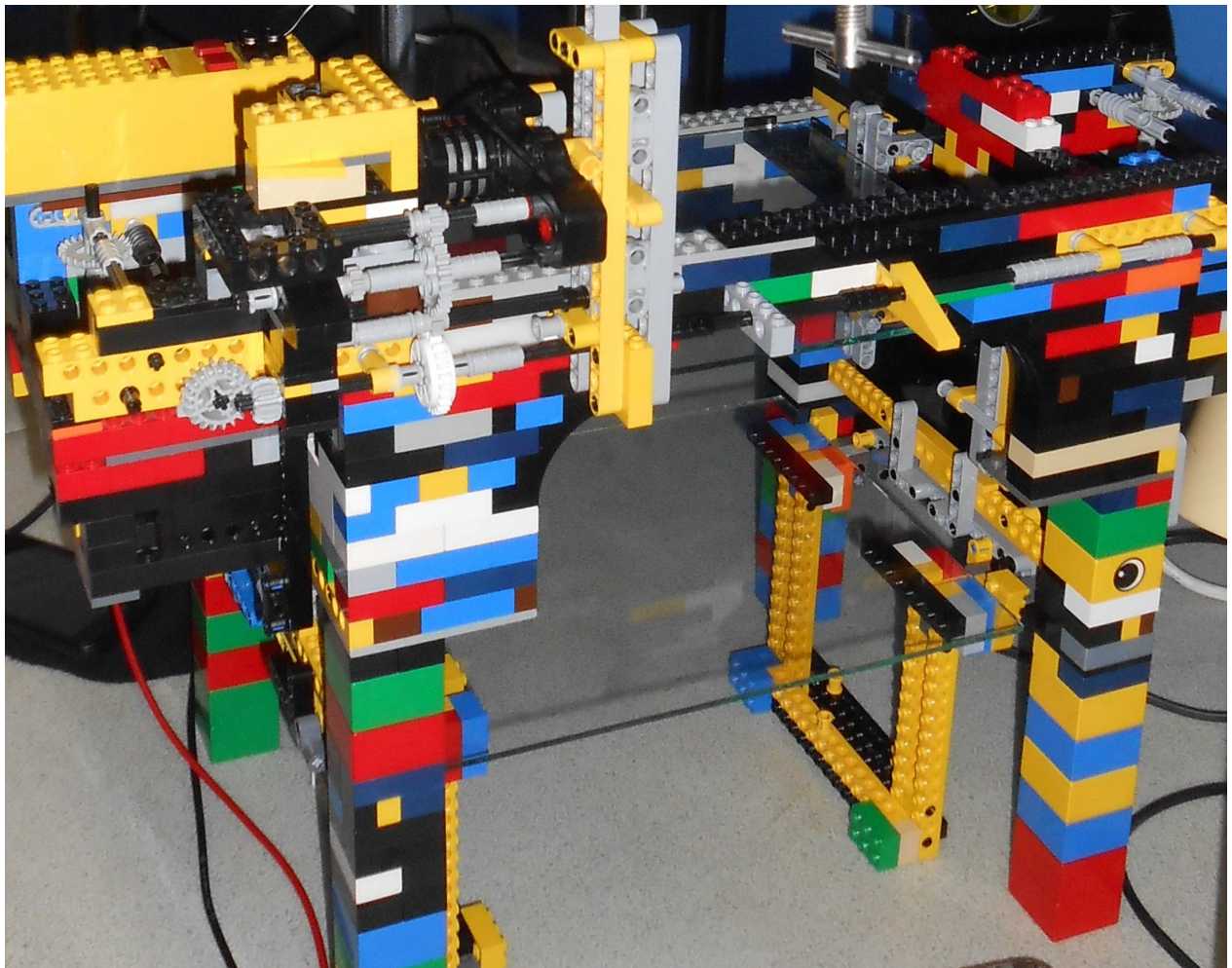


En collaboration avec : Chevalley Loïc  
Lycée Henri Poincaré

# UNE APPLICATION DE L'EFFET ACOUSTO-OPTIQUE: LE RADIO ACOUSTIC SOUNDING SYSTEM (RASS)

---

Lenormand Augustin



# INTRODUCTION

L'utilisation des radars en météorologie moderne permet aujourd'hui d'accéder à de nombreux paramètres de la proche atmosphère. Parmi ces paramètres, la température dans les basses couches de l'atmosphère est obtenue grâce à l'utilisation d'un système basé sur l'effet acousto-optique : le Radio Acoustique Sounding System (RASS), système où une onde radar se réfléchit sur un front d'ondes sonores. Le phénomène de réflexion mis en jeu dans ce radar est appelé réflexion de Bragg et l'onde réfléchie est décrite théoriquement comme la somme d'ondes réfléchies sur de multiples couches diélectriques d'indice légèrement différent.

Après avoir analysé en détail ce phénomène opto-acoustique, nous avons essayé de le mettre en évidence expérimentalement puis de le comparer avec la réflexion d'une onde centimétrique sur un milieu diélectrique stratifié, un miroir de Bragg, créé par nos soins.

## 1 DESCRIPTION DU RASS

### 1.1 Principe de fonctionnement

Lors d'une mesure à l'aide d'un radar muni d'un système RASS, on émet verticalement un signal sonore suivi d'un signal radar.

L'onde acoustique se propage avec une célérité  $c_a$  qui dépend de la température  $T$  de l'air selon la relation :  $c_a = 20,05 \sqrt{T}$  (en m/s,  $T$  en K. [1])

L'onde radar se réfléchit ensuite sur le front d'ondes sonores en suivant le mécanisme décrit ci-après (§1.2). La réflexion de l'onde sur un dioptré en mouvement à la vitesse  $c_a$  induit alors une modification de la pulsation de l'onde réfléchie par effet Doppler.

L'onde réfléchie est alors reçue et analysée au sol. La comparaison des fréquences des ondes émises et réfléchies permet alors de déterminer la vitesse de propagation du son et donc la température de l'air au dessus du radar.

### 1.2 Réflexion de l'onde radar sur le front d'ondes sonores

Lors de la propagation d'une onde sonore dans un milieu diélectrique homogène comme l'air, l'onde de pression génère une variation de la densité particulaire du milieu autour d'une valeur au repos  $N_0$ .

Dans le cas d'une onde plane de pulsation spatiale  $k_a$  et de pulsation  $\omega_a$  se propageant dans la direction des  $x$  croissants cette variation peut s'écrire :  $N(x, t) = N_0 + \Delta N \cos(k_a x - \omega_a t)$ , avec  $\Delta N \ll N_0$  dans le cadre de l'approximation acoustique.

Cette variation de densité particulaire provoque une variation de la permittivité diélectrique et donc de l'indice optique du milieu. Celui-ci est ainsi une fonction de  $x$  et de  $t$  sur toute la longueur  $L$  où s'étend la perturbation sonore :  $n(x, t) = n_0 + \Delta n \cos(k_a x - \omega_a t)$ ,  $\Delta n \ll n_0$ .

Considérons onde électromagnétique, de pulsation  $\omega_r$ , de nombre d'onde  $k_r$ , polarisée perpendiculairement au plan d'incidence, qui se propage dans le milieu. Elle est alors partiellement réfléchie par chaque strate de densité sur laquelle elle arrive avec un angle d'incidence  $\theta$ .

L'onde réfléchie à l'abscisse  $x$  possède une avance de phase  $\phi(x) = 2k_r x \cos \theta$  sur l'onde réfléchie à l'abscisse  $x = 0$  ce qui permet d'exprimer le coefficient de réflexion en amplitude  $r$  ainsi :

$$r = \int_{-L/2}^{L/2} e^{i2k_r x \sin \theta} \delta r \quad (1.1)$$

Où  $\delta r$  est le coefficient de réflexion infinitésimal à l'abscisse  $x$ . On peut expliciter le coefficient  $\delta r$  en utilisant les coefficients de Fresnel et la loi de Descartes :

$$r = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2}, \quad n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (1.2)$$

Ici  $n_1 = n$ ,  $n_2 = n_1 + \delta n$  et  $\theta_1 = \theta$ ,  $\theta_2 = \theta + \delta \theta$ . En reportant dans la loi de Descartes on obtient, au premier ordre en  $\delta n$  :  $n \sin \theta = (n + \delta n) \sin(\theta + \delta \theta) = n \sin \theta + \delta n \sin \theta + n \delta \theta \cos \theta$ . On obtient alors :

$$\delta \theta = -\frac{\delta n \sin \theta}{n \cos \theta}, \quad \cos \theta_2 = \cos \theta + \frac{\delta n \sin^2 \theta}{n \cos \theta}$$

Le coefficient 1.2 devient ensuite :

$$\delta r = -\frac{\delta n}{2n \cos^2 \theta} \quad (1.3)$$

On peut donc écrire :

$$\delta n = \frac{\partial n}{\partial x} dx, \quad \delta r = \frac{k_a \Delta n}{2n \cos^2 \theta} \sin(k_a x - \omega_a t) dx \quad (1.4)$$

En reportant cette expression dans l'expression intégrale de  $r$  on obtient alors finalement :

$$r = \frac{k_a \Delta n}{2n \cos^2 \theta} \int_{-L/2}^{L/2} \sin(k_a x - \omega_a t) e^{i2k_r x \sin \theta} dx$$

$$\boxed{r = -iL \frac{k_a \Delta n}{8n \cos^2 \theta} \left[ \text{sinc} \left( L \frac{k_a + 2k_r \cos \theta}{2} \right) - \text{sinc} \left( L \frac{k_a - 2k_r \cos \theta}{2} \right) \right] e^{-i\omega_a t}} \quad (1.5)$$

On constate ici que selon la valeur de  $\theta$  la valeur des sinus cardinaux varie beaucoup. La réflexion est alors maximale dans la direction  $\theta_B$  vérifiant :  $\cos \theta_B = \frac{k_a}{2k_r} = \frac{\lambda_r}{2\lambda_a}$ . Cet angle  $\theta_B$  est appelé *angle de Bragg*.

Ainsi en incidence normale, ce qui sera le cas dans toutes nos manipulations, les ondes interfèrent constructivement si  $\lambda_r = 2\lambda_a$ .

On peut aussi remarquer le facteur  $e^{-i\omega_a t}$  dans  $r$  qui se traduit par un décalage de la fréquence de l'onde réfléchie. En effet, avec  $\omega_r$  la pulsation de l'onde incidente, et  $\omega'_r$  la pulsation de l'onde réfléchie on a  $\omega'_r = \omega_r + \omega_a$ , ce qui justifie l'exploitation du signal réfléchi pour déterminer la vitesse de l'onde sonore.

### 1.3 Constations expérimentales

Nous avons essayé de reproduire à l'échelle d'une paillasse de laboratoire un RASS rudimentaire composé d'un émetteur et d'un récepteur d'ondes centimétriques d'une puissance de quelques dizaines de Watts, et d'un haut-parleur d'une puissance de 60 W.

En faisant varier la fréquence d'alimentation du haut-parleur nous espérions observer une variation du signal reçu permettant de conclure sur la validité de la condition de Bragg. Cependant dans notre domaine de fréquence hertzienne,  $8 \text{ GHz} \leq f_r \leq 12 \text{ GHz}$ , la condition  $\lambda_r = 2\lambda_a$  imposait une fréquence acoustique de l'ordre de 16 à 26 GHz. À ces fréquences, situées à la limite du spectre auditif de l'oreille humaine, le gain du haut-parleur utilisé était extrêmement faible et la puissance acoustique réduite d'autant. Un émetteur à ultra-sons aurait été nécessaire mais nous n'en avons pas à disposition dans ces plages de fréquence. De plus, des applications numériques avec des ordres de grandeurs de  $\Delta n$  fournis dans [3] nous ont montré que si la longueur  $L$  sur laquelle la réflexion s'effectue était trop faible (ie  $\leq 10 - 20 \text{ m}$ ), alors la valeur du coefficient de réflexion est elle aussi extrêmement faible (inférieure à  $10^{-10}$ ). Dans le cas d'une salle de classe et au vu de la puissance de notre haut-parleur cette longueur  $L$  s'élevait au mieux à 1 ou 2 m. L'onde réfléchie était alors presque inexistante à nos échelles de puissances.

Ces constats expérimentaux peu concluants nous ont menés à entreprendre une étude moins directe basée sur la réalisation d'un milieu diélectrique stratifié pour étudier les similitudes d'un tel milieu possédant un nombre de strates fini avec la description par strate de densité de l'onde sonore.

## 2 RÉALISATION D'UN MIRROIR DE BRAGG

### 2.1 Condition de Bragg

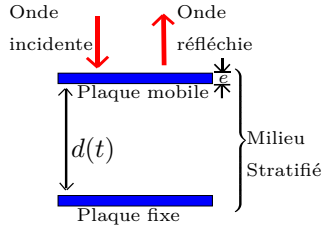
Pour traiter les milieux stratifiés finis, nous avons adopté une méthode matricielle telle que développée dans [4] et [5] et décrite dans l'annexe A.

La première étape de notre étude comparative a été de mettre en évidence une condition d'interférence constructive similaire à la condition de Bragg dans le cas d'un nombre fini de strates. Pour ce faire, nous avons réalisé un montage permettant de faire varier de manière continue l'épaisseur  $d(t)$  d'une lame d'air comprise entre 2 lames de verre d'épaisseur  $e = 3 \text{ mm}$  et d'indice  $n_v$ . Nous avons ensuite étudié la réflexion d'ondes centimétriques sur ce système.

Le montage, réalisé en Lego, permettait de déplacer verticalement, à l'aide d'un moteur, la plaque de verre supérieure sur une distance de 2,5 cm à une vitesse constante de  $2,8 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$ , soit 90 s pour faire parcourir

à la plaque toute la distance. Son fonctionnement s'apparente de fait à un interféromètre de Fabry-Perot, pour des longueurs d'ondes centimétriques.

FIG. 1 – Schéma de l'expérience



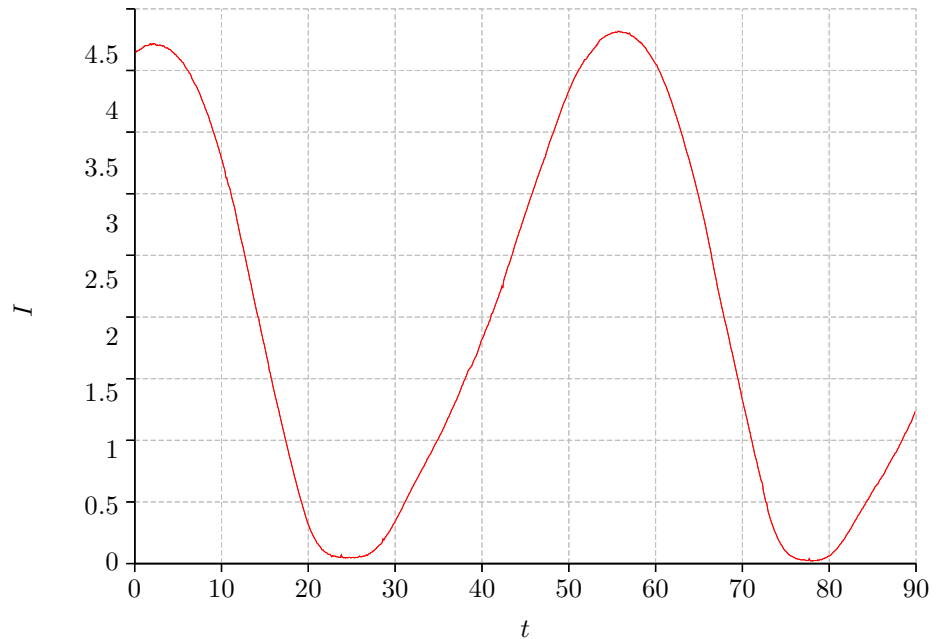
pour le système. L'écart temporel entre les 2 maxima est de 53,6 s, soit une distance de 1,49 cm entre les deux positions de la plaque où l'on atteint un maximum.

L'onde émise par l'émetteur possède une fréquence  $f_r$  de 10 GHz soit une longueur d'onde de 3,00 cm. On observe bien une périodicité des interférences constructives tout les  $\frac{\lambda_r}{2}$ , condition similaire à la condition de Bragg. Cette condition a été confirmée par différentes hauteurs de variation de  $d$  :  $d(\text{cm}) \in [9,6; 11,4], [11,6; 14,1], [14,3; 16,8]$ . À chaque expérience une courbe similaire avec une période spatiale de  $\frac{\lambda_r}{2}$  a été obtenue.

FIG. 2 – Montage expérimental



FIG. 3 –  $I = f(t)$



Cependant la comparaison à la courbe théorique s'est révélée compliquée par la dissymétrie de la courbe expérimentale par rapport à sa demi période. (visible sur la courbe 7). La courbe théorique étant elle parfaitement symétrique, nos essais de modélisation numérique se sont révélés infructueux.

Cette dissymétrie s'est retrouvée dans toutes nos courbes expérimentales, quelle que soit la hauteur de départ, et nous n'avons pas réussi à trouver d'explication satisfaisante à sa présence.

## 2.2 Miroir de Bragg

Après avoir mis en évidence une condition d'interférence constructive lors de précédentes expériences, nous avons mis en place un milieu stratifié de plus grande dimension pour tester la validité du modèle matriciel mis en œuvre.

Pour cela, nous avons empilé onze plaques de verre identiques à celles utilisées dans le montage précédent, séparées les unes des autres par des Kapla, cales de bois de hauteur  $h = 23,48$  mm (figure 4) Nous avons alors calculé, à l'aide d'un logiciel de calcul formel, la matrice de transfert correspondant à l'empilement de onze

couches composées d'une lame de verre d'épaisseur  $e$  et d'une lame d'air de hauteur  $h$ , et obtenu des courbes théoriques pour le coefficient de réflexion.

Notre idée première avait été de tracer la variation du coefficient de réflexion de ce milieu en fonction de la fréquence de l'onde pour comparer la courbe expérimentale à la courbe théorique. Cependant l'émetteur que nous utilisions, bien qu'à fréquence variable, ne délivrait pas un signal de même puissance à toutes les fréquences. De plus le réglage de la fréquence était peu précis, et les premières mesures que nous avons effectuées se sont révélées impossibles à reproduire d'une fois à l'autre.

Ainsi pour prendre des mesures fiables, chaque point nécessitait 3 mesures :

1. Une mesure de la fréquence à l'aide d'un fréquencesmètre à cavité résonante accordable, étape assez délicate.
2. Une mesure de l'intensité réfléchie  $I_r$  en présence du miroir de Bragg ;
3. Une mesure de l'intensité  $I_0$  arrivant sur le miroir avant réflexion, ce qui nécessitait de retirer le miroir pour effectuer la mesure.

En prenant en compte les opérations de déplacement du couple émetteur/récepteur entre le fréquencesmètre et le montage expérimental, il nous est vite apparu qu'une série de mesures exhaustive était impossible sans risque de perdre en précision, et en fiabilité des résultats.



FIG. 4 – Miroir de Bragg

La complexité de la courbe théorique représentant  $r$  en fonction de la fréquence imposait un nombre élevé de points expérimentaux pour pouvoir comparer. Cependant, sur une telle série de mesure il nous a paru impossible d'obtenir des résultats suffisamment fiables pour pouvoir tirer des conclusions.

Nous avons donc décidé d'utiliser la variation du coefficient de réflexion en fonction de l'indice du verre pour obtenir une mesure de  $n_v$ . En effet, dans la littérature [6] on trouve en général l'indice des différents verres aux longueurs d'ondes optiques (400 – 1000 nm) et éventuellement les constantes diélectriques aux fréquences de quelques kilo-Hertz, mais nous n'avons trouvé nulle part la valeur de l'indice optique du verre pour des longueurs d'ondes de quelques centimètres, plage de fréquence se situant exactement au milieu des deux cas précédents.

En mesurant la valeur de  $r$  à différentes fréquences, en nombre limité, nous avons été capable d'estimer une valeur de  $n_v$  par lecture graphique des courbes correspondantes.

Par exemple sur la figure 5 sont représentés en rouge la courbe théorique de  $r_{th}$  en fonction de  $n_v$  à la fréquence de  $f = 9,58$  GHz et en vert la droite dont l'ordonnée est le coefficient de réflexion  $r_{exp}$  mesuré à la fréquence  $f$  selon le protocole présenté précédemment.

On peut alors lire en abscisse l'indice théorique du verre pour qu'à cette fréquence le coefficient  $r_{th}$  soit égal au coefficient  $r_{exp}$ .

Pour une plus grande précision sur cette mesure de  $n_v$ , nous avons répété cette mesure plusieurs fois à différentes fréquences. Les résultats sont regroupés dans le tableau placé en annexe (B.1).

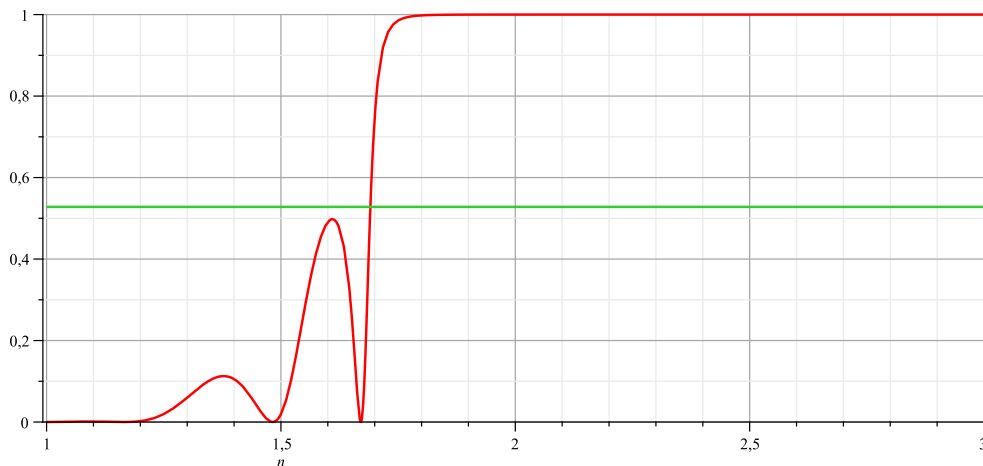
Nous avons alors obtenu une valeur moyenne de  $1,8 \pm 0,3$  pour  $n_v$ .

Pour confirmer, ou infirmer, notre méthode, et en particulier la validité du modèle matriciel utilisé pour obtenir les expressions théoriques de  $r$  en fonction de  $n_v$ , nous avons alors effectué une autre mesure de  $n_v$  basée sur la réflexion à l'angle de Brewster. En effet, l'onde centimétrique émise par notre matériel, polarisée rectilignement, se prêtait particulièrement bien à cette mesure qui repose sur l'annulation du coefficient de réflexion pour une onde polarisée perpendiculairement au plan d'incidence à un angle  $\alpha_B$ , appelé angle de Brewster, tel que  $\tan \alpha_B = \frac{n_v}{n_{air}}$ .

Nous avons alors mesuré un angle de Brewster compris entre  $60^\circ$  et  $65^\circ$ , soit  $1,7 \leq n_v \leq 2,1$ . Cet encadrement, cohérent avec les résultats fournis par la méthode matricielle, nous permet de confirmer la pertinence d'une telle méthode dans ce cadre.

Cependant, ainsi que l'on peut le voir sur la courbe représentative de  $r$  en fonction de la fréquence (figure 6), cette méthode montre que sur de tels systèmes stratifiés il n'y a pas réellement de condition d'interférence constructive pour certaines longueurs d'ondes, mais plutôt une gamme de fréquences pour lesquelles le coefficient est maximal. Les similitudes avec la réflexion de Bragg mise en jeu dans le RASS



FIG. 5 –  $r$  en fonction de  $n_v$ ,  $f = 9,58$  GHz

restent donc limitées, limite imposée par le caractère continu de la stratification du milieu par l'onde sonore.

## CONCLUSION

Ce travail autour d'un phénomène physique particulier, l'interaction entre une onde sonore et une onde électromagnétique, nous a permis d'établir des liens entre les milieux stratifiés comme les miroirs de Bragg, et les milieux d'indice variable de manière continue. Il nous a permis de mettre en évidence des similitudes dans les méthodes de traitement utilisées, en particulier la notion de strate de densité pour l'effet opto-acoustique. Cependant le caractère continu de la variation d'indice induit des différences entre les comportements physiques trop marquées pour que l'on puisse réellement considérer les deux systèmes comme similaires.

D'un point de vue personnel, cette étude nous a enrichi tant du point de vue du contenu théorique, avec par exemple l'utilisation de méthodes d'étude des milieux diélectriques non développées en cours, que du point de vue expérimental, avec la réalisation de montages inédits tel qu'un interféromètre pour ondes centimétriques.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Georges DUBOSCLARD, Tayeb OUAZZANI TOUHAMI, Jacques FOURNET-FAYARD et Yves B. POINTIN : Les sondages radioacoustiques de l'atmosphère. *La Météorologie* 8<sup>e</sup> série, (18):34–48, Juin 1997.
- [2] Sujet du concours ENS LYON CACHAN : Physique PC. 2001.
- [3] ENS CACHAN : Diffraction acousto-optique, sujet de TP. Octobre 2001.
- [4] Max BORN et Emil WOLF : *Principles of Optics*, chapitre 1.6, pages 51–60. Pergamon Press, 1970.
- [5] Sujet du concours ENS PARIS LYON CACHAN : Physique PC. 2004.
- [6] Michael BASS, Eric VAN STRYKAND, David R. WILLIAWS et William L. WOLFE, éditeurs. *Handbook of Optics*, volume 2, chapitre 33. Mac Graw Hill Professional, 2<sup>e</sup> édition, 2004.

## A MATRICE DE TRANSFERT ET COEFFICIENT DE REFLEXION

### A.1 Matrice de transfert d'une couche diélectrique

On considère une onde électromagnétique plane monochromatique se propageant dans un matériau diélectrique linéaire homogène isotrope, d'indice  $n$ , selon l'axe des  $z$ . Cette onde peut être décrite comme la somme

de deux ondes planes progressives :

$$\begin{aligned}\vec{E}(z, t) &= \left( E_+ e^{i(kz - \omega t)} + E_- e^{i(kz + \omega t)} \right) \vec{e}_x \\ \vec{B}(z, t) &= \frac{n}{c} \left( E_+ e^{i(kz - \omega t)} - E_- e^{i(kz + \omega t)} \right) \vec{e}_y \\ k &= \frac{n\omega}{c}\end{aligned}$$

La matrice de transfert  $M_T$  du milieu est définie de sorte que pour tout  $z$  on ait :

$$\begin{pmatrix} E(z, t) \\ B(z, t) \end{pmatrix} = M_T(z, n) \begin{pmatrix} E(0, t) \\ B(0, t) \end{pmatrix}$$

On obtient la matrice  $M_T$  en exprimant  $E_+$  et  $E_-$  à l'aide de  $E(0, t)$  et  $B(0, t)$  :

$$\begin{cases} E(0, t) = (E_+ + E_-)e^{-i\omega t} \\ B(0, t) = \frac{n}{c}(E_+ - E_-)e^{-i\omega t} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} E_+ = \frac{(E(0, t) + cB(0, t)/n)}{2}e^{i\omega t} \\ E_- = \frac{(E(0, t) - cB(0, t)/n)}{2}e^{i\omega t} \end{cases}$$

Finalement :

$$M_T(z, n) = \begin{pmatrix} \cos(kz) & i \frac{c \sin(ka)}{n} \\ i \frac{n \sin(ka)}{c} & \cos(kz) \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Lorsque l'on traite un système  $\Sigma$  composé de  $p$  couches d'indices  $n_1, \dots, n_p$  et d'épaisseurs  $z_1, \dots, z_p$  on peut alors écrire la matrice de transfert globale comme le produit des matrices de chaque milieu. En effet, les champs étant tangentiels, il n'y a pas de courants surfaciques et les champs sont continus.

$$M_\Sigma = \prod_{k=1}^p M_T(z_k, n_k) \quad (\text{A.2})$$

## A.2 Coefficient de reflexion

On considère un système diélectrique d'épaisseur  $l$  caractérisé par sa matrice de transfert  $M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$  plongé dans l'air. Une onde incidente  $\vec{E}_i(z, t)$  engendre une onde réfléchie  $\vec{E}_r(z, t)$ , deux ondes progressives dans le système et une onde transmise  $\vec{E}_t(z, t)$ . On peut déterminer le coefficient de réflexion global de ce système à l'aide des coefficients de la matrice.

Pour  $z \geq l$ ,  $n = 1$  donc, par continuité des champs,  $E(l, t)/B(l, t) = c$ . En entrée on peut alors écrire :

$$\frac{E(0, t)}{B(0, t)} = \frac{M_{11}^{-1}E(l, t) + M_{12}^{-1}B(l, t)}{M_{21}^{-1}E(l, t) + M_{22}^{-1}B(l, t)} \quad (\text{A.3})$$

On sait aussi par continuité des champs en  $z = 0$  que  $E(0, t) = (E_{i0} + E_{r0})e^{-i\omega t}$  et  $B(0, t) = (E_{i0} - E_{r0})e^{-i\omega t}/c$ .

A l'aide de ces expressions et du rapport A.3 on obtient alors :

$$r = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{M_{12}^{-1} + c(M_{11}^{-1} - M_{22}^{-1}) - c^2 M_{21}^{-1}}{M_{12}^{-1} + c(M_{11}^{-1} + M_{22}^{-1}) + c^2 M_{21}^{-1}} \quad (\text{A.4})$$

## B COURBES ET TABLEAU DE VALEURS

TABLE B.1 – Tableau de mesures de  $r$  et des  $n_v$  correspondant

$f$ (GHz)	$r$	$n_v$
9,82	0,18	1,56
8,80	0,88	2,13
8,83	0,45	2,11
10,05	0,55	1,47
9,17	0,46	1,90
9,18	0,67	1,91
9,58	0,53	1,69

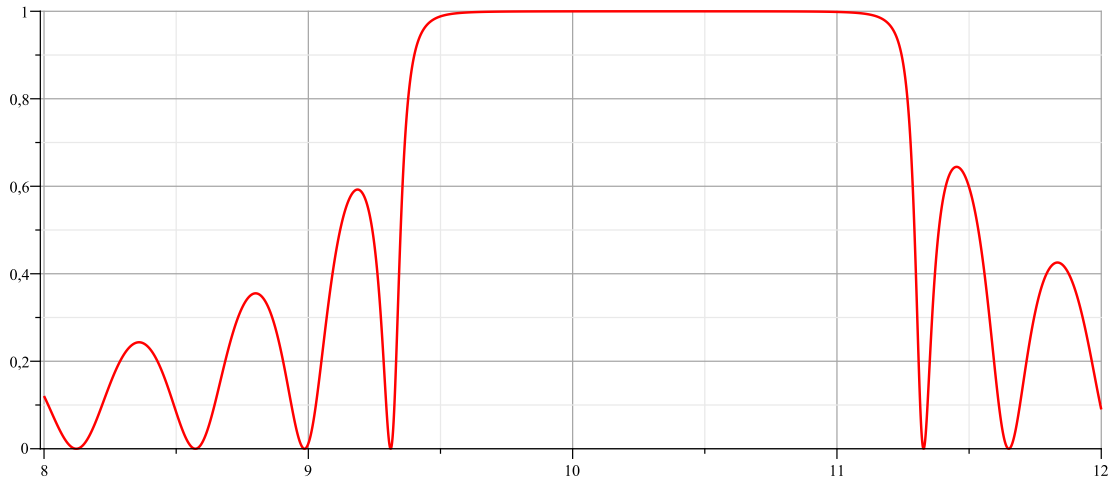
FIG. 6 – Évolution de  $r$  en fonction de  $f$  prévue par les calculs théoriques pour le miroir de Bragg

FIG. 7 – Comparaison entre la courbe théorique (en bleu) et la courbe expérimentale (en rouge) pour le système à 2 plaques

