

Vitesse d'invasion pour un modèle de reproduction et dispersion

Augustin Lenormand Basile Bruneau

28 juin 2014

1 Grandes déviations d'une marche aléatoire

Question 1.1

- Soit $\alpha \in [0, 1]$ et λ_1, λ_2 dans \mathbb{R} .

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{(\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2)X}) &= \mathbb{E}((e^{\lambda_1 X})^\alpha (e^{\lambda_2 X})^{1-\alpha}) \\ &\leq (\mathbb{E}(e^{\lambda_1 X}))^\alpha (\mathbb{E}(e^{\lambda_2 X}))^{1-\alpha}\end{aligned}$$

Ici la dernière inégalité est l'inégalité de Hölder. En passant au logarithme il vient donc naturellement :

$$\Lambda((\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2)X) \leq \alpha\Lambda(\lambda_1 X) + (1-\alpha)\Lambda(\lambda_2 X)$$

Donc Λ est convexe.

- De même les fonctions $f_\lambda : x \mapsto \lambda x - \Lambda(\lambda)$ sont toutes convexes. Donc par définition leurs épigraphes sont convexes.

Or l'épigraphe du supremum pour λ dans \mathbb{R} de ces fonctions est l'intersection des épigraphes de toutes ces fonctions. Comme intersection d'ensemble convexes, il est donc convexe lui aussi. Donc l'épigraphe de Ψ est convexe.

Donc Ψ est convexe.

- $\Lambda(0) = 0$ donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{\lambda x - \Lambda(\lambda)\} \geq 0 \cdot x - \Lambda(0) = 0$$

Donc $\Psi \geq 0$.

Soit λ dans \mathbb{R} .

$$e^{f_\lambda(m)} = \frac{e^{\lambda \mathbb{E}(X)}}{\mathbb{E}(e^{\lambda X})}$$

Or la fonction $x \mapsto e^{\lambda x}$ est convexe, donc d'après l'inégalité de Jensen, $e^{\lambda \mathbb{E}(X)} \leq \mathbb{E}(e^{\lambda X})$.

Ainsi $e^{f_\lambda(m)} \leq 1$ et $\lambda \mathbb{E}(X) - \Lambda(\lambda) \leq 0$. Donc $\Psi(\mathbb{E}(X)) \leq 0$.

Or $\Psi \geq 0$.

Donc Ψ admet un minimum en m et $\Psi(m) = 0$.

- Soit $x \geq m$ et $\lambda < 0$. Alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} \lambda x - \Lambda(\lambda) &\leq \lambda m - \Lambda(\lambda) = 0 \\ \lambda x - \Lambda(\lambda) &\leq 0 \leq \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{\lambda x - \Lambda(\lambda)\} \end{aligned}$$

Ainsi prendre le supremum des f_λ pour $\lambda \geq 0$ est suffisant pour définir Ψ

Question 1.2

$$\mathbb{P}(S_n \geq nx) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{S_n - nx \geq 0})$$

Comme $S_n - nx \geq 0$ alors pour tout λ positif, $e^{\lambda(S_n - nx)} \geq 1$ et

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{S_n - nx \geq 0}) \leq \mathbb{E}(e^{\lambda(S_n - nx)} \mathbb{1}_{S_n - nx \geq 0}) \leq \mathbb{E}(e^{\lambda(S_n - x)})$$

On a donc :

$$\mathbb{P}(S_n \geq nx) \leq e^{-\lambda nx} \mathbb{E}(e^{\lambda S_n})$$

Comme les variables $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont des v.a indépendantes de même loi on peut écrire que $\mathbb{E}(e^{\lambda S_n}) = (\mathbb{E}(e^{\lambda X}))^n = e^{n\Lambda(\lambda)}$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n \geq nx) &\leq e^{-\lambda nx} e^{n\Lambda(\lambda)} \\ \log \mathbb{P}(S_n \geq nx) &\leq -\lambda nx + n\Lambda(\lambda) \\ -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \geq nx) &\geq \lambda x - \Lambda(\lambda) \end{aligned} \tag{1}$$

1 est vrai pour tout λ positif et pour tout n . Donc le passage au supremum pour λ positif et à la limite inférieure pour n est possible et ne modifie pas l'inégalité.

