

**Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg**



**Lehrstuhl für Informationstechnik  
mit dem Schwerpunkt Kommunikationselektronik**



Professor Dr.-Ing. Jörn Thielecke

**Bachelorarbeit**

**Thema:**

Implementierung und Evaluierung von Algorithmen zur Distanzschätzung  
mit Mehrträgersignalen

Bearbeiter: Alexander Brummer

Betreuer: Dipl.-Ing. Thorsten Nowak  
M. Eng. Thomas Lindner

Beginn: 20. Mai 2014

Ende: 20. Oktober 2014

---

## Bestätigung

---

### Erklärung:

Ich versichere, dass ich die Arbeit ohne fremde Hilfe und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen angefertigt habe und, dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen hat und von dieser als Teil einer Prüfungsleistung angenommen wurde. Alle Ausführungen, die wörtlich oder sinngemäß übernommen wurden, sind als solche gekennzeichnet.

Erlangen, den 20.10.2014

---

Alexander Brummer

---

## Thema und Aufgabenstellung

---

### **Thema:**

Implementierung und Evaluierung von Algorithmen zur Distanzschätzung mit Mehrträgersignalen

### **Aufgabenstellung:**

Im Arbeitsfeld Navigation am Lehrstuhl für Informationstechnik mit dem Schwerpunkt Kommunikationselektronik (LIKE) wird ein Ortungssystem für Fledermäuse entwickelt. Als Ortungssignale kommen BPSK-modulierte Träger in Betracht. Die Distanzschätzung soll auf dem Prinzip der entfernungsabhängigen Veränderung der Phasenlage der jeweiligen Subträger basieren. Im Rahmen der Arbeit sollen unterschiedliche Algorithmen zur Distanzschätzung implementiert werden. Anschließend sollen die Algorithmen bezüglich ihrer Genauigkeit in einer Simulationsumgebung evaluiert werden. Ebenfalls sind die implementierten Verfahren auf den Einfluss von Störgrößen wie Frequenzversatz oder Mehrwegeausbreitung zu untersuchen. Optional ist eine Implementierung auf einem Software-defined Radio vorgesehen. Arbeitsschritte:

- Literaturrecherche zur phasenbasierten Laufzeitschätzung
- Implementierung von Algorithmen zur Laufzeitschätzung: u.a. Trägerphasendifferenz, Korrelation, MUSIC und ESPRIT
- Evaluation der Implementierungen in einer Simulationsumgebung und Bewertung mit Hilfe der Cramer-Rao-Lower-Bound (CRLB)
- Untersuchung der Reaktion auf Störgrößen, wie Frequenzversatz oder Mehrwegeausbreitung

### **Klassifikation:**

Lokalisierung, Navigation, Signalverarbeitung, Mehrträger-Signal, Phasenmessung

---

## Kurzzusammenfassung

---

*In dieser Arbeit werden verschiedene Algorithmen zur Distanzschätzung mit Mehrträgersignalen untersucht und ihre Implementierung beschrieben. Zunächst werden die Verfahren Korrelation, Auswertung der Phasendifferenz und die Subraumalgorithmen MUSIC und ESPRIT sowie die besondere Charakteristik des vorliegenden Signals mit zwei Subträgern im Allgemeinen vorgestellt. Bei der Beschreibung der Kanalsimulation wird auf die Problematik der Subsampleverzögerung eingegangen.*

*Die spezielle Implementierung der Schätzverfahren wird daraufhin detailliert beschrieben. Bei der Korrelation wurde zur Verbesserung der Genauigkeit auf Basis ihrer Differenzierung linear interpoliert. Die Bestimmung der Phasendifferenz sowie die Umsetzung des MUSIC- und ESPRIT-Algorithmus nutzen die Frequenzcharakteristik des verwendeten Zweitonsignals direkt aus, indem die laufzeitabhängige Phasendrehung betrachtet wird.*

*Die umgesetzten Verfahren werden schließlich hinsichtlich verschiedener Gesichtspunkte evaluiert. Im Falle der Korrelation wird zunächst gezeigt, dass trotz Interpolation ein systematischer Fehler auftritt. Des Weiteren werden die Algorithmen in Anwesenheit von weißem Rauschen getestet. Dabei ist zu erkennen, dass die reine Auswertung der Phasendifferenz der Cramer-Rao-Schranke und damit einer effizienten Schätzung am nächsten kommt. Auch die Möglichkeit eines Frequenzversatzes wird betrachtet. Hierbei lässt sich eine gute Robustheit feststellen, lediglich bei der Korrelation sind etwas schlechtere Ergebnisse die Folge.*

---

## Abstract

---

*This thesis examines different algorithms for range estimation with multitone signals and describes their implementations. First of all, the methods of correlation, analysis of phase difference and the subspace algorithms MUSIC and ESPRIT as well as the special signal characteristics of the present signal with two subcarriers are introduced in general. In the context of channel simulation, the problem of fractional delay is covered.*

*Subsequently, the specific implementations of the estimation methods are explained in detail. In case of the correlation, its differentiation is interpolated linearly in order to increase accuracy. The determination of the phase difference as well as the realizations of the MUSIC and ESPRIT algorithm make use of the shape of the utilized two-tone signal in the frequency domain by considering the time-dependent phase rotation.*

*Finally, the implemented estimation methods are evaluated under different conditions. First, correlation is shown to entail a systematic error even despite interpolation. Moreover, the algorithms are tested in the presence of white noise. It is revealed that the direct analysis of the phase difference comes closest to the Cramer-Rao-Lower-Bound and thereby to an efficient estimator. Possible frequency shifts are also investigated. The algorithms are shown to be robust against such influences, solely correlation has to deal with slightly worse results.*

---

## Abkürzungsverzeichnis

---

AWGN	Additive White Gaussian Noise
BOC	Binary Offset Carrier
BPSK	Binary Phase Shift Keying
CRLB	Cramer-Rao-Lower-Bound
DFT	Diskrete Fourier-Transformation
DTFT	Zeitdiskrete Fourier-Transformation
ESPRIT	Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques
FFT	Fast Fourier Transformation
GNSS	Global Navigation Satellite System
KKF	Kreuzkorrelationsfunktion
LDS	Leistungsdichtespektrum
MUSIC	MUltiple Signal Classification
PN	Pseudo-Random Noise
RMS	Root Mean Square
RMSE	Root Mean Square Error
SNR	Signal-Rausch-Verhältnis (Signal-to-Noise Ratio)
TOA	Time-of-Arrival

---

## Symbolverzeichnis

---

$c_0$	Lichtgeschwindigkeit
$\Delta\Phi$	Phasendifferenz
$\epsilon$	Schätzfehler
$f_{\text{sampling}}$	Abtastfrequenz
$f_{\text{symbol}}$	Symbolfrequenz
$\pi$	Kreiszahl
$r$	Distanz
$\hat{r}$	geschätzte Distanz
$r[k]$	zeitdiskretes Empfangssignal (Basisband)
$r(t)$	zeitkontinuierliches Empfangssignal (Basisband)
$s[k]$	zeitdiskretes Sendesignal (Basisband)
$s(t)$	zeitkontinuierliches Sendesignal (Basisband)
$T$	Signaldauer
$\tau$	Laufzeit
$\hat{\tau}$	geschätzte Laufzeit

---

# Inhaltsverzeichnis

---

Abkürzungsverzeichnis	i
Symbolverzeichnis	ii
1 Einleitung	1
2 Grundlagen	3
2.1 Grundlagen der Laufzeitschätzung . . . . .	3
2.1.1 Korrelation . . . . .	4
2.1.2 Phasendifferenz . . . . .	7
2.1.3 Hochauflösende Schätzalgorithmen . . . . .	9
2.2 Cramer-Rao-Lower-Bound . . . . .	13
2.2.1 CRLB im Falle von additivem weißem Gaußschen Rauschen . . . .	14
2.2.2 CRLB für Distanzschätzung . . . . .	14
2.3 Signalcharakteristik . . . . .	15
2.3.1 Signaleigenschaften für die Fledermausortung . . . . .	15
2.3.2 Interpretation als BOC-Signal . . . . .	17
3 Signalerzeugung und Kanalsimulation	18
3.1 Signalerzeugung . . . . .	18
3.2 Kanalmodell . . . . .	20
3.3 Kanalsimulation . . . . .	20
4 Implementierung der Schätzalgorithmen	24
4.1 Umsetzung der Korrelation . . . . .	24
4.1.1 Einfache Maximumsuche . . . . .	26



4.1.2	Differenzierung und lineare Interpolation . . . . .	26
4.1.3	Erweiterung durch Kombination . . . . .	28
4.2	Auswertung der Phasendifferenz . . . . .	29
4.2.1	Bestimmung der Phasendifferenz . . . . .	29
4.2.2	Erweiterung durch Matched-Filter . . . . .	31
4.3	Anwendung von MUSIC und ESPRIT . . . . .	32
4.3.1	Implementierung von MUSIC . . . . .	34
4.3.2	Implementierung von ESPRIT . . . . .	35
5	Evaluierung der Schätzverfahren . . . . .	37
5.1	Rauschfreier Fall . . . . .	38
5.1.1	Korrelation . . . . .	38
5.1.2	Phasendifferenz . . . . .	43
5.1.3	Subraum-Verfahren . . . . .	44
5.2	Betrachtung für AWGN . . . . .	46
5.2.1	Berechnung der CRLB . . . . .	46
5.2.2	Korrelation . . . . .	48
5.2.3	Phasendifferenz . . . . .	49
5.2.4	MUSIC und ESPRIT . . . . .	50
5.2.5	Vergleich . . . . .	51
5.3	Einfluss eines Frequenzversatzes . . . . .	53
5.3.1	Auswirkungen auf die Korrelation . . . . .	53
5.3.2	Folgen für die phasenbasierten Algorithmen . . . . .	56
6	Zusammenfassung und Ausblick . . . . .	57
	Literaturverzeichnis . . . . .	59
	Abbildungsverzeichnis . . . . .	61
	Tabellenverzeichnis . . . . .	63

# KAPITEL 1

---

## Einleitung

---

Ortung und Navigation bilden ein interessantes, interdisziplinäres Forschungsgebiet, das in letzter Zeit immer mehr an Bedeutung gewann und vielfach benötigt wird. Im Rahmen eines Projekts der Deutschen Forschungsgemeinschaft, an dem verschiedene Hochschulen in Deutschland beteiligt sind, wird am Lehrstuhl für Informationstechnik - Schwerpunkt Kommunikationselektronik (LIKE) ein Ortungssystem für Fledermäuse entwickelt. Mithilfe dessen soll es möglich sein, die Bewegungen und damit das Verhalten der Tiere zu beobachten, was Biologen neue Erkenntnisse liefern soll.

