316098052 ניר שנייפר
316474030 שחר צביק

תקשורת ספרתית - עבודת מחשב 2

שאלה 1

Analysis - 1.1

1.1.1) $S_0 = -\sqrt{E_s}, \ S_1 = \sqrt{E_s}$

בלל ה- MAP - $\hat{S}(r) = \underset{\{S_i\}_{i=0}^{1}}{\arg\max} \{ f_{R/S_i}(r/S=S_i) \cdot P(S=S_i) \}$

$$F(r/S=S_0)\cdot P(S=S_0) \underset{S_1}{\overset{S_0}{\gtrless}} F(r/S=S_1)\cdot P(S=S_1)$$

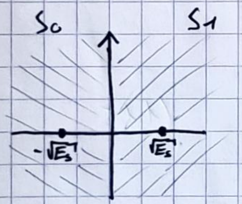
$$\frac{F(r/S=S_0)}{F(r/S=S_1)} \underset{S_1}{\overset{S_0}{\gtrless}} 1$$

$$F(R<r/S=S_i) = f(W+S_i<r/S=S_i) = \{\text{בת"ס}\} = f(W<r-S) = F_W(r-S)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} EXP\left[-\frac{1}{N_0}(r-S_0)^2\right]}{\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} EXP\left[-\frac{1}{N_0}(r-S_1)^2\right]} \underset{S_1}{\overset{S_0}{\gtrless}} 1 \Rightarrow e^{-\frac{1}{N_0}\left[(r-S_0)^2-(r-S_1)^2\right]} \underset{S_1}{\overset{S_0}{\gtrless}} 1 \ / \ln(\cdot)$$ מונו' עולה

$$(r-S_1)^2-(r-S_0)^2 \underset{S_1}{\overset{S_0}{\gtrless}} 0 \Rightarrow S_1^2-S_0^2+2r(S_0-S_1) \underset{S_1}{\overset{S_0}{\gtrless}} 0$$

$$-4r\sqrt{E_s} \underset{S_1}{\overset{S_0}{\gtrless}} 0 \Rightarrow r \underset{S_0}{\overset{S_1}{\gtrless}} 0 \Rightarrow \hat{S}(r) = \begin{cases} -\sqrt{E_s}, & r<0 \\ \sqrt{E_s}, & r>0 \end{cases}$$



1.1.2) $P_e = P(error) = P(error/S_0)\cdot P(S_0) + P(error/S_1)\cdot P(S_1)$

$$P(e/S_0) = \int_T^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} EXP\left[-\frac{1}{N_0}(r-S_0)^2\right] dr = \left\{ r' = \frac{r-S_0}{\sqrt{0.5N_0}} \right\} = \int_{\frac{T-S_0}{\sqrt{0.5N_0}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r'^2}{2}} dr' =$$

$$= Q\left(\frac{T-S_0}{\sqrt{0.5N_0}}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{E_s}}{\sqrt{0.5N_0}}\right)$$

$P(e/S_0) = P(e/S_1) = Q\left(\frac{\sqrt{E_s}}{\sqrt{0.5N_0}}\right)$ - סימטריה

ולכן:

$$P_e = 0.5Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{0.5N_0}}\right) + 0.5Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{0.5N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right)$$

וב- SNR נקבל:

$$P_e = Q\left(\sqrt{2SNR}\right)$$

1.1.3) $\hat{s}(r) = \underset{s_i: i=0}{\arg\max}^{1} \{ f_{R|S_i}(r|s=s_i) \cdot P(s=s_i) \}$ כלל ה- MAP

