

**אוניברסיטת בן גוריון בנגב**  
**הפקולטה למדעי ההנדסה**  
**המחלקה להנדסת חשמל ומחשבים**

**עבודה מס' 2**

**בקורס "מבוא לעיבוד אותות"**

**סמסטר א' התשפ"א**

## מבוא

## מטרה

לעבודה זו, שתי מטרות עיקריות:

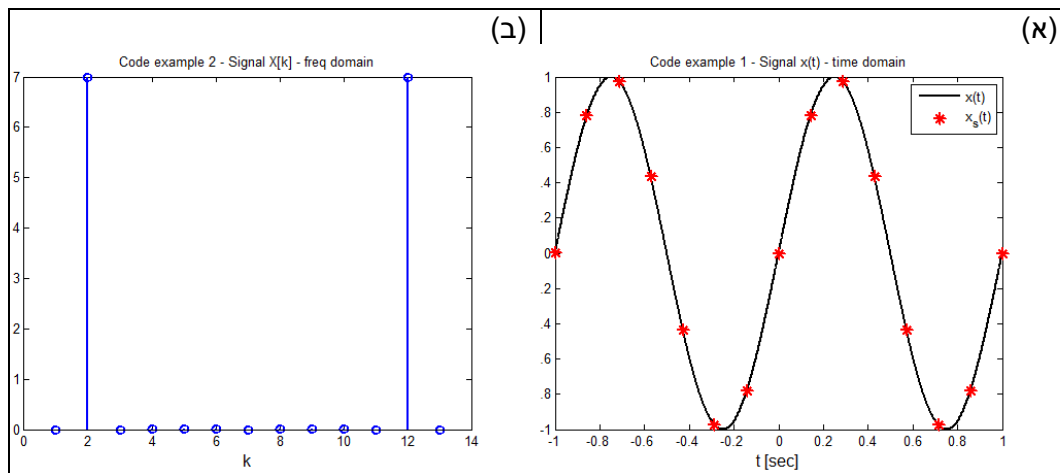
1. המחשת החומר התיאורטי הנלמד בהרצאות ובתרגילים.
  2. התנסות בפתרון בעיות בסיסיות בעיבוד אותות באמצעות הכלים לניתוח אותות שנלמדו בהרצאות.
- על מנת להשיג מטרות אלה, נדרשים הסטודנטים בקורס לפתור בעיות בסיסיות בעיבוד אותות באמצעות כתיבת סימולציות בתכנת MATLAB.

## פרטי הגשה

1. את העבודות יש להגיש עד תאריך 13/01/2022 לאתר הקורס: <http://moodle2.bgu.ac.il> - ההגשה אלקטרונית.
2. את הקוד יש לצרף להגשה המוקלדת (ניתן להעלות מספר קבצים לאתר) בתור קובץ \*.m, כמו כן אם ישנו יותר מקובץ MATLAB אחד ניתן לאגד בקובץ zip ולהעלות אותו.
3. חישובים אנליטיים ארוכים ניתן לצרף בכתב יד ויש לשבצם בגוף העבודה המוקלדת. יש להקפיד על כתב יד ברור וכתב לא מובן לא ייבדק.
4. את העבודה יש לבצע בזוגות ולהגיש באתר פעם אחת בלבד.
5. את כל הגרפים יש ליצור בעזרת MATLAB או תוכנות מקבילות.