Zur Ortung eines Objektes existieren verschiedene Ansätze. Bei der Angle-of-Arrival (AOA)-Schätzung wird die Richtung bestimmt, aus der ein ankommendes Signal eingefallen ist. Wird dies an mindestens zwei unterschiedlichen Empfängerorten durchgeführt, so lässt sich der Ort des Senders eindeutig bestimmen. Eine andere Möglichkeit ist es, die Leistung des Empfangssignals auszuwerten. Der so erhaltene Received Signal Strength Indicator (RSSI) kann bei Kenntnis der Ausbreitungsdämpfung und der Sendesignalleistung zur Bestimmung der Entfernung zum Sender genutzt werden. In dem hier betreffenden System wurde allerdings eine andere Herangehensweise gewählt. Um eine Fledermaus orten zu können, müssen Distanzen von dieser zu bekannten Positionen gemessen werden. Hierfür wird am Lehrstuhl für Technische Elektronik (LTE) ein besonders kleiner und leichter Sender entwickelt, welcher an der Fledermaus angebracht wird. Das ausgesandte Funksignal wird dann an den bekannten Positionen empfangen, woraufhin aber nicht die Signalleistung ausgewertet, sondern eine Time-of-Arrival (TOA)-Schätzung durchgeführt wird. Mithilfe der Lichtgeschwindigkeit  $c_0$  lässt sich aus der ermittelten Laufzeit  $\tau$  mittels der Beziehung

$$r = c_0 \cdot \tau \tag{1.1}$$

die Distanz  $r$  angeben.

Im hier vorliegenden System werden genau genommen Zeitdifferenzen zwischen den Ankunftszeitpunkten an den Empfängern berechnet und ausgewertet, was als Time-Difference-of-Arrival (TDOA)-Schätzung bezeichnet wird. Der Vorteil gegenüber einem reinen TOA-System ist, dass auf eine hochgenaue Synchronisation zwischen Sender und Empfängern verzichtet werden kann, da der Sendezeitpunkt nicht bekannt sein muss. Für ein Empfängerpaar ergibt sich dabei je nach ermittelter Zeitdifferenz eine Hyperbel, auf der sich der Sender befinden muss. Durch Schneiden mit der Hyperbel eines weiteren Empfängerpaars wird die Senderposition schließlich auf zwei Punkte eingeschränkt. Für ein eindeutiges Ergebnis sind mindestens drei Paare nötig. Es handelt sich im Grunde um dasselbe Prinzip wie beim Global Navigation Satellite System (GNSS), wobei Sender und Empfänger vertauscht sind.

Da die besonderen Umstände eine energieeffiziente Generierung des Sendesignals erfordern, handelt es sich bei diesem um ein spezielles Mehrträgersignal. Es wurde so entworfen, dass eine günstige Verteilung der Signalenergie erreicht wird. Die besondere Charakteristik ermöglicht verschiedene Varianten der Laufzeitschätzung.

Im Rahmen dieser Arbeit werden unterschiedliche Methoden zur Distanzmessung anhand des angesprochenen Mehrträgersignals untersucht und implementiert. Hierbei handelt es sich um die Schätzung der Laufzeit

1. durch Auswertung der Kreuzkorrelation aus Sende- und Empfangssignal,
2. durch Schätzung der Phasendifferenz der Subträger im Mehrträgersignal und
3. mithilfe des MUSIC- und des ESPRIT-Algorithmus.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert: Zunächst sollen die Eigenschaften des Sendesignals sowie der aktuelle Stand der Technik beleuchtet und der Hintergrund der drei Herangehensweisen im Allgemeinen erläutert werden. Danach geht es um die konkrete Anwendung mit dem eingeführten Mehrträgersignal. Dafür wird zunächst die Signalerzeugung sowie Kanalsimulation und anschließend die Implementierung der Algorithmen beschrieben. Die Schätzverfahren werden schließlich auf Genauigkeit und verschiedene Störfaktoren untersucht und die Qualität der Ergebnisse mithilfe der Cramer-Rao-Lower-Bound (CRLB) evaluiert.

# KAPITEL 2

---

## Grundlagen

---

In diesem Kapitel werden einige Grundlagen zum weiteren Verständnis der Thematik behandelt. Zuerst werden die Verfahren Korrelation, Berechnung der Phasendifferenz sowie MUSIC und ESPRIT im allgemeinen Kontext erläutert und die gewöhnliche Anwendung beschrieben. Des Weiteren wird das verwendete Sendesignal einer genaueren Betrachtung unterzogen und erläutert, weshalb es hier Verwendung findet. Danach wird mit der CRLB eine Möglichkeit zur Bewertung von Schätzern allgemein vorgestellt und für das vorgestellte Sendesignal konkretisiert.

### 2.1 Grundlagen der Laufzeitschätzung

Laufzeitschätzung kann auf verschiedene Art und Weise erfolgen. Die Grundlage bilden die Prinzipien der Funkwellenausbreitung, welche das Signal u. a. abhängig von der Laufzeit unterschiedlich beeinflussen. Je nach Anwendungsfall und damit Signal kommen unterschiedliche Techniken zum Einsatz, die dann auch für das verwendete Mehrträgersignal umgesetzt werden. Im Folgenden werden die später implementierten Verfahren und Algorithmen allgemein erläutert.

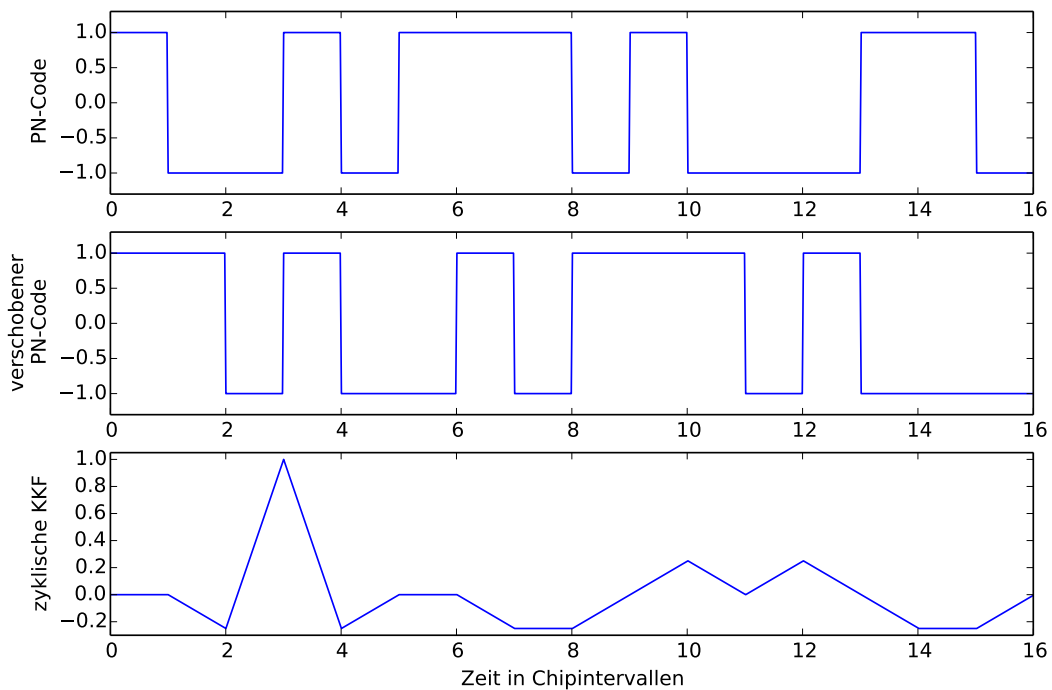
### 2.1.1 Korrelation

Die Kreuzkorrelation des Empfangssignals mit dem Sendesignal findet in aktuellen Ortungssystemen häufig Anwendung. Die Korrelation zweier Signale  $x(t)$  und  $y(t)$  über das Zeitintervall  $T$  ist gegeben durch

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_T x(t)y(t + \tau)dt. \quad (2.1)$$

Ohne Beschränkung auf ein Zeitintervall entfällt die Normierung und es wird von  $-\infty$  bis  $+\infty$  integriert. Die Korrelation stellt damit ein Maß für die Ähnlichkeit zweier Signale dar. Berechnet man nun die Kreuzkorrelationsfunktion (KKF) eines (durch den Kanal) um  $\tau$  verzögerten Signals mit dem unverzögerten Signal, so kann man durch Bestimmen des Maximums der Korrelation auf die Verzögerung rückschließen.

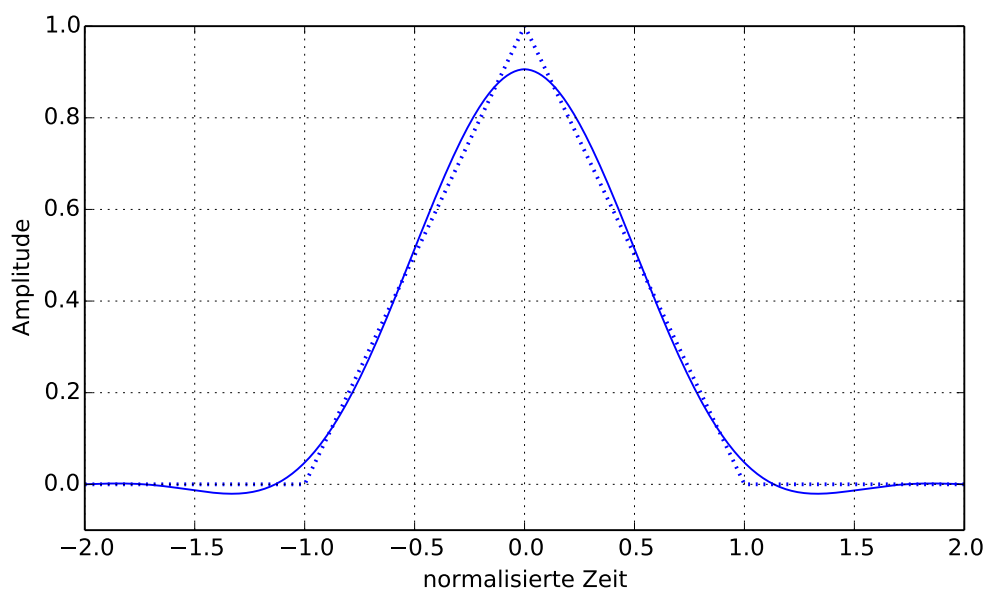
Sogenannte Pseudo-Random Noise (PN)-Codes besitzen besonders gute Korrelationseigenschaften. Dies wird beispielsweise auch bei GNSS ausgenutzt [7, S. 71 ff.]. Geht man von einem PN-Code in Verbindung mit rechteckförmigen Chips aus, so ergibt sich für die Korrelation ein dreieckförmiges Signal. Die Position der Spitze des Dreiecks zeigt den Zeitversatz an,



**Abbildung 2.1:** Korrelation eines PN-Codes mit sich selbst verzögert

wie in Abbildung 2.1 für den Code  $\langle 1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, -1 \rangle$  exemplarisch dargestellt (es handelt sich hier um eine zyklische KKF, da von einer zyklischen Verschiebung des verzögerten Codes ausgegangen wird). Geht man von diesen idealisierten, kontinuierlichen Signalen aus, wäre die Detektion des Maximums unproblematisch. Allerdings ergeben sich in der Realität direkt zwei Einschränkungen.