On obtient bien alors :

$$\boxed{\liminf_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \geq nx) \geq \sup_{\lambda \geq 0} \{\lambda x - \Lambda(\lambda)\}} \tag{2}$$

Question 1.3

- Montrons tout d'abord l'égalité proposée par l'énoncée. Soit Φ une fonction mesurable bornée. Alors, en prenant Π la loi de probabilité du vecteur (X_1, \dots, X_n) ,

$$\mathbb{E}(\Phi(X_1, \dots, X_n)) = \int_R \cdots \int_R \Phi(x_1, \dots, x_n) \Pi(dx_1, \dots, dx_n) \quad (3)$$

Or les v.a. $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont i.i.d. donc, si on note \mathbb{P}_X leur loi de probabilité, on peut écrire $\Pi(dx_1, \dots, dx_n) = \prod_{i=0}^n \mathbb{P}_X(dx_i) = \prod_{i=0}^n \mathbb{P}(X \in dx_i)$.

On peut alors réécrire 3 et utiliser la relation fournie par l'énoncé ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Phi(X_1, \dots, X_n)) &= \int_R \cdots \int_R \Phi(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=0}^n \mathbb{P}(X \in dx_i) \\ &= \int_R \cdots \int_R \Phi(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=0}^n \left(\frac{\mathbb{E}(e^{\tau X})}{e^{\tau x_i}} \mathbb{P}(\tilde{X} \in dx_i) \right) \\ &= \mathbb{E}(e^{\tau X})^n \int_R \cdots \int_R \Phi(x_1, \dots, x_n) e^{-\tau \tilde{S}_n} \prod_{i=0}^n \mathbb{P}(\tilde{X} \in dx_i) \\ &= \mathbb{E}(e^{\tau X})^n \int_R \cdots \int_R \Phi(x_1, \dots, x_n) e^{-\tau \tilde{S}_n} \tilde{\Pi}(dx_1, \dots, dx_n) \end{aligned}$$

Ici, $\tilde{S}_n = \sum_{i=0}^n \tilde{X}_i$ et $\tilde{\Pi}$ est la loi de probabilité du vecteur $(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)$ car les $(\tilde{X}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont aussi i.i.d. et donc $\prod_{i=0}^n \mathbb{P}(\tilde{X} \in dx_i) = \tilde{\Pi}(dx_1, \dots, dx_n)$ de la même manière que pour les X_i .

On reconnaît alors donc bien l'expression souhaitée :

$$\boxed{\mathbb{E}(\Phi(X_1, \dots, X_n)) = \mathbb{E}(e^{\tau X})^n \mathbb{E}(\Phi(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n) e^{-\tau \tilde{S}_n})} \quad (4)$$

- On calcule l'espérance de \tilde{X} ce qui sera utile plus bas.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\tilde{X}) &= \int_{\mathbb{R}} u \mathbb{P}(\tilde{X} \in du) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{u e^{\tau u}}{\mathbb{E}(e^{\tau X})} \mathbb{P}(X \in du) \\ &= \frac{\mathbb{E}(X e^{\tau X})}{\mathbb{E}(e^{\tau X})} \\ \boxed{\mathbb{E}(\tilde{X}) = x} & \end{aligned} \quad (5)$$

- Grâce à 4 et 5 on peut alors écrire :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(nx \leq S_n \leq ny) &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{S_n \in [nx, ny]}) \\ &= \mathbb{E}(e^{\tau X})^n \mathbb{E}(e^{-\tau \tilde{S}_n} \mathbf{1}_{\tilde{S}_n \in [nx, ny]}) \\ &\geq \mathbb{E}(e^{\tau X})^n e^{-\tau ny} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\tilde{S}_n \in [nx, ny]})\end{aligned}$$

On pose $\text{Var}(\tilde{X}) = \tilde{\sigma}$. On peut alors écrire que :

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\tilde{S}_n \in [nx, ny]}) = \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\theta_n \in \left[0, \frac{\sqrt{n}}{\tilde{\sigma}}(y-x)\right]}\right), \theta_n = \frac{\sqrt{n}}{\tilde{\sigma}}\left(\frac{\tilde{S}_n}{n} - x\right)$$

Or $\mathbb{E}(\tilde{X}) = x$, donc pour n grand $\theta_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $\frac{\sqrt{n}}{\tilde{\sigma}}(y-x) \rightarrow \infty$. En limite, on peut donc écrire :

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\tilde{S}_n \in [nx, ny]}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1/2.$$

Donc pour n suffisamment grand il existe $\varepsilon \in]0, 1/2[$ tel que :

$$\begin{aligned}\log \mathbb{P}(nx \leq S_n \leq ny) &\geq n(\Lambda(\tau) - \tau y) + \log(1/2 - \varepsilon) \\ -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(nx \leq S_n \leq ny) &\leq \tau y - \Lambda(\tau) - \underbrace{\frac{\log(1/2 - \varepsilon)}{n}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}\end{aligned}$$

Un passage à la limite suffit alors à montrer que :

$$\boxed{\limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(nx \leq S_n \leq ny) \leq \tau y - \Lambda(\tau)} \quad (6)$$

Question 1.4

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n \geq nx) &\geq \mathbb{P}(nx \leq S_n \leq ny) \\ \log \mathbb{P}(S_n \geq nx) &\geq \log \mathbb{P}(nx \leq S_n \leq ny) \\ -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \geq nx) &\leq -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(nx \leq S_n \leq ny) \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \geq nx) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(nx \leq S_n \leq ny)\end{aligned} \quad (7)$$

En combinant les inégalités 2, 6 et 7 on obtient que pour tout $m \leq x < y$:

$$\Psi(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \geq nx) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \geq nx) \leq \tau y - \Lambda(\tau)$$

On peut alors faire tendre y vers x et utiliser la majoration $\tau x - \Lambda(\tau) \leq \Psi(x)$ pour obtenir :

$$\Psi(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \geq nx) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \geq nx) \leq \Psi(x)$$

Ce qui démontre bien l'identité voulue :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \geq nx) = \Psi(x)} \quad (8)$$

Question 1.5

On suppose que X suit une loi de Bernouilli de paramètre p :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X = 1) = p \\ \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi,} \quad \Lambda(\lambda) &= \log(\mathbb{E}(e^{\lambda X})) \\ &= \log(pe^{\lambda \cdot 1} + (1-p)e^{\lambda \cdot 0}) \\ &= \log(pe^{\lambda} + (1-p)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc} \quad \lambda x - \Lambda(\lambda) &= \lambda x - \log(pe^{\lambda} + (1-p)) \\ &= \lambda x - \lambda - \log\left(p + \frac{1-p}{e^{\lambda}}\right) \\ &= \lambda(x-1) - \log\left(p + \frac{1-p}{e^{\lambda}}\right) \\ \lambda x - \Lambda(\lambda) &\sim \lambda(x-1) \quad \text{si } x > 1 \\ \lambda x - \Lambda(\lambda) &\xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} \infty \quad \text{si } x > 1 \end{aligned}$$

Ainsi, pour $x > p$, $\Psi(x) = \infty$.

Pour $p < x < 1$, comme $g_x : \lambda \mapsto \lambda x - \Lambda(\lambda)$ est concave (en tant que somme de deux fonctions concaves), on calcule le point où sa dérivée s'annule, et on l'injecte. On trouve ainsi son maximum, c'est à dire $\Psi(x)$:

$$\boxed{\Psi(x) = x \log\left(\frac{x(1-p)}{p(1-x)}\right) - \log\left(\frac{1-p}{1-x}\right)} \quad (9)$$

Pour les simulations nous avons fait plusieurs simulations en faisant varier à chaque fois p et x . Nous avons tracé de la même couleur $-\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \geq nx)$ et $\Psi(x)$.

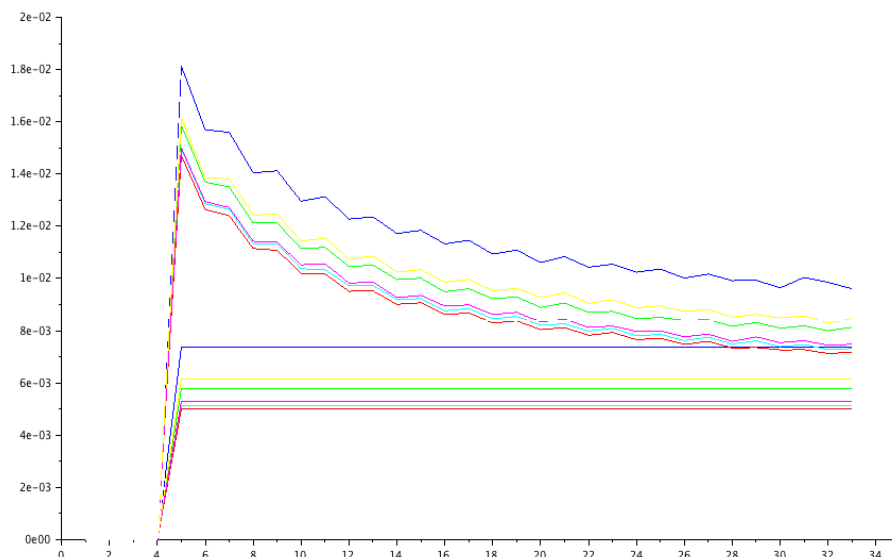
Voici le code du programme :

```
clf;
p=0.1;
N=1000;
x=0.15;
nbSimulations=7;

M=1000000;
pas=30;

for i=1:nbSimulations
    p = p+0.1;
    x = x+0.1;
    A=[];
    B=[];
    B(5) = x*log((x*(1-p))/(p*(1-x))) - log((1-p)/(1-x));
    for n=5*pas:pas:N
        S=grand(1, M, 'bin', n, p);
        S=sum(S>=n*x)/M;
        a=(-1/n)*log(S);
        A(n/pas)=a;
        B(n/pas)=B(5);
    end
    couleur=i+1;
    plot2d(A, style=couleur);
    plot2d(B, style=couleur);
end
```

FIGURE 1 – Modélisation de la limite 8 pour des lois de Bernoulli.



La convergence est très lente, et ici on est déjà à $n = 1000$, il est très difficile d'aller au delà. Cela suffit néanmoins à vérifier la limite précédente.

2 Densité locale pour le modèle d'invasion

Question 2.1

Démontrons que $\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(N)^n$

- La génération 0 ne comporte qu'un individu donc, à la génération 1, $Z_1 \sim N$.
Donc $\mathbb{E}(Z_1) = \mathbb{E}(N)^1$
- Soit $n \geq 0$. On suppose que $\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(N)^n$.
Or $Z_{n+1} \sim N \cdot Z_n$. Donc $\mathbb{E}(Z_{n+1}) = \mathbb{E}(N \cdot Z_n)$.
Comme les variables Z_n et N sont indépendantes, on peut écrire que :
 $\mathbb{E}(Z_{n+1}) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(N)^{n+1}$.
- Par récurrence, pour tout $n \geq 0$, $\boxed{\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(N)^n}$.

Considérons un individu à la génération n . Sa position est distribuée comme la variable $X_0 + X_0 + \dots + X_n = S_n$. Ainsi la probabilité que cette individu se trouve dans un intervalle I est donc $\mathbb{P}(S_n \in I)$.

La loi de probabilité du nombre d'individus présents dans l'intervalle I à la génération n est donc égale à $\#\{i : X_n^i \in I\} \sim Z_n \mathbb{P}(S_n \in I)$.

Donc $u_n(I) = \mathbb{E}(\#\{i : X_n^i \in I\}) = \mathbb{E}(Z_n \mathbb{P}(S_n \in I))$. Or $\mathbb{P}(S_n \in I) \in \mathbb{R}$ et $\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(N)^n$.

On a donc bien :

$$\boxed{u_n(I) = \mathbb{E}(N)^n \mathbb{P}(S_n \in I)} \quad (10)$$

Question 2.2

Soit $\varepsilon > 0$.

- D'après 10 on peut écrire :

$$\frac{u_n([(\mathbb{E}(X) - \varepsilon)n, (\mathbb{E}(X) + \varepsilon)n])}{\mathbb{E}(N)^n} = \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(X)\right| \leq \varepsilon\right)$$

Or la loi des grands nombres nous affirme que, pour un ε positif donné, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(X)\right| \leq \varepsilon$.

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(X)\right| \leq \varepsilon\right) = 1$$

et
$$\boxed{\frac{u_n([(\mathbb{E}(X) - \varepsilon)n, (\mathbb{E}(X) + \varepsilon)n])}{\mathbb{E}(N)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1} \quad (11)$$

- On pose $I_\varepsilon(n) = [(\mathbb{E}(X) - \varepsilon)n, (\mathbb{E}(X) + \varepsilon)n]$

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{E}\left(\frac{\#\{i : X_n^i \in I_\varepsilon(n)\} + \#\{i : X_n^i \notin I_\varepsilon(n)\}}{\mathbb{E}(N)^n}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\frac{\#\{i : X_n^i \in I_\varepsilon(n)\}}{\mathbb{E}(N)^n}\right) + \mathbb{E}\left(\frac{\#\{i : X_n^i \notin I_\varepsilon(n)\}}{\mathbb{E}(N)^n}\right) \end{aligned}$$

D'après ?? on peut écrire :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(\frac{\#\{i : X_n^i \notin I_\varepsilon(n)\}}{\mathbb{E}(N)^n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \text{Or } \mathbb{E}\left(\frac{\#\{i : X_n^i \geq (\mathbb{E}(X) - \varepsilon)n\}}{\mathbb{E}(N)^n}\right) &\leq \mathbb{E}\left(\frac{\#\{i : X_n^i \notin I_\varepsilon(n)\}}{\mathbb{E}(N)^n}\right) \\ \text{Donc } \mathbb{E}\left(\frac{\#\{i : X_n^i \geq (\mathbb{E}(X) - \varepsilon)n\}}{\mathbb{E}(N)^n}\right) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

On a alors bien montré que en moyenne, et donc en probabilité,

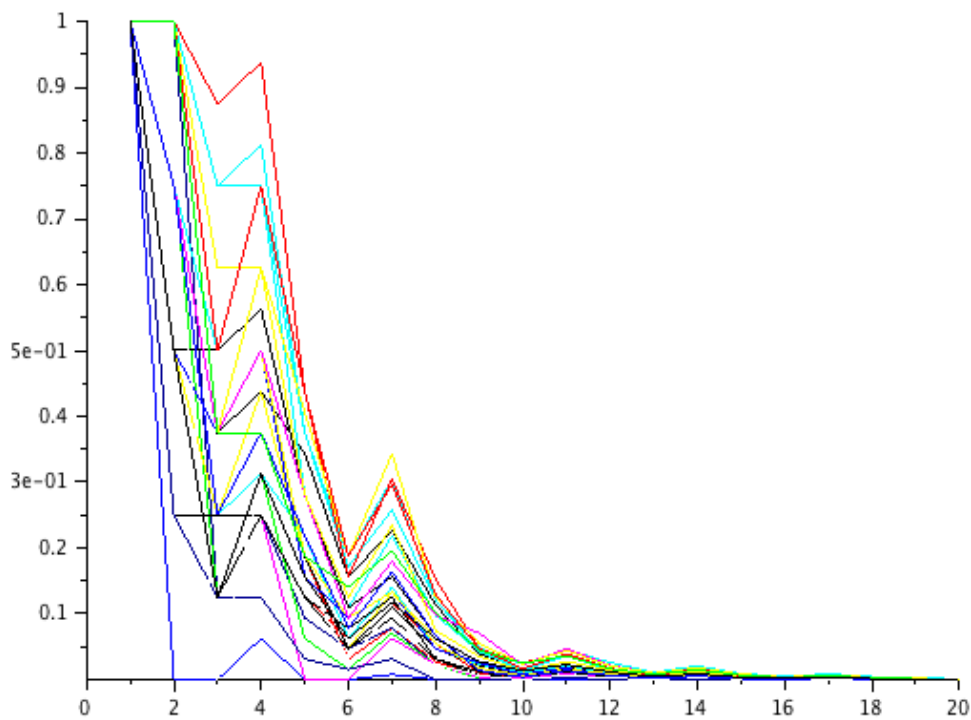
$$\boxed{\frac{\#\{i : X_n^i \geq (\mathbb{E}(X) - \varepsilon)n\}}{\mathbb{E}(N)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \quad (12)$$

Question 2.3

Modélisation de la limite 12

Pour vérifier cette dernière limite, nous avons choisi $n = 20$, $\varepsilon = 0.001$ et p , la paramètre de la loi de Bernouilli de X , égal à 0.7. Voici les courbes superposées de 30 simulations.

FIGURE 2 – Simulations de la limite 12 pour une loi de Bernouilli.



Toutes les courbes tendent rapidement vers 0, ainsi la limite semble vérifiée. Le code de la simulation est ci-dessous.

```
clf;  
  
n=20;  
N=2;  
p=0.7;  
epsilon=0.001;  
nbSimulations = 30;  
  
for j = 1:nbSimulations
```

```
A = [1];
D = [];
for i = 1:n
    B=rand(1,N^i);
    C=(B>=p)+[A,A];
    A=C;
    D(i)=sum((A>=((p+epsilon)*i)))/N^i;
end
plot2d(D, style=rand()*10);
end
```

Modélisation de la limite 11

Pour étudier le comportement de cette limite, dans le cas où la loi de N est une loi géométrique de moyenne 2, nous avons été obligés de mettre en oeuvre une simulation plus complexe, dont le code nécessite quelques commentaires.