## אופן ביצוע העבודה

1. במהלך העבודה נדרש לייצג ולבצע חישובים על אותות "רציפים" ו"בדידים" או "דגומים" באמצעות MATLAB. אות "רציף" מיוצג ב-MATLAB כוקטור ערכים של הפונקציה שמתארת את האות בנקודות זמן צפופות באופן יחסי. אות "בדיד" או "דגום" ייוצג כוקטור שכולל מספר מועט יותר של ערכים בהתאם לתדר הדגימה.
2. גרף שמציג אות "רציף" ימומש בשימוש בפונקציה `plot()`, וגרף שמציג אות "בדיד" או "דגום" ימומש בשימוש בפונקציה `stem()` או `plot()` עם פרמטרים מתאימים כפי שמתואר בדוגמה באיור 1.
3. הגרפים הנדרשים, חייבים להיות מפורטים ולכלול את שם הגרף ושמות הצירים כולל יחידות. ניתן להיעזר בפונקציות: `title()`; `xlabel()`; `ylabel()`.
4. כאשר נדרש להציג מספר אותות באותו הגרף, יש להשתמש בסימון צבע ו/או עובי ו/או סגנון שונה להצגת כל אות. כמו כן חשוב להוסיף מקרא לגרף. ניתן להיעזר בפונקציות `hold on`; `legend()` ובפרמטרים של `plot` כגון: 'LineWidth'; 'LineStyle'; 'Marker'; 'Color'.
5. לדוגמה: נתון האות  $x(t) = \sin(2\pi t)$  ביחידות וולט [V] כפונקציה של הזמן בשניות [sec]. האות  $x(t)$  נדגם בתדר דגימה  $F_s = \frac{1}{T_s} = 7 \text{ [Hz]}$ . נדרש להציג בגרף אחד את האות  $x(t)$  ה"רציף" והאות "הדגום"  $x_s[n]$  ובגרף נוסף נדרש להציג את התמרת DFT של האות. הגרפים צריכים להיראות כפי שמתואר באיור 1 א' ו-ב' בהתאמה כולל הקפדה על כל הפירוט הנדרש. גרפים ללא פירוט ייפסלו.
6. כאשר נדרש להציג ביטוי או חישוב אנליטי יש לכתוב פתרון מלא (מוקלד ולא סרוק). תשובות חלקיות יפסלו.
7. שימו לב שהעבודה מבוססת בעיקר על החומר שניתן בהרצאות 5-9 בפתרון הבעיות ובפתוחים רצוי להיעזר ולהסתמך על החומר שנלמד בכתה.



איור 1. אות סינוס בתדר 1 [Hz] דגום בתדר 7[Hz]. (א) אות דגום מוצג כ\* (ב) התמרת DFT של האות מוצג עם stem()

קוד Matlab למימוש הגרף :

```
clc;
clear all;
close all;

%% Code example II
T=1; % [sec] signal period time
t=-1:1/1000:1; % continuous time vector
x=sin(2*pi/T*t); % continuous signal

Ws=7*2*pi; % [rad/sec] sampling angular frequency
Ts=2*pi/Ws; % [sec] sampling time period
ts=-1:Ts:1; % sampling time vector
ts=ts(1:end-1); % deleting last sample
xs=sin(2*pi/T*ts); % discrete signal

N=length(ts);
k_vec=0:N-1;
X=fft(xs);

% showing two signals over the same figure
figure; % new figure window
plot(t,x,'k','LineWidth',2); % draw the continuous signal graph
hold on; % retain current graph in figure, to allow several graphs
over the same figure
plot(ts,xs,'*r','LineWidth',1.5,'MarkerSize',10); % draw the discrete signal graph -
% other form to write the above command:
plot(ts,xs,'LineStyle','*','Color','r','LineWidth',1.5,'MarkerSize',10);
title('Code example 1 - Signal x(t) - time domain'); xlabel('t [sec]','FontSize',12);
ylabel('x(t) [V]','FontSize',12);
legend(['x(t)']; ['x_s(t)']));

% showing two signals over the same figure - using "stem()" for discrete signal
figure; % new figure window
stem(k_vec,abs(X),'b','LineWidth',1.5); % draw the DFT of xs "stem()"
title('Code example 2 - Signal X[k] - freq domain'); xlabel('k','FontSize',12);
ylabel('X[k]','FontSize',12);
```

## 1. התמרת DFT (60 נק')

$$x[n] = s[n] + v[n], n = 0, 1, \dots, N - 1$$

נתון האות הבדיד  $x[n]$  הבא :

$$s[n] = 2\cos[\theta_1 n]$$

האות מורכב מסכום שני האותות  $s[n]$ ,  $v[n]$  הנתונים :

$$v[n] = 3\sin[\theta_2 n]$$

כאשר הפרמטרים של האותות נתונים על ידי :

$$\theta_1 = \frac{\pi}{10.25}; \theta_2 = \frac{2\pi}{5}; N = 30;$$

א. (8 נק') נסמן ב- $X[k]$  התמרת ה-DFT של  $x[n]$ .

- הצג את האותות  $x[n]$ ,  $v[n]$ ,  $s[n]$  על גבי גרף אחד (השתמש בplot).
- הצג את הערך המוחלט של  $S^d[k]$ ,  $V^d[k]$ ,  $X^d[k]$  על גבי גרף אחד (לחישוב ההתמרה השתמש בפונקציה  $\text{fft}()$  ולהצגת התוצאה השתמש ב-  $\text{stem}()$ ).
- הסבר את ההבדלים בין האותות  $S[k]$ ,  $V[k]$ .

ב. (8 נק') צור סדרה חדשה  $x_z[n]$  ע"י ריפוד של  $x[n]$  ב-15 אפסים נוספים לאורך כולל של 45 דגימות

$$x_z[n] = \{x[0], \dots, x[N - 1], 0, \dots, 0\}$$

- הצגי את הערכים המוחלטים של  $X_z^d[k]$  ושל  $X^d[k]$  על גבי גרף אחד.
- הסברי את ההבדלים בין  $X_z^d[k]$  לבין  $X^d[k]$ . יש להתבסס על הקשר בין ההתמרות DFT ו-DTFT.

הערה: שימו לב שיש לנרמל את ציר התדר על מנת להציג את שתי הפונקציות בגרף אחד

ג. (8 נק') צור סדרה חדשה  $x_2[n]$  ע"י ריפוד של  $x[n]$  ב-15 דגימות נוספות מהאות המקורי, כלומר :

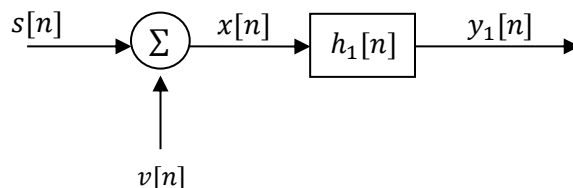
$$x_2[n] = s[v] + v[n], n = 0, \dots, N - 1. \text{ כאשר } N = 45. \text{ נסמן את ה-DFT של הסדרה ב-} X_2^d[k].$$

- הצגי את הערכים המוחלטים של  $X_2^d[k]$  ושל  $X^d[k]$  על גבי גרף אחד.
- הסברי ממה נובעים ההבדלים ביחס ל- $X_z^d[k]$  וביחס ל- $X^d[k]$ .
- ד. (6 נק') יש להראות את קיום משפט פרסוול עבור הזוגות  $X^d[k]$ ,  $x[n]$  ו- $X_z^d[k]$ ,  $x_z[n]$ .
- הצגי את הביטוי למשפט פרסוול באופן מטריציוני.
- חשבי באמצעות Matlab את הביטוי בשני אגפי המשוואה, הצג את התוצאה, ובדוק/י את קיום השוויון עבור שני זוגות הפונקציות.

ה. (12 נק') נתונה מערכת עם תגובה להלם  $h_1[n]$ . מוצא המערכת מתקבל ע"י חישוב ממוצע של שלושת

הדגימות האחרונות של אות הכניסה. אות הכניסה למערכת נתון על ידי  $x[n]$  אשר הוגדר בתחילת השאלה

ומוצא המערכת נתון על ידי  $y_1[n]$  כפי שמתואר באיור 2.



- פתח/י ביטוי לתגובת המערכת  $h_1[n]$  להלם.
- הצג/י ביטוי לחישוב  $y_1[n]$ , מוצא המערכת  $h_1[n]$ , עבור אות הכניסה  $x[n]$  תוך שימוש בחישוב קונבולוציה לינארית באמצעות התמרת DFT (Linear convolution by DFT).
- מה אורך ההתמרות הדרוש למימוש וחישוב קונבולוציה לינארית באמצעות התמרת DFT?
- נסמן את התמרת DTFT של  $h_1[n]$  ב- $H_1^f(\theta)$ . חשבו/י את  $H_1^f(\theta)$  והצג/י את הערכים המוחלטים של  $X^d[k]$  ו- $H_1^f(\theta)$  על גבי גרף אחד.

#### הערות:

- מומלץ במקרה זה להציג את  $|H_1^f(\theta)|$  כגרף "רציף" ואת  $|X[k]|$  באמצעות stem().
- על מנת להציג את  $|H_1^f(\theta)|$ ,  $|X[k]|$  על גבי גרף אחד יש לנרמל את ערכי הפונקציות
- נסמן את התמרת DFT של  $y_1[n]$  ב- $Y_1^d[k]$ . חשבו/י את  $|Y_1^d[k]|$  והצג/י את הערכים המוחלטים של  $X^d[k]$  ו- $Y_1^d[k]$  על גבי גרף אחד.
- הצג/י את האותות  $y_1[n]$ ,  $x[n]$ ,  $v[n]$ ,  $s[n]$  עבור  $n = 0, \dots, N - 1$ , כאשר  $N = 30$ .
- הסבר/י את התוצאות שקיבלת/י להתייחס להשפעה של המערכת  $h_1[n]$  על כל אחד מהסדרות  $s[n]$ ,  $v[n]$  של אות הכניסה  $x[n]$  ועל המוצא  $y[n]$ .

ו. (10 נק') נתונה מערכת  $h_2[n]$  עם התגובה להלם הבאה:

$$h_2[n] = \{1, 1\}$$

- חשב את  $y_2[n]$ , מוצא המערכת  $h_2[n]$  עבור אות הכניסה  $x[n]$  תוך שימוש בחישוב קונבולוציה לינארית באמצעות התמרת DFT (Linear convolution by DFT).
- נסמן את התמרת DFT של  $h_2[n]$  ב- $H_2^f(\theta)$ . חשבו/י את  $H_2^f(\theta)$  והצג/י את הערכים המוחלטים של  $X[k]$  ו- $H_2^f(\theta)$  על גבי גרף אחד.

#### הערות: בדומה לסעיף הקודם.

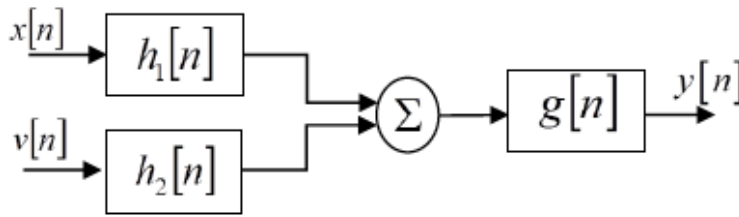
- נסמן את התמרת DFT של  $y_2[n]$  ב- $Y_2^d[k]$ . חשבו/י את  $Y_2^d[k]$  והצג/י את הערכים המוחלטים של  $X^d[k]$  ו- $Y_2^d[k]$  על גבי גרף אחד.
- הצג/י את האותות  $y_2[n]$ ,  $x[n]$ ,  $v[n]$ ,  $s[n]$  עבור  $n = 0, \dots, N - 1$ , כאשר  $N = 30$ .
- הסבר/י התוצאות שקיבלת/י. בהסבר יש להתייחס להשפעה של המערכת  $h_2[n]$  על כל אחד מהמרכיבים  $s[n]$ ,  $v[n]$  של אות הכניסה  $x[n]$  על המוצא  $y_2[n]$ .
- ז. (8 נק') בסעיף זה נערוך השוואה בין המערכות  $h_1[n]$  ו- $h_2[n]$  אשר הוצגו בשני הסעיפים האחרונים. נתון כי האות  $x[n] = s[n] + v[n]$  מורכב מאות מקורי  $s[n]$  ורעש  $v[n]$ . אנו מעוניינים להשתמש במערכת  $h_1[n]$  או  $h_2[n]$  לסינון האות המקורי  $s[n]$  מתוך הרעש  $v[n]$  שמכיל האות הנתון  $x[n]$ .  
הסבר תוך התבססות על תגובת התדר של המסננים הנתונים  $H_1[k]$ ,  $H_2[k]$ :

- במקרה ש- $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$  ו- $\theta_2 = \frac{8\pi}{5}$ , באיזה מסנן עדיף להשתמש?

- במקרה ש- $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$  ו- $\theta_2 = \pi$ , באיזה מסנן עדיף להשתמש?

## 2. בעיה מעשית (40 נק')

כאשר מקליטים אות אודיו, האות המוקלט לא זהה לאות המקורי בגלל מספר הפרעות. את הקשר בין האות המקורי לאות המוקלט ניתן למדל באמצעות תרשים המלבים המופיע באיור 3 :



איור 3 תרשים מלבים - שאלה 2

כאשר:

- $x[n]$  הוא האות המקורי.
- $y[n]$  הוא אות האודיו במוצא המערכת.
- $v[n]$  הוא אות רעש (הפרעה) שנקלט במיקרופון.
- $h_1[n]$  היא התגובה להלם למערכת הממדלת את התווך בין המקור למיקרופון.
- $h_2[n]$  היא התגובה להלם למערכת הממדלת את התווך בין מקור הרעש למיקרופון.
- $g[n]$  היא התגובה להלם למערכת הממדלת את מערכת ההקלטה.