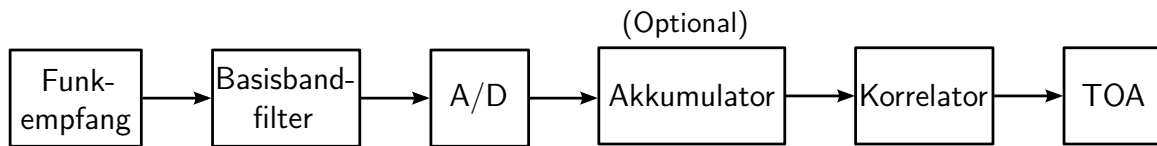
Zum einen ist ein ideales Rechteck als Sendesignal nicht realisierbar. Da nur ein gewisses Frequenzband mit begrenzter Bandbreite zur Verfügung steht, wird die Sequenz mit einem Sendefilter bandbegrenzt. Die rechteckförmige Gestalt der Chips geht dadurch verloren, was direkten Einfluss auf das Aussehen der Korrelation hat. Das Dreieck mit perfekt



**Abbildung 2.2:** Ideale und bandbegrenzte Autokorrelationsfunktion [16, S. 65]

detektierbarer Spitze wird geglättet und die Amplitude des Maximums sinkt. Vor allem in Mehrwegeszenarien, bei denen mehrere Maxima dicht aneinander liegen, ist das Finden des zur Line-of-Sight (LOS)-Komponente gehörigen Maximums dadurch erheblich erschwert [16, S. 78 ff.].

Ein weiterer entscheidender Aspekt ist, dass das Empfangssignal in der heutigen Zeit der digitalen Signalverarbeitung nicht analog verarbeitet wird. Abbildung 2.3 zeigt den Aufbau eines modernen Empfängers. Bevor die Korrelation durchgeführt und basierend auf dieser die Laufzeit geschätzt wird, wird das Signal abgetastet (der optionale Akkumulator wird hier nicht betrachtet). Dementsprechend ergibt sich auch eine zeitdiskrete KKF, die die kontinuierliche durch eine begrenzte Anzahl an Abtastwerten darstellt. Somit wird das



**Abbildung 2.3:** Blockdiagramm eines modernen Empfängers mit analogen und digitalen Komponenten [16, S. 58]

eigentliche Maximum der KKF nicht immer mit einem Sample zusammenfallen, sondern oft zwischen zwei Samples liegen. Meist ist aber eine höhere Genauigkeit nötig, als sie durch die Abtastfrequenz und damit den Sampleabstand gegeben ist. Um diese zu erreichen, werden in der Literatur verschiedene Herangehensweisen beschrieben.

Im Bereich der Satellitennavigation werden zwei Abtastwerte in der Nähe des realen Maximums betrachtet. Die Empfangssequenz wird dazu mit einer leicht verzögerten und einer etwas zu frühen Sendesignalkopie (im Folgenden Replica genannt) korreliert, was auf der steigenden und fallenden Flanke des Korrelationspeaks je einen Abtastwert liefert. Über eine Regelschleife, eine sogenannte Delay Locked Loop (DLL), wird dann mit unterschiedlich verzögerten Replica versucht, die beiden Punkte auf denselben Wert zu bringen. Das gesuchte Maximum muss somit genau zwischen diesen Samples liegen [7, S. 411 ff.].

Eine andere Möglichkeit besteht in der Interpolation der abgetasteten Korrelation. Die perfekte Rekonstruktion eines bandbegrenzten, abgetasteten Signals ist in der Theorie durch Faltung mit der sinc-Funktion, also durch Tiefpassfilterung möglich, sofern das Abtasttheorem eingehalten wird. In der Praxis fügt man zwischen den vorliegenden Abtastwerten Nullsamples ein und faltet anschließend mit der sinc-Funktion. Hier ergibt sich das Problem, dass diese auch wieder abgetastet und zudem abgeschnitten werden muss. Die Interpolation ist somit nicht mehr ideal. Es ergibt sich schließlich auch nicht das kontinuierliche Ausgangssignal, sondern erneut die abgetastete Form mit nun erhöhter Abtastrate. Man bezeichnet den Vorgang deshalb als Upsampling. Diese Maßnahme in jedem Schritt durchführen zu müssen, bedeutet einen hohen Rechenaufwand. Außerdem kann es nach wie vor passieren, dass das eigentliche Maximum der Korrelation zwischen zwei Samples liegt.

Um weiter an den realen Peak heranzukommen, kann man an der betroffenen Stelle lokal interpolieren. Dazu passt man beispielsweise basierend auf den nächsten drei Samples eine nach unten geöffnete Parabel ein, deren Scheitelpunkt das Maximum annähert. Dies verbessert die Genauigkeit, aber dennoch bleibt ein systematischer Fehler, da die Interpolation

nicht perfekt ist [8]. Eine Art dieses Ansatzes wurde auch zur Auswertung der Korrelation des Mehrträgersignals gewählt, worauf in den Kapiteln 4 und 5 eingegangen wird.

### 2.1.2 Phasendifferenz

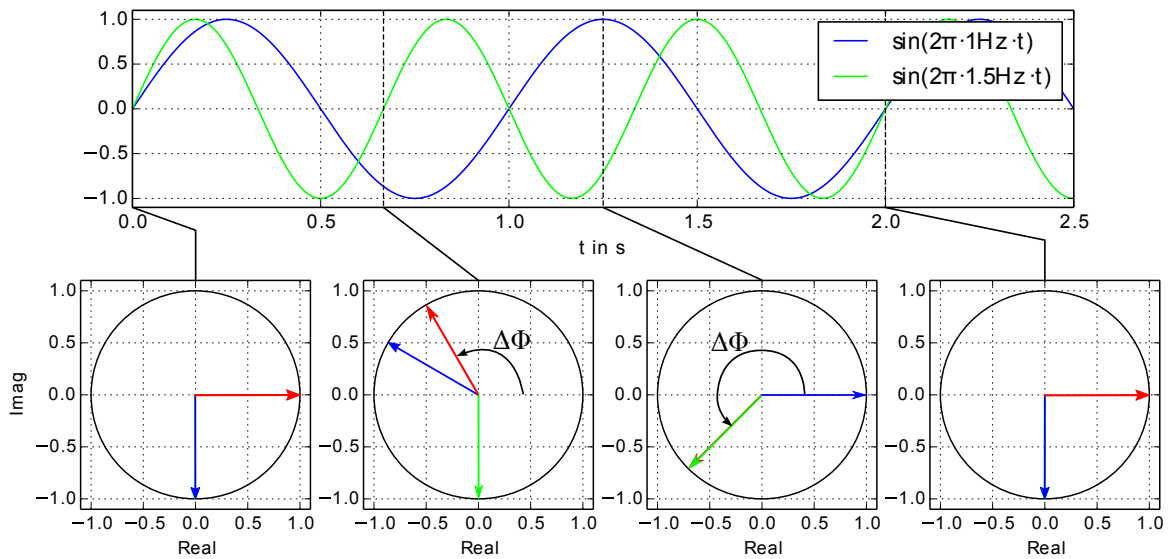
Ein anderer Gedanke wird bei Betrachtung der Phasendifferenz verfolgt. Der grundlegende Zusammenhang zwischen Zeitverschiebung und Phasendrehung wird am Verschiebungssatz der Fourier-Transformation deutlich:

$$x(t - \tau) \circ \bullet X(f)e^{-j2\pi f\tau} \quad (2.2)$$

Mit zunehmender Zeitverschiebung  $\tau$  (im Anwendungsfall die Laufzeit) nimmt auch die Phase zu, was durch den komplexen Zeiger  $e^{-j2\pi f\tau}$  ausgedrückt wird. Die Phase betrachtet für eine feste Frequenz  $f$  hängt damit linear von der Laufzeit  $\tau$  ab, sodass man bei Kenntnis von Phase und Frequenz auf die Laufzeit schließen kann.

Dies käme einer reinen Auswertung der Trägerphase gleich. Ein solches Vorgehen hätte aufgrund der im Allgemeinen sehr hohen Trägerfrequenz allerdings einen zu kurzen Eindeutigkeitsbereich zur Folge (s. Gleichung 2.5). Des Weiteren setzt dies eine sehr genaue Synchronisation zwischen Sender und Empfänger voraus [9], da der Sendezeitpunkt am Empfänger bekannt sein muss. Dies kann aber oft nicht hinreichend bewerkstelligt werden. Eine Alternative ist es, die Phase bei verschiedenen Frequenzanteilen zu betrachten. So zeigt die Korrespondenz in Ausdruck 2.2 auch, dass Signalanteile bei höheren Frequenzen stärker gedreht werden, als Anteile bei niedrigeren Frequenzen. Für eine vorliegende Laufzeit  $\tau$  lässt sich damit ebenso ein linearer Zusammenhang zwischen Frequenz und Phasendrehung innerhalb des Signals erkennen. Dies kann beispielsweise bei Verwendung von Mehrtonsignalen ausgenutzt werden, die Anteile bei mehreren Frequenzen im Spektrum besitzen. Durch Berechnung der Differenzen der Phasen bei jeweils zwei verschiedenen Positionen im Spektrum kann damit die Laufzeit bestimmt werden, was beispielsweise auch zur Distanzschätzung mit RFID Tags eingesetzt wird [4]. Die grundlegendste Variante ist im Falle von Zweitonsignalen gegeben. Das Signal muss hierbei logischerweise Signalanteile bei zwei Frequenzen aufweisen, die man als Subträger bezeichnen kann. Wie schon allgemein beschrieben ändert sich die Phase des Subträgers mit der höheren Frequenz schneller, als die des Subträgers mit der niedrigeren Frequenz, sodass auch die Differenz stetig zunimmt. Das Prinzip der Phasendifferenz ist in Abbildung 2.4 veranschaulicht. Die beiden Sinuswel-





**Abbildung 2.4:** Beispiel zur Veranschaulichung der Phasendifferenz. Oben zwei Sinusschwingungen verschiedener Frequenzen, unten die Phasen für  $t = 0\text{ s}, \frac{2}{3}\text{ s}, 1.25\text{ s}, 2\text{ s}$  dargestellt mit komplexen Zeigern.

len sollen zwei Subträger der Frequenzen 1 Hz bzw. 1.5 Hz darstellen. Man erkennt, wie sich die Phasen bzw. die Phasendifferenz (rot) mit der Zeit verändert. Somit kann man nach Schätzung dieser Phasendifferenz und bei Kenntnis des Subträgerabstands (also der Differenzfrequenz) die Laufzeit des Signals berechnen.