Premièrement nous avons défini une fonction `simu` qui va réaliser une expérience d'évolution de population et va retourner $Y(n, \varepsilon) = \frac{\#\{i: X_n^i \in [\mathbb{E}(X) - \varepsilon)n, \mathbb{E}(X) + \varepsilon)n\}}{\mathbb{E}(N)^n}$ pour un n donné. La valeur de n est encore une fois limitée par les capacités de calcul de l'ordinateur.

Ensuite pour estimer l'espérance de Y nous avons effectué un nombre L d'expériences et avons affiché l'évolution de l'estimateur $\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L Y_i$ pour l allant de 1 à L .

Nous avons ensuite tracé les courbes d'évolution de $\mathbb{E}(Y)$ pour plusieurs séries de L expériences d'évolution de population.

Voici le code de la modélisation :

```
clf;

function Y=simu(j,n,p,epsilon)
    Xi = [0];
    D = [];
    M=[]
    Zn = 1;
    for i = 1:n
        N=grand(1,Zn,'geom',0.5);
        //Simulation du nombre d'enfant par individu
        G=[];
        c=0;
        for k = 1:Zn
            if (N(1,k)>0) then
```

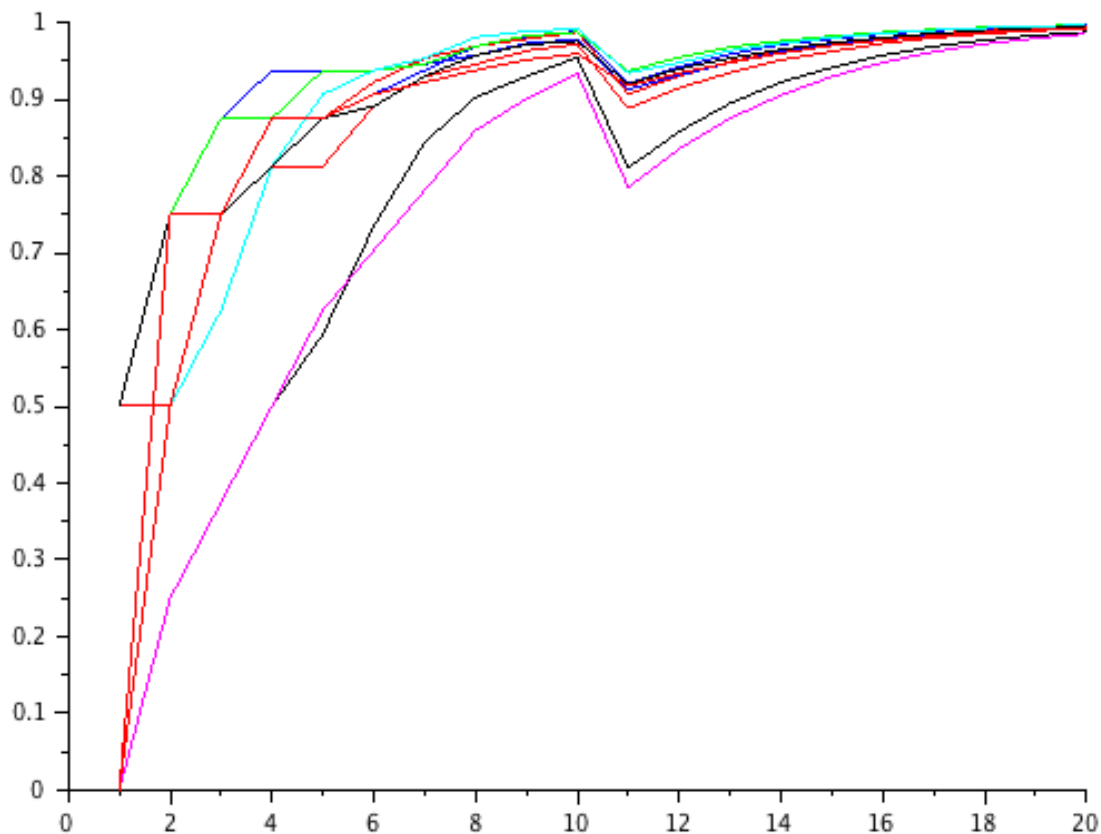
```
        for l=1:N(1,k)           //Creation des position
            c=c+1;               //de depart de la
            G(1,c)=Xi(1,k);      //de la generation i+1
        end;
    end;
    Zn=sum(N);
    B=grand(1,Zn,'bin',1,0.6); //Variables
    Pos=B+G;                    // de position de la
    Xi=Pos;                     // generation i+1
end
E=(Xi>=((p-epsilon)*n));
H=(Xi<=((p+epsilon)*n));
nb=E*(H');
Y=nb/(2^(n));
endfunction

nbSimu=1000;
n=14;
p=0.7;
nbCourbes=10;

for k=1:nbCourbes
    epsilon=0.5
    ListeRes=parallel_run(1:nbSimu,n,p,epsilon,"simu");
    //Realisation de L=nbSimu experiences.
    SommeRes=cumsum(ListeRes);
    Moyenne=[];
    for i=1:nbSimu                //Calcul des estimateurs
        Moyenne(1,i)=SommeRes(1,i)/i; //successifs
    end;                          // de E(Y).
    plot2d(Moyenne,style=rand()*10);
end;
```

Et voici le tracé obtenu par superpositions de 10 courbes avec pour paramètres : $n = 14$, $L = 1000$, $p = 0.7$ et $\varepsilon = 0.5$. On observe bien la convergence vers 1 de $\mathbb{E}(Y)$.

FIGURE 3 – Simulations de la limite 11



On observe donc une convergence vers 1, lorsque N est égal à 2 p.s.

Question 2.4

$$\begin{aligned} u_n([\mathbb{E}(X)n + \sigma a \sqrt{n}, \mathbb{E}(X)n + \sigma b \sqrt{n}]) &= \mathbb{E}(N)^n \mathbb{P}(S_n \in [\mathbb{E}(X)n + \sigma a \sqrt{n}, \mathbb{E}(X)n + \sigma b \sqrt{n}]) \\ &= \mathbb{E}(N)^n \mathbb{P}(\mu_n \in [a, b]) \end{aligned}$$

Avec $\mu_n = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \left(\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(X) \right)$. Or $\mu_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ pour n grand.

Donc $\mathbb{P}(\mu_n \in [a, b]) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \Pi(b) - \Pi(a)$. On obtient alors comme équivalent :

$$\boxed{u_n([\mathbb{E}(X)n + \sigma a \sqrt{n}, \mathbb{E}(X)n + \sigma b \sqrt{n}]) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \mathbb{E}(N)^n (\Pi(b) - \Pi(a))} \quad (13)$$

Pour les simulations, $N = 2$ p.s. et X est toujours distribué suivant une loi de Bernoulli de paramètre p . Nous avons choisi $n = 20$, $a = -5$ et $b = 5$ (si on prend des

valeurs de a et b plus faibles, on ne peut pas observer de convergence pour seulement 20 itérations, et le nombre d'individus augmentant selon 2^n on ne peut pas augmenter n au delà de 20).

Voici le programme.

```
clf;

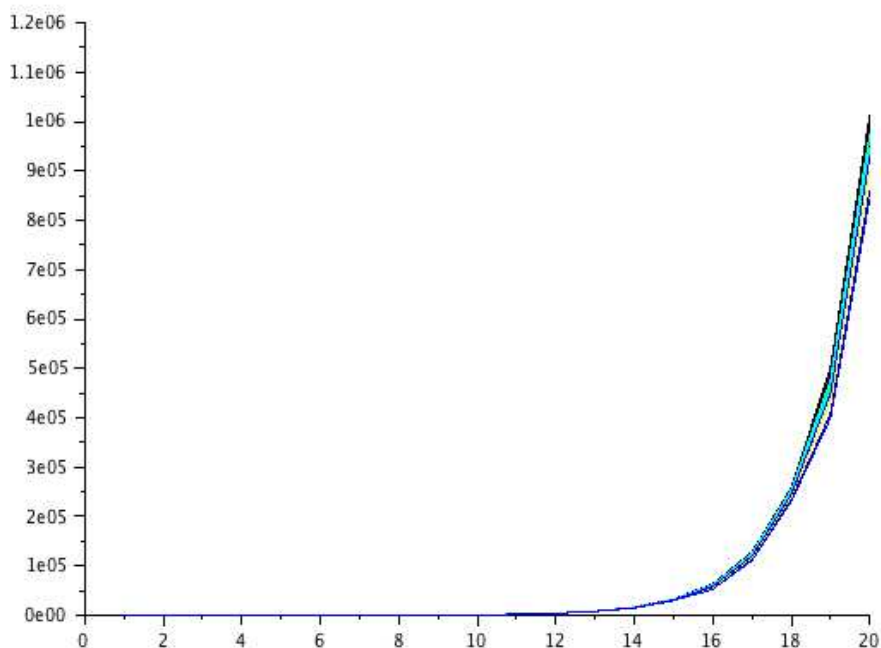
n=20;
N=2;
p=0.7;
nbSimulations = 30;
a=-5;
b=5;

ecartType = sqrt(p*(1-p));

for j = 1:nbSimulations
    A = [0];
    D = [];
    for i = 1:n
        B=rand(1,N^i);
        C=(B>=p)+[A,A];
        A=C;
        E=(A>=(p*i+ecartType*a*sqrt(i)));
        D(i)=sum(E.*(A<=(p*i+ecartType*b*sqrt(i))));
    end
    plot2d(D, style=rand()*10);
end
```

Et voici les courbes de 30 simulations superposées : on observe nettement une convergence exponentielle.

FIGURE 4 – Convergence de l'équivalent 13

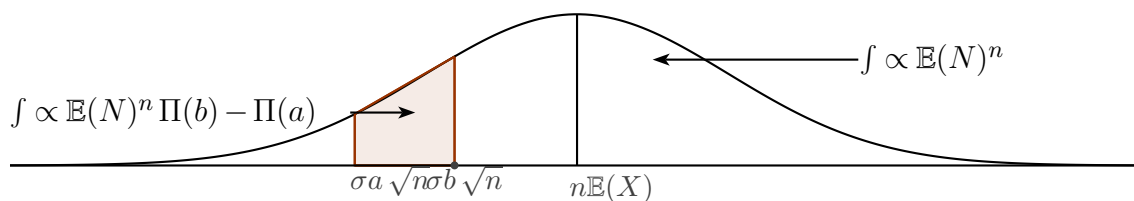


Question 2.5

La population, au bout d'un temps suffisamment long va se répartir selon une gaussienne centrée en $n\mathbb{E}(X)$ et d'écart type σ , d'après le théorème de la limite centrale. Ainsi la répartition de la population entre deux bornes a et b est conditionnée par les valeurs de $\Pi(a)$ et $\Pi(b)$.

Par ailleurs comme la taille de la population évolue comme $\mathbb{E}(N)^n$ la quantité d'individu entre les bornes a et b évolue comme $\mathbb{E}(N)^n(\Pi(b) - \Pi(a))$. C'est ce qui est illustré, schématiquement sur la figure 5.

FIGURE 5 – Représentation schématique de l'équivalent 13



3 Vitesse d'invasion

Question 3.1

$$u_n[an, \infty) = \mathbb{E}(N)^n \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right)$$
$$\frac{1}{n} \log(u_n[an, \infty)) = \log(\mathbb{E}(N)) + \frac{1}{n} \log\left(\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right)\right)$$

D'après 8 on peut donc écrire :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(u_n[an, \infty)) = \log(\mathbb{E}(N)) - \Psi(a)} \quad (14)$$

Question 3.2

En prenant $a = v_n = R_n/n$, la quantité $u_n[R_n, \infty)$ est, par définition de R_n , finie et réduite à quelque éléments. En effet si le déplacement moyen est nul, et qu'on suppose que la variable X n'est pas nulle (car cette hypothèse ne présenterai aucun intérêt d'étude), alors l'élément le plus à droite est relativement isolé. C'est ce qu'affirme la relation 12, à savoir que le nombre d'éléments qui s'écartent du paquet centré en $n \cdot \mathbb{E}(X)$ est négligeable.

Donc si quelque soit n , $u_n[n \cdot v_n, \infty) = O(1)$, alors $1/n \log u_n[n \cdot v_n, \infty) = O(1/n)$. À la limite on a donc $v_n \rightarrow v$ et la limite 14 nous indique donc que v va être solution $\Psi(x) - \log(\mathbb{E}(N)) = 0$.

Question 3.4