כל האותות הם דגימה של אותות אנלוגיים, תדר הדגימה הוא  $F_s = 44100 \text{ Hz}$ . לצורך שחזור האות המקורי  $x[n]$  מתוך ההקלטה  $y[n]$  ביצעו שתי הקלטות נוספות:

1. הקלטת מוצא המערכת כאשר האות המקורי מנוטרל ( $x[n] = 0$ ). הקלטה זו מסומנת ב-  $y_z[n]$ .
2. הקלטת מוצא המערכת כאשר האות המקורי הוא אות בוחן ידוע ( $x[n] = x_{test}[n]$ ). את ההקלטה במצב זה נסמן ב-  $y_{test}[n]$ .

**עליכם לשחזר את האות המקורי  $x[n]$  מתוך האות המוקלט  $y[n]$ .**  
הערה: לפשטות ניתן להניח שהרעש  $v[n]$  זהה בכל ההקלטות.

את האותות  $y_z[n]$ ,  $x_{test}[n]$ ,  $y_{test}[n]$ ,  $y[n]$  ניתן למצוא בקובץ הנתונים data2020.mat בשמות משתנים  $y_z$ ,  $y_{test}$ ,  $x_{test}$ ,  $y$  בהתאמה.

הערה: ניתן לפתוח את הקובץ על ידי הרצת הפקודה `load('data2020.mat')`.

א. [6 נק']

a. [4 נק'] פתח ביטוי להתמרת האות המוקלט  $Y^d[k]$  כתלות בהתמרות המערכות השונות  $G^d[k]$ ,  $H_1^d[k]$ ,  $H_2^d[k]$ , התמרת האות המקורי  $X^d[k]$  והתמרת הרעש  $V^d[k]$ .

הערה: שים לב כי על מנת לקבל קשר פשוט נדרש לרפד באפסים את הסדרות קודם בזמן.

b. [2 נק'] לאיזה אורך נדרש לרפד את הסדרות? נדרש ביטוי אנליטי כתלות באורכי הסדרות המקוריות:  $x[n]$ ,  $v[n]$ ,  $h_1[n]$ ,  $h_2[n]$ ,  $g[n]$ .

ב. [3 נק'] נניח כי ידוע שאורך אות המוצא הינו 3.8 שניות ושהאורך של כל אחת מהתגובות להלם הוא 0.45 שניה. מה מספר הדגימות שנקלחו באותות  $x[n]$ ,  $v[n]$  המקוריים על מנת שמצב זה יתקיים?

ג. (5 נק') בעזרת הקלטה מס' 1 (הקלטת  $y_z[n]$ ) ניתן להוריד את הרעש משאר ההקלטות.

a. הסבר/י כיצד, התייחס בהסבר למצב שמספר הדגימות בכל הקלטה שונה.

b. פתח/י ביטוי להתמרה של האות המוקלט לאחר ניקוי הרעש  $Y_0^d[k]$ . שימו לב להערה בסעיף א'.

ד. [10 נק'] תוך הסתמכות על תוצאות סעיף ג' ובעזרת הקלטה מס' 2 (הקלטת  $y_{test}[n]$ ) ניתן

לאפיין מערכת שתאפשר שחזור של  $x[n]$  בהינתן האות המוקלט לאחר ניקוי הרעש  $y_0[n]$ .

a. פתח/י ביטוי לשחזור התמרת האות המקורי  $X_{rec}^d[k]$  מתוך האות המוקלט לאחר ניקוי הרעש  $Y_0^d[k]$ .

b. חשב את התגובה להלם של מערכת זו מתוך הקלטות 1 ו-2.

c. הצג/י את התגובה להלם שחישבתם בגרף עבור טווח ההזמן הרלוונטי.

ה. (8 נק') בעזרת המערכת שפיתחת בסעיף ד' שחזר/י את האות המקור  $x[n]$  מתוך האות

המוקלט  $y[n]$  והראו בגרף שהתוצאה בסעיף ב' מתקבלת בקירוב.

ו. (8 נק') השמע/י את האות המשוחזר  $x_{rec}[n]$  וכתב/י את תוכנו.

הערה: על מנת להשמיע את האות, יש להשתמש בפונקציית `soundsc()` עם תדר דגימה מתאים.