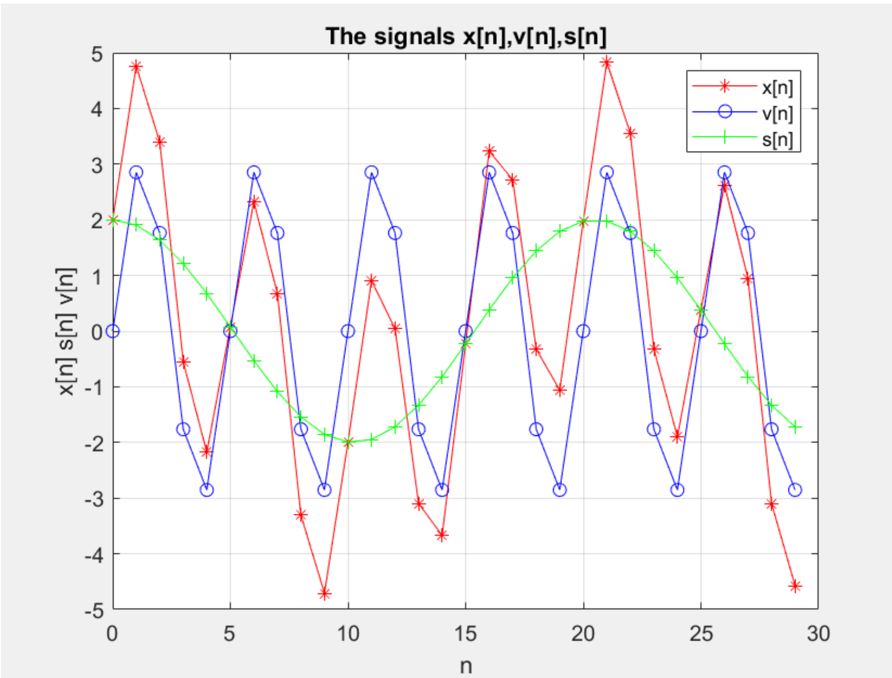
עיבוד אותות
עבודת מטלב 2

מגישים:
ניר שניידר 316098052
אלמוג בודנר 315325654

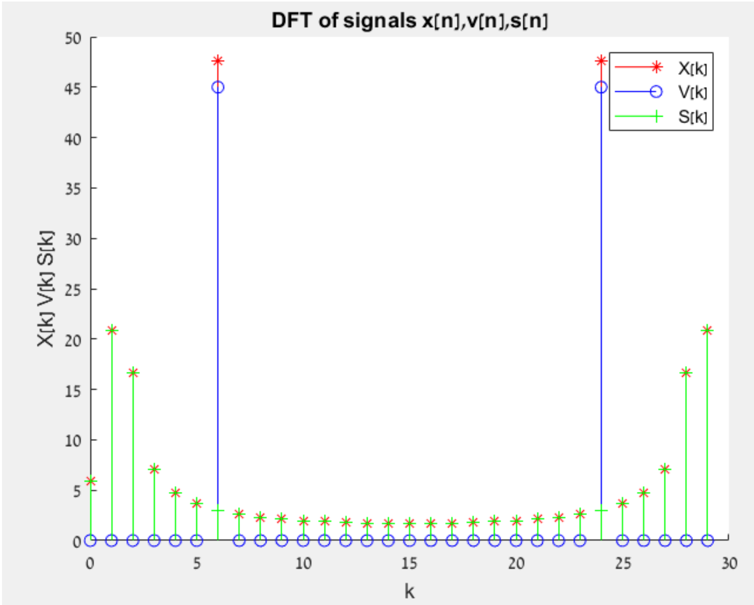
<u>שאלה 1 – התמרת DFT:</u>

- האותות x[n], v[n], s[n]:



נשים לב שעבור האות v[n] נקבל 5 דגימות בזמן מחזור יחידה, ואילו עבור האות s[n] נקבל בערך 21 דגימות בזמן מחזור יחיד. כלומר, הרזולוציה של s[n] טובה יותר כפי שניתן לראות מהגרף.

• הערכים המוחלטים של האותות $X^d[k],\ V^d[k],\ \ S^d[k]$:

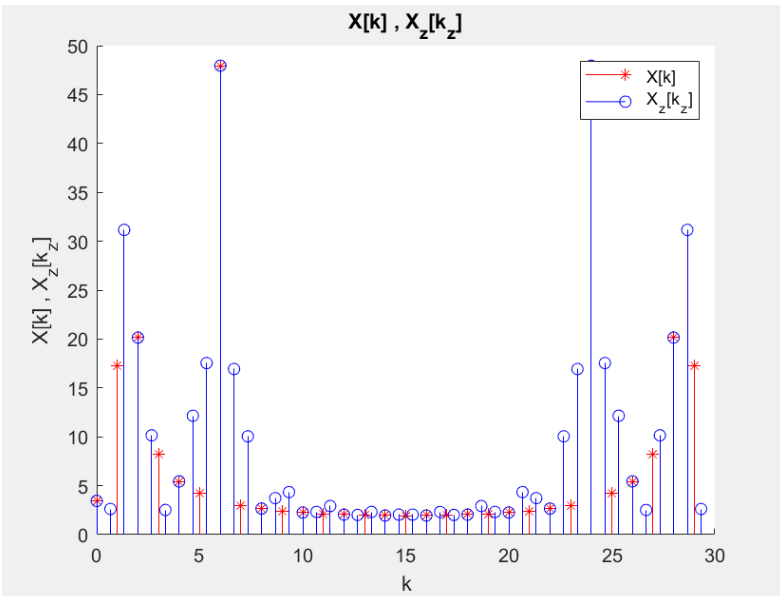


נסביר את ההבדלים בין $V^d[k]$ ל-$S^d[k]$:
באופן כללי, התמרת DFT של אות, x[n], היא למעשה דגימה של הקונבולוציה במישור ה-DTFT בין התמרת DTFT של האות, $X^d[k]$, לבין גרעין דיריכלה בנקודה $\theta = \frac{2\pi}{N}k$.

ראינו כי התמרת DTFT של אות סינוסיאידלי היא $\pi * (\delta[((\theta-\theta_0))_N] + \delta[((\theta+\theta_0))_N])$.

נשים לב שעבור האות $v[n]$ מתקיים $\theta_2 = \frac{2\pi}{30}6$. כלומר, זוהי כפולה שלמה של תדר הדגימה. לכן נקבל שעבור $k = 6,24$ הדגימה של הקונבולוציה היא בדיוק בערך בו גרעין דיריכלה מקבל את הערך 1, ובכל שאר הערכים במונה של גרעין דיריכלה נקבל כפולה שלמה של π, כלומר אפס.
לעומת זאת, עבור האות $s[n]$ מתקיים $\theta_1 = \frac{2\pi}{10.25}$, זוהי לא כפולה שלמה של תדר הדגימה ולכן נקבל דלתאות מוזזות בעלות אמפליטודה שונה.

ב) ריפדנו את x[n] ב-15 אפסים מימין לקבלת $x_z[n]$. חישבנו את ה-DFT של $x_z[n]$ וקיבלנו:

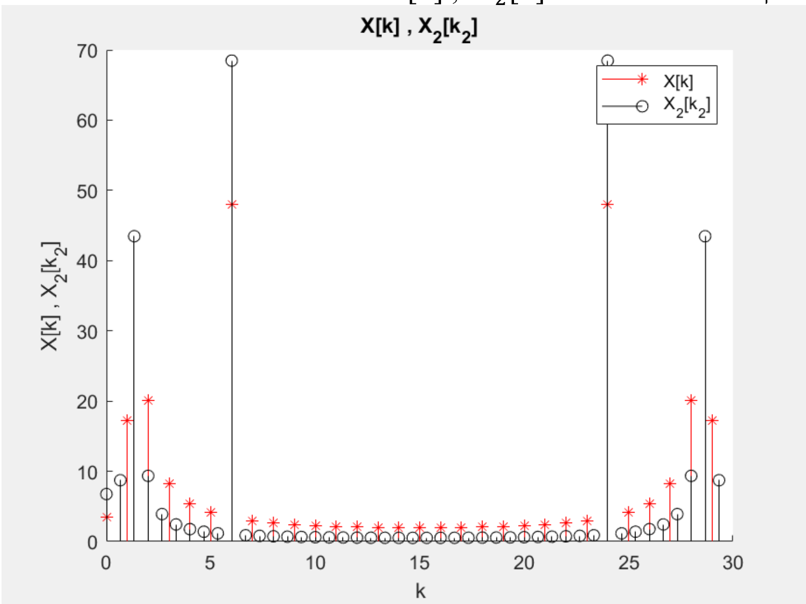


*לאחר נירמול של ציר התדר על פי N=30.

נסביר את ההבדלים בין $X^d[k]$ לבין $X^d{}_z[k]$:
התמרת DFT היא דגימה של ה-STFT ב-N נקודות, כלומר באורך האות בזמן. לכן אם נדגום ביותר נקודות נקבל רזולוציה טובה יותר במישור התדר אך לא נקבל יותר מידע בפועל מכיוון שהוספנו אפסים בזמן ולא את ערכי האות.
מהגרף ניתן לראות כי $X^d{}_z[k]$ בעל רזולוציה טובה יותר בתדר לעומת $X^d[k]$ מכיוון שריפוד באפסים מצד ימין מוביל לדגימות DFT נוספות. ניתן לשים לב כי עבור דגימות באותו תדר נקבל ערך DFT זהה.

ג) ניצור את $x_2[n]$ ע"י הוספה של 15 דגימות מהאות x[n] ונבצע התמרת DFT לקבלת $X^d{}_2[k]$.

הערך המוחלט של האותות $X^d{}_2[k]$, $X^d[k]$:



נסביר את ההבדלים בין $X^d[k]$ ו-$X^d{}_z[k]$ לבין $X^d{}_2[k]$:
- בדומה ל- $X^d{}_z[n]$ נקבל דגימות באותם התדרים, אך בשונה מ-$X^d{}_z[k]$ בו ריפדנו באפסים בזמן, ב-$x_2[n]$ הוספנו מידע מהאות המקורי $x[n]$ ולכן במישור התדר, הערכים שנקבל הם הערכים המדויקים, ואילו ב-$X^d{}_z[k]$ נקבל ערכים שאינם מדויקים ונובעים מדגימה נוספת של ה-*DFTF* המבוסס אך ורק על 30 דגימות.
- בהשוואה ל-$X^d[k]$, נקבל רזולוציה יותר טובה בתדר מכיוון שהוספנו דגימות. נשים לב שהאות $X^d{}_2[k]$ מוגבר בתדרים המתקבלים מהאות המקורי ומונחת בתדרים הנובעים מהקונבולוציה בגרעין דיריכלה.

ד) נראה את קיום משפט פרסבל על הזוגות $x_z[n],X^d{}_z[k]$ ו- $x[n],X^d[k]$.
שוויון פרסבל בצורה המטריציונית שלו נתון ע"י - $y^H x = \frac{1}{N} Y^H X$
ועבור המקרה בו $x=y$ נקבל $x^H x = \frac{1}{N} X^H X$.
בעזרת מטלב חישבנו את שני אגפי המשוואה עבור כל אחד מהזוגות:

```
P_n=x_n*x_n';
P_k=x_k*x_k'/N;

P_zn=xz_n*xz_n';
P_zk=xz_k*xz_k'/N2;
```

כצפוי, קיבלנו שוויון בין כל האיברים:

P_k	211.1799
P_n	211.1799
P_zk	211.1799
P_zn	211.1799

ה) כעת קיבלנו מערכת עם תגובה להלם $h_1[n]$ כך שמוצא המערכת מתקבל ע"י חישוב של ממוצע שלוש הדגימות האחרונות של אות הכניסה.

- תגובת המערכת להלם הינה $\frac{1}{3}(\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-2])$
- התמרת ה-DFT של התגובה להלם הינה $\frac{1}{3}(1+e^{-\frac{j2\pi k}{N}}+e^{-\frac{j4\pi k}{N}})$

כעת נחשב את $y_1[n]$, מוצא המערכת מתקבל ע"י $conv(x[n], h_1[n])$.
כלומר, $y_1[n] = {}^1(x[n]+x[n-1]+x[n-2])$

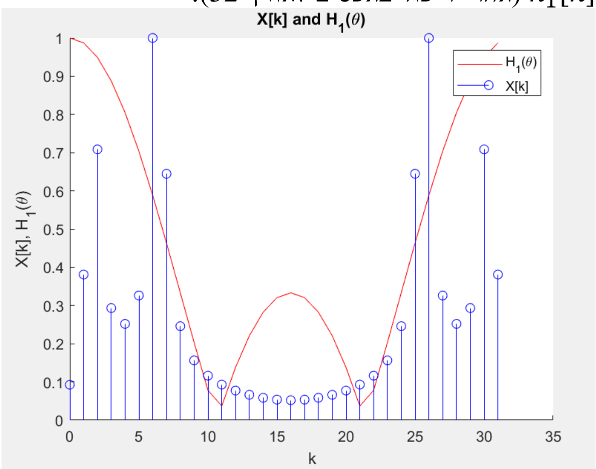
קונבולוציה בזמן ← כפל בתדר ולכן $Y^d{}_1[k] = X^d[k] * H_1[k] = \frac{1}{3}X^d[k](1+e^{-\frac{j2\pi k}{N}}+e^{-\frac{j4\pi k}{N}})$
וע"י התמרה הפוכה ל-$Y^d{}_1[k]$ נקבל את $y_1[n]$
נשים לב כי התגובה להלם ניתנת לרישום באופן הבא:

$$h_1[n] = \begin{cases} \frac{1}{3}, n = 0,1,2 \\ 0, otherwise \end{cases}$$

ולכן $N_H = 3$ וסך כל אורך התמרות ה-DFT הדרוש לחישוב הקונבולוציה הלינארית הוא $N_x + N_H - 1 = 32$

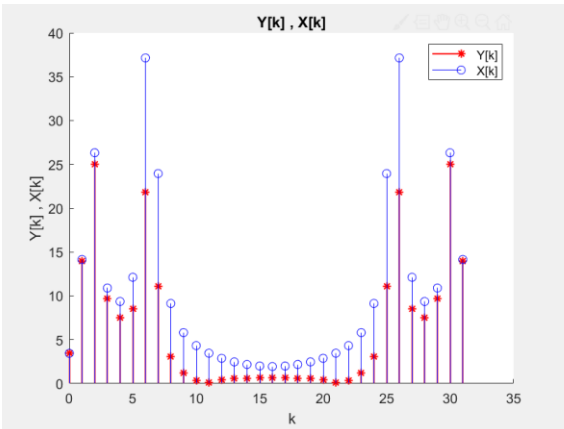
נרפד את $x[n]$ ו-$h_1[n]$ לאורך $N_x + N_H - 1 = 3$ כדי שנוכל לבטא את הקונבולוציה הלינארית $conv(x[n], h_1[n])$ ע"י הקונבולומיה הציקלית בין האותות המרופדים.

- נציג על גרף אחד את הערכים המוחלטים והמנורמלים של האותות $X^d{}_1[k]$ והתמרת ה-DFT של האות $h_1[n]$ (אחרי ריפוד באפסים לאורך 32):



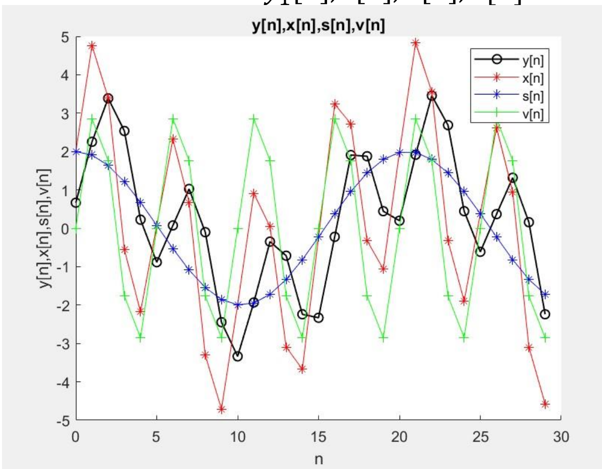
נבחין מהגרף כי $H^f{}_1(\theta)$ מהווה מעין מסנן LPF. כלומר, מעביר תדרים נמוכים ומנחית תדרים גבוהים. הסיבה לכך שנראה כי בתדרים הגבוהים יש גם כן הגבר נובעת ממחזוריות ה-$DTFT$.

- הערכים המוחלטים של האותות $Y^d{}_1[k]$,$X^d[k]$ (המרופד לאורך 32):



בגרף זה ניתן לראות כי בתדרים המנוכים יש כמעט העברה מלאה ללא הנחתה – שם נקבל כי ערכי ${Y^d}_1[k]$, $X^d[k]$ קרובים מאוד אחד לשני (עדיין נקבל הבדל מחוסר האידיאליות של המסנן). ואילו בתדרים הגבוהים נקבל ניחות גדול, כצפוי ממזנן LPF.

- האותות $y_1[n], s[n], v[n], x[n]$:



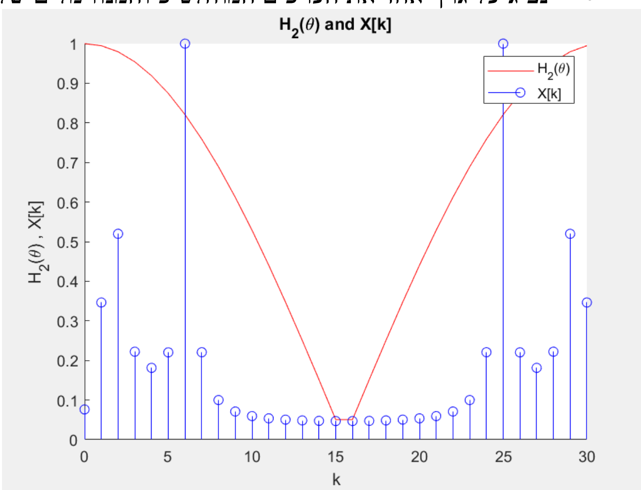
כפי שתיארנו קודם, $y_1[n]$ הינו ממוצע של 3 הדגימות האחרונות של $x[n]$, כלומר הממוצע של הסכום $s[n] + v[n]$, ניתן לראות התנהגות זו בגרף.
בנוסף, ידוע שהמערכת הינה מסנן LPF המנחיתה תדרים גבוהים ולכן עבור האות $x[n]$, המורכב משני אותות סינוסיאדליים, נקבל במוצא ניחות של האות בתדר הגבוה המיוצג ע"י $v[n]$. בגרף ניתן לראות כי $y_1[n]$ דומה בצורתו יותר ל- $s[n]$ מאשר ל-$v[n]$.

ו) כעת קיבלנו מערכת עם תגובה להלם $h_2[n] = \{1,1\}$. כלומר, מוצא המערכת $y_2[n]$ מתקבל ע"י סכימה של שתי הדגימות האחרונות של אות הכניסה $x[n]$.

התמרת ה-DFT של התגובה להלם היא $1 + e^{\frac{j2\pi k}{N}}$.
כעת נחשב את $y_2[n]$, מוצא המערכת מתקבל ע"י $conv(x[n], h_2[n])$.
כלומר $y_2[n] = x[n] + x[n-1]$
קונבולוציה בזמן ← כפל בתדר ולכן $(1 + e^{\frac{j2\pi k}{N}})$ ${Y^d}_2[k] = X^d[k] * H_2[k] = X[k]$ וע"י ביצוע התמרה הפוכה ל-${Y^d}_2[k]$ נקבל את $y_2[n]$.

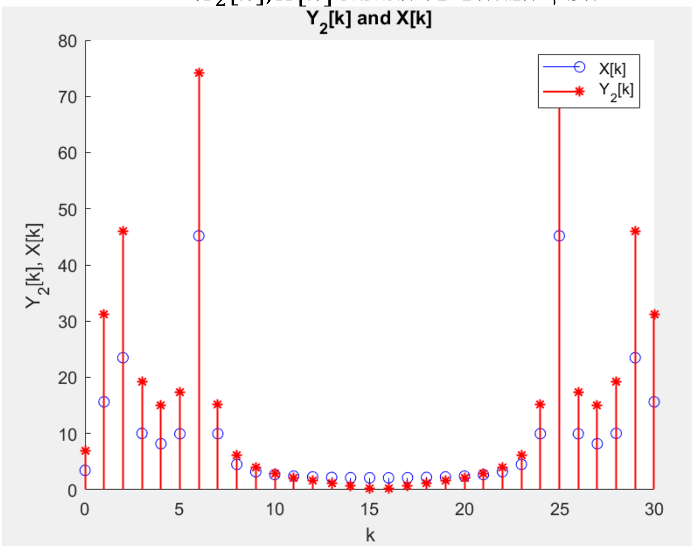
הארוך הנחוץ לחישוב הקונבולוציה הלינארית הוא $N_x + N_H - 1 = 31$

- נציג על גרף אחד את הערכים המוחלטיפ והמנורמלים של האותות $X^d[k]$ ו-${H^f}_2(\theta)$:



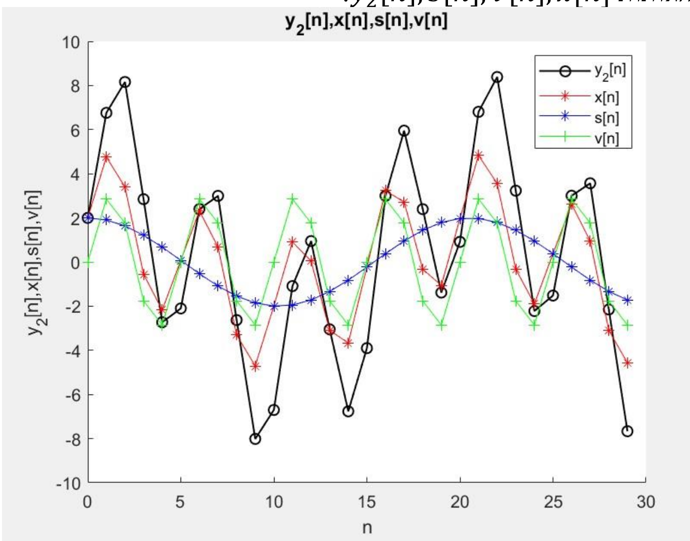
נשים לב כי בדומה לסעיף הקודם, קיבלנו ש-$H^f{}_2(\theta)$ מהווה מסנן LPF אך רחב יותר מ-$H^f{}_1(\theta)$. בשילוב עם מחזוריות ה-$DTFT$ שגורמת לכך שגם בתדרים הגבוהים נקבל הגבר, נצפה לכך שהאות במוצא יוגבר כמעט בכל התדרים בקצוות.

- הערך המוחלט של האותות $Y_2[k], X[k]$:



בגרף זה ניתן לראות כי בתדרים הנמוכים ובגבוהים קיים הגבר של האות במבוא, כתוצאה מצורת המסנן. ואילו בתדרים המרכזיים נקבל הנחתה של אות המוצא.

- האותות $y_2[n], s[n], v[n], x[n]$:

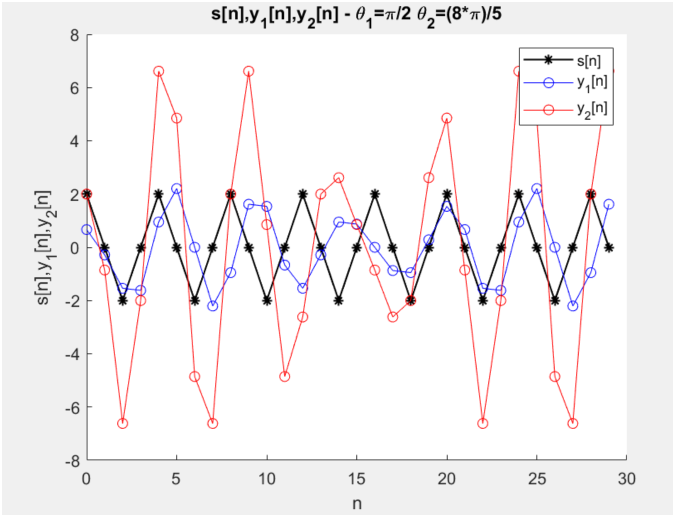


כפי שתיארנו בתחילת הסעיף, מוצא המערכת $y_2[n]$ מתקבל ע"י סכימה של שתי הדגימות האחרונות של אות הכניסה $x[n]$ וניתן לזהות את התנהגות זו בגרף.
בנוסף, תגובת התדר של המערכת מייצגת מסנן LPF אך רחב ולכן נקבל ניחות בתדרים גבוהים, בדומה לסעיף קודם נקבל כי $y_1[n]$ דומה בצורתו יותר ל-$s[n]$ מאשר ל-$v[n]$.

ז) כעת נסתכל על $x[n]$ כסכום של אות מקורי $s[n]$ ורעד $v[n]$.
אנו מעוניינים להשתמש באחת המערכות שהוצגו בסעיפים הקודמים לסינון האות המקורי מתוך רעש שמכיל $x[n]$.

עבור המקרה – (1) - $\theta_1=\frac{\pi}{2}, \theta_1=\frac{8\pi}{5}$.
התדר של האות המקורי (הנתון מ-θ_1) נמוך יותר מאשר התדר של הרעש, ולכן נעדיף להשתמש במסנן הראשון מכיוון שהוא צר יותר ומנחית תדרים גבוהים ומגבים תדרים מנוכים.

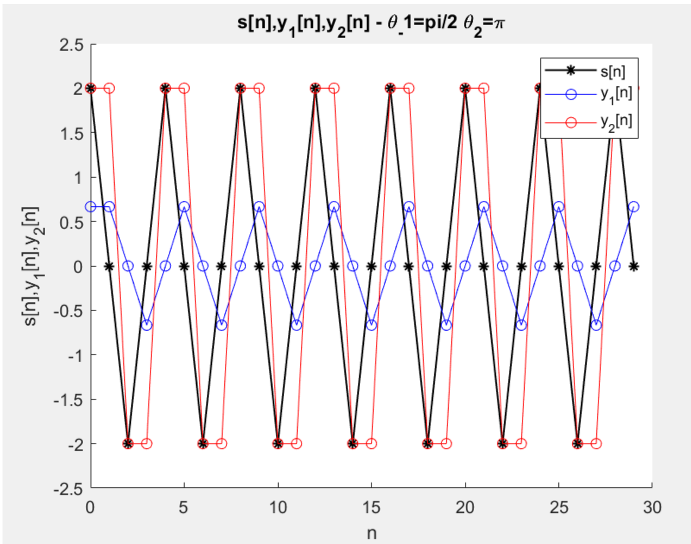
נציג את אות המבוא של כל אחת מהמערכות ואת האות המקורי בזמן ובתדר ע"מ לאשר את השערתנו:



כפי שניתן לראות מהגרף, אכן מומצא המערכת הראשונה משחזר טוב יותר את האות המקורי.

עבור המקרה – (1) - $\theta_1=\frac{\pi}{2}, \theta_1=\pi$.
במקרה זה התדר של האות המקורי (הנתון מ-θ_1) נמוך רק בחצי מאשר התדר של הרעש, ולכן נעדיף להשתמש במסנן השני שהוא רחב יותר מכיוון שלא נרצה להנחית את האות המקורי.

נציג את אות המבוא של כל אחת מהמערכות ואת האות המקורי בזמן ובתדר ע"מ לאשר את השערתנו:



כפי שניתן לראות מהגרף, אכן מוצא המערכת השנייה משחזר טוב יותר את האות המקורי.

שאלה 2 – בעיה מעשית:

א) ראשית נפתח ביטוי ל-*y[n]*:

$$y[n] = conv((conv(x[n],\ h_1[n]) + conv(v[n],\ h_2[n])),\ g[n])$$

זוהי מערכת *LTI* ולכן קונבולוציה בזמן תיתן מכפלה בתדר. נפתח ביטוי ל-$Y^d[k]$:

$$Y^d[k] = (X^d[k] \cdot H^d{}_1[k] + V^d[k] \cdot H^d{}_2[k]) \cdot G^d[k]$$

נבדוק לאיזה אורך עלינו לרפד את הסדרה על מנת לבצע התמרת *DFT*:
נגדיר את האורך של *x[n]* להיות L_1, האורך של *v[n]* L_2, האורך של $h_{1,2}$ יהיה $M_{1,2}$ בהתאמה
והאורך של *g[n]* להיות M_3.
לאחר הקונבולוציה של אותות הכניסה עם $h_{1,2}$ נקבל סדרה באורך
$max\{(L_1 + M_1 - 1), (L_2 + M_2 -)\}$ ולאחר מכן יש קונבולוציה נוספת עם המערכת *g[n]*.
בסך הכל האורך הוא $N = max\{(L_1 + M_1 - 1), (L_2 + M_2 - 1)\} + M_3 - 1$.
ונרפד את כל האותות על פי אורך זה.

ב) נתון שאורך המוצא הוא *3.8sec* ולכן מספר הדגימות במוצא הינו:

$$N = 3.8 * 44100 = 167580$$

נתון שאורך כל אחת מהתגובות להלם הוא *0.45sec* ולכן מספר הדגימות הינו:

$$M_1 = M_2 = M_3 = 0.45 * 44100 = 19845$$

כיוון ש-*x[n],v[n]* נדגמו ביחד, ניתן להניח שמספר הדגימות שלהם זהה. נגדיר אותו *L*.
נציב את הנתונים שקיבלנו במשוואה מהסעיף הקודם ונקבל:

$$167580 = L + 19845 - 1 + 19845 - 1 \rightarrow L = 127892$$

כלומר, מהאותות *x[n],v[n]* נדגמו *127892* דגימות.

ג) נשים לב שמתקיים כי $x[n]=0 \rightarrow X[k]=0$
מסעיף קודם נקבל שהביטוי בתדר למוצא הכלל הינו:

$$Y^d[k] = (X^d[k] \cdot H^d{}_1[k] + V^d[k] \cdot H^d{}_2[k]) \cdot G^d[k]$$

לכן כדי לנקות את הרעש במקרה הכללי נבצע חיסור בינהם ונקבל:

$$Y^d{}_0[k] = Y^d[k] - Y^d{}_z[k] = (X[k] \cdot H_1[k]) \cdot G[k]$$

נשים לב שמספר הדגימות יכול להיות שונה. במידה וזה המצב נרפד את האות הקצר מבין השניים
באפסים בזמן כדי לקבל אותות באורך זהה ונחזור על הפעולות הנ"ל.

ד) *(a)* בהינתן האות מקורי $X_{rec}[k]$, נשחזר אותו מתוך האות המוקלט לאחר ניקוי הרעש באופן הבא:

$$Y_{rec}[k] - Y_z[k] = (X_{rec}[k] \cdot H_1[k]) \cdot G[k]$$

$$\rightarrow X^d{}_{rec}[k] = \frac{Y_{rec} - Y_z}{H_1 * G[k]}$$

(b) נרצה לשחזר את האות המקורי מתוך הארות המוקלט לאחר ניקוי הרעש. לשם כך ניעזר בהקלטות

מספר 1 ו-2. בהקלטה מספר 2 האות המקורי ידוע ומוצא המערכת של הקלטה זו נתון ע"י:

$$Y^{d}{}_{test}[k] = (X^{d}{}_{test}[k] \cdot H^{d}{}_{1}[k] + V^{d}[k] \cdot H^{d}{}_{2}[k]) \cdot G^{d}[k]$$

כפי קראינו קודם, ע"י הקלטה מספר 1 נוכל לנקות את הרעש באופן הבא:

$$Y_{test}[k] - Y_{z}[k] = (X_{test}[k] \cdot H_{1}[k]) \cdot G[k]$$

כעת, נחפש את המערכת שעבור אות כניסה מזונן מרעשים נקבל את האות המקורי:

$$X^{d}{}_{test}[k] = (Y_{test}[k] - Y_{z}[k]) \cdot H^{d}{}_{opt}[k]$$

כעת נחלץ את הביטוי $H^{d}{}_{\mathrm{opt}}[k]$ לקבלת התגובה להלם ונקבל:

$$H^{d}{}_{opt}[k] = \frac{X^{d}{}_{test}[k]}{Y^{d}{}_{test}[k] - Y_{z}[k]} = \frac{1}{H^{d}{}_{1}[k] * G^{d}[k]}$$

כלומר, עבור אות כניסה כללי $X_{rec}[k]$, עם מוצא $Y_{rec}[k]$ נוכל לשחזר את האות המקורי ע"י:

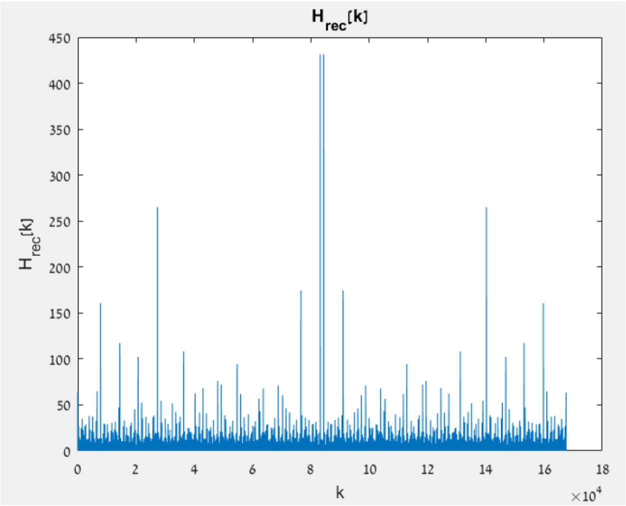
$$X^{d}{}_{rec}[k] = (Y_{rec}[k] - Y_{z}[k]) * H^{d}{}_{opt}[k] = \frac{Y_{rec}[k] - Y_{z}[k]}{H1 * G[k]}$$

- במידה והאותות בזמן אינם באותו אורך, נרפד את $x_{test}[n]$ או את $y[n]$, $y_{test}[n]$ באפסים (הקצר מבניהם) לקבלת סדרות באורך זהה.

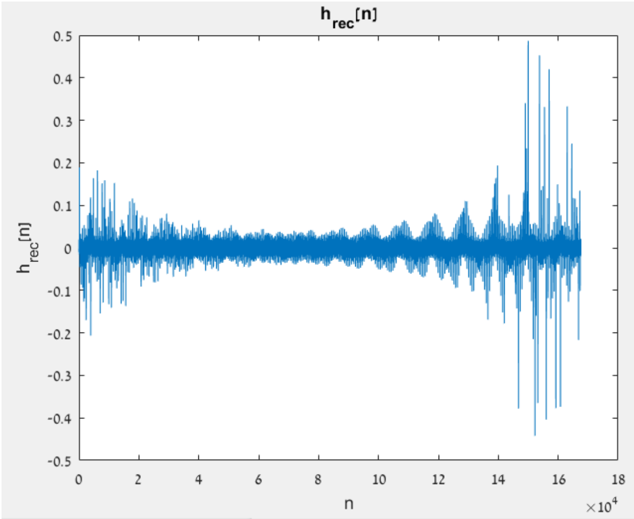
- כמובן שאנחנו מניחים ש- $Y^{d}{}_{test}[k] - Y_{z}[k]$ שונה מאפס לאורך כל הסדרה כך שהביטויים יהיו מוגדרים.

(c) נציג את התגובה להלם שקיבלנו בהנחה שאורך ההקלטות הוא *3.8sec*.

- המערכת המשוחזרת שקיבלנו בתחום התדר:

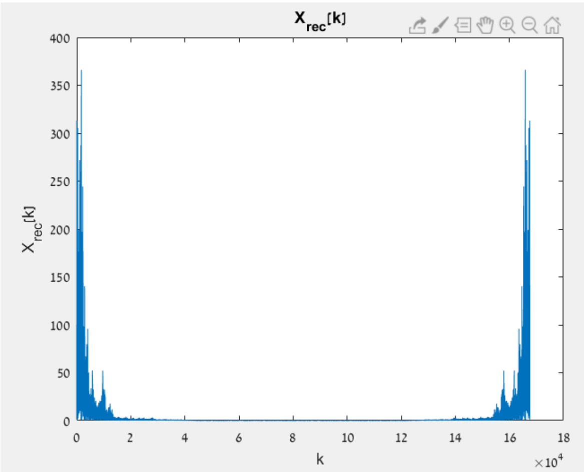


- המערכת המשחזרת שקיבלנו בתחום הזמן:

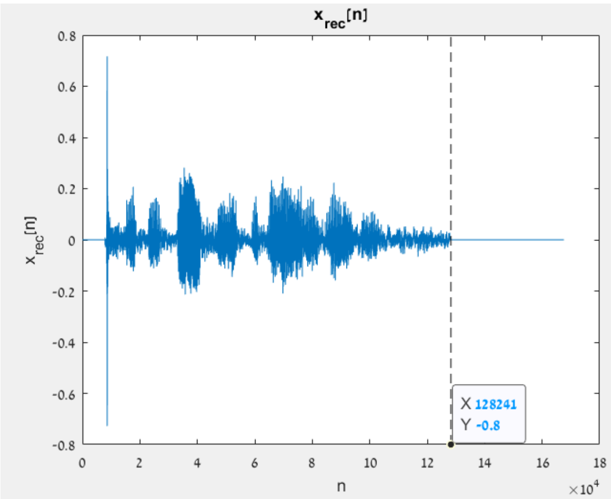


ה) נשתמש במערכת $H_{rec}[k]$ שמצאנו בסעיף הקודם כדי לשחזר את האות המקורי $x[n]$ מתוך האות המוקלט $y[n]$.
נזכור שהאות המשוחזר מתקבל ע"י $X_{rec}[k] = H_{rec}[k] * Y[k]$.

- האות המשוחזר בתדר:



- האות המשוחזר בזמן:



ניתן לראות כי האות המשוחזר מתאפס החל מ- $n = 128241$.
התשובה המתאימה לתשובה עבור סעיף ב' בקירוב 349 (זניח עבור מספרים כאלה).

ו) לאחר שיחזור האות המקורי וסינון הרעשים השמענו את האות ותוכנו היה:
"בוקר טוב, ברוך הבא לעיבוד אותות"