עיבוד אותות – עבודת מטלב 1

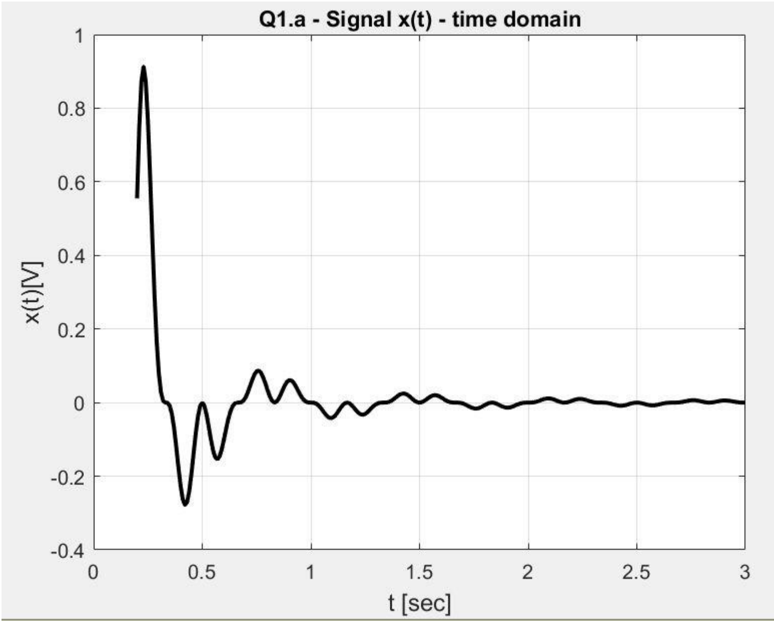
מגישים:

ניר שניידר 316098052

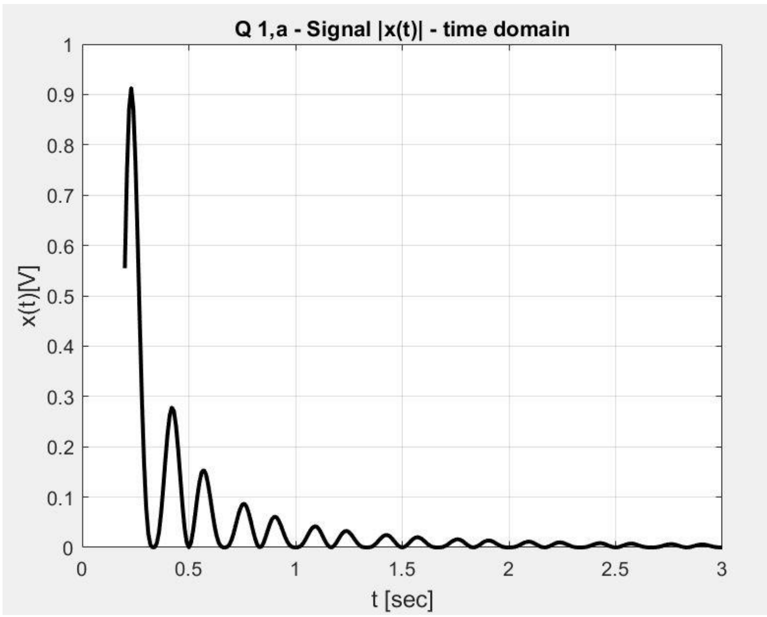
אלמוג בודנר 315325654

שאלה 1 – דגימה ושחזור:

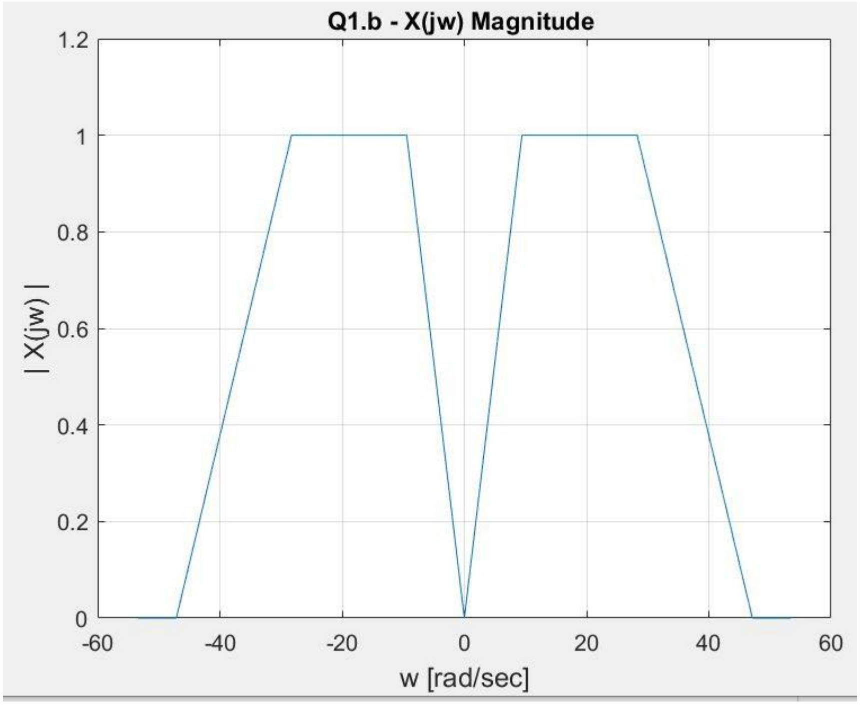
א) גרף האות x(t) בזמן:



הערך המוחלט של x(t):



גרף האמפליטודה של $|X^F(w)|$:



ב)

ב) נפתח ביטוי להתמרת פורייה של $x(t)$, ושל $X^F(w)$:

$$x(t) = \frac{12}{w_m \pi t^2} \cdot \sin^2(w_m t)\cos(w_m t)\sin(9w_m t)$$

$$= \frac{12}{(3\pi t)^2} \sin^2(3\pi t)\cos(3\pi t)\sin(9w_m t) = 12\,\mathrm{sinc}^2(3t)\cos(w_m t)\sin(9w_m t)$$

$$\mathcal{F}\{\mathrm{sinc}^2(3t)\} = \frac{1}{3}\Pi\left(\frac{w}{6\pi}\right) * \frac{1}{3}\Pi\left(\frac{w}{6\pi}\right)$$

$$\mathcal{F}\{\cos(w_m t)\} = \pi\left[\delta(w-w_m) + \delta(w+w_m)\right]$$

$$\mathcal{F}\{\sin(9w_m t)\} = \frac{\pi}{j}\left[\delta(w-9w_m) + \delta(w+9w_m)\right]$$

כפל בין ההתמרות בציר הזמן הוא קונבולוציה בתדר ולכן בסה"כ:

$$X^F(w) = \frac{1}{3}\Pi\left(\frac{w}{9w_m}\right) * \frac{1}{3}\Pi\left(\frac{w}{9w_m}\right) * \frac{1}{j}\pi\left[\delta(w-9w_m) - \delta(w+9w_m)\right] * \pi\left[\delta(w-w_m) + \delta(w+w_m)\right] \cdot 12 =$$

$$= \frac{1}{6\pi j}\,\Pi\left(\frac{w}{9w_m}\right) * \Pi\left(\frac{w}{9w_m}\right) * \left[\delta(w-w_m) + \delta(w+w_m)\right] * \left[\delta(w-9w_m) - \delta(w+9w_m)\right] =$$

$$= \frac{1}{j}\Lambda\left(\frac{w}{9w_m}\right) * \left[\delta(w-w_m) + \delta(w-w_m)\right] * \left[\delta(w-9w_m) - \delta(w+9w_m)\right] = \frac{1}{j}\left[\Lambda\left(\frac{w-w_m}{9w_m}\right) + \Lambda\left(\frac{w+w_m}{9w_m}\right)\right] * \left[\delta(w-9w_m) - \delta(w+9w_m)\right] =$$

$$= \frac{1}{j}\left[\Lambda\left(\frac{w-3w_m}{9w_m}\right) + \Lambda\left(\frac{w-w_m}{9w_m}\right) - \Lambda\left(\frac{w+3w_m}{9w_m}\right) - \Lambda\left(\frac{w+w_m}{9w_m}\right)\right]$$

ג) ניתן לראות מסעיף קודם כי *x(t)* הינו אות חסום סרט בעל תדר מקסימלי

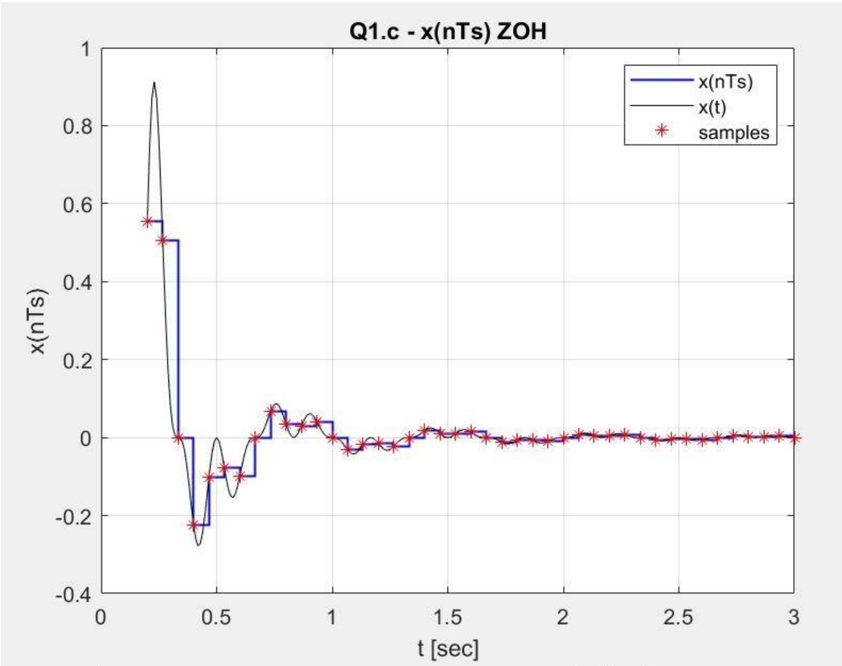
$$w_{max} = 5 * w_m = 15\pi$$

נרצה זמן מחזור לדגימה שיאפשר שחזור ללא שגיאות. ניקח את T_s להיות מינימלי, כלומר את w_s להיות מקסימלי. נדגום לפי תדר נייקויסט המבטיח שלא יהיה *aliasing*:

$$w_s = 2w_{max} = 30\pi$$

$$T_s = \frac{2\pi}{w_s} = \frac{1}{15}$$

דגמנו את האות בנקודות $T = nT_s$ וכך קיבלנו את האות $x_{ZOH}(t)$:



ד) נפתח ביטוי ל- $X^F_{ZOH}(w)$:

$$x_{ZOH}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot \Pi\left(\frac{t-\frac{T_s}{2}-nT}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot \left[\delta(t-nT) * \Pi\left(\frac{t-\frac{T_s}{2}}{T}\right)\right] =$$

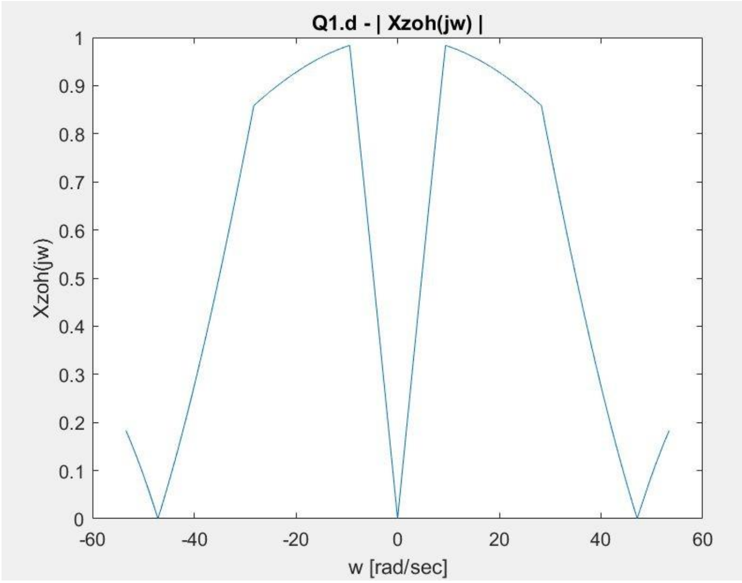
$$= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot \delta(t-nT)\right) * \Pi\left(\frac{t-\frac{T_s}{2}}{T}\right)$$

נזכיר $x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\delta(t-nT)$ ונעבור למישור התדר

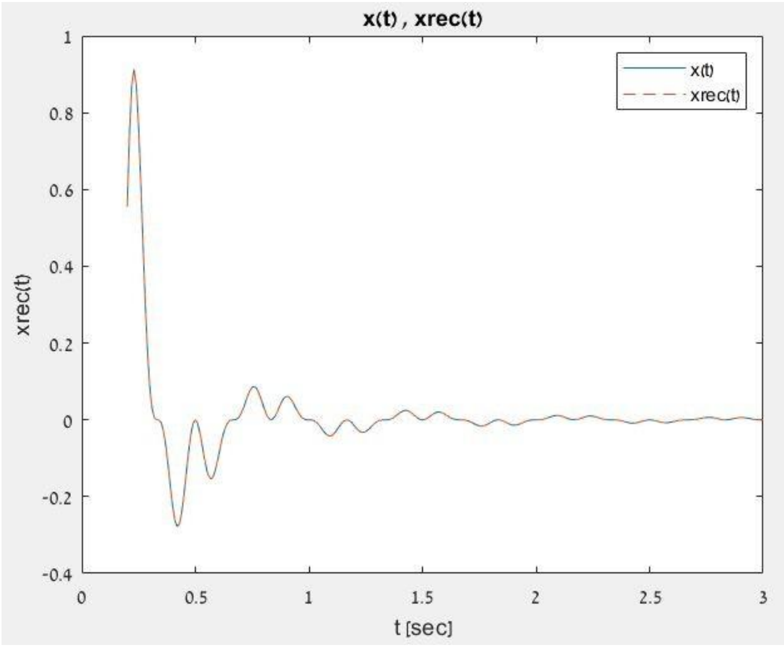
$$X^F_{ZOH}(w) = \mathcal{F}\{x_p(t)\} \cdot \mathcal{F}\left\{\Pi\left(\frac{t-\frac{T_s}{2}}{T}\right)\right\} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X^F(w-k \cdot w_s) \cdot e^{-jw\frac{T_s}{2}} \cdot T \cdot \text{sinc}\left(\frac{w}{w_s}\right) = \; // w_s = \frac{2\pi}{T}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X^F(w-kw_s) \cdot e^{-jw\frac{T_s}{2}} \cdot \text{sinc}\left(\frac{w}{w_s}\right)$$

הגרף של התמרת פורייה של האות המשוחזר ע"פ *ZOH*:

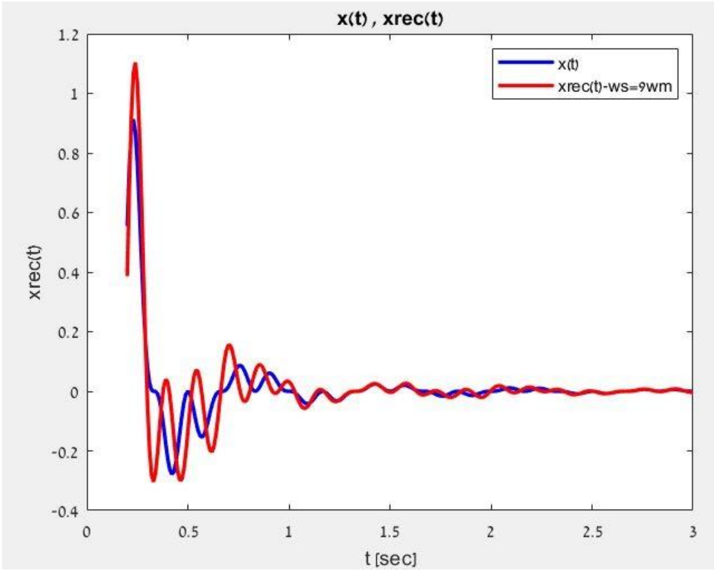


ה) נעביר את האות $X_{ZOH}(jw)$ דרך המסנן $H(jw)$ ונקבל את $X_{rec}(jw)$. ע"*H* התמרת פורייה הפוכה נמצא את $x_{rec}(t)$. נציגו על גרף יחד עם *x(t)*:



ניתן לראות שקיבלנו שחזור מושלם מכיוון שדגמנו בתדר נייקוויסט. קיימנו את התנאים לדגימה ושחזור אידיאליים וקיבלנו את התוצאה הצפויה.

ו) ראינו מהסעיפים הקודמים שהתדר המינימלי לדגימה ושחזור אידיאליים הוא $10w_m$, נדגום כעת את האות בתדר נמוך מתדר זה וכך למעשה תנאי נייקוויסט לא יתקיים.



כצפוי יש שגיאות בגרף.

שאלה 2 – דגימה לא אחידה של אות מחזורי:

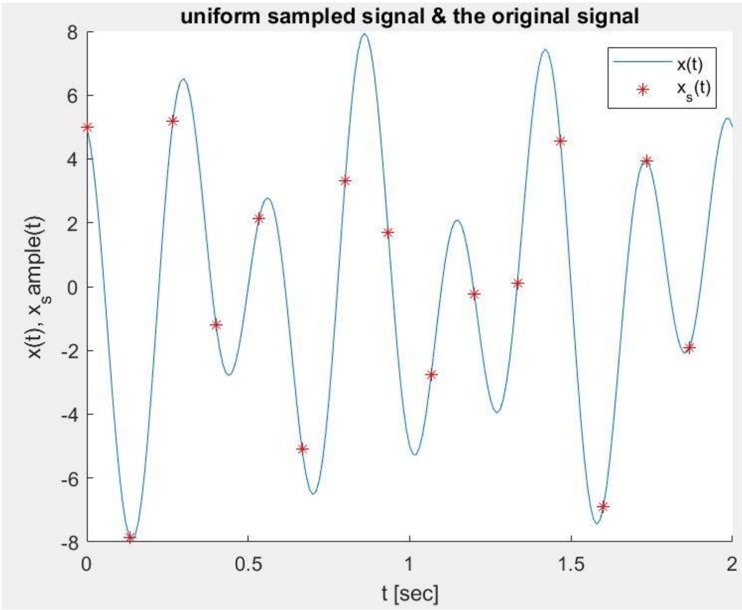
א) נבדוק את זמן המחזור של $5\cos(7\pi t)$ ושל $3\sin(4\pi t)$ בנפרד ונמצא את הזמן המינימלי שהוא כפולה של שניהם:

$5\cos(7\pi t) = 5\cos(7\pi t + 2\pi) = 5\cos\left(7\pi\left(t+\frac{2}{7}\right)\right)$ – זמן מחזור מינימלי $T=\frac{2}{7}$

$3\sin(4\pi t) = 3\sin(4\pi t + 2\pi) = 3\sin\left(4\pi\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)$ – זמן מחזור מינימלי $T=\frac{1}{2}$

נסיק כי *T=2* הוא זמן המחזור המינימלי המשותף.

בגרף הבא נציג את האות המקורי *x(t)* והאות הדגום $x_s(t)$:



נדרשות 15 נקודות דגימה מכיוון שהפונקציות סינוס וקוסינוס הן הזזות בתדר ולכן נוכל להסיק כי *x(t)* חזום חסר ע"י $w_m = w_A = 7\pi$. כדי לשחזר את *x(t)* מדגימותיו נרצה שתנאי נייקוויסט יתקיים - $w_s > 2w_m$. מהקשר $w_s = \frac{2\pi}{T}$ נקבל $T_s < \frac{1}{7}$ ע"מ לשחזר את האות, וכיוון שזמן המחזור הוא 2 נדרוש לפחות 15 נקודות דגימה.

ב) המטריצה F תיראה מהצורה:

$$\begin{pmatrix} e^{-jm\omega_0 t_0} & \cdots & e^{jm\omega_0 t_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-jm\omega_0 t_{N-1}} & \cdots & e^{jm\omega_0 t_{N-1}} \end{pmatrix}$$

כאשר הנוסחה לאיבר הכללי היא $F_{i,k} = e^{k(k-m-1)w_0 t_{i-1}}$, $1 \le i \le N$ מספר השורה

$1 \le j \le 2M+2$ מספר העמודה.

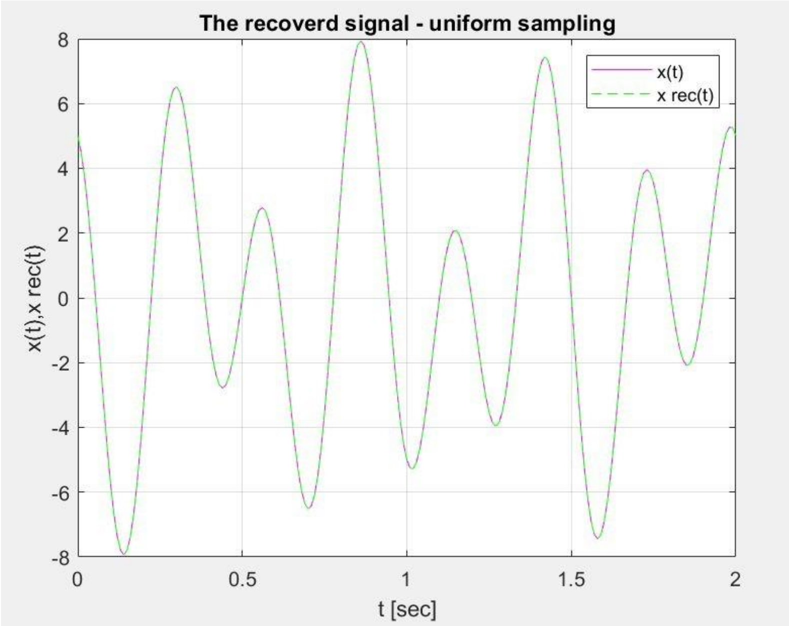
כדי למצוא את וקטור *a* נפתור את המשוואה $x = FA$ ונפריד לשני מקרים:

- המטריצה *F* ריבועית ולכן נוכל לפתור ע"י הכפלה בהופכי שלה $a = F^{-1}x$
- $N > 2M + a$ – נקבל מטריצה לא ריבועית ונפתור ע"י *least square* $a = (F^H F)^{-1} F^H X$

עבור *N* נקודות הדגימה מסעיף קודם ובהנחה ש-*F* ריבועית נקבל קי וקטור מקדמי הפורייה של *x*, *a* :

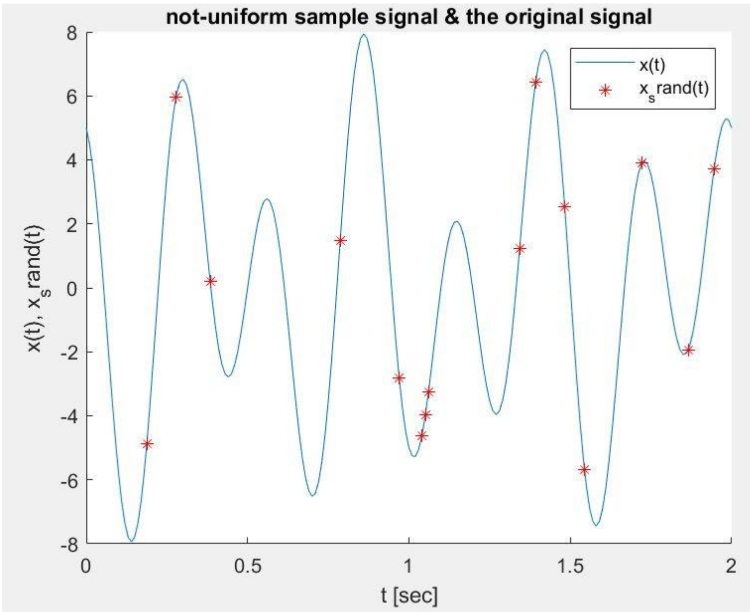
1	2.5000 - 0.0000i
2	-9.7145e-16 - 1.0408e-15i
3	1.1657e-15 + 3.6082e-16i
4	-0.0000 - 1.5000i
5	5.4123e-16 - 8.3267e-16i
6	4.1633e-17 + 3.0392e-15i
7	-1.3739e-15 + 9.5063e-16i
8	-9.9920e-16 + 3.7267e-16i
9	-1.3461e-15 + 3.8858e-16i
10	1.3878e-17 - 2.9282e-15i
11	-9.7145e-17 + 3.8858e-16i
12	0.0000 + 1.5000i
13	1.4017e-15 + 1.0270e-15i
14	-2.2066e-15 + 1.5821e-15i
15	2.5000 + 0.0000i

ג) בגרף הבא נציג את האות המקורי *x(t)* והאות הדגום $x_{rec}(t)$:



קיבלנו שחזור מושלם.

ד) נדגום בצורה רנדומלית את *x(t)* ונקבל:

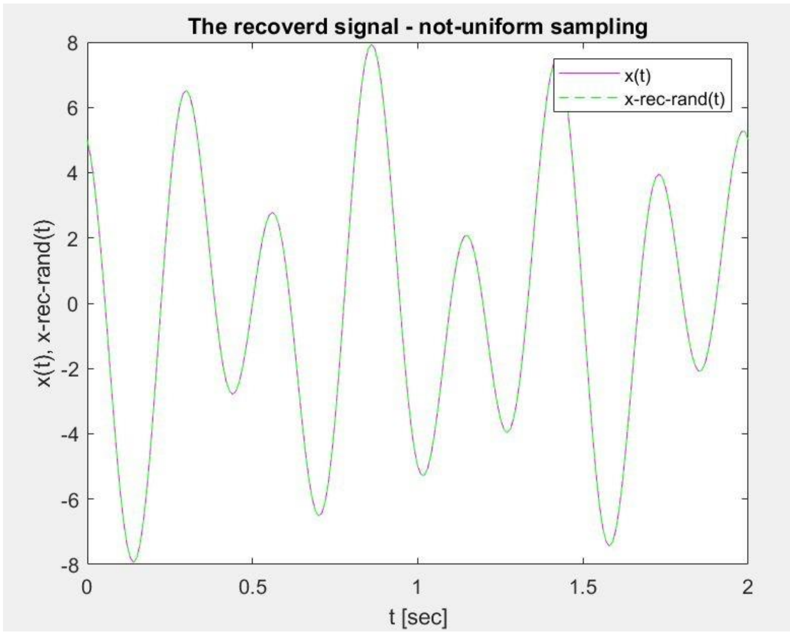


נחשב את מקדמי פורייה בדומה לסעיף ב', רק שכעת הדגימה הינה רנדומלית.

ערכי הוקטור a שנקבל הם:

1	2.5000 + 0.0000i
2	-9.9476e-14 + 2.2737e-13i
3	-1.7053e-13 + 1.9895e-12i
4	-0.0000 - 1.5000i
5	-4.5475e-13 + 1.2506e-12i
6	1.8190e-12 + 1.5348e-12i
7	-1.1369e-12 + 1.7621e-12i
8	2.2737e-12 + 9.8317e-13i
9	3.4106e-12 + 3.4106e-13i
10	2.9559e-12 - 2.0464e-12i
11	6.8212e-13 - 2.1600e-12i
12	-0.0000 + 1.5000i
13	3.1264e-13 - 2.2737e-12i
14	-1.4211e-13 - 5.9686e-13i
15	2.5000 - 0.0000i

הגרף של *x(t)* ושל גרף האות המשוחזר מהדגימה הלא אחידה $x_{rec-rand}(t)$:



נשים לב שעל אף שהדגימה אינה אחידה קיבלנו שחזור מושלם מכיוון שכדי לקבל שחזור מושלם יש לפתור 15 משוואות בת"ל. כל 15 המשוואות הן חלק ממחזור אחד של האות ולכן נקבל ערכי דגימה בת"ל. נזהר לא לדגום באותה נקודה פעמיים ע"מ שאכן המשוואות יהיו בת"ל אחת לשנייה ולא נוכל להשתמש בשיטה זו.

ה) נחזור על סעיפים א' – ד' כאשר נוסיף רעש אקראי למטריצה *F*.
ע"י מטלב נקבל את וקטור מקדמי הפורייה *a*:

דגימה אחידה

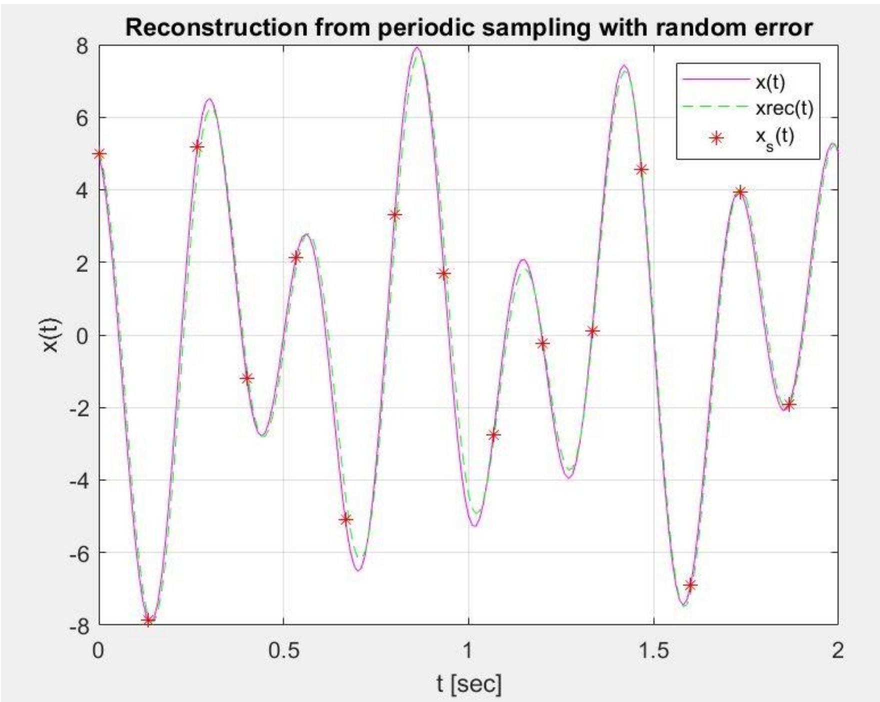
1	2.5000 - 0.0000i
2	1.9151e-15 + 6.5226e-16i
3	-8.3961e-16 - 6.1062e-16i
4	0.0000 - 1.5000i
5	-2.5674e-16 + 4.8572e-16i
6	-1.5266e-15 - 1.2351e-15i
7	8.8818e-16 + 3.6776e-16i
8	-5.5511e-17 + 5.6962e-16i
9	8.1879e-16 - 2.4286e-16i
10	5.8287e-16 + 1.0408e-15i
11	5.9674e-16 - 4.4409e-16i
12	0.0000 + 1.5000i
13	-1.5613e-15 + 6.8001e-16i
14	4.3021e-16 - 1.0131e-15i
15	2.5000 + 0.0000i

דגימה לא אחידה

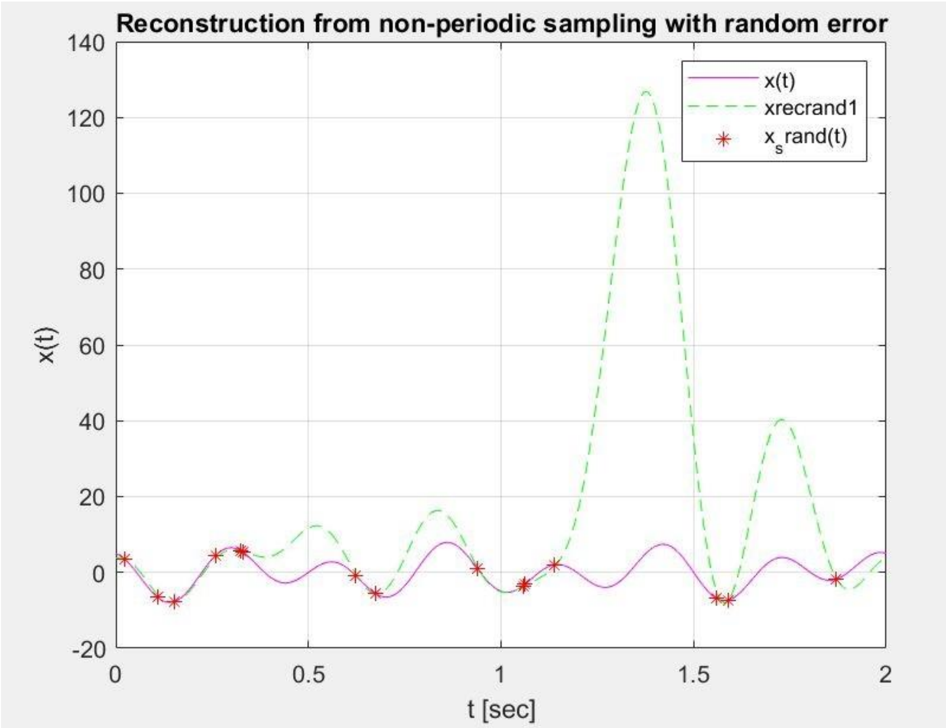
1	2.5000 - 0.0000i
2	-7.1054e-15 - 2.8422e-14i
3	-7.1054e-14 - 5.6843e-14i
4	-0.0000 - 1.5000i
5	-2.8422e-14 - 3.5527e-14i
6	0.0000e+00 - 1.4211e-14i
7	-7.1054e-14 + 1.1369e-13i
8	-1.7053e-13 - 1.5215e-13i
9	1.5632e-13 + 2.8422e-14i
10	-5.6843e-14 + 4.2633e-14i
11	4.2633e-14 + 2.1316e-14i
12	0.0000 + 1.5000i
13	-2.8422e-14 - 2.8422e-14i
14	2.1316e-14 - 2.8422e-14i
15	2.5000 - 0.0000i

גרף המתאר את האות המקורי *x(t)*, נקודות הדגימה $x_s(t)$, והאות המשוחזר ע"י שיטת *least square* $x_{rect}(t)$:

- דגימה אחידה:



- דגימה לא אחידה:



ה-*condition number* (שמכאן והלאה נקראה לא *CN*) של *F* עבור דגימה אחידה הוא 1.

ה-*CN* של דגימה לא אחידה הוא *1.4e+03*

ה-*CN* של דגימה אחידה עם רעש הוא 1.115

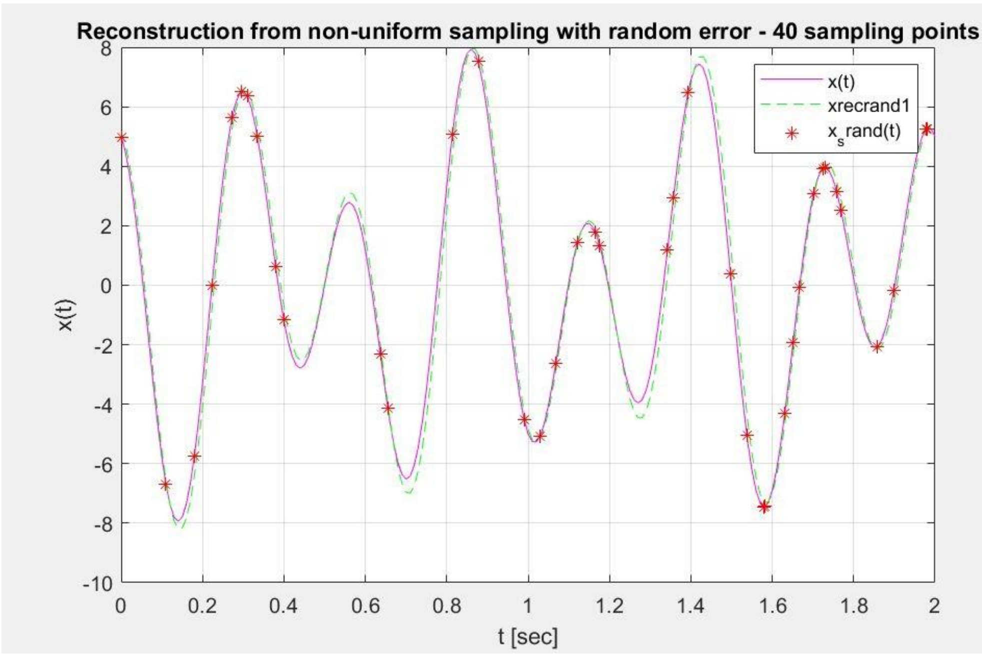
ה-*CN* של דגימה לא אחידה עם רעש הוא *1.7e+03*

ה-*CN* מספר המצב של המערכת מתאר את היחס בים השגיאה היחסית במוצא לשגיאה היחסית בקלט. לפיכך ניתן לראות כי עבור דגימה אחידה המטריצה *F* בקושי רגישה לרעשים (*CN* = 1 בקירוב) ולכן השחזור שקיבלנו הינו מושלם. לעומת זאת, עבור דגימה לא אחידה,המטריצה *F* מאוד רגישה לרעשים (*C>>1*) ולכן לא הצלחנו לשחזר את האות המקורי.

ו) נחזור על סעיף ה' רק עם 40 דגימות עבור דגימה לא אחידה.
וקטור מקדמי הפורייה *a*:

1	2.4880 + 0.2685i
2	0.0111 + 0.0134i
3	0.0288 + 0.0313i
4	0.1177 - 1.4937i
5	-0.0142 + 0.0257i
6	0.0346 - 0.0147i
7	0.0191 + 0.0270i
8	0.0469 - 0.0000i
9	0.0191 - 0.0270i
10	0.0346 + 0.0147i
11	-0.0142 - 0.0257i
12	0.1177 + 1.4937i
13	0.0288 - 0.0313i
14	0.0111 - 0.0134i
15	2.4880 - 0.2685i

גרף המתאר את האות המקורי *x(t)*, נקודות הדגימה הלא אחידות $x_{s-rand}(t)$, והאות המשוחזר ע"י שיטת *least square* $x_{rect-rand}(t)$:



ה-*CN* של מטריצת המקדמים *F* עבור דגימה לא אחידה הוא 2.99 .

ה-*CN* עבור דגימה לא אחידה עם רעש הוא 2.96.

נשים לב כי כעת קיבלנו מספר נמוך יותר בכ-3 סדרי גודל כאשר אנו דוגמים עם 40 נקודות דגימה ולא 15. בנוסף, ניתן להבחין מהגרף כי קיבלנו שחזור קרוב לאות המקורי.

התוצאה אכן הגיונית מכיוון שהצפייה היא שהיכולת לשחזר את האות המקורי, גם עבור דגימות אקראיות, תגדל עבור מספר גדול יותר של נקודות דגימה של האות באותו זמן מחזור.

<u>שאלה 3 – דגימה ואנליזה פונקציונאלית</u>

א)

```
function C = coff(vec,Mat,T)
    [m,n]=size(Mat);
    t=linspace(0,T,m);
    complex=conj(Mat);

    for i=1:n

        M(i)=(trapz(t,(vec.').*(complex(:,i).'))) ./ (trapz(t,(Mat(:,i).').*(complex(:,i).')));
    end
    C=M';
end
```

vec – וקטור עמודה המכיל ערכים ממחזור אחד של האות בזמן רציף.

Mat – מטריצה המכילה בכל שורה פונקציית בסיס אחת כך שהמטריצה מייצגת סט אחד של פונקציות.

T – זמן מחזור.

ב) מקדמי ההטלה עבור פונקציית הבסיס Ψ_n:

c_n	$g(t)$	$f(t)$
0	-2.0051	4.4136
1	-2.0202	2.979
2	-2.0202	-0.643
3	-4.7273	-2.979
4	-6.0606	-3.1367
5	1.9394	-3.1367
6	3.3535	-2.979
7	6.0606	-0.643
8	6.0606	2.979
9	6.0606	4.227
10	-5.9394	3.1367
11	-6.0606	1.693
12	-6.0606	0.643
13	-3.3535	-1.693
14	-2.0202	-4.4227
15	5.9798	-4.4227

16	4.7273	-1.693
17	2.0202	0.643
18	2.0202	1.693
19	2.0152	3.1244

המקדמים מתאימים לנקודות בהם האות אינו מתאפס.

מקדמי ההטלה עבור פונקציית הבסיס Φ_n:

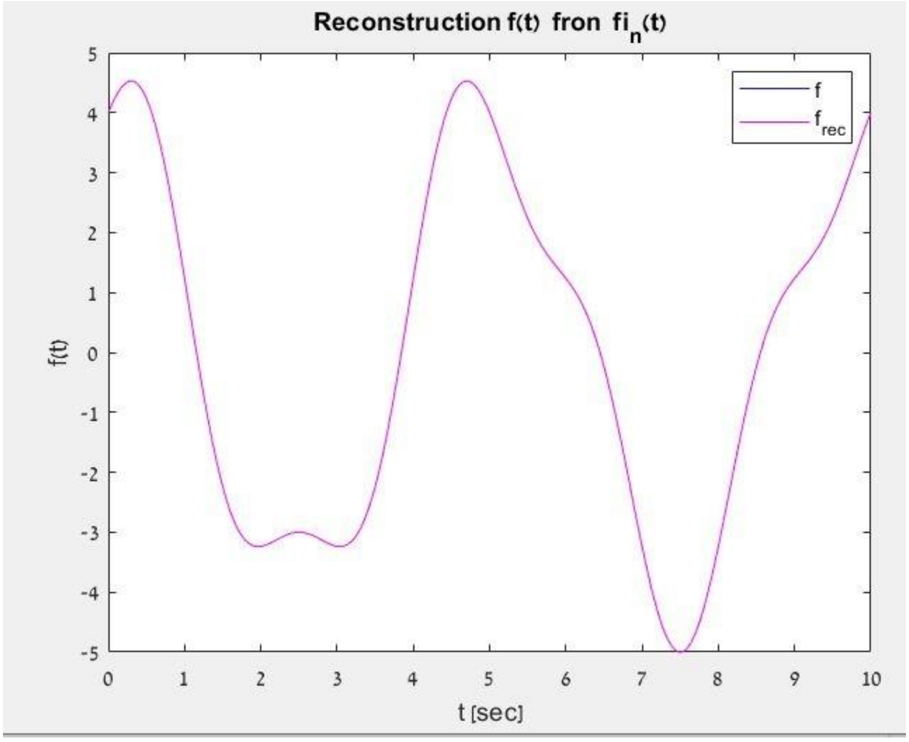
c_n	$g(t)$	$f(t)$
-20	-0.001	0
-19	$-0.005+0.0024i$	0
-18	$0.015+0.2826i$	0
-17	$-0.005-0.0022i$	0
-16	-0.001	0
-15	$-0.005+0.0254i$	0
-14	$0.015+0.3632i$	0
-13	$-0.005+0.0024i$	0
-12	-0.001	0
-11	$-0.005-0.0022i$	0
-10	$0.015+0.5091i$	0
-9	$-0.005-0.4244i$	0
-8	-0.001	0
-7	$0.015+0.2826i$	0
-6	$0.015+0.2826i$	0
-5	$0.015+0.2826i$	$-0.5i$
-4	-0.001	0
-3	$-0.005-1.2732i$	0
-2	$0.015+2.5464i$	2
-1	$-0.005+0.0023i$	0

c_n	$g(t)$	$f(t)$
0	-0.001	0
1	$-0.005+0.0023i$	0
2	$0.015+2.5464i$	2
3	$-0.005-1.2732i$	0
4	-0.001	0
5	$-0.005+0.0023i$	$0.5i$
6	$0.015-0.8487i$	0
7	$-0.005-0.0023i$	0
8	-0.001	0
9	$-0.005+0.4244i$	0
10	$0.015-0.5091i$	0
11	$-0.005+0.0022i$	0
12	-0.001	0
13	$-0.005-0.0024i$	0
14	$0.015-0.3635i$	0
15	$-0.005+0.2546i$	0
16	-0.001	0
17	$-0.005+0.0022i$	0
18	$0.015-0.2826i$	0
19	$-0.005-0.0024i$	0
20	-0.001	0

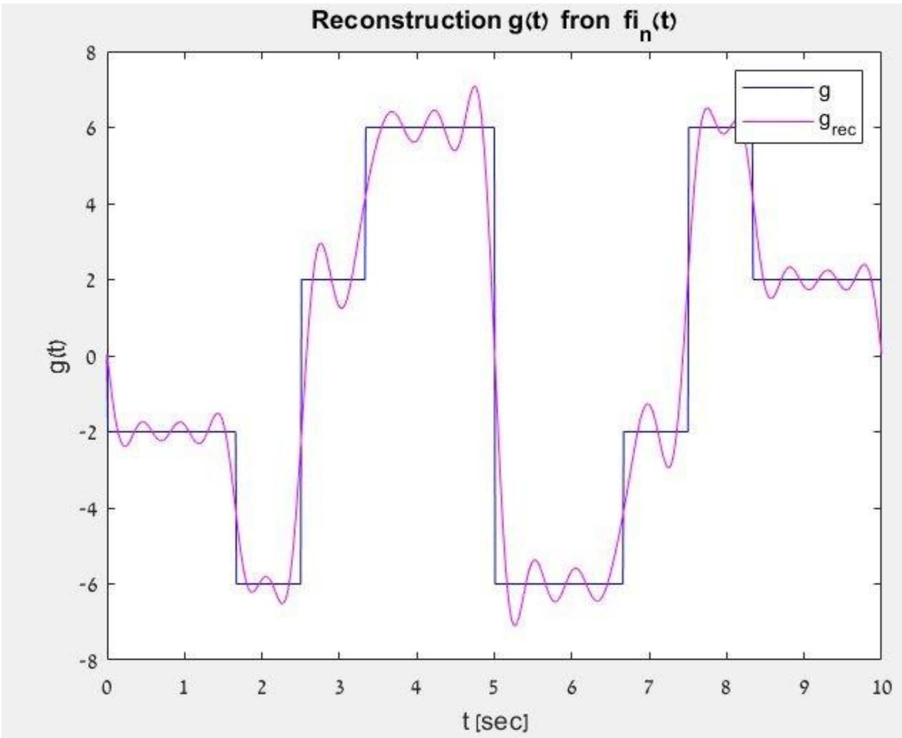
g(t) הוא גל ריבועי ולכן הוא מקבל את כל התדרים, כלומר כל המקדמים שלו שונים מאפס.
מנגד *f(t)* היא הרכבת פונקציות טריגונומטריות בעלות מספר סופי של של הרמוניות ולכן רוב המקדמים מתאפסים.

ג) נשחזר את שתי הפונקציות ע"י שני הסטים של פונקציות הבסיס.

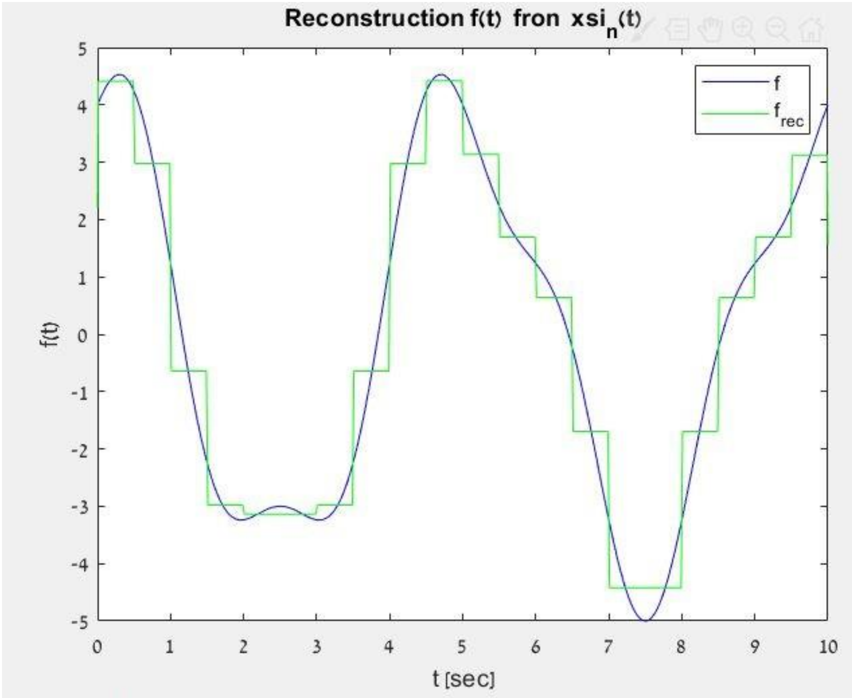
השחזור של *f(t)* מההטלה על Φ_n – שחזור מושלם:



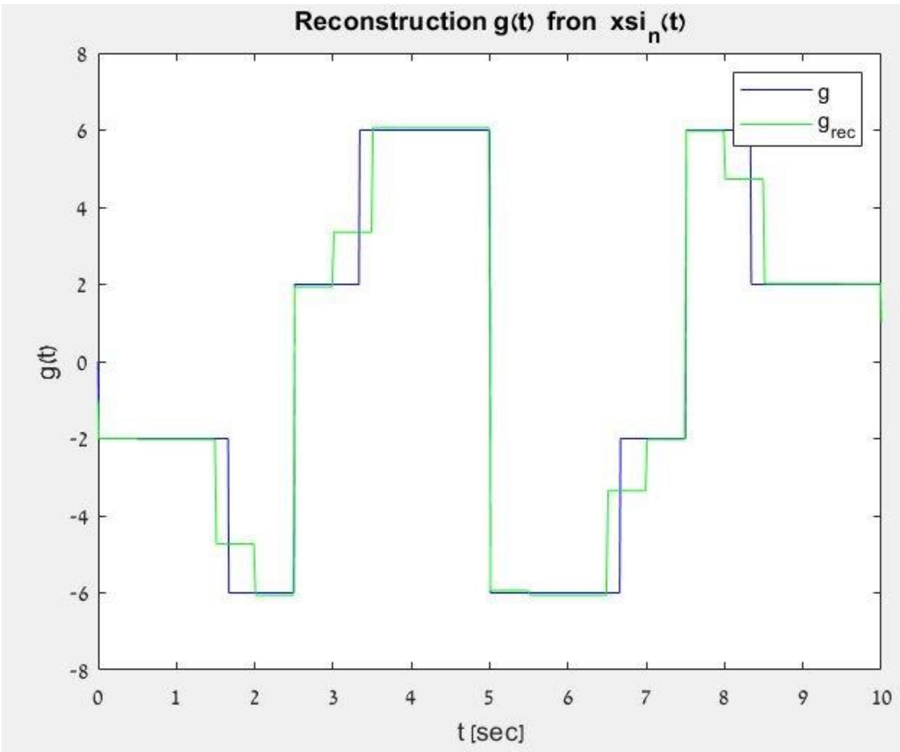
השחזור של *g(t)* מההטלה על Φ_n – שחזור לא מושלם:



השחזור של *f(t)* מההטלה על ψ_n – שחזור לא מושלם:



השחזור של *g(t)* מההטלה על ψ_n – שחזור מושלם:



לא קיבלנו שחזור מדויק עבור כל המקרים מכיוון שכאשר נרצה לשחזר פונקציה אנו צריכים להשתמש בסט פונקציות הבסיס שפורשות אותה.

בשחזור של *g(t)* מההטלה על Φ_n, עבור אינסוף נקודות דגימה נקבל אינסוף מקדמים ואז השחזור יהיה שווה לטור פורייה של *g(t)* כאשר ההטלות הן מקדמי פורייה והאקספוננטים הם פונקציות הבסיס. כלומר, כדי לשפר את הדיוק נגדיל את מספר הדגימות.

בשחזור של *f(t)* מההטלה על ψ_n, לא ניתן לקבל שחזור מדויק יותר ע"י הוספת מקדמים מכיוון שבהוספת מקדמים אנו מוסיפים חלונות מוזזים שלא יתרמו להתקרבות לפונקציה באופן יותר מדויק. במידה והיינו יכולים להצר את רוחב החלונות אז ע"י כך היינו יכולים להפוך את השחזור ליותר מדויק.

ד)

- עבור האות *f(t)* בסיס Φ_n עדיף.
- עבור האות *g(t)* בסיס ψ_n עדיף.
- היתרונות בדגימה ושחזור ע"י Φ_n הן שניתן להוסיף מקדמים ובכך לשפר את רמת הדיוק של השחזור. כמו כן, בסיס זה טוב לפונקציות מחזוריות.
  החסרונות של בסיס זה הן שהוא פחות יעיל לשחזור פונקציות עם שינויים חדים.
- היתרונות בדגימה ושחזור ע"י ψ_n הן שניתן לשחזר פונקציות עם שינויים חדים (מדרגות למשל).
  החסרונות של בסיס זה הן שהוספת מקדמים לא תשפר את רמת הדיוק של שחזור האות.
- השימוש אינו זהה. ב-*ZOH* ערך האות נשמר עד הדגימה הבאה ואילו בפונקציית הבסיס ψ_n נחזיק את הערך הממוצע בין שתי הדגימות.