Allerdings gibt es einen eingeschränkten Eindeutigkeitsbereich abhängig vom Frequenzabstand der beiden Träger. Je größer dieser ist, desto schneller wächst die Phasendifferenz um  $2\pi$  an, was aufgrund der Periodizität nicht mehr vom anfänglichen Wert unterschieden werden kann. Die maximal eindeutig detektierbare Laufzeit  $\tau_{max}$  ergibt sich somit als Kehrwert der Differenzfrequenz  $\Delta f$

$$\tau_{max} = \frac{1}{\Delta f}. \quad (2.3)$$

In dem angegebenen Beispiel ist die Phasendifferenz somit für

$$\tau_{max} = \frac{1}{1.5\text{ Hz} - 1.0\text{ Hz}} = \frac{1}{0.5\text{ Hz}} = 2.0\text{ s} \quad (2.4)$$

eindeutig. Dies lässt sich gut erkennen, da die Phasendifferenz zu diesem Zeitpunkt wieder bei  $2\pi$  bzw. 0 angekommen ist. Für den Eindeutigkeitsbereich in Metern muss lediglich mit der Lichtgeschwindigkeit  $c_0$  multipliziert werden, man erhält

$$r_{max} = \frac{c_0}{\Delta f}. \quad (2.5)$$

Die Auswertung der Phasendifferenz ist für das hier betrachtete Ortungssystem von besonderer Bedeutung, was bei der Signalcharakteristik in Abschnitt 2.3 deutlich wird.

### 2.1.3 Hochauflösende Schätzalgorithmen

Bei den Schätzalgorithmen MUSIC und ESPRIT handelt es sich um Verfahren, mit denen Ergebnisse in höherer Auflösung erzielt werden können, als durch die Abtastrate vorgegeben. Ursprünglich wurden sie zur Winkel- und Spektralschätzung entworfen, wo sie häufig Anwendung finden. Doch auch für die Laufzeitschätzung können sie genutzt werden.

Angenommen wird ein Mehrwegekanal mit der Impulsantwort bzw. Übertragungsfunktion

$$h(t) = \sum_{l=0}^{L-1} \alpha_l \delta(t - \tau_l) \quad \circ \bullet \quad H(f) = \sum_{l=0}^{L-1} \alpha_l e^{-j2\pi f \tau_l}, \quad (2.6)$$

wobei  $\alpha_l$  komplexe Dämpfungsfaktoren zu den  $L$  Ausbreitungspfaden angibt, über die das Signal jeweils um  $\tau_l$  verzögert eintrifft. Im Frequenzbereich ist mit den Fourier-Transformationen des Empfangssignals  $R(f)$  und des Sendesignals  $S(f)$  sowie weißem Rauschen  $N(f)$  der Zusammenhang

$$R(f) = S(f) \cdot H(f) + N(f) \quad (2.7)$$

gegeben. Eine Schätzung für die Übertragungsfunktion  $Y(f)$  erhält man also mit

$$Y(f) = \frac{R(f)}{S(f)}. \quad (2.8)$$

Basierend darauf ergibt sich für die folgenden Ausführungen das in Matrixform notierte Signalmodell [5]

$$\mathbf{y} = \mathbf{h} + \mathbf{n} = \mathbf{V}(\tau)\mathbf{a} + \mathbf{n}, \quad (2.9)$$

mit der mit  $\frac{1}{T_s}$  abgetasteten, aus  $M$  Samples bestehenden Übertragungsfunktion  $\mathbf{h}$ , welche durch additives, weißes Rauschen gestört wird und somit die angesprochene, abgetastete Schätzung der Übertragungsfunktion aus Gleichung 2.8 ergibt.  $\mathbf{h}$  lässt sich wie gezeigt faktorisieren, wobei  $\mathbf{a} = [\alpha_0 \ \cdots \ \alpha_{L-1}]^T$  gilt und die Spaltenvektoren von  $\mathbf{V}$  die Gestalt  $\mathbf{v}(\omega) = [1 \ e^{j\omega} \ \cdots \ e^{j(M-1)\omega}]^T$  mit  $\omega = -\frac{2\pi\tau}{MT_s}$  haben. Von besonderem Interesse ist die Kovarianzmatrix des Ausgangsvektors  $\mathbf{y}$ . Sie lässt sich mittels

$$\mathbf{C}_y = \text{Cov}(\mathbf{y}) = \mathbf{V}\mathbf{C}_a\mathbf{V}^H + \mathbf{C}_n \quad (2.10)$$

berechnen. Dabei ist die Kovarianzmatrix der Einzelpfadsignale als  $\mathbf{C}_a = \text{Cov}(\mathbf{a}) = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_L^2)$  gegeben, wenn man davon ausgeht, dass die Signale unkorreliert sind. Da es sich um weißes Rauschen handelt, lässt sich dessen Kovarianzmatrix als  $\mathbf{C}_n = \text{Cov}(\mathbf{n}) = \sigma_0^2 \mathbf{I}$  mit der Rauschleistung  $\sigma_0^2$  und der Einheitsmatrix  $\mathbf{I}$  angeben.

$\mathbf{C}_y$  stellt für die folgenden Algorithmen den Ausgangspunkt dar.  $\mathbf{y}$  wird dabei mittels Diskrete Fourier-Transformation (DFT) aus Empfangs- und Sendesignal bestimmt und die Kovarianzmatrix durch

$$\hat{\mathbf{C}}_y = \frac{1}{M} \mathbf{y}\mathbf{y}^H \quad (2.11)$$

geschätzt. Da die angesprochene Unkorreliertheit der einzelnen Pfade in der Realität allgemein nicht gegeben ist, müssen geeignete Vorverarbeitungsmaßnahmen getroffen werden (siehe [6, 10, 12]). Auf diese wird hier nicht genauer eingegangen, da im Rahmen dieser Arbeit nur von einem Pfad ausgegangen wird und das Problem somit nicht besteht.

### 2.1.3.1 MUSIC-Algorithmus

Der MUSIC (MUltiple Signal Classification)-Algorithmus wurde erstmals von Schmidt vorgestellt [15]. Auf Basis der Kovarianzmatrix der Kanalschätzung wird eine Eigenwertzerlegung durchgeführt.

Da es sich bei  $\mathbf{V}\mathbf{C}_a\mathbf{V}^H$  um eine hermitesche Matrix handelt, kann man sie diagonalisieren:

$$\mathbf{V}\mathbf{C}_a\mathbf{V}^H = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^{-1} \quad (2.12)$$

mit  $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_L, 0, \dots, 0)$  und  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \ \cdots \ \mathbf{u}_L \ \mathbf{u}_{L+1} \ \cdots \ \mathbf{u}_M] = [\mathbf{U}_s \ | \ \mathbf{U}_n]$ .  $\mathbf{\Sigma}$  beinhaltet somit die Eigenwerte von  $\mathbf{V}\mathbf{C}_a\mathbf{V}^H$ , welche alle größer 0 sind, da die Matrix positiv semidefinit ist. Die Vektoren  $\mathbf{u}_l$  entsprechen den Eigenvektoren. Entschei-

dend ist nun, dass die ersten  $L$  Eigenvektoren orthogonal zu den restlichen Eigenvektoren sind und den Signalraum  $\mathbf{U}_s$  aufspannen. Die übrigen Eigenvektoren sind damit eine Basis für den Rauschraum  $\mathbf{U}_n$ .

Des Weiteren sind alle Eigenvektoren von  $\mathbf{V}\mathbf{C}_a\mathbf{V}^H$  gleichzeitig Eigenvektoren der Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}_y$ . Die Eigenwerte zu den ersten  $L$  Eigenvektoren sind durch  $\lambda_l + \sigma_0^2$  und die übrigen Eigenwerte durch  $\sigma_0^2$  gegeben. Wählt man also die Eigenvektoren zu den  $L$  größten Eigenwerten, so erhält man eine Basis für den Signalraum. Die übrigen Eigenvektoren spannen wieder entsprechend den Rauschraum auf. Der Spezialfall, dass nur ein Signal einfällt und damit  $L = 1$  gilt, wird bei der konkreten Implementierung in Abschnitt 4.3 betrachtet.

Zur Durchführung des Algorithmus müssen somit die Eigenwerte und -vektoren anhand der (geschätzten) Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}_y$  berechnet und nach der Größe der Eigenwerte geordnet werden, um die beiden Unterräume zu bilden. Für die gesuchten Vektoren  $\mathbf{v}(\omega)$  muss gelten

$$\mathbf{U}_n^H \mathbf{v}(\omega) = 0, \quad (2.13)$$

da Signal- und Rauschraum orthogonal zueinander sind. Um die zu den Laufzeiten der einzelnen Pfade gehörigen  $\omega_l$  (und damit  $\tau_l$ ) zu erhalten wird schließlich das sogenannte MUSIC-Spektrum

$$S(\omega) = \frac{1}{\|\mathbf{U}_n^H \mathbf{v}(\omega)\|^2} \quad (2.14)$$

gebildet und die Maxima gesucht, welche sich bei den gesuchten  $\omega_l$  befinden.

### 2.1.3.2 ESPRIT-Algorithmus

Das Bestimmen der Maxima über alle  $\omega$ , wie soeben vorgestellt, ist mit hohem Suchaufwand verbunden. Neben der Erweiterung Root-MUSIC<sup>1</sup> ist der ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques)-Algorithmus eine Alternative, der von Roy und Kailath entwickelt wurde [14].

Die  $M$  Samples der abgetasteten Übertragungsfunktion  $\mathbf{h}$  werden dazu in zwei Frequenzbereiche unterteilt, die die ersten bzw. letzten  $M - 1$  Samples beinhalten [6]. So ergeben

<sup>1</sup> Die Steeringvektoren werden dabei in der  $z$ -Ebene betrachtet. Dadurch ist kein Durchlaufen des gesamten Spektrums mehr nötig, stattdessen können hier die Nullstellen von  $\|\mathbf{U}_n^H \mathbf{v}(z)\|^2$  direkt berechnet werden.

sich zwei neue Matrizen, die mit der ursprünglichen Matrix  $\mathbf{V}$  wie folgt ausgedrückt werden können:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{J}_1 \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{V} \text{ bzw. } \mathbf{V}_2 = \mathbf{J}_2 \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{V}. \quad (2.15)$$

Die Verschiebung der beiden Teilspektren zueinander hat auch Auswirkung auf die Phase. Um sie in Abhängigkeit voneinander auszudrücken, muss je nach Verzögerung mit einem Drehzeiger multipliziert werden, was mit

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_1 \mathbf{\Omega} \text{ mit } \mathbf{\Omega} = \text{diag}(e^{j\omega_1}, \dots, e^{j\omega_L}) \quad (2.16)$$

zum Ausdruck gebracht wird. Um die  $\omega_l$  und damit die Verzögerungen herauszufinden, müssen also die Eigenwerte  $v_l$  von  $\mathbf{\Omega}$  bestimmt werden.

Beginnend mit der (geschätzten) Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}_y$  wird auch hier die Bestimmung von Signal- und Rauschraum durchgeführt. Da die gesuchten  $\mathbf{v}(\omega)$  im Signalraum liegen müssen, existiert eine invertierbare Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$ , die den Zusammenhang herstellt

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{V} \mathbf{T}. \quad (2.17)$$

Durch Umformungen und unter Verwendung der erläuterten Beziehungen der Matrizen  $\mathbf{V}_1$  und  $\mathbf{V}_2$  ergibt sich

$$\mathbf{J}_2 \mathbf{U}_s = \mathbf{V}_2 \mathbf{T} = \mathbf{V}_1 \mathbf{\Omega} \mathbf{T} = \mathbf{V}_1 \mathbf{T} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{\Omega} \mathbf{T} = \mathbf{J}_1 \mathbf{U}_s \mathbf{T}^{-1} \mathbf{\Omega} \mathbf{T} = \mathbf{J}_1 \mathbf{U}_s \mathbf{\Psi}. \quad (2.18)$$

Durch linksseitiges Multiplizieren mit den (Pseudo-)Inversen von  $\mathbf{J}_1$  und  $\mathbf{U}_s$  erhält man schließlich die Matrix  $\mathbf{\Psi}$

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{U}_s^H (\mathbf{J}_1^H \mathbf{J}_1)^{-1} \mathbf{J}_1^H \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_s. \quad (2.19)$$

Aufgrund der Tatsache, dass  $\mathbf{\Psi}$  ähnlich zu  $\mathbf{\Omega}$  ist, besitzen beide Matrizen dieselben Eigenwerte  $v_l$ . Somit erhält man

$$\omega_l = \arg(v_l) \quad (2.20)$$

und daraus die Laufzeiten.

## 2.2 Cramer-Rao-Lower-Bound

Um die Schätzer am Ende bewerten zu können, bedarf es einer Möglichkeit, die Varianz des jeweiligen Verfahrens zu relativieren. Hierfür eignet sich die CRLB (deutsch: Cramer-Rao-Schranke oder -Ungleichung). Sie stellt eine untere Schranke für die Varianz eines Schätzers dar. Im Folgenden wird die allgemeine Definition betrachtet [2, S. 27 ff.].

Gegeben sei der unbekannte, determinierte und zu schätzende Parameter  $\theta$ , ein Beobachtungsvektor  $\mathbf{x}$  sowie dessen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f(\mathbf{x}; \theta)$ . Die Varianz  $\sigma_{\hat{\theta}}^2$  des Schätzers  $\hat{\theta}$  ist dann folgendermaßen nach unten beschränkt:

$$\sigma_{\hat{\theta}}^2 \geq \frac{\left(1 + \frac{\partial \hat{\theta}_{bias}}{\partial \theta}\right)^2}{-E \left\{ \frac{\partial^2 \ln f(\mathbf{x}; \theta)}{\partial \theta^2} \right\}}. \quad (2.21)$$

$E\{\cdot\}$  bezeichnet hierbei den Erwartungswert-Operator und  $\hat{\theta}_{bias}$  die Ablage (den Bias) des Schätzers. Für einen erwartungstreuen Schätzer, also für  $\hat{\theta}_{bias} = 0$ , vereinfacht sich die Ungleichung zu

$$\sigma_{\hat{\theta}}^2 \geq \frac{1}{-E \left\{ \frac{\partial^2 \ln f(\mathbf{x}; \theta)}{\partial \theta^2} \right\}}. \quad (2.22)$$

Voraussetzung für die Gültigkeit der CRLB sind die Regularitätsbedingungen

$$-E \left\{ \frac{\partial \ln f(\mathbf{x}; \theta)}{\partial \theta} \right\} = 0; \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int \hat{\theta}(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}; \theta) d\mathbf{x} = \int \hat{\theta}(\mathbf{x}) \frac{\partial f(\mathbf{x}; \theta)}{\partial \theta} d\mathbf{x}, \quad (2.24)$$

wodurch sichergestellt wird, dass Integration und Differentiation vertauscht werden können. Ein erwartungstreuer Schätzer, der die CRLB erreicht, ist notwendigerweise effizient und wird als Minimum Variance Unbiased Estimator (MVUE) bezeichnet. Es kann also allgemein kein Schätzer existieren, der eine Varianz besitzt, die kleiner als die CRLB ist.

Aufgrund dessen stellt sie eine gute Bewertungsmöglichkeit dar, welche in Kapitel 5 zur Evaluierung der implementierten Schätzverfahren genutzt wird.

### 2.2.1 CRLB im Falle von additivem weißem Gaußschen Rauschen

Für den Anwendungsfall der Distanzschätzung muss die in Gleichung 2.22 gegebene Form der CRLB entsprechend konkretisiert werden. Dafür wird ein Ausdruck für die Wahrscheinlichkeitsdichte  $f(\mathbf{x}; \theta)$  benötigt.

Für den Fall, dass ein von einem Parameter  $\theta$  abhängiges Signal  $s[n; \theta]$  der Länge  $N$  gemäß  $x[n] = s[n; \theta] + w[n]$  in weißem, Gaußschen Rauschen der Varianz  $\sigma^2$  verborgen liegt, wird diese Likelihoodfunktion in [2, S. 35] mit

$$f(\mathbf{x}; \theta) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} \exp \left( -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - s[n; \theta])^2 \right) \quad (2.25)$$

angegeben. Setzt man diesen Ausdruck in die Definition der CRLB ein und vereinfacht entsprechend, so erhält man als untere Schranke für die Varianz des Schätzers des Parameters  $\theta$

$$\sigma_{\hat{\theta}}^2 \geq \frac{1}{\sum_{n=0}^{N-1} \left( \frac{\partial s[n; \theta]}{\partial \theta} \right)^2}. \quad (2.26)$$

Basierend auf diesem Zwischenergebnis lässt sich je nach Signalform und zu schätzendem Parameter fortfahren. Im Falle der Distanz- bzw. Laufzeitschätzung handelt es sich bei diesem Parameter um die zu schätzende Laufzeit  $\tau$ . Je nach Distanz bzw. Verzögerung wird das Signal also beeinflusst, was es möglich macht, auf diese Größen rückzuschließen.

### 2.2.2 CRLB für Distanzschätzung

In [1, 9] wird ein konkreterer Ausdruck für die CRLB im Falle von Distanzschätzung angegeben. Dieser lautet

$$\sigma_{\hat{\tau}}^2 \geq \frac{c_0^2}{(2\pi)^2 \cdot 2T_s \cdot \frac{C}{N_0} \cdot \beta_{RMS}^2}, \quad (2.27)$$

wobei  $T_s$  die Dauer des Signals und  $\frac{C}{N_0}$  das Träger-zu-Rausch-Verhältnis angibt, also ein Maß für die Rauschleistung. Bei  $\beta_{RMS}$  handelt es sich um die Root Mean Square (RMS)-Bandbreite, die sich mittels

$$\beta_{RMS}^2 = \int_{-B/2}^{B/2} f^2 \cdot |S(f)|^2 df \quad (2.28)$$

berechnen lässt.  $|S(f)|^2$  bezeichnet dabei das Leistungsdichtespektrum (LDS) des Signals, also die Fourier-Transformierte der Autokorrelationsfunktion des Zeitsignals  $s(t)$ ; bei  $B$  handelt es sich um die Signalbandbreite.

Anhand dieses Terms lässt sich schon gut erkennen, wie und von welchen Faktoren die Güte des Schätzers beeinflusst wird. Mit höherem Signal-Rausch-Verhältnis (Signal-to-Noise Ratio) (SNR) bzw.  $\frac{C}{N_0}$  oder einer erhöhten Signaldauer sinkt die untere Schranke. Zudem zeigt die Definition der RMS-Bandbreite, dass eine höhere Bandbreite sowie eine günstige Signalcharakteristik das Ergebnis der CRLB weiter verringern kann. Dabei ist zu bedenken, dass die Signalbandbreite immer von äußeren Regularien beschränkt sein wird und somit nicht beliebig erhöht werden kann.

## 2.3 Signalcharakteristik

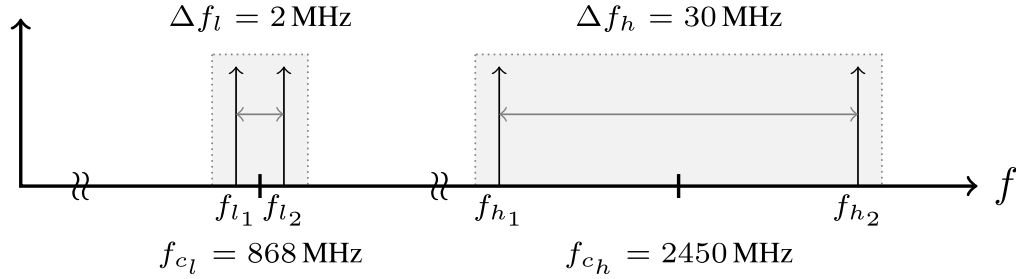
Um eine genaue Laufzeitschätzung durchführen zu können, sollte das Sendesignal spezielle Eigenschaften aufweisen. Signale, deren Autokorrelationen einen besonders markanten Peak besitzt und damit gut zur Auswertung der Schätzung mittels Korrelation geeignet sind, sind Spreizcodes, deren Energie auf einen Großteil des verwendeten Frequenzspektrums verteilt wird. Diese PN-Sequenzen finden wie schon erwähnt beispielsweise beim GNSS Verwendung. Für die hier vorliegenden Umstände ist aber ein anderer Signaltyp nötig, der im Folgenden beschrieben und begründet wird.

### 2.3.1 Signaleigenschaften für die Fledermausortung

Da die Fledermäuse keiner großen Tragelast ausgesetzt werden sollen, muss der Sender inklusive Batterie besonders leicht sein. Zudem sollte eine lange Akkulaufzeit gegeben sein. Aufgrund dieser Bedingungen ist für die Ortung eine besonders energieeffiziente Generierung des Sendesignals erforderlich. Deshalb hat man sich für einen speziellen Typ von Mehrträgersignalen entschieden. Der Grund für diese Wahl lässt sich anhand der CRLB für die Distanzschätzung (Gleichung 2.27) erklären. Um die Schranke möglichst weit herunterzusetzen, müssen die vorkommenden Parameter entsprechend verändert werden, wobei die äußeren Umstände zu berücksichtigen sind. Eine Möglichkeit ist die Erhöhung der RMS-Bandbreite. Da die Bandbreite aber vorgegeben ist, lässt sich lediglich die Charakteristik des Signals im Frequenzbereich anpassen. Hierbei wurde versucht, die ebenfalls begrenzte



Signalenergie möglichst nah an die Bandgrenzen zu legen, wo mit großem  $f$  gewichtet wird, wie Gleichung 2.28 zeigt.



**Abbildung 2.5:** Spektrale Charakteristik des eingesetzten Mehrträgersignals [9]

Diese Charakteristik erlaubt es auch, durch die Phasendifferenz der beiden Träger innerhalb des Empfangssignals auf die Laufzeit rückzuschließen. Das grundlegende Prinzip wurde bereits in Abschnitt 2.1.2 vorgestellt. Das Frequenzspektrum des nun betrachteten Mehrträgersignals ist in Abbildung 2.5 dargestellt. Es wird ersichtlich, dass es zwei Frequenzbänder mit jeweils zwei Subträgern gibt: Das 868 MHz-Band weist aufgrund des geringeren Trägerabstands von 2 MHz einen höheren Eindeutigkeitsbereich auf als das 2450 MHz-Band. Für den maximalen Eindeutigkeitsbereich erhält man damit gemäß Gleichung 2.5

$$r_{max} = \frac{c_0}{\Delta f_l} = \frac{3.0 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}{2 \text{ MHz}} = 150 \text{ m.} \quad (2.29)$$

Entsprechend ergibt sich für das zweite Band mit Frequenzabstand  $\Delta f_h = 30 \text{ MHz}$  ein Eindeutigkeitsbereich von nur  $r_{max} = 10 \text{ m}$ , dafür kann hier die Genauigkeit der Schätzung erhöht werden.

Um ein Signal mit der gewünschten Charakteristik zu erhalten, wird ein Träger mit der Mittenfrequenz des jeweiligen Bandes entsprechend moduliert. Hierbei handelt es sich um eine Binary Phase Shift Keying (BPSK)-Modulation, es werden also abwechselnd Symbole „1“ und „-1“ einer bestimmten Symbolfrequenz aufgeprägt. Würde man die Fourierreihe bilden, so würden sich aufgrund der rechteckigen Form unendlich viele Fourier-Koeffizienten ergeben. Im Zusammenhang der Fourier-Transformation ergäben sich somit unendlich viele Subträger im Frequenzbereich. Da die Bandbreite aber begrenzt ist, werden lediglich die zwei gewünschten Subträger erzeugt. Die Signale haben außerdem eine festgelegte Zeitdauer [9].

### 2.3.2 Interpretation als BOC-Signal

In diesem Zusammenhang sei auf Binary Offset Carrier (BOC)-Signale hingewiesen. Bei den modernen Global Positioning System (GPS)-Signalen handelt es sich beispielsweise um diesen Typ [1, 13].

Die Modulation wird auch als Split-Spectrum-Modulation bezeichnet. Die eigentliche Sequenz wird dazu mit einer Sequenz bestehend aus den Werten 1 und  $-1$  multipliziert, die durch die Vorzeichen einer Sinus-/Cosinusschwingung gewonnen werden. Zur Klassifikation werden die Coderate  $f_c$  und die Subchip- bzw. Subträger-Frequenz  $f_s$  angegeben. Analytisch lässt es sich damit folgendermaßen beschreiben [13]:

$$\begin{aligned} s(t) &= c(t) \operatorname{sign} [\sin (2\pi f_s t)] \text{ mit} \\ c(t) &= \sum_k c_k h(t - kT_c), \end{aligned} \quad (2.30)$$

wobei  $c_k$  die Codesequenz ist und  $h(t) = 1$  für  $t \in [0, T_c)$  ( $T_c = \frac{1}{f_c}$ ). Für das hier verwendete Mehrträgersignal ist  $T_c$ , die Länge eines Codechips, dementsprechend die Dauer des Burstsignals. Die Subträgerfrequenz  $f_s$  entspricht der halben Symbolfrequenz, also die Frequenz, mit der die Sequenz  $\langle 1, -1 \rangle$  wiederholt wird. Das betrachtete Signal kann somit als BOC-Signal angesehen werden.

Diese Erkenntnis hilft bei der Bestimmung der für die CRLB benötigten RMS-Bandbreite. Wie in Gleichung 2.28 erkennbar, ist zur Berechnung neben der Bandbreite auch das LDS  $|S(f)|^2$  notwendig. Dieses ist für BOC-Signale durch den Ausdruck

$$|S(f)|^2 = f_c \cdot \left( \frac{\sin(\frac{\pi f}{f_c}) \sin(\frac{\pi f}{2f_s})}{(\pi f) \cos(\frac{\pi f}{2f_s})} \right)^2 \quad (2.31)$$

gegeben. Damit lässt sich die CRLB für das verwendete Signal schließlich berechnen.

# KAPITEL 3

---

## Signalerzeugung und Kanalsimulation

---

In diesem Kapitel wird zuerst die Signalerzeugung im Kontext der Simulation erläutert. Im Anschluss wird das angenommene Kanalmodell vorgestellt und die Implementierung der Kanalsimulation detailliert beschrieben.

### 3.1 Signalerzeugung

In Abschnitt 2.3 wurde das Mehrträgersignal bereits vorgestellt. In der Simulation wird nur das Basisbandsignal betrachtet. Dieses wird durch einige Parameter festgelegt und erzeugt. Benötigt werden die

- Signaldauer  $T$ ,
- Symbolfrequenz  $f_{symbol}$ ,
- Abtastfrequenz  $f_{sampling}$  sowie
- das Codemuster, das dem Signal aufgeprägt wird.

Wie schon erläutert, handelt es sich bei der Codesequenz hier ausschließlich um  $< 1, -1 >$ , um die Charakteristik mit zwei Subträgern herzustellen. Die Symboldauer bezieht sich dabei auf jedes einzelne Symbol, sodass das komplette Pattern die Länge  $\frac{2}{f_{symbol}}$  hat.

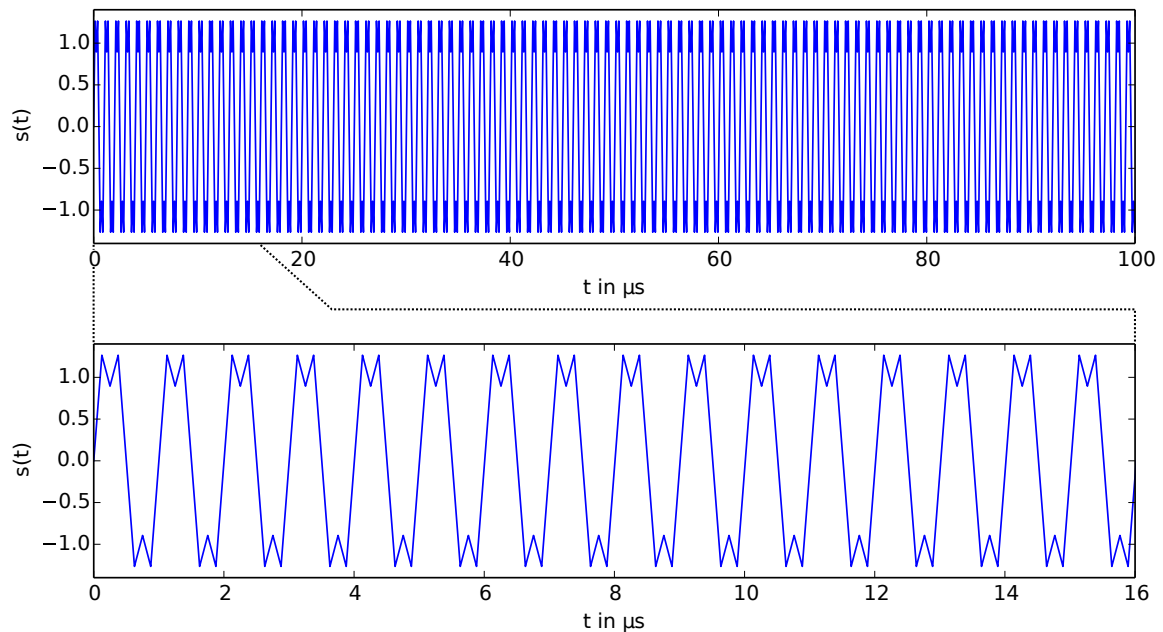
Da das Signal logischerweise digital repräsentiert und verarbeitet wird, wird es mit der Samplingfrequenz  $f_{sampling}$  abgetastet. Dabei ist darauf zu achten, dass das Nyquist-

Shannon-Abtasttheorem berücksichtigt wird. Mit der Subträgerfrequenz, welche der halben Symbolfrequenz entspricht, muss deshalb

$$f_{\text{sampling}} \geq 2 \cdot \frac{1}{2} f_{\text{symbol}} = f_{\text{symbol}} \quad (3.1)$$

gelten. Um Aliasing zu vermeiden, wird das Signal bandbegrenzt. Eine komplette Rekonstruktion des theoretischen rechteckförmigen Signals ist damit nicht mehr möglich.

Das erzeugte diskrete Signal besteht schließlich aus  $N = f_{\text{sampling}} \cdot T$  Samples. In



**Abbildung 3.1:** Erzeugtes Sendesignal komplett und gezoomt ( $f_{\text{symbol}} = 2.0 \text{ MHz}$ ,  $f_{\text{sampling}} = 8.0 \text{ MHz}$ ,  $T = 100 \mu\text{s}$ )

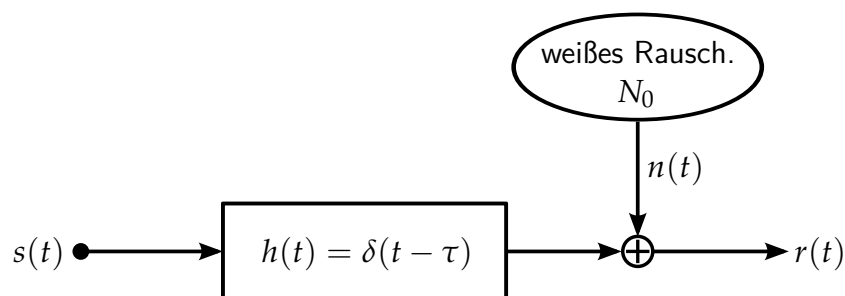
Abbildung 3.1 ist das erzeugte Signal für beispielhafte Parameter dargestellt. In diesem Fall wurde die Bandbegrenzung so gewählt, dass sich neben den beiden Hauptschwingungen bei  $\pm 1.0 \text{ MHz}$  zwei weitere Nebenkeulen bei  $\pm 3.0 \text{ MHz}$  befinden. Vernachlässigt man die Bandbegrenzung, so kommt es zu Aliasing, d. h. die Fortsetzung des Signals im Frequenzbereich wird eingefaltet, was unerwünschte Effekte mit sich bringt.

Führt man eine engere Bandbegrenzung durch, so bleiben im Frequenzbereich tatsächlich nur noch zwei Subträger bei  $\pm 1.0 \text{ MHz}$ . Dieses Signal entspricht einer reinen Sinusschwingung und wird im Folgenden ebenfalls verwendet. Es wird durch dieselben Argumente definiert wie das eben diskutierte BPSK-Signal. Als Frequenz des Sinus wird die halbe

Symbolfrequenz gewählt, um die gleichen Periodendauern zu gewährleisten und damit die Subträger an der richtigen Stelle zu erzeugen.

## 3.2 Kanalmodell

Da das Ziel der Algorithmen das Schätzen der Laufzeit ist, muss eine entsprechende Verzögerung des ausgesandten Signals modelliert werden, um sie letztlich schätzen und das Ergebnis mit der wahren Laufzeit vergleichen zu können. Abbildung 3.2 zeigt die zugrundeliegende Vorstellung.



**Abbildung 3.2:** Blockschaltbild zum angenommenen Kanalmodell

Im Grunde wird ein klassischer Additive White Gaussian Noise (AWGN)-Kanal angenommen. Das Sendesignal wird also um die Zeit  $\tau$  verzögert, bleibt aber beispielsweise unverzerrt. Um die diversen Rauscheinflüsse in der realen Umgebung zu modellieren, welche nach dem zentralen Grenzwertsatz gegen eine Gaußverteilung konvergieren, wird zudem weißes Gaußsches Rauschen  $n(t)$  mit der Rauschleistungsdichte  $N_0$  hinzuaddiert. Weitere Störursachen, wie z.B. Interferenzen oder Mehrwegeausbreitung, werden im Rahmen dieser Arbeit nicht betrachtet.

## 3.3 Kanalsimulation

Um das Kanalmodell zu implementieren, muss einerseits also die Zeitverschiebung umgesetzt und andererseits das Rauschen hinzugefügt werden. Letzteres ist einfach durchzuführen, indem man normalverteilte Zufallswerte in der Anzahl der Samples des Empfangssignals erzeugt und auf diese aufaddiert.

Die Umsetzung der Verzögerung bedarf hingegen einer genaueren Betrachtung. Theoretisch sollte das ideale Empfangssignal für die Dauer der Verzögerung  $\tau$  gleich 0 und

daran das Sendesignal „angehängt“ sein. Dies wurde auch zum Teil so implementiert, allerdings ist zu bedenken, dass das Signal in Form einer begrenzten Anzahl an Samples vorliegt. Somit kann man nur einzelne Samples gleich 0 setzen. Dies würde dazu führen, dass nur Verzögerungen simuliert werden können, die Vielfache des Abtastintervalls sind. Für  $f_{\text{sampling}} = 8.0 \text{ MHz}$  ergibt sich somit  $\tau_{\text{min}} = 125 \text{ ns}$ , was einer Distanz von 37.5 m entspricht. Das wäre selbstverständlich keineswegs zielführend, die implementierten Verfahren könnten so nicht getestet werden. Deshalb wird eine Möglichkeit benötigt, auch Verschiebungen im Subsamplebereich durchzuführen.

Ein diskretes Verzögerungsglied der Verzögerung  $D$  hat im  $z$ -Bereich die Übertragungsfunktion

$$H(z) = z^{-D}. \quad (3.2)$$

Da die Variable der  $z$ -Transformation  $z$  aber nur ganzzahlige Exponenten haben kann, wäre hiermit auch nur eine ganzzahlige Verzögerung realisierbar. Deshalb wird die Zeitdiskrete Fourier-Transformation (DTFT) betrachtet, indem  $z = e^{j\Omega}$  gesetzt wird:

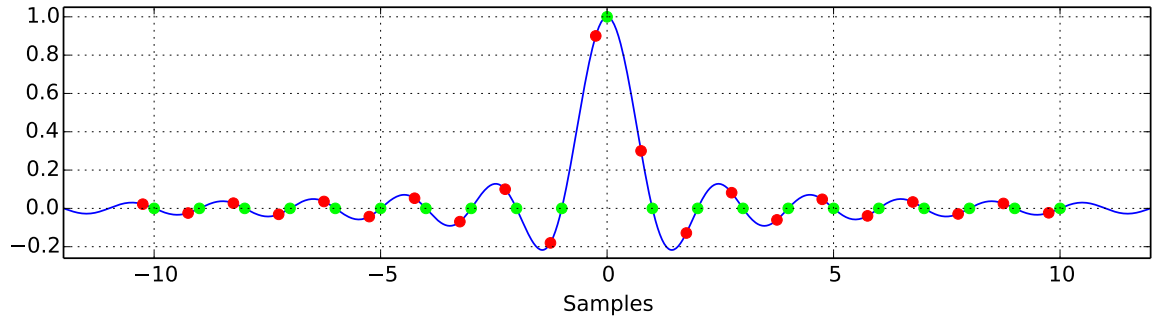
$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega D}. \quad (3.3)$$

$\Omega = 2\pi f T_{\text{sampling}}$  bezeichnet dabei die auf das Abtastintervall normierte Kreisfrequenz. Man erkennt, dass der Betrag konstant ist, es handelt sich um einen Allpass. Mithilfe der inversen DTFT erhält man für das Verzögerungsglied im Zeitbereich

$$h[k] = \text{sinc}[k - D]. \quad (3.4)$$

Die Impulsantwort eines idealen Fractional-Delay-Filters ist somit durch die versetzt abgetastete sinc-Funktion gegeben [3].

Für die Umsetzung der Kanalsimulation wurde die sinc-Funktion zunächst im Sampleraster abgetastet und links- und rechtsseitig abgeschnitten. Für eine Verzögerung von  $\tau = 0$  hat man somit Abtastwerte bei 0, 1, -1, 2, -2, ... Wie sich aus Abbildung 3.3 erkennen lässt, ist nur der Wert bei 0 in diesem Fall ungleich 0, sodass sich der Einheitsimpuls ergibt. Die Sendesequenz wird anschließend mit dieser Impulsantwort gefaltet, was das Sendesignal für  $\tau = 0$  richtigerweise unverändert lässt. Für eine wirkliche Verschiebung wird die sinc-Funktion nun entsprechend versetzt abgetastet. Faltet man das Sendesignal jetzt mit dieser Sequenz, so kommt es zu der gewünschten Verschiebung im Subsamplebereich.



**Abbildung 3.3:** Blau: kontinuierliche sinc-Funktion; grün: Abtastung für eine Verschiebung von 0; rot: Abtastung für eine Verschiebung von 0.25 Samples (entspricht  $r = 9.375$  m für  $f_{\text{sampling}} = 8.0$  MHz)

Wie weit die Samples der sinc-Funktion für eine bestimmte Verschiebung versetzt werden müssen ( $d_{\text{sub}}$ ), wird mittels

$$d_{\text{sub}} = f_{\text{sampling}} \cdot \tau - d_{\text{full}} \quad (3.5)$$

bestimmt, wobei  $d_{\text{full}}$  den Anteil der Verschiebung angibt, der durch reines Einfügen von Nullen ausgedrückt werden kann:

$$d_{\text{full}} = \lfloor f_{\text{sampling}} \cdot \tau \rfloor. \quad (3.6)$$

Mit zunehmender Abtastrate kann also ein größerer Anteil der Verzögerung durch Nullsamples dargestellt werden, der nicht-ganzzahlige Rest wird vom Tiefpass übernommen. Für eine eingestellte Distanz von beispielsweise 50 m und  $f_{\text{sampling}} = 8.0$  MHz würden somit 37.5 m durch Voranstellen einer 0 und die übrigen 12.5 m durch Faltung mit der entsprechend abgetasteten sinc-Funktion realisiert werden.

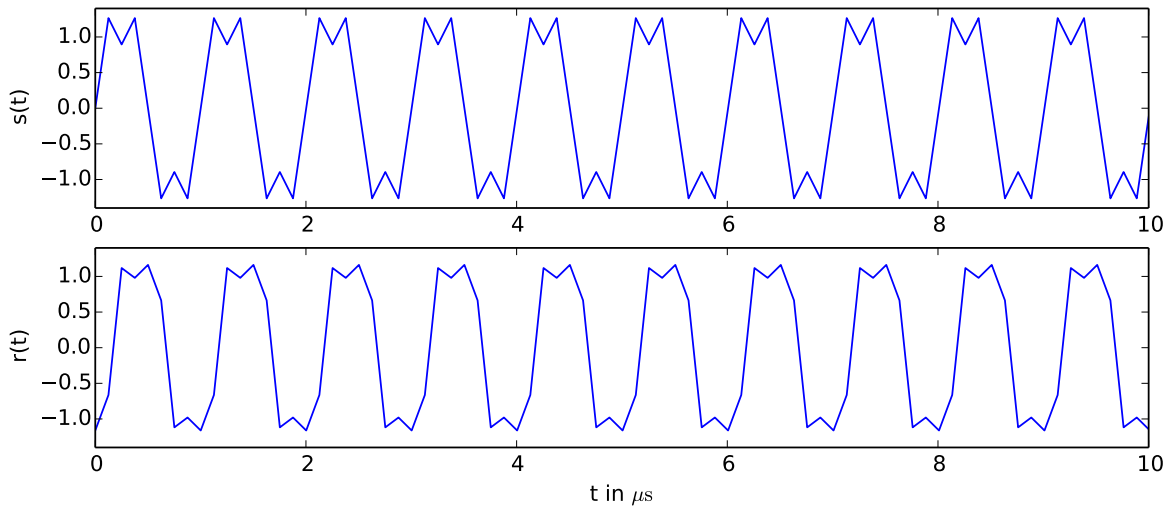
Bei der Evaluierung der noch zu implementierenden Schätzverfahren hat sich allerdings stets eine Abweichung von bis zu 0.9 m (mit der genannten Abtastfrequenz) bei bestimmten Distanzen eingestellt. Es hat sich gezeigt, dass sich der Fehler verringert, wenn die sinc-Funktion durch mehr Samples dargestellt wird. Die Ursache dieser Ungenauigkeiten liegt also im Abschneiden der sinc-Funktion nach einer gewissen Anzahl an Abtastwerten, was zum Gibbschen Phänomen führt. In [11] wird hierzu ein Verbesserungsvorschlag vorgestellt. Um die Auswirkungen des Gibbschen Phänomens zu reduzieren, wird die sinc-Funktion

mit einer speziellen Fensterfunktion multipliziert. Die Impulsantwort des Verzögerungsglieds hat damit die Form

$$h[k] = \frac{\cos\left(\frac{\pi(k-D)}{N}\right)}{\text{sinc}\left(\frac{k-D}{N}\right)} \text{sinc}[k-D] \text{ für } 0 \leq k < N. \quad (3.7)$$

$N$  gibt hierbei die Anzahl an Samples an.

Das durch Faltung mit dieser Impulsantwort erhaltene Empfangssignal ist in Abbildung 3.4 dargestellt. Zusätzlich wird dafür gesorgt, dass der ganzzahlige Anteil der Verschiebung



**Abbildung 3.4:** Oben: Sendesignal ( $f_{\text{symbol}} = 2.0 \text{ MHz}$ ,  $f_{\text{sampling}} = 8.0 \text{ MHz}$ ,  $T = 100 \mu\text{s}$ );  
unten: durch Fractional-Delay-Filter erzeugtes Empfangssignal,  $r = 50 \text{ m}$

nicht mehr mit Nullen aufgefüllt wird, sondern eine zyklische Verschiebung statt findet, d. h. mit der Fortsetzung des Signals selbst aufgefüllt wird. Dies soll weitere mögliche Effekte durch fehlende Periodenkompatibilität verhindern.

Für den Fall des sinusförmigen Sendesignals lässt sich das Empfangssignal leichter erzeugen. Da die Sinusfunktion als solche vorgegeben ist, lassen sich auch Zwischenwerte bestimmen. Um die Verschiebung durchzuführen, wird die Sinusfunktion direkt versetzt abgetastet. Etwaige andere unerwünschte Einflüsse durch das Fractional-Delay-Filter können in diesem Fall somit ausgeschlossen werden.



# KAPITEL 4

---

## Implementierung der Schätzalgorithmen

---

In Abschnitt 2.1 wurden die zu implementierenden Verfahren bereits allgemein vorgestellt. Gemäß der Gegebenheiten durch das verwendete Mehrträgersignal in der im vorherigen Kapitel vorgestellten Simulationsumgebung wurden die Schätzalgorithmen entsprechend umgesetzt. Die genaue Funktionsweise und Implementierung wird in diesem Kapitel beschrieben.

### 4.1 Umsetzung der Korrelation

Um die Korrelation entsprechend auswerten zu können, muss diese zuerst berechnet werden. Hierbei wurde mit zyklischen Korrelationen gearbeitet. Um diese berechnen zu können, muss von einer zyklischen Fortsetzung (zumindest eines) der Signale ausgegangen werden. Dafür wird eine Kopie des Sendesignals  $s[k]$  erzeugt und die Korrelation mit dem Empfangssignal  $r[k]$  berechnet. Aufgrund der Betrachtung auf diskreter Sampleebene werden die Signale im Folgenden allgemein mit eckigen Klammern und der diskreten Zeitvariablen  $k$  notiert. Die Vorschrift für die Korrelation nach Gleichung 2.1 lautet damit in diskreter Form

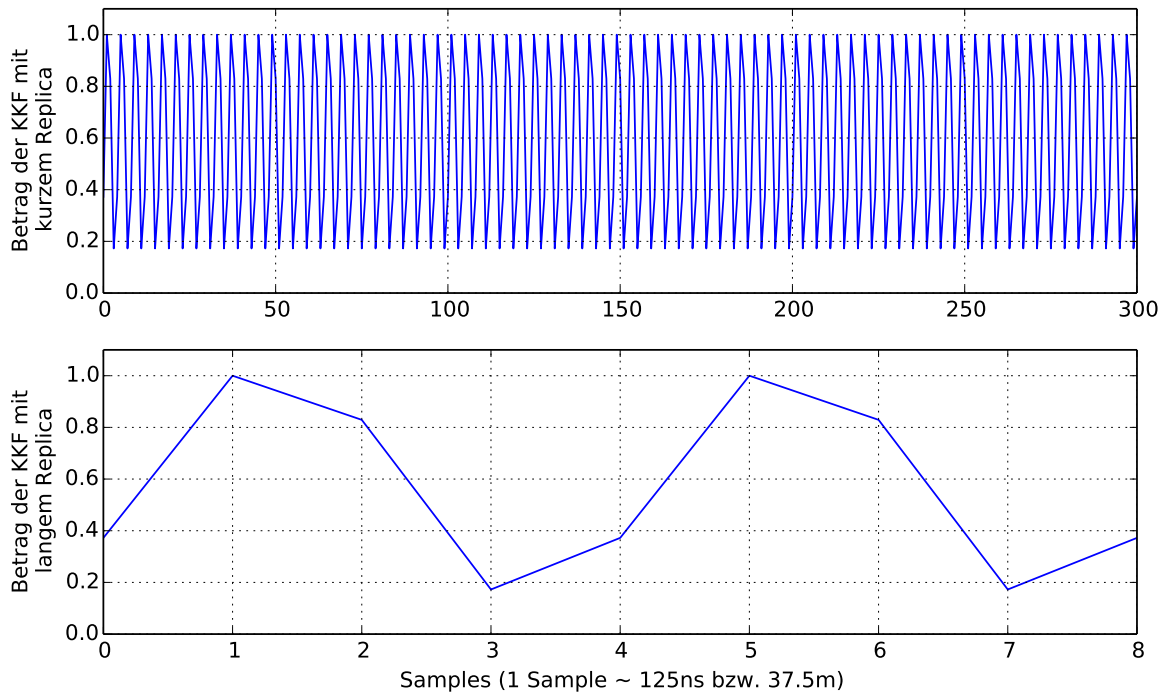
$$R_{rs}[\kappa] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r[k]s[k + \kappa]. \quad (4.1)$$

Dabei werden hier allerdings nur Werte berechnet, sofern sich beide Signale vollständig überlappen. Die rampenartige Gestalt einer vollständigen, linearen Korrelation wird dadurch vermieden. Anschließend wird der Betrag gebildet.

Wie die Korrelation letztlich genau aussieht, bzw. wie lang sie ist, hängt von den Längen der beiden Sequenzen ab. Mit der Sampleanzahl von Sendesignalreplica  $N_s$  und Empfangssignal  $N_r$  ergeben sich für die quasi-zyklische Korrelation

$$N_{corr} = |N_s - N_r| + 1 \quad (4.2)$$

Samples. Für die in Kapitel 3.3 angegebenen Parameter und einer simulierten Distanz von 50 m sind in Abbildung 4.1 zwei Korrelationen dargestellt.



**Abbildung 4.1:** Zyklische KKF zwischen Empfangssignal und Sendesignalreplica für die erwähnten Parameter bei einer Distanz von 50 m. Oben mit kürzerem, unten mit längerem Replica als die Empfangssequenz.

Die obere wurde durch Korrelation mit einem Replica erzeugt, das aus 500 Samples besteht und damit kürzer ist als das Empfangssignal. Für die untere Korrelation wurde eine Kopie des Sendesignals erzeugt, die exakt zwei Symbolperioden länger ist als das Empfangssignal, sodass sich eine Periode der zyklischen Korrelation ergibt. In den folgenden Betrachtungen wurde zumeist mit dem längeren Replica korreliert. Das Ziel der anderen Variante ist die Robustheit gegenüber eines möglichen Frequenzversatzes, worauf in Abschnitt 5.3.1 eingegangen wird. Die Korrelationssequenz wird im Folgenden kurz mit  $R[k]$  bezeichnet.

Ziel ist nun, die Position des (ersten) Maximums möglichst genau zu bestimmen und somit die Laufzeit des empfangenen Signals zu schätzen. Um das Ergebnis in einer sinnvollen Einheit anzugeben, muss schließlich noch vom geschätzten Samplewert  $k_{\hat{r}}$  in z.B. Meter umgerechnet werden:

$$\hat{r} = \frac{k_{\hat{r}} \cdot c_0}{f_{\text{sampling}}} \quad (4.3)$$

Dieser Wert wird dann zurückgegeben.

#### 4.1.1 Einfache Maximumsuche

Eine erste, leicht nachvollziehbare Herangehensweise ist es, die Abtastwerte zu durchlaufen und die Position desjenigen zu bestimmen, der den größten Wert hat:

$$k_{\hat{r}} = \arg \max(R[k]). \quad (4.4)$$

Diese Stelle wird dann als Position des wahren Maximums angenommen und unter Berücksichtigung der Samplingfrequenz zurückgegeben. Für den Fall, dass die Korrelation mehrere Perioden aufweist, wird die Periode in Samples gemäß

$$T_{\text{corr}} = 2 \cdot \frac{f_{\text{sampling}}}{f_{\text{symbol}}} \quad (4.5)$$

berechnet. Die Sequenz wird daraufhin in Abschnitte dieser Länge unterteilt und jeweils nach dem Maximum gesucht. Anschließend wird über die detektierten Stellen gemittelt.

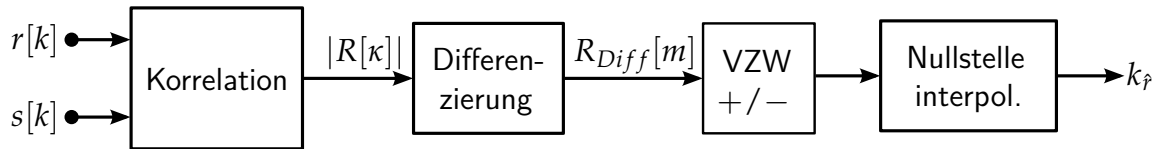
Im Falle der in Abbildung 4.1 gezeigten Korrelationen hat das Sample an der Stelle  $k = 1$  den größten Wert. Es wird somit als Maximum detektiert und mit Gleichung 4.3 ergibt sich ein Schätzwert von  $\hat{r} = 37.5 \text{ m}$ .

#### 4.1.2 Differenzierung und lineare Interpolation

Wie im folgenden Kapitel noch genauer betrachtet wird, sind die Schätzwerte aus der einfachen Maximumsuche größtenteils sehr ungenau, weshalb ein Verfahren nötig ist, mit dem sich Maxima finden lassen, die zwischen zwei Samples liegen. Das in Abschnitt 2.1.1 erwähnte Upsampling wird hier nicht betrachtet, da es im Grunde einer Erhöhung der Abtastfrequenz gleich kommt. Stattdessen wird eine Möglichkeit betrachtet, um die

gesampelte Sequenz an der interessanten Stelle zu interpolieren und damit das Maximum anzunähern.

Wie beispielsweise in [8] angesprochen wird, kann dies mithilfe einer nach unten geöffneten Parabel geschehen, die entsprechend der drei Abtastwerte um das Maximum eingepasst wird. Eine ähnliche Variante wurde hier implementiert. Die Idee ist dabei, dass sich das Maximum einer Funktion durch Suchen der Nullstelle ihrer Ableitung berechnen lässt.



**Abbildung 4.2:** Blockschaltbild zur Distanzschätzung durch Korrelation mit Interpolation

Wie aus dem Blockschaltbild in Abbildung 4.2 ersichtlich wird, werden also direkt nach der Korrelation die Differenzen je zweier benachbarter Samples berechnet. Diese Differenzfunktion  $R_{diff}[m]$  entspricht der abgetasteten Ableitung. Sie beinhaltet ein Sample weniger als die Korrelation. Anschließend wird innerhalb dieser Werte nach Vorzeichenwechseln von positiv nach negativ gesucht. Zwischen diesen Samples muss somit eine Nullstelle liegen, die mit einem Maximum der Korrelation in Beziehung steht.

Die Annahme, dass die Nullstelle mittig zwischen den betrachteten Abtastwerten liegt, würde das gleiche Ergebnis wie die einfache Maximumsuche liefern. Um näher an das wahre Maximum heranzukommen, wird nun eine Gerade durch die beiden Differenzsamples gelegt. Mithilfe der Koordinaten dieser Punkte lässt sich die Position des Nulldurchgangs  $z$  der Gerade bestimmen:

