011882115259442 8	0.000356519862620974
26	2.00023769871003	7.92389130341853e-05	0.000237698710026546
27	2.00015845979699	5.28779184358896e-05	0.000158459796992361
28	2.00010558187856	3.52307044617639e-05	0.000105581878556471
29	2.00007035117409	2.36069393553251e-05	7.03511740947071e-05
30	2.00004674423474	1.58974068078521e-05	4.67442347393821e-05
31	2.00003084682793	9.1265403110441e-06	3.08468279315299e-05
32	2.00002172028762	8.36716456875664e-06	2.17202876204858e-05
33	2.00001335312305	0	1.33531230517292e-05

n	X_n	X_n_diff	error
1	5	0.72972972972973	3
2	4.27027027027027	1.7201111724036	2.27027027027027
3	2.55015909786667	0.495475474229761	0.550159097866673
4	2.05468362363691	0.0540150934167967	0.0546836236369121
5	2.00066853022012	0.000668206814975925	0.000668530220115482
6	2.00000032340514	0	3.23405139557309e-07

n	X_n	X_n_diff	error
1	5	3.45674740484429	3
2	1.54325259515571	0.406638300101928	0.456747404844291
3	1.94989089525764	0.0495421051161298	0.0501091047423634
4	1.99943300037377	0.000566940351703016	0.000566999626233633
5	1.99999994072547	1.9978866117043e-08	5.92745306171594e-08

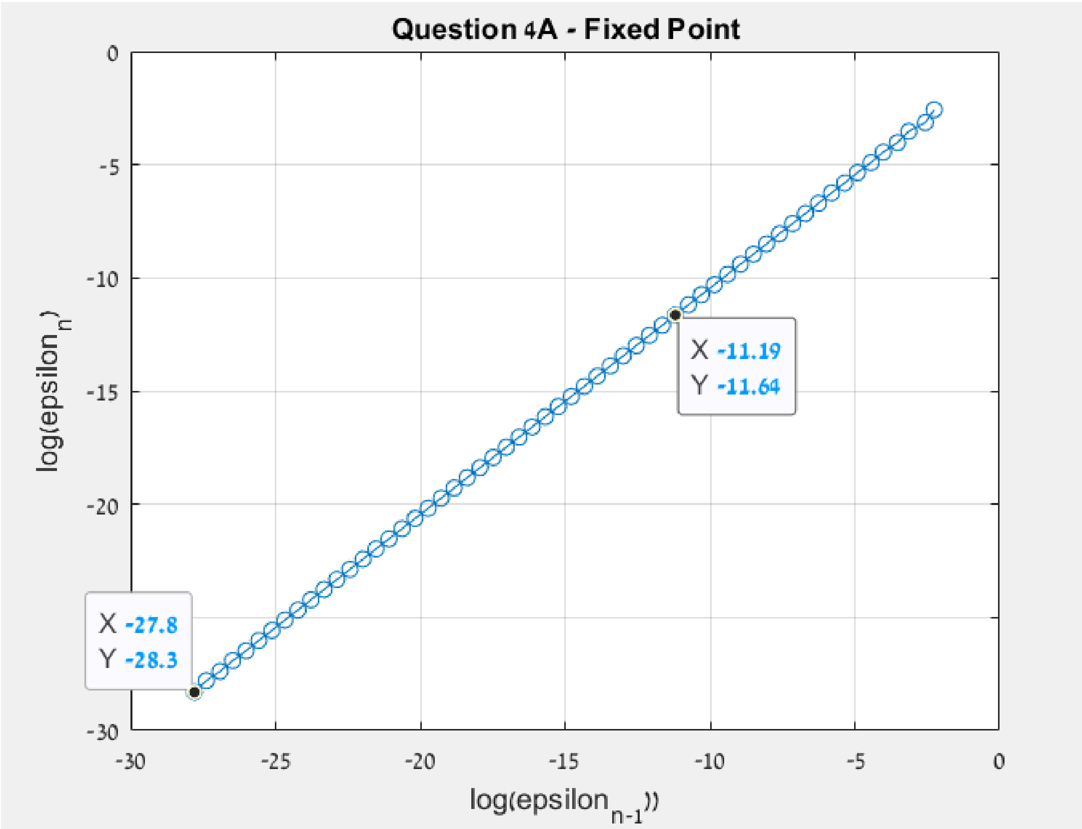
שאלה 4 – פתרון משוואה בשיטת נקודת שבת

$f(x) = x - 2\sin(\mathrm{x})$ (א

נבחר נקודת התחלה $x_0 = \frac{\pi}{2}$ ו- $g(x) = 2\sin(x)$.

n	X_n	X_n_diff	error
1	1.5707963267949	0	0
2	2	0.181405146348637	0.104505732966
3	1.81859485365136	0.120314599417193	0.0768994133826366
4	1.93890945306856	0.0728934367080492	0.0434151860345564
5	1.86601601636051	0.0474604770811644	0.0294782506734927
6	1.91347649344167	0.0297615342869826	0.017982264076717
7	1.88371495915469	0.0191633627622889	0.0117793078793109
8	1.90287832191698	0.0121470467060727	0.007384054882978
9	1.89073127521091	0.00778048304313739	0.0047629918230947
10	1.89851175825404	0.00495141310068314	0.00301749122004269
11	1.89356034515336	0.00316430576696058	0.00193392188064045
12	1.89672465092032	0.00201685877604829	0.00123038388632013
13	1.89470779214427	0.00128769502486703	0.000786474889728161
14	1.89599548716914	0.000821259241675198	0.000501220135138869
15	1.89517422792746	0.000524141397174827	0.000320039106536329
16	1.89569836932464	0.000334368226659443	0.000204102290638497
17	1.89536400109798	0.000213365388669118	0.000130265936020946
18	1.89557736648665	0.000136127191581625	8.30994526481721e-05
19	1.89544123929507	8.68591601255186e-05	5.30277389334533e-05
20	1.89552809845519	5.54184767456167e-05	3.38314211920654e-05
21	1.89547267997845	3.53601277731652e-05	2.15870555535513e-05
22	1.89550804010622	2.25610925652653e-05	1.37730722196139e-05
23	1.89548547901365	1.43950999862419e-05	8.7880203456514e-06
24	1.89549987411364	9.18467886834584e-06	5.60707964059048e-06
25	1.89549068943477	5.86025653803723e-06	3.57759922775536e-06
26	1.89549654969131	3.73910047346548e-06	2.28265731028188e-06
27	1.89549281059084	2.38571747002148e-06	1.45644316318361e-06
28	1.89549519630831	1.52219402660414e-06	9.29274306837868e-07
29	1.89549367411428	9.71228846458061e-07	5.92919719766272e-07
30	1.89549464534313	6.19687558600646e-07	3.78309126691789e-07
31	1.89549402565557	3.953886587027e-07	2.41378431908856e-07
32	1.89549442104423	2.52275743184427e-07	1.54010226793844e-07
33	1.89549416876848	1.60963302020534e-07	9.82655163905832e-08
34	1.89549432973179	1.02701832371821e-07	6.26977856299504e-08
35	1.89549422702995	6.55283978190369e-08	4.00040467418705e-08
36	1.89549429255835	4.18100687404888e-08	2.55243510771663e-08
37	1.89549425074828	2.66767077317098e-08	1.62857176633224e-08
38	1.89549427742499	1.70209411010092e-08	1.03909900683874e-08
39	1.89549426040405	1.08601272419406e-08	6.62995103262176e-09
40	1.89549427126418	6.92925050671533e-09	4.23017620931887e-09
41	1.89549426433493	4.42117409349407e-09	2.69907429739646e-09
42	1.8954942687561	2.82090839576199e-09	1.72209979609761e-09
43	1.89549426593519	1.79986670012511e-09	1.09880859966438e-09
44	1.89549426773506	1.14839604492545e-09	7.01058100460727e-10
45	1.89549426658666	7.3272854450579e-10	4.47337944464721e-10
46	1.89549426731939	4.67514027491234e-10	2.85390600041069e-10
47	1.89549426685188	2.98295166345497e-10	1.82123427450165e-10
48	1.89549426715017	1.90325755156096e-10	1.16171738895332e-10
49	1.89549426695985	1.21436416478105e-10	7.41540162607635e-11
50	1.89549426708128	7.74820207993798e-11	4.72824002173411e-11
51	1.8954942670038	4.94371210635336e-11	3.01996205820387e-11
52	1.89549426705324	3.15432124864401e-11	1.92375004814949e-11
53	1.89549426702169	2.01261229904048e-11	1.23057120049452e-11
54	1.89549426704182	1.28415056366293e-11	7.8204109854596e-12
55	1.89549426702898	8.19344592173366e-12	5.02109465116973e-12
56	1.89549426703717	5.22781817835494e-12	3.17235127056392e-12
57	1.89549426703194	3.33577609978875e-12	2.05546690779101e-12
58	1.89549426703528	2.12851958281135e-12	1.28030919199773e-12
59	1.89549426703315	1.35824684832642e-12	8.4821039081362e-13
60	1.89549426703451	8.66640093022397e-13	5.10036457512797e-13

נשים לב כי להתכנסות לקח 60 איטרציות.



שיפוע הגרף יניב את קצב ההתכנסות ובעזרתו נגלה את קבוע ההתכנסות

$$\eta = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-11..64 + 28.3}{-11.29 + 27.8} = 1.009 \ \approx 1$$

$$\log A = y - mx = \ -28.3 - 1.009 * (-27.8) = -0.25 \ \rightarrow A = e^{-0.25} = 0.779$$

שיפוע הגרף הינו בקירוב 1, כלומר התכנסות לינארית כפי שציפינו מהתיאוריה של שיטת נקודת השבת. סדר ההתכנסות תלוי בסדר הנגזרות שאינן מתאפסות.

$$g'(s) = 2\cos(s) = 2\cos\,(1.895) \neq 0$$

מכיוון שאין התאפסות של הנגזרת הראשונה אז ההתכנסות הינה לינארית.

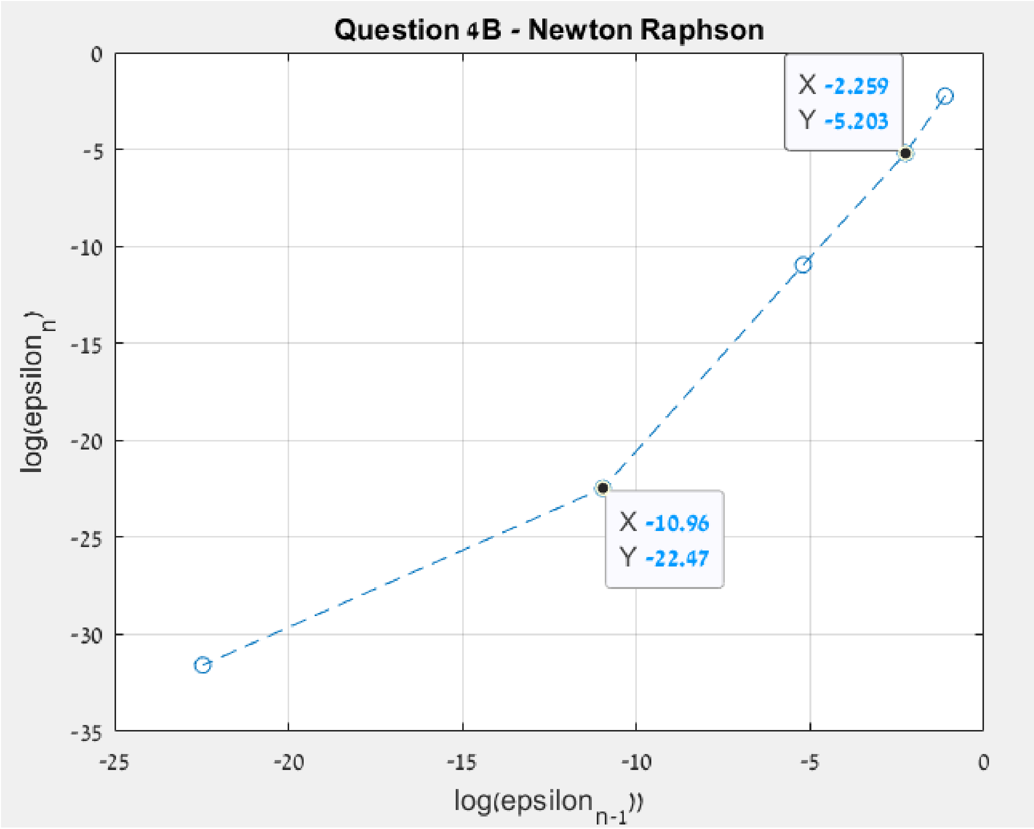
גם חישוב קבוע ההתכנסות קרוב לחישוב התיאורטי שכן קיבלנו:

$$A = |g'(s)| = |2\cos\,(1.895)| = 0.637$$

ב) נבצע שלבים דומים לסעיף א' כאשר ניעזר באלגוריתם בשיטת *NP* משאלה 1 רק שכעת נבצע את השלבים עבור המשוואה $x - 2\sin(x)$.

n	X_n	X_n_diff	error
1	1.5707963267949	0.429203673205103	0.324697940239103
2	2	0.099004405796091	0.104505732966
3	1.90099559420391	0.00548394882431436	0.00550132716990892
4	1.89551164537959	1.73781708814325e-05	1.73783455945653e-05
5	1.89549426720871	1.74732228686025e-10	1.74713132850002e-10
6	1.89549426703398	0	1.90958360235527e-14

נשים לב שלטובת ההתכנסות לקח לנו 6 איטרציות.



שיפוע הגרף יניב את קצב ההתכנסות ובעזרתו נגלה את קבוע ההתכנסות

$$\eta = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5.203 + 22.47}{-2.259 + 10.96} = 1.984 \approx 2$$

$$\log A = y - mx = -22.47 - 1.98 * (-10.96) = 0.725 \to A = e^{-0.725} = 0.484$$

בהתאם לציפייה מהחלק התיאורטי נקבל קצב התכנסות של 2 בקירוב.

עבור קבוע ההתכנסות קיבלנו בקירוב עבור שיטת *NP* $A = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(s)}{f'(s)}\right| = 0.579$

כפי שציפינו, שיטת ניוטון-רפסון בעלת התכנסות מהירה יותר מאשר שיטת נקודת השבת ועל כן נעדיף את שיטת ניוטון רפסון.

ג) נמצא את השורשים הנוספים שקיימים למשוואה *f(x)* ע"י שימוש ב-*g(x)* מסעיף א'.

סינוס שהיא המשוואה של נקודת השבת הינה פונקציה זוגית ולכן במידה ו-*s* פתרון למשוואה אז גם *-s* הינו פתרון למשוואה. בנוסף, *x=0* פתרון גם הוא. מכאן נקבל כי השורשים של המשוואה הינם: $s_1 = 0, s_{2,3} = \pm 1.895$

עבור תנאי ההתחלה שקבענו, $x_0 = \frac{\pi}{2}$, קיבלנו ע"י *g(x)* התכנסות לשורש s_3. משיקולי סימטריה נקבל את השורש s_3 באמצעות *g(x)* גם כן אך עם תנאי ההתחלה $x_0 = -\frac{\pi}{2}$.
ניתן להגיע להתכנסות עבור ניחוש התחלתי ועבור השורשים $s_{2,3}$:

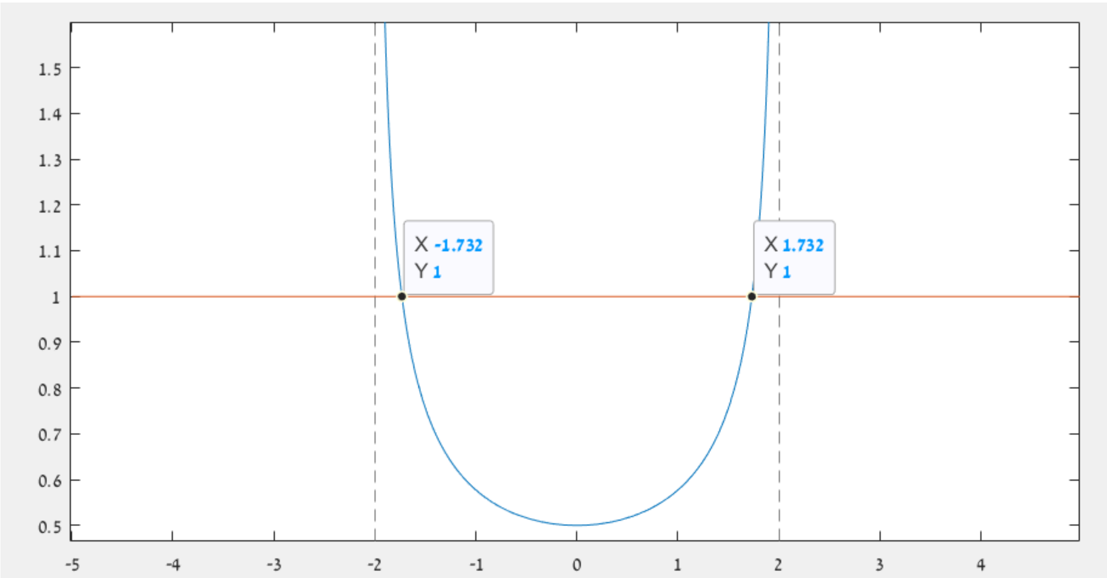
$$|g'(x_0)| = |2\cos(x_0)| = |2\cos(\pm\frac{\pi}{2})| = 0 < 1$$

$$|g'(s_{2,3})| = |2\cos(s_{2,3})| = |2\cos(\pm 1.895)| = 0.638 < 1$$

$$|g'(s_1)| = |2\cos(0)| = 2 > 1$$

עבור s_1 התנאי להתכנסות לא מתקיים על פי שיטת נקודת השבת ולכן לכל נקודת התחלה שניקח השיטה לא תתכנס עבור הפתרון $s_1 = 0$.

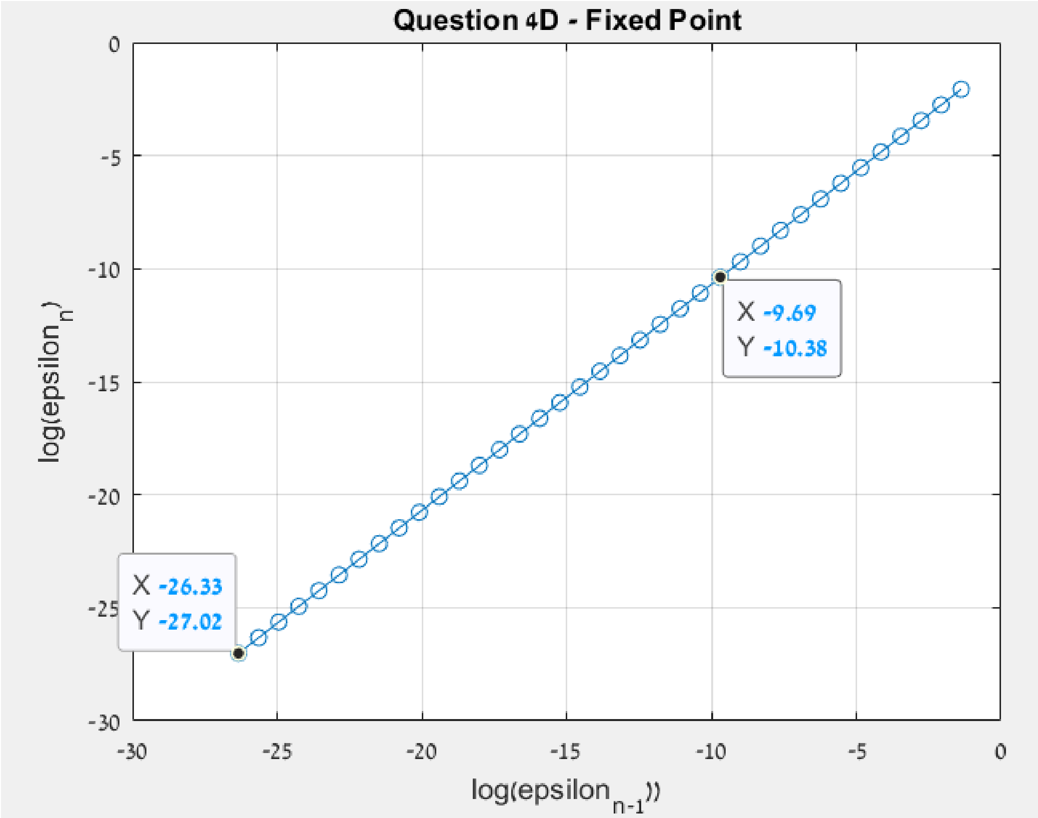
ד) $g(x) = \sin^{-1}(\frac{x}{2})$. נחפש את תחום ערכים של *x* עבורו נבחר את הניחוש ההתחלתי כדי לקבל התכנסות בנקודה *x=0*.
נבדוק תחילה מתי תנאי ההתכנסות ל*g'(x)* מתקיים ($|g'(x)| < 1$).
נבדוק מתי הנגזרת $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ חותכת את הישר *y=1*.



עבור $x \in [-1.732, 1.732]$ תתקיים ההתכנסות ולכן נבחר ניחוש התחלתי בתחום זה.
נבחר את נקודת ההתחלה $x_0 = 0.5$.
כעת על פי סעיף א' והפצרון $s_1 = 0$, צעד האיטרציה הינו $x_{n+1} = g(x_n) = \sin^{-1}(\frac{x_n}{2})$

n	X_n	X_n_diff	error
1	0.5	0	0
2	0.252680255142079	0.126001586984352	0.252680255142079
3	0.126678668157726	0.0632969058946156	0.126678668157726
4	0.0633817622631107	0.0316855741443422	0.0633817622631107
5	0.0316961881187685	0.0158474305776675	0.0316961881187685
6	0.015848757541101	0.0079242958319506	0.015848757541101
7	0.00792446170915041	0.00396222048714442	0.00792446170915041
8	0.00396224122200599	0.00198111931507084	0.00396224122200599
9	0.00198112190693515	0.000990560791475951	0.00198112190693515
10	0.000990561115459197	0.000495280537480642	0.000990561115459197
11	0.000495280577978554	0.000247640286458158	0.000495280577978554
12	0.000247640291520397	0.000123820145443808	0.000247640291520397
13	0.000123820146076588	6.19100729987454e-05	0.000123820146076588
14	6.19100730778429e-05	3.09550365339779e-05	6.19100730778429e-05
15	3.09550365438651e-05	1.54775182713146e-05	3.09550365438651e-05
16	1.54775182725505e-05	7.73875913619799e-06	1.54775182725505e-05
17	7.73875913635248e-06	3.86937956816659e-06	7.73875913635248e-06
18	3.8693795681859e-06	1.93468978409174e-06	3.8693795681859e-06
19	1.93468978409415e-06	9.67344892046927e-07	1.93468978409415e-06
20	9.67344892047228e-07	4.83672446023595e-07	9.67344892047228e-07
21	4.83672446023633e-07	2.41836223011814e-07	4.83672446023633e-07
22	2.41836223011819e-07	1.20918111505909e-07	2.41836223011819e-07
23	1.2091811150591e-07	6.04590557529548e-08	1.2091811150591e-07
24	6.04590557529549e-08	3.02295278764774e-08	6.04590557529549e-08
25	3.02295278764775e-08	1.51147639382387e-08	3.02295278764775e-08
26	1.51147639382387e-08	7.55738196911936e-09	1.51147639382387e-08
27	7.55738196911936e-09	3.77869098455968e-09	7.55738196911936e-09
28	3.77869098455968e-09	1.88934549227984e-09	3.77869098455968e-09
29	1.88934549227984e-09	9.44672746139921e-10	1.88934549227984e-09
30	9.44672746139921e-10	4.7233637306996e-10	9.44672746139921e-10
31	4.7233637306996e-10	2.3616818653498e-10	4.7233637306996e-10
32	2.3616818653498e-10	1.1808409326749e-10	2.3616818653498e-10
33	1.1808409326749e-10	5.9042046633745e-11	1.1808409326749e-10
34	5.9042046633745e-11	2.95210233168725e-11	5.9042046633745e-11
35	2.95210233168725e-11	1.47605116584363e-11	2.95210233168725e-11
36	1.47605116584363e-11	7.38025582921813e-12	1.47605116584363e-11
37	7.38025582921813e-12	3.69012791460906e-12	7.38025582921813e-12
38	3.69012791460906e-12	1.84506395730453e-12	3.69012791460906e-12
39	1.84506395730453e-12	9.22531978652266e-13	1.84506395730453e-12

נשים לב כי לטובת ההתכנסות לקח 39 איטרציות.



שיפוע הגרף יניב את קצב ההתכנסות ובעזרתו נגלה את קבוע ההתכנסות

$$\eta = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-10.38 + 27.02}{-9.69 + 26.33} = 1$$

$$\log A = y - mx = -27.02 + 26.33 = -0.69 \rightarrow A = e^{-0.69} = 0.502$$

בהתאם לתיאוריה שלמדנו, השיפוע בקירוב 1 משמע התכנסות לינארית $g'(0) = 0.5$
כפי שציפינו בשיטת נקודת השבת במקרה בו הנגזרת הראשונה אינה מתאפסת באפס.

אני אוסיף כאן מספר אזכורים מהרשימות של ההרצאות שעשויות להבהיר את צעדי החישוב התיאורטי:

שאלה 1:

$$0 = F(s) = F(\underbrace{s - x_n}_{-\varepsilon_n} + x_n) = F(x_n - \varepsilon_n) = F(x_n) - \varepsilon_n F'(x_n) + \underbrace{\frac{\varepsilon_n^2}{2} F''(\xi)}_{\text{שארית}}$$

s: שורש/פתרון $\varepsilon_n = x_n - s$ טור טיילור

ξ נקודה בין x_n ל- s

$$\rightarrow F(x_n) = \varepsilon_n F'(x_n) - \frac{\varepsilon_n^2}{2} F''(\xi)$$

נציב באיטרציה:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\varepsilon_n F'(x_n) - \frac{\varepsilon_n^2}{2} F''(\xi)}{F'(x_n)} = x_n - \varepsilon_n + \frac{\varepsilon_n^2}{2} \frac{F''(\xi)}{F'(x_n)}$$

נחסר s משני האגפים:

$$\underbrace{x_{n+1} - s}_{\varepsilon_{n+1}} = \underbrace{x_n - s}_{\varepsilon_n} - \varepsilon_n + \frac{\varepsilon_n^2}{2} \frac{F''(\xi)}{F'(x_n)}$$

$$\varepsilon_{n+1} = \cancel{\varepsilon_n} - \cancel{\varepsilon_n} + \frac{\varepsilon_n^2}{2} \frac{F''(\xi)}{F'(x_n)} \rightarrow \varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n^2}{2} \frac{F''(\xi)}{F'(x_n)}$$

בגבול $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = s$$

גם $\xi \in [x_n, s]$ מתכנס ל- s ולכן:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^2} = \frac{1}{2}\left|\frac{F''(s)}{F'(s)}\right|$$

שיטת ניוטון-רפסון ← סדר התכנסות $\ell=2$ (ריבועי)

קבוע התכנסות $A = \frac{1}{2}\left|\frac{F''(s)}{F'(s)}\right|$

נניח שקיימת בקטע נקודה $x_0 \in [a,b]$ כך ש- $F(x_0) \neq 0$ ונניח שקיים h -"גודל צעד"- כך ש- $F(x_0+h)=0$ כלומר $s = x_0 + h$ הוא פתרון למשוואה

לקביעת ערכו של h נפתח את $F(x_0+h)$ לטור טיילור סביב x_0:

$$0 = F(\underbrace{x_0+h}_{s}) = F(x_0) + hF'(x_0) + \underbrace{\frac{1}{2!} h^2 F''(\xi)}_{\text{שארית}} \qquad x_0 \leq \xi \leq x_0 + h$$

עבור h מספיק קטן נזניח את איבר השארית ($O(h^2)$) ונקבל

$$0 \simeq F(x_0) + hF'(x_0)$$

$$\rightarrow h = -\frac{F(x_0)}{F'(x_0)} \quad \rightarrow \quad s = x_0 + h \simeq x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}$$

מכאן נבנה את התהליך האיטרטיבי באופן הבא:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n + h_n = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}}$$

* נבחן את סדר ההתכנסות של שיטת ניוטון-רפסון לפתרון

איטרציה:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = s \quad ; \; F(s) = 0$$

נפתח לטור טיילור:

שאלה 3:

* ננסה לעקוף את בעיית אי ידיעת הריבוי בדרך שונה

בסביבת השורש:
$$\begin{cases} F(x) = (x-s)^q G(x) \\ F'(x) = q(x-s)^{q-1}G(x) + (x-s)^q G'(x) \end{cases}$$ כאשר $G(s)\neq 0$

נגדיר:
$$u(x) = \frac{F(x)}{F'(x)} = \frac{(x-s)^q G(x)}{q(x-s)^{q-1}G(x)+(x-s)^q G'(x)} = \frac{(x-s)G(x)}{qG(x)+(x-s)G'(x)}$$

$$\lim_{x\to s}\frac{u(x)}{x-s} = \lim_{x\to s}\frac{\cancel{(x-s)}G(x)}{\cancel{(x-s)}(qG(x)+(x-s)G'(x))} = \frac{1}{q} \neq 0$$

← ל- $u(x)$ שורש פשוט ב- $x=s$ (רק הפונקציה מתאפסת ללא אף אחת מהנגזרות)

לכן, אפשר להפעיל את שיטת ניוטון הרגילה לפתרון $u(x)=0$ לקבלת $x=s$:
$$x_{n+1} = x_n - \frac{u(x_n)}{u'(x_n)}$$

כאשר:
$$\underbrace{u'(x)}_{\text{נגזרת של מנה}} = \frac{(F'(x))^2 - F(x)F''(x)}{(F'(x))^2} = 1 - \frac{F(x)}{F'(x)}\frac{F''(x)}{F'(x)} = 1 - \frac{F''(x)}{F'(x)}u(x)$$

ההתכנסות שתושג תהיה ריבועית ($\alpha=2$)

ניסוח הבעיה: נתונה המשוואה $F(x)=0$ כאשר $x=s$ הוא השורש

כמו כן נתון
$$F^{(j)}(x)\Big|_{x=s} = 0 \ ; \ j<q$$
$$j=0,1,\dots,q-1$$

וקיימת הנגזרת
$$F^{(q)}(x)\Big|_{x=s} \neq 0$$

* נבחן את המבנה של $F(x)$ סביב $x=s$ באמצעות פיתוח לטור טיילור
$$F(x) = F(s) + \frac{1}{1!}(x-s)F^{(1)}(s) + \frac{1}{2!}(x-s)^2F^{(2)}(s) + \cdots + \frac{1}{(q-1)!}(x-s)^{q-1}F^{(q-1)}(s) + \underbrace{\frac{1}{q!}(x-s)^q F^{(q)}(\xi(x))}_{\text{שארית}}$$

$\xi(x)$ נקודה הנמצאת בקטע בין x ל- s

נתון כי $\forall j=0,1,\dots,q-1$ $F^{(j)}(s)=0$ ו- $F^{(q)}(x)$ קיים
$$\longrightarrow F(x) = \frac{1}{q!}(x-s)^q F^{(q)}(\xi(x)) = (x-s)^q \underbrace{\left(\frac{1}{q!}F^{(q)}(\xi(x))\right)}_{G(x)} = (x-s)^q G(x)$$

← ל- $F(x)$ יש <u>שורש מריבוי q</u> ב- $x=s$ (הפונקציה ו- $q-1$ הנגזרות שלה מתאפסות ב-$x=s$)

ו- <u>$G(s)\neq 0$</u>

לכן, לקבלת השורש נפתור בשיטת ניוטון-רפסון את $F(x)=(x-s)^q G(x)$
$$F'(x) = q(x-s)^{q-1}G(x) + (x-s)^q G'(x)$$

וננסח את האיטרציה בשינוי קל:
$$x_{n+1} = x_n - P\frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$$

כאשר P שלם חיובי

* בשיטת ניוטון-רפסון שפתרנו עד כה $P=1$

נציב:
$$x_{n+1} = x_n - P\frac{(x_n-s)^q G(x_n)}{q(x_n-s)^{q-1}G(x_n)+(x_n-s)^q G'(x_n)}$$
$$= x_n - P\frac{(x_n-s)G(x_n)}{qG(x_n)+(x_n-s)G'(x_n)}$$

נניח שהשיטה מתכנסת ונבחן את קצב ההתכנסות

$$\varepsilon_{n+1} = x_{n+1} - s = \underbrace{(x_n - s)}_{\varepsilon_n} - P\,\frac{(x_n-s)\,G(x_n)}{q\,G(x_n) + (x_n-s)\,G'(x_n)}$$

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - P\,\frac{\varepsilon_n\,G(x_n)}{q\,G(x_n) + \varepsilon_n\,G'(x_n)}$$

$$= \frac{(q-P)\,G(x_n)}{q\,G(x_n) + \varepsilon_n\,G'(x_n)}\,\varepsilon_n + \frac{G'(x_n)}{q\,G(x_n) + \varepsilon_n\,G'(x_n)}\,\varepsilon_n^2$$

השגיאה בצעד ה- $n+1$ תלויה ב- ε_n וב- ε_n^2

במידה ויש התכנסות $x_n \xrightarrow{n\to\infty} s$

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0 \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} G(x_n) \neq 0$$

לכן, עבור n מספיק גדול

$$\varepsilon_{n+1} \approx \frac{q-P}{q}\,\varepsilon_n + \frac{1}{q}\,\frac{G'(x_n)}{G(x_n)}\,\varepsilon_n^2$$

* נבחן ביטוי זה עבור מקרי q ו- P שונים:

- איטרצית ניוטון-רפסון רגילה $P=1$ ושורש עם ריבוי $q=1$ $(F'_{(s)} \neq 0)$

נקבל: $\varepsilon_{n+1} = \frac{G'(x_n)}{G(x_n)}\,\varepsilon_n^2$ $\quad (q-P=0\ ;\ q=1)$

$\longleftarrow$ סדר התכנסות ריבועי $(\alpha=2)$

וקבוע התכנסות חסום $A = \left|\frac{G'(x_n)}{G(x_n)}\right|$

- איטרצית ניוטון-רפסון רגילה $P=1$ ושורש בעל ריבוי $q>1$

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{q-1}{q}\,\varepsilon_n + \frac{1}{q}\,\frac{G'(x_n)}{G(x_n)}\,\varepsilon_n^2$$

ובגבול בו ε_n שואף לאפס: $\varepsilon_{n+1} \approx \frac{q-1}{q}\,\varepsilon_n$

$\longleftarrow$ סדר התכנסות ליניארי $(\alpha=1)$

- עבור המקרה $q>1$ ו- $P=q$:

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{q}\,\frac{G'(x_n)}{G(x_n)}\,\varepsilon_n^2$$

$\longleftarrow$ סדר התכנסות ריבועי $(\alpha=2)$

וקבוע התכנסות $A = \frac{1}{q}\left|\frac{G'(x_n)}{G(x_n)}\right|$ $\quad (x_n \to s)$

* מסקנה: כאשר יש שורש עם ריבוי q נבחר $P=q$

שאלה 4:

<u>משפט (משפט נקודת השבת):</u>

תהא הנקודה s פתרון של המשוואה $x=g(x)$ בקטע $[s-\rho, s+\rho]$ (כלומר, הסביבה ברוחב ρ סביב s $(J=\{x:|x-s|\leq\rho\})$

נניח כי $g(x)$ מקיימת $\forall x\in J$ $\quad |g'(x)|\leq k<1$

אזי עבור $x_0\in J$ וסדרה $x_{n+1}=g(x_n)$ מתקיים:

1. $n=0,1,\cdots$ $\quad x_n\in J$ (כל האיברים ב- J)
2. $\lim_{n\to\infty} x_n = s$ (התכנסות לנקודת השבת)
3. s הינו השורש היחיד ל- $x=g(x)$

<u>התכנסות שיטת נקודת השבת</u>

קיבלנו שהאיטרציה $x_{n+1}=g(x_n)$ מתכנסת לנקודה $s=x$: $\lim_{n\to\infty} x_n = s$

מהו סדר ההתכנסות?

ממשפט הערך הממוצע: $\underbrace{g(x_n)}_{x_{n+1}} = \underbrace{g(s)}_{s} + g'(\xi)(x_n-s)$ $\quad \xi$ נקודה בין x_n ל- s

$$\rightarrow \underbrace{x_{n+1}-s}_{\varepsilon_{n+1}} = g'(\xi)\underbrace{(x_n-s)}_{\varepsilon_n} \rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|} = \lim_{n\to\infty}|g'(\xi)| = |g'(s)|$$

← סדר התכנסות לינארי $\alpha=1$
קבוע התכנסות $A=|g'(s)|$

נניח $g(x)$ רציפה וגזירה p פעמים בסביבת s $\quad \begin{cases} g(x)\in C^p(J) \\ s=g(s) \end{cases}$

וכן נניח $j=1,2,\ldots,p-1$ $\quad \begin{cases} g^{(j)}(s)=0 & \text{p-1 הנגזרות הראשונות מתאפסות} \\ g^{(p)}(s)\neq 0 & \text{הנגזרת ה- p קיימת} \end{cases}$

← שיטה איטרטיבית עם סדר התכנסות $\alpha=p$ וקבוע התכנסות $A=\frac{1}{p!}|g^{(p)}(s)|$

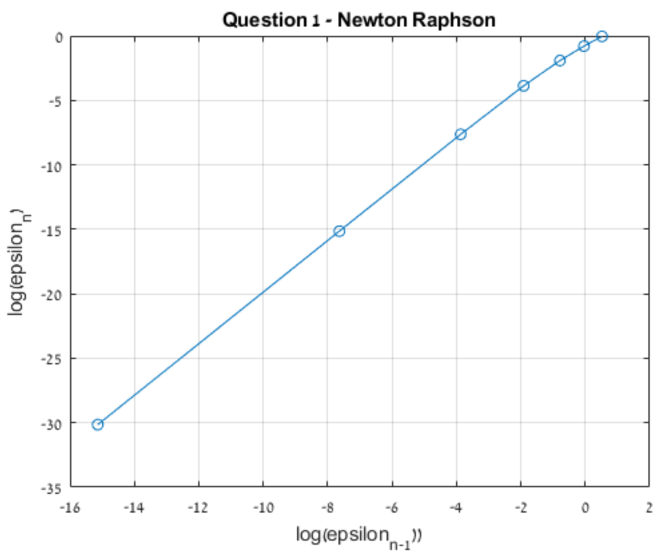
Contents

variables

```
a = 1;
b = 5;
I1 = 316098052;% my ID
tolerance = 10^(-12);
s = 3^(1/4); %Solution for Question 1 and 2
x_0 = a + (b - a) * (I1 / (I1 + I1)); %Initial guess //I1=I2
format long %long display for output
```

Question 1

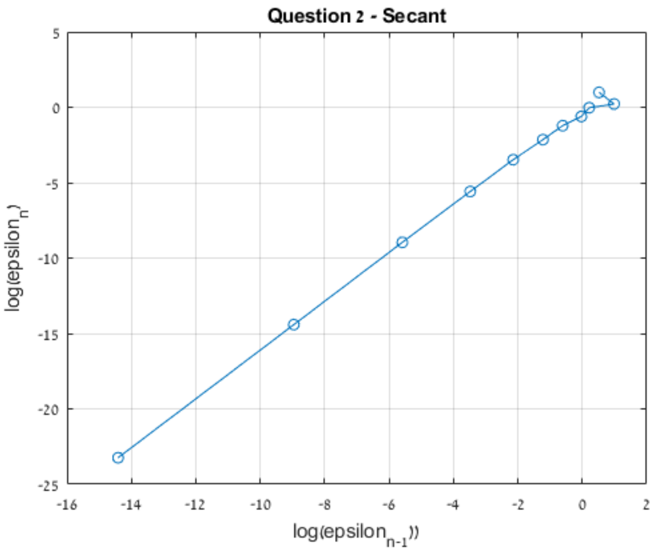
```
[x_n_1, error_n, x_n_diff_1] = Newton_Raphson(x_0, tolerance, s, 1);

%Graph
figure(1)
y_axis = log(error_n(2 : end));  %log(epsilon_n)
x_axis = log(error_n(1 : end-1)); %log(epsilon_n_-1))
plot(x_axis, y_axis, '-o');
title('Question 1 - Newton Raphson');
ylabel('log(epsilon_n)');
xlabel('log(epsilon_n_-_1))');
grid on;
movegui('west');

%Required table
n = [1 : length(error_n)]';
X_n = x_n_1(:, 1 : length(x_n_1) - 1)';
X_n_diff = x_n_diff_1';
error = error_n';
T1 = table(n, X_n, X_n_diff, error);

%disp(T1);
```



Question 2

```
x1 = x_0 + (b-x_0)*(I1/(I1+I1)); %Second Initial guess - I1=I2
[x_n_2, error_n, x_n_diff_2] = Secant(x_0, x1, tolerance, s);

%Graph
figure(2)
y_axis = log(error_n(2 : end)); %log(epsilon_n)
x_axis = log(error_n(1 : end-1)); %log(epsilon_n_-1)
plot(x_axis, y_axis, '-o');
title('Question 2 - Secant');
ylabel('log(epsilon_n)');
xlabel('log(epsilon_n_-_1))');
grid on;
movegui('north');

%Required table
n = [1:length(error_n)]';
```

```
X_n = x_n_2(:,1:length(x_n_2)-1)';
X_n_diff = x_n_diff_2';
error = error_n';
T2 = table(n,X_n, X_n_diff, error);

%disp(T2);
```

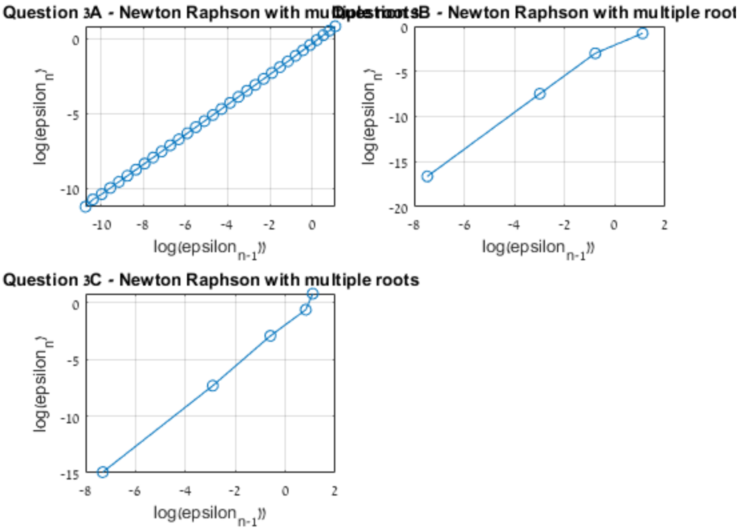


Question 3

Part A

```
x_0 = 5;
s3 = 2;
[x_n_3A, error_n, x_n_diff_3A] = Newton_Raphson_multiple_roots(x_0, 1, tolerance, s3, 1);

%Graph
figure(3)
subplot(2,2,1)
y_axis = log(error_n(2 : end)); %log(epsilon_n)
x_axis = log(error_n(1 : end-1)); %log(epsilon_n_-1)
plot(x_axis, y_axis, '-o');
title('Question 3A - Newton Raphson with multiple roots');
ylabel('log(epsilon_n)');
xlabel('log(epsilon_n_-_1))');
grid on;;

%Required table
n = [1 : length(error_n)]';
X_n = x_n_3A(:, 1 : length(x_n_3A) - 1)';
X_n_diff = x_n_diff_3A';
error = error_n';
T3A = table(n, X_n, X_n_diff, error);

%disp(T3A); %Display the table in the command window.

% Part B
[X_n_3B, error_n, Xn_diff_3B] = Newton_Raphson_multiple_roots(x_0, 1, tolerance, s3, 2);

%Graph
subplot(2,2,2)
y_axis = log(error_n(2 : end)); %log(epsilon_n)
x_axis = log(error_n(1 : end-1)); %log(epsilon_n_-1)
plot(x_axis, y_axis, '-o');
title('Question 3B - Newton Raphson with multiple roots');
ylabel('log(epsilon_n)');
xlabel('log(epsilon_n_-_1))');
grid on;;

%Required table
n = [1 : length(error_n)]';
X_n = X_n_3B(:, 1 : length(X_n_3B) - 1)';
X_n_diff = Xn_diff_3B';
error = error_n';
T3B = table(n, X_n, X_n_diff, error);

%disp(T3B);

% Part C
[X_n_3C, error_n, Xn_diff_3C] = Newton_Raphson_multiple_roots(x_0,2.999,tolerance,s3, 1); %the reason for 2.999 explained in the report

%Graph
subplot(2,2,3)
y_axis = log(error_n(2 : end)); %log(epsilon_n)
x_axis = log(error_n(1 : end-1)); %log(epsilon_n_-1)
plot(x_axis, y_axis, '-o');
```

```
title('Question 3C - Newton Raphson with multiple roots');
ylabel('log(epsilon_n)');
xlabel('log(epsilon_n_-_1))');
grid on;
movegui('east');

%Required table
n = [1:length(error_n)]';
X_n = X_n_3C(:,1:length(X_n_3C)-1)';
X_n_diff = Xn_diff_3C';
error = error_n';
T3C = table(n,X_n, X_n_diff, error);

%disp(T3C);
```

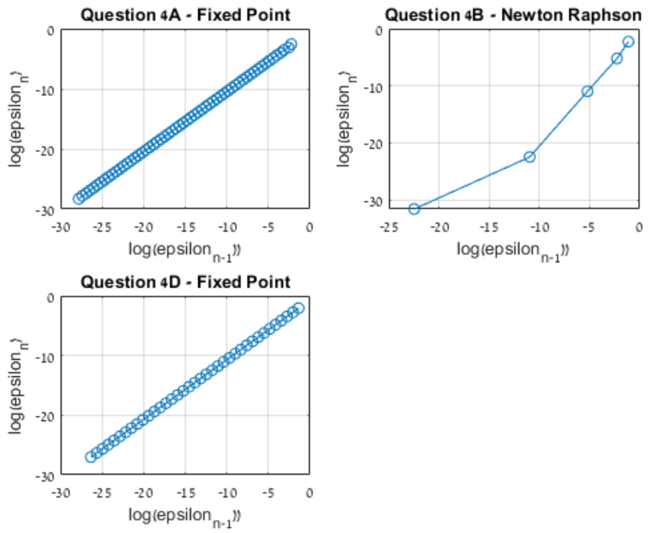


Question 4

Part A

```
x_0 = pi/2;
s4 = 1.895494267034;
[X_n_4A, error_n, Xn_diff_4A] = Fixed_Point(x_0, tolerance, s4, 1);

%Graph
figure(4)
subplot(2,2,1)
y_axis = log(error_n(2 : end)); %log(epsilon_n)
x_axis = log(error_n(1 : end-1)); %log(epsilon_n_-1)
plot(x_axis, y_axis, '-o');
title('Question 4A - Fixed Point');
ylabel('log(epsilon_n)');
xlabel('log(epsilon_n_-_1))');
grid on;

%Required table
n = [1 : length(error_n)]';
X_n = X_n_4A(:, 1 : length(X_n_4A) - 1)';
X_n_diff = Xn_diff_4A';
error = error_n';
T4A = table(n, X_n, X_n_diff, error);

%disp(T4A);

% Part B
[X_n_4B, error_n, Xn_diff_4B] = Newton_Raphson(x_0, tolerance, s4, 4);

%Graph
subplot(2,2,2)
y_axis = log(error_n(2 : end)); %log(epsilon_n)
x_axis = log(error_n(1 : end-1)); %log(epsilon_n_-1)
plot(x_axis, y_axis, '-o');
title('Question 4B - Newton Raphson');
ylabel('log(epsilon_n)');
xlabel('log(epsilon_n_-_1))');
grid on;

%Required table
n = [1 : length(error_n)]';
X_n = X_n_4B(:, 1 : length(X_n_4B) - 1)';
X_n_diff = Xn_diff_4B';
error = error_n';
T4B = table(n, X_n, X_n_diff, error);

%disp(T4B);
```

```
% Part D
s4D = 0;
x_0 = 1/2;
[X_n_4D, error_n, Xn_diff_4D] = Fixed_Point(x_0, tolerance, s4D, 2);

%Graph
subplot(2,2,3)
y_axis = log(error_n(2 : end)); %log(epsilon_n)
x_axis = log(error_n(1 : end-1)); %log(epsilon_n_-1)
plot(x_axis, y_axis, '-o');
title('Question 4D - Fixed Point');
ylabel('log(epsilon_n)');
xlabel('log(epsilon_n_-_1))');
grid on;
movegui('south');

%Required table
n = [1:length(error_n)]';
X_n = X_n_4D(:,1:length(X_n_4D)-1)';
X_n_diff = Xn_diff_4D';
error = error_n';
T4D = table(n,X_n, X_n_diff, error);

%disp(T4D);
```



Sub-Functions

```
%Newton-Raphson
function [x_n, error_n, x_n_diff] = Newton_Raphson(x_0, tolerance, s, question)
    iteration = 2;
    error_n = zeros;
    x_n_diff = zeros;
    x_n(1) = x_0; %initial guess
    if question == 1
        fx_div_fx_tag = (x_0^4 - 3) / (4*x_0^3);
    elseif question == 4
        fx_div_fx_tag = (x_0 - 2*sin(x_0)) / (1 - 2*cos(x_0));
    end

    x_n(2) = x_0 - fx_div_fx_tag;
    x_n_diff_abs = abs(x_n(iteration) - x_n(iteration - 1)); %|x_n - x_n_-1)|
    x_n_diff(1) = x_n_diff_abs;
    error_n(1) = abs(x_n(1) - s); %|x_n - s|
    while x_n_diff_abs >= tolerance
        if question == 1
            fx_div_fx_tag = (x_n(iteration)^4 - 3) / (4*x_n(iteration)^3);
        elseif question == 4
            fx_div_fx_tag = (x_n(iteration) - 2*sin(x_n(iteration))) / (1 - 2*cos(x_n(iteration)));
        end
        x_n(iteration+1) = x_n(iteration) - fx_div_fx_tag;
        error_n(iteration) = abs(x_n(iteration) - s);
        iteration = iteration + 1;
        x_n_diff_abs = abs(x_n(iteration) - x_n(iteration - 1));
        x_n_diff(iteration-1) = x_n_diff_abs;
    end
end

%Secant
function [x_n, error_n, x_n_diff] = Secant(x0, x1, tolerance, s)
    iteration = 2;
    error_n = zeros;
    x_n_diff = zeros;
    x_n(1) = x0; %initial guess sol.
    x_n(2) = x1; %Second guess sol.
    x_n_diff_abs = abs(x_n(iteration) - x_n(iteration-1)); %|x_n - x_n_-1|
```

```
    x_n_diff(1) = x_n_diff_abs;
    error_n(1) = abs(x_n(1) - s);
    while abs(x_n(iteration) - x_n(iteration-1)) > tolerance
        x_n(iteration + 1) = x_n(iteration) - ((x_n(iteration))^4 - 3) * (x_n(iteration) - x_n(iteration - 1)) / ((x_n(iteration)^4 - 3) - (x_n(iteration - 1)^
        error_n(iteration) = abs(x_n(iteration) - s);  % |x_n -s|
        iteration = iteration + 1;
        x_n_diff_abs = abs(x_n(iteration) - x_n(iteration - 1));
        x_n_diff(iteration - 1) = x_n_diff_abs;
    end
end

%Newton-Raphson with multiple roots
function [x_n, error_n, x_n_diff] = Newton_Raphson_multiple_roots(x_0, q, tolerance, s, option)
    %fx = x^5 - 6*x^4 + 14*x^3 - 20*x^2 + 24*x - 16;
    %fx_tag = 5*x^4 - 24*x^3 + 42*x^2 - 40*x + 24;
    %fx_double_tag = 20*x^3 - 72*x^2 + 84*x - 40;
    iteration = 2;
    error_n = zeros;
    x_n_diff = zeros;
    x_n(1) = x_0;
    u_x0 = (x_0^5 - 6*x_0^4 + 14*x_0^3 - 20*x_0^2 + 24*x_0 - 16) / (5*x_0^4 - 24*x_0^3 + 42*x_0^2 - 40*x_0 + 24); %u(x_0) = f(x_0)/f'(x_0)
    y = 0;
    if option == 1
        y = u_x0; % y = u(x_0)
    elseif option == 2
        fx = x_0^5 - 6*x_0^4 + 14*x_0^3 - 20*x_0^2 + 24*x_0 - 16;
        fx_tag = 5*x_0^4 - 24*x_0^3 + 42*x_0^2 - 40*x_0 + 24;
        fx_double_tag = 20*x_0^3 - 72*x_0^2 + 84*x_0 - 40;
        u_x0_tag = 1 - (fx*fx_double_tag) / (fx_tag^2);
        y = (u_x0) / u_x0_tag; % y = u(x_0)/u'(x_0)
    end
    x_n(2) = x_0 - y;
    x_n_diff_abs = abs(x_n(iteration) - x_n(iteration - 1)); %|x_n - x_n_-1|
    x_n_diff(1) = x_n_diff_abs;
    error_n(1) = abs(x_n(1) - s);
    while (x_n_diff_abs > tolerance) && (abs(x_n(iteration) - s) < (abs(x_n(iteration-1) - s)))
        u_xn = (x_n(iteration)^5 - 6*x_n(iteration)^4 + 14*x_n(iteration)^3 - 20*x_n(iteration)^2 + 24*x_n(iteration) - 16) / (5*x_n(iteration)^4 - 24*x_n(iter
        if option == 1
            y = u_xn; % y = u(x_n)
        elseif option == 2
            fx = x_n(iteration)^5 - 6*x_n(iteration)^4 + 14*x_n(iteration)^3 - 20*x_n(iteration)^2 + 24*x_n(iteration) - 16;
            fx_tag = 5*x_n(iteration)^4 - 24*x_n(iteration)^3 + 42*x_n(iteration)^2 - 40*x_n(iteration) + 24;
            fx_double_tag = 20*x_n(iteration)^3 - 72*x_n(iteration)^2 + 84*x_n(iteration) - 40;
            u_xn_tag = 1 - (fx*fx_double_tag) / (fx_tag^2);
            y = (u_xn) / u_xn_tag; % y = u(x_n)/u'(x_n)
        end
        x_n(iteration+1) = x_n(iteration) - q * y;
        error_n(iteration) = abs(x_n(iteration) - s);  % |x_n -s|
        iteration = iteration + 1;
        x_n_diff_abs = abs(x_n(iteration) - x_n(iteration - 1));
        x_n_diff(iteration - 1) = x_n_diff_abs;
    end
end

%Fixed Point
function [x_n, error_n, x_n_diff] = Fixed_Point(x_0, tolerance, s , option)
    iteration = 2;
    error_n = zeros;
    x_n_diff = zeros;
    x_n(1) = x_0;
    g = 0;
    if option == 1
        g = 2*sin(x_n(1));
    elseif option == 2
        g = asin(x_n(1) / 2);
    end
    x_n(2) = g;
    while abs(x_n(iteration) - x_n(iteration - 1)) >= tolerance
        if option == 1
            g = 2*sin(x_n(iteration));
        elseif option == 2
            g = asin(x_n(iteration) / 2);
        end
        x_n(iteration + 1) = g;
        error_n(iteration) = abs(x_n(iteration) - s);
        iteration = iteration + 1;
        Xn_Diff = abs(x_n(iteration)-x_n(iteration-1));
        x_n_diff(iteration-1) = Xn_Diff;
    end
end
```

Published with MATLAB® R2019b