נפתח באותו אופן כמו סעיף ג' ונקבל:

$$\frac{f(r|s=s_0)}{f(r|s=s_1)} \underset{s_1}{\overset{s_0}{\gtrless}} 1$$

$$\frac{\cancel{\frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}}} EXP[-\sqrt{\frac{2}{\sigma^2}}|r-s_0|]}{\cancel{\frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}}} EXP[-\sqrt{\frac{2}{\sigma^2}}|r-s_1|]} \underset{s_1}{\overset{s_0}{\gtrless}} 1$$

$$EXP[\sqrt{\frac{2}{\sigma^2}}(|r-s_1|-|r-s_0|)] \underset{s_1}{\overset{s_0}{\gtrless}} 1 \xRightarrow{\ln \text{ מונו' עולה}} |r-s_1|-|r-s_0| \underset{s_1}{\overset{s_0}{\gtrless}} 0 \Rightarrow |r-\sqrt{E_s}|-|r+\sqrt{E_s}| \underset{s_1}{\overset{s_0}{\gtrless}} 0$$

$$|r-\sqrt{E_s}| \underset{s_1}{\overset{s_0}{\gtrless}} |r+\sqrt{E_s}| \Rightarrow \hat{s}(r) = \begin{cases} -\sqrt{E_s}, & r<0 \\ \sqrt{E_s}, & r>0 \end{cases}$$

1.1.4) $P_e = P(e|s_0)\cdot P(s_0) + P(e|s_1)\cdot P(s_1)$

$\cdot P(e|s_0) = \int_T^{\infty} \frac{1}{\sqrt{N_0}} EXP[-\sqrt{\frac{4}{N_0}}|r+\sqrt{E_s}|]dr =$ T=0 ולכן $0<|r+\sqrt{E_s}|$

$= \frac{1}{\sqrt{N_0}} EXP[-\sqrt{\frac{4E_s}{N_0}}] \cdot \int_0^{\infty} EXP[-\sqrt{\frac{4}{N_0}}r]dr = 0.5 EXP[-\sqrt{\frac{4E_s}{N_0}}]$

$\cdot P(e|s_1) = P(e|s_0) = 0.5 EXP[-\sqrt{\frac{4E_s}{N_0}}]$ - סימטריה

$\Rightarrow P_e = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} EXP[-\sqrt{\frac{4E_s}{N_0}}] + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} EXP[-\sqrt{\frac{4E_s}{N_0}}] = \frac{1}{2} EXP[-\sqrt{\frac{4E_s}{N_0}}]$

וכפ- SNR נקבל:

$P_e = \frac{1}{2} EXP[-\sqrt{2\, SNR}]$

(1.1.5

זנבי הצפיפות של הגאוסיאן דועכת יותר מהר עבור SNR גבוה ($e^{-x^2} \sim e^{-|x|}$)
עבור SNR קטן יש להתחשב באסימפטוטה. ולכן ישתמשו בו עבור הלפלסיאן.
ב- SNR השגיאה מחושבת ע"י הזנב של האותות ולכן נסיק שעבור הגאוסיאן לרוב
השגיאה תהיה מינימלית.

מגישים: ניר שניידר 316098052
שחר צביק 316474030

<u>שאלה 1.2 – Simulations</u>

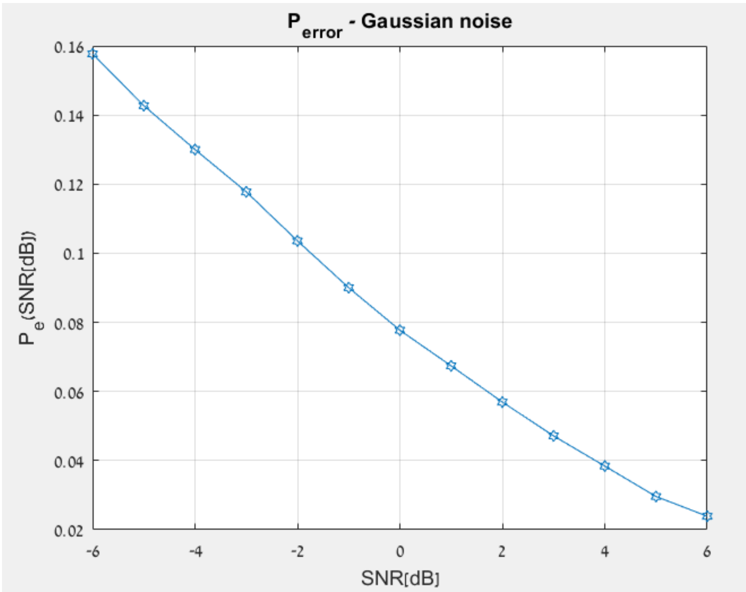
1.2.1-3) ניתן לראות בקוד מטלב בסוף הדו"ח.

1.2.4) להלן החישוב של ההסתברות לשגיאה של הגאוסיאן (ניתן לראות את תהליך החישוב בקוד מטלב בסוף הדו"ח):

prob_error_gauss
13x1 double

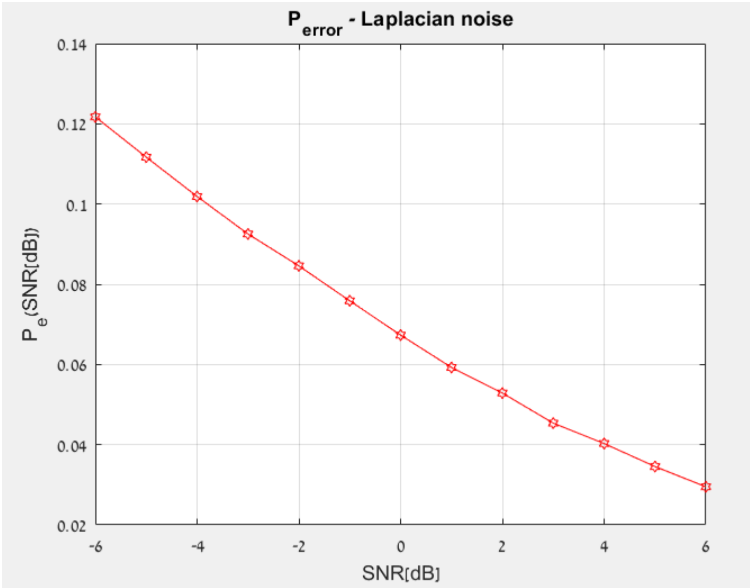
	1	2
1	0.1573	
2	0.1456	
3	0.1304	
4	0.1174	
5	0.1033	
6	0.0904	
7	0.0806	
8	0.0673	
9	0.0568	
10	0.0468	
11	0.0368	
12	0.0301	
13	0.0230	

1.2.5) להלן הגרף להסתברות לשגיאה בגילוי האותות שעברו דרך הערוץ עם רעש בהתפלגות גאוסית כתלות ביחס האות לרעש:



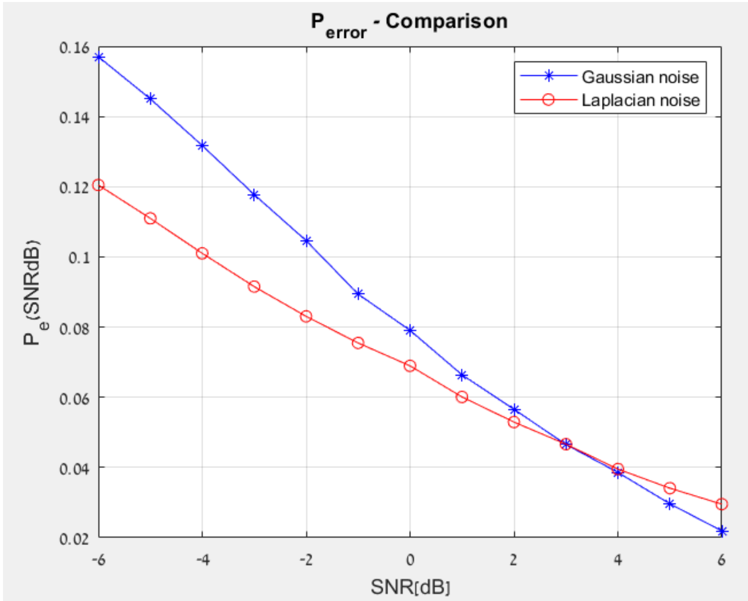
נשים לב כי היחס מוצג ב [dB].

1.2.6) להלן הגרף להסתברות לשגיאה בגילוי האותות שעברו דרך הערוץ עם רעש בהתפלגות לפלסיאנית כתלות ביחס האות לרעש:



נשים לב כי היחס מוצג ב [dB].

1.2.7) להלן הגרף המשווה את הסתברויות השגיאה בגילוי האותות בהתפלגות גאוסיאנית לעומת התפלגות לפלסיאנית כתלות ביחס האות לרעש:



נשים לב כי היחס מוצג ב [dB].

בהתאם לחישוב ב-1.1.5, עבור SNR גדול הסתברות השגיאה עם רעש בהתפלגות גאוסית קטנה יותר מהרעש המתפלג לפלסיאנית, ואילו עבור SNR קטן הסתברות השגיאה עם רעש בהתפלגות לפלסיאן קטנה יותר מאשר ההתפלגות הגאוסיאנית.

שאלה 2

נתון S_0, S_1 סימבולים בעלי הסת' א-פריורית זהה. R - הסיגנל המתקבל

$$R/S_0 \sim U\left(-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}\right),\quad R/S_1 \sim N(0,\sigma^2),\quad f_{R/S_0}(r/S=S_0) = \begin{cases} \frac{1}{A}, & r \in \left[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}\right] \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

2.1) כלל ה-MAP עבור 2 סיגנלים נתון ע"י:

$$P(S_1)\cdot f_{R/S_1}(r/S_1) \underset{S_0}{\overset{S_1}{\gtrless}} P(S_0)\cdot f_{R/S_0}(r/S_0)$$

$\Rightarrow$ (הסתברויות שוות) $\Rightarrow f_{R/S_1}(r/S_1) \underset{S_0}{\overset{S_1}{\gtrless}} f_{R/S_0}(r/S_0)$

- $\underline{r \notin \left[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}\right]}$: $\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}}_{>0}\underbrace{EXP\left[-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right]}_{>0} \underset{S_0}{\overset{S_1}{\gtrless}} 0$

לכן בתחום הזה נבחר $\hat{S}(r) = S_1$

- $\underline{r \in \left[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}\right]}$: $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} EXP\left[-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right] \underset{S_0}{\overset{S_1}{\gtrless}} \frac{1}{A} \Rightarrow EXP\left[\frac{-r^2}{2\sigma^2}\right] \underset{S_0}{\overset{S_1}{\gtrless}} \frac{1}{A}\sqrt{2\pi\sigma^2} \quad / \ln(\cdot)$, מונו' עולה

$$\Rightarrow -\frac{1}{2\sigma^2} r^2 \underset{S_0}{\overset{S_1}{\gtrless}} \ln\left(\sqrt{\frac{2\pi\sigma^2}{A^2}}\right) \Rightarrow r^2 \underset{S_1}{\overset{S_0}{\gtrless}} \sigma^2 \ln\left(\frac{A^2}{2\pi\sigma^2}\right) \quad / \sqrt{\cdot}$$

נגדיר: $\boxed{\sqrt{\sigma^2 \ln\left(\frac{A^2}{2\pi\sigma^2}\right)} \triangleq B}$

$$S_0 : r < -B \cup r > B \quad , \quad S_1 : -B < r < B$$

כלומר קיבלנו: • עבור $B > \frac{A}{2}$: $\hat{S}(r) = S_1$

• עבור $B < \frac{A}{2}$: $\hat{S}(r) = \begin{cases} S_0, & \left(-\frac{A}{2} < r < -B\right) \cup \left(B < r < \frac{A}{2}\right) \\ S_1, & \text{else} \end{cases}$

2.2) $P_e = P(\text{error}) = P(e/S_0)\cdot P(S_0) + P(e/S_1)\cdot P(S_1)$

- $\underline{B > \frac{A}{2}}$: # $P(e/S_1) = P(\hat{S}=S_0/S_1) = 0$; # $P(e/S_0) = P(\hat{S}=S_1/S_0) = 1$

$$\Rightarrow P_e = 0.5\cdot 1 + 0.5\cdot 0 = \frac{1}{2}$$

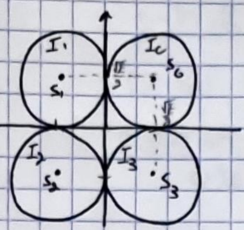
- $\underline{B < \frac{A}{2}}$: # $P(e/S_1) = P(\hat{S}=S_0/S_1) = \int_{-A/2}^{-B} f_{R/S_1}\,dr + \int_{B}^{A/2} f_{R/S_1}\,dr = \left(f_{R/S_1}\ \text{סימ' זוגית}\right) = 2\int_{B}^{A/2} f_{R/S_1}(r/S_1)\,dr =$

$$= 2\left(Q\left(\frac{A}{2}\right) - Q(B)\right)$$

$P(e/S_0) = P(\hat{S}=S_1/S_0) = \int_{-B}^{B} \frac{1}{A}\,dr + \int_{A/2}^{\infty} 0\cdot dr + \int_{-\infty}^{A/2} 0\cdot dr = \frac{2B}{A}$

$$\Rightarrow P_e = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}B}{A} + \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\left(Q\left(\frac{A}{2}\right) - Q(B)\right) = \frac{B}{A} + Q\left(\frac{A}{2}\right) - Q(B)$$

<u>שאלה 3</u>



קונסטלציית 4-QAM. אותות בעלי הסת' א-פריוריות זהה בערוץ AWGN

$\underline{r}=\underline{s}+\underline{w}$, $\underline{w}\perp\!\!\!\perp\underline{s}$. $\underline{w}$ רעש לבן עם תוחלת אפס $C_{\underline{w}}=\begin{pmatrix}\frac{N_0}{2} & 0\\ 0 & \frac{N_0}{2}\end{pmatrix}$

משתמשים בכלל החלטה שונה.

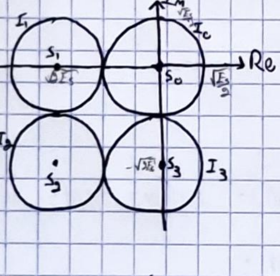
<u>3.1</u> - הסתברויות שגויות שהתקבל באזור החלטה I_i בהינתן שנשלח s_i לכל $i=0,\dots,3$ כפונק' של $\sqrt{E_s}, N_0$.

$P(r\in I_i/s_i)$ נשווה לכל i מהסימטריה. $R=(r_0,r_1)^T$

נבצע טרנספורמציה לבעיה: • הזזה $\frac{\sqrt{E_s}}{2}$ למטה ושמאלה (בה"כ).

• נעבור לקוא' הקוטביות.

נשים לב כי המרחק בין הסיגנלים נשאר זהה ואין שינוי בהסתברויות לשגיאה ולכן הבעיה שקולה.



$\underline{r}=ve^{j\theta}$, $\underline{Y}=(v,\theta)^T$, $\underline{r}=(Re, I_m)^T$

$\begin{cases} v=\sqrt{Re^2+I_m^2} \\ \theta=\arctan\left(\frac{I_m}{Re}\right)\end{cases}$ $\begin{cases} Re=v\cos\theta \\ I_m=v\sin\theta\end{cases}$

$|J(y_1,y_2)|=\begin{vmatrix}\cos\theta & -v\sin\theta \\ \sin\theta & v\cos\theta\end{vmatrix}=v$

$f_{R/s_i}(\underline{r}/s_i)=f_{R/s_i}((v\cos\theta, v\sin\theta)/s_i) \ominus$

$\begin{cases} Re=s_i^{(0)}+w^{(0)} \\ I_m=s_i^{(1)}+w^{(1)}\end{cases}$ $\underline{w}$ גאוס' וגם הקורדינאטות אורתוגונליות לכן הרכיבים אחרי הטרנספורמציה בנוסף הם גאוס'-ים במשותף

ולכן בת"ס. מכאן שכל ק"ן שלהם בת"ס גם כן. $Re\perp\!\!\!\perp I_m$

$\ominus f_{Re/s_i}(v\cos\theta/s_i)\cdot f_{I_m/s_i}(v\sin\theta/s_i)$.

בגלל הסימטריה נחשב עבור $s_i=s_0$

$Re/s_0=s_0^{(0)}+w^{(0)}/\underline{s}_0=[\underline{w}\perp\!\!\!\perp\underline{s}]=s^{(0)}+w^{(0)}\sim N(0,\frac{N_0}{2})$

$I_m/s_0\sim N(0,\frac{N_0}{2})$ באותו אופן

$$P(\underline{r}\in I_0/\underline{s}_0)=\int_{I_0} f_{\underline{R}/\underline{s}_0}(\underline{r}/s_0)d\underline{r}=\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{E_s}{2}}} v\cdot\frac{1}{\pi N_0}EXP\left[-\frac{1}{N_0}(v\cos\theta)^2\right]\cdot EXP\left[-\frac{1}{N_0}(v\sin\theta)^2\right]dv\,d\theta=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\,\frac{1}{\pi N_0}\int_0^{\sqrt{\frac{E_s}{2}}} ve^{-v^2/N_0}dv=\int_{v=0}^{\sqrt{\frac{E_s}{2}}}\frac{2}{N_0}ve^{-v^2/N_0}dv=e^{-v^2/N_0}\Big|_{v=0}^{v=\sqrt{\frac{E_s}{2}}}=$$

$$=1-EXP\left[-\frac{E_s}{2N_0}\right].$$

Contents

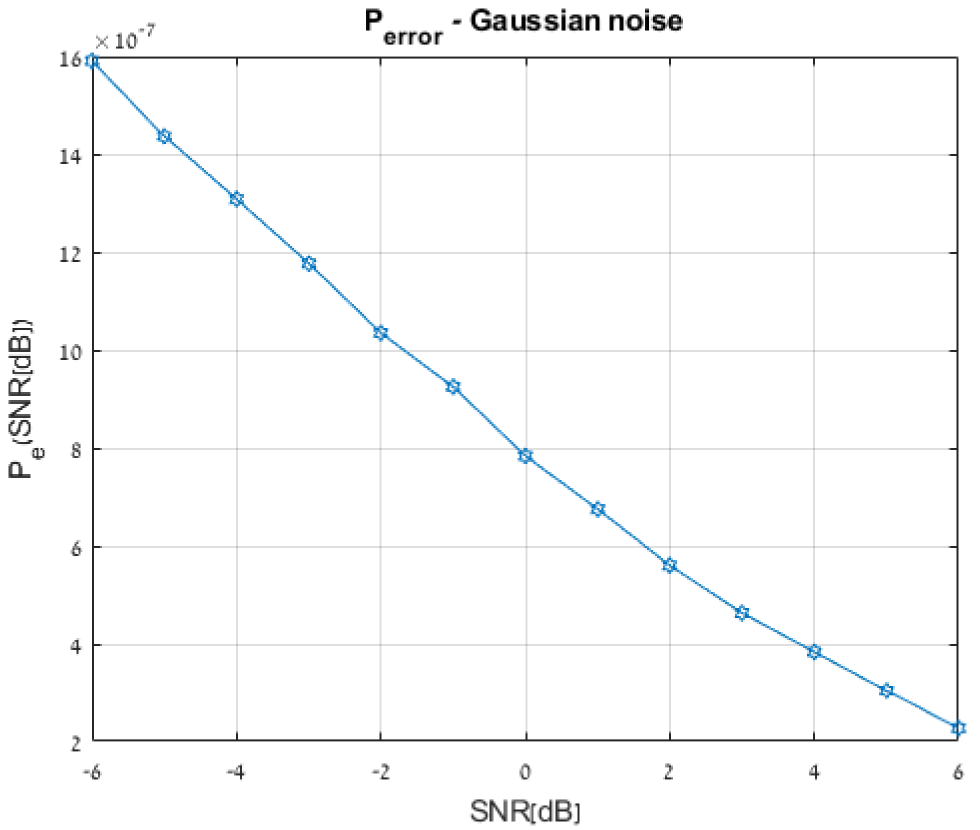

```
clear all;
close all;
```

Variables

```
E = 1;
s = randsrc(10^5, 1);
SNR_db =(-6 : 1 : 6);
SNR = 10.^(SNR_db / 20);
N = E./SNR;
var = sqrt(N / 2);
norm = 10^5;
```

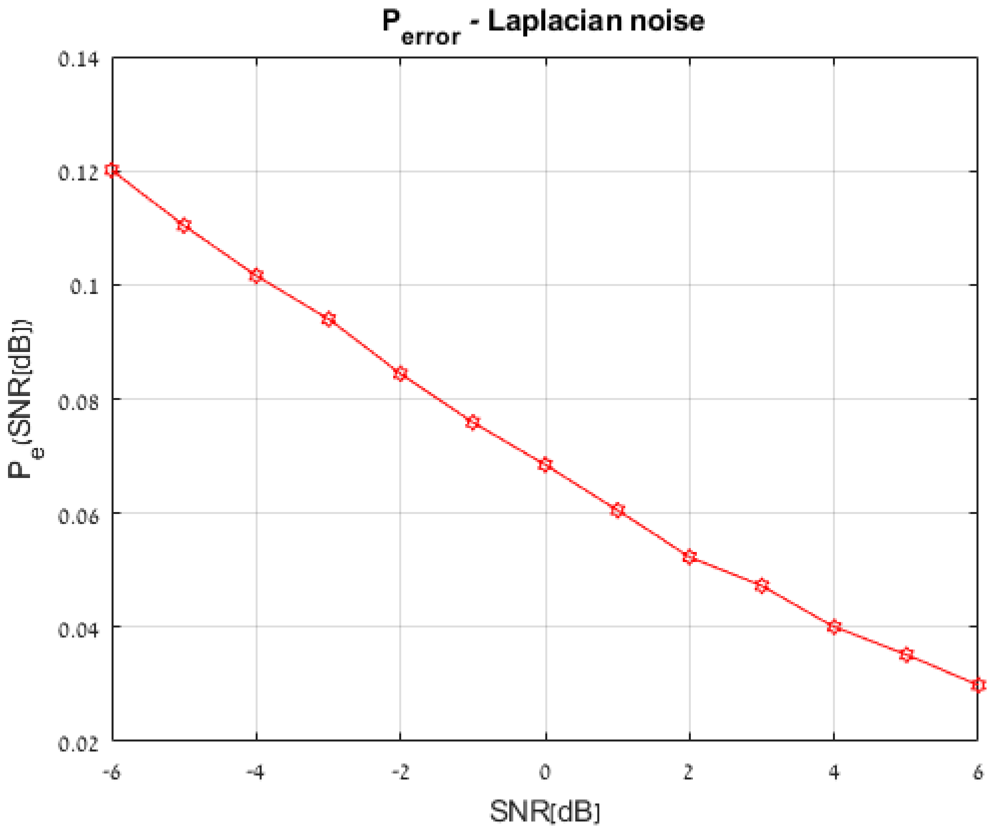
Gaussian noise

```
SG = zeros(10^5, 13);
for i = 1 : 13
   WG(:, i) = var(i) * randn(10^5, 1);
   RG(:, i) = s + WG(:, i);
   for j = 1 : 10^5
       if (RG(j, i) > 0)
           SG(j, i) = 1;
       else
           SG(j, i) = -1;
       end
   end
end

prob_error_A = zeros(13,1);

for i = 1 : 13
   for j = 1 : 10^5
       if(SG(j, i) - s(j) ~= 0)
          prob_error_A(i) = prob_error_A(i) + 1;
       end
   end
end

prob_error_gauss = prob_error_A / norm;

%Graph
figure(1);
plot(SNR_db, prob_error_gauss / norm ,'-h');
grid on
title('P_e_r_r_o_r - Gaussian noise');
xlabel('SNR[dB]');
ylabel('P_e(SNR[dB])');
movegui('west');
```



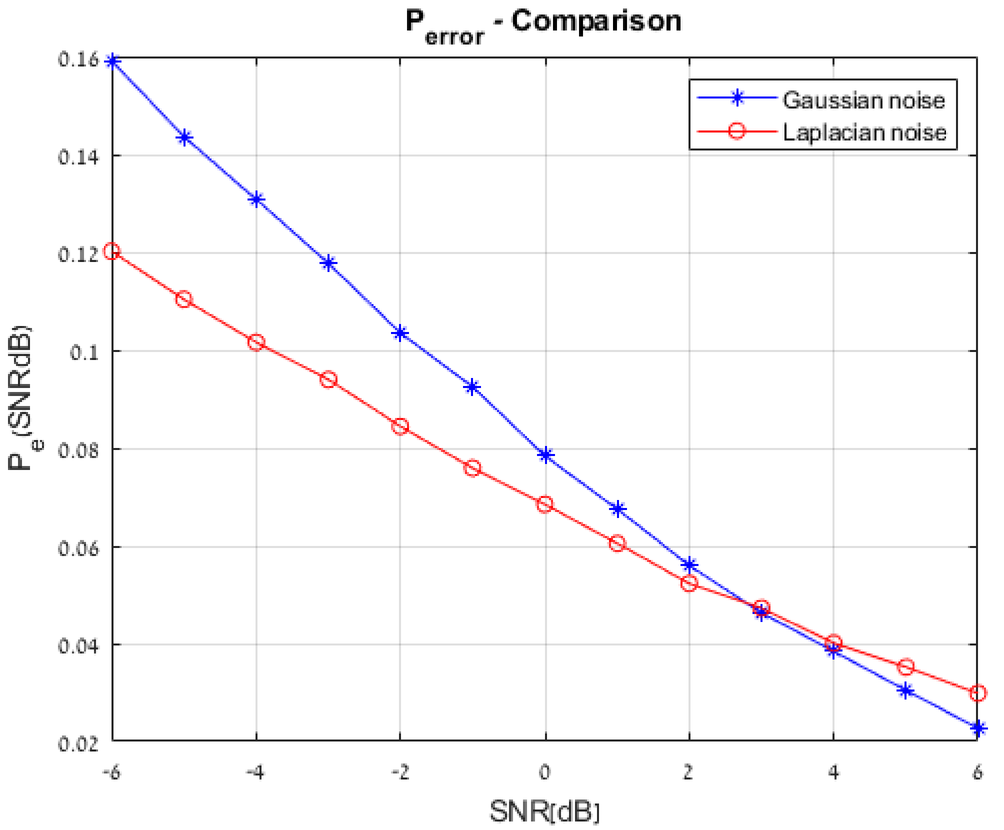
Laplacian noise

```
SL=zeros(10^5,13);
for i = 1 : 13
   WL(:, i) = laprnd(10^5, 1, 0, var(i));
   RL(:, i) = s + WL(:, i);
   for j = 1 : 10^5
       if (RL(j, i) > 0)
           SL(j, i) = 1;
       else
           SL(j, i) = -1;
       end
   end
end

prob_error_laplace = zeros(13, 1);

for i = 1 : 13
    for j = 1 : 10^5
        if(SL(j, i) - s(j) ~= 0)
           prob_error_laplace(i) = prob_error_laplace(i) + 1;
        end
    end
end

%Graph:
figure(2);
plot(SNR_db, prob_error_laplace/norm, 'r-h');
grid on
title('P_e_r_r_o_r - Laplacian noise');
xlabel('SNR[dB]');
ylabel('P_e(SNR[dB])');
movegui('east');
```



Compare Plots

```
figure(3);
plot(SNR_db, prob_error_A/norm, 'b-*');
hold on
plot(SNR_db, prob_error_laplace/norm, 'r-o');
grid on
title('P_e_r_r_o_r - Comparison');
xlabel('SNR[dB]');
ylabel('P_e(SNRdB)');
legend('Gaussian noise','Laplacian noise')
movegui('north');
```



Sub-Functions

```
function y  = laprnd(m, n, mu, sigma)
%LAPRND generate i.i.d. laplacian random number drawn from laplacian distribution
%   with mean mu and standard deviation sigma.
%   mu      : mean
%   sigma   : standard deviation
%   [m, n]  : the dimension of y.
%   Default mu = 0, sigma = 1.
%   For more information, refer to
%   http://en.wikipedia.org./wiki/Laplace_distribution

%   Author  : Elvis Chen (bee33@sjtu.edu.cn)
%   Date    : 01/19/07

%Check inputs
if nargin < 2
    error('At least two inputs are required');
end

if nargin == 2
    mu = 0; sigma = 1;
end

if nargin == 3
    sigma = 1;
end

% Generate Laplacian noise
u = rand(m, n)-0.5;
b = sigma / sqrt(2);
y = mu - b * sign(u).* log(1- 2* abs(u));
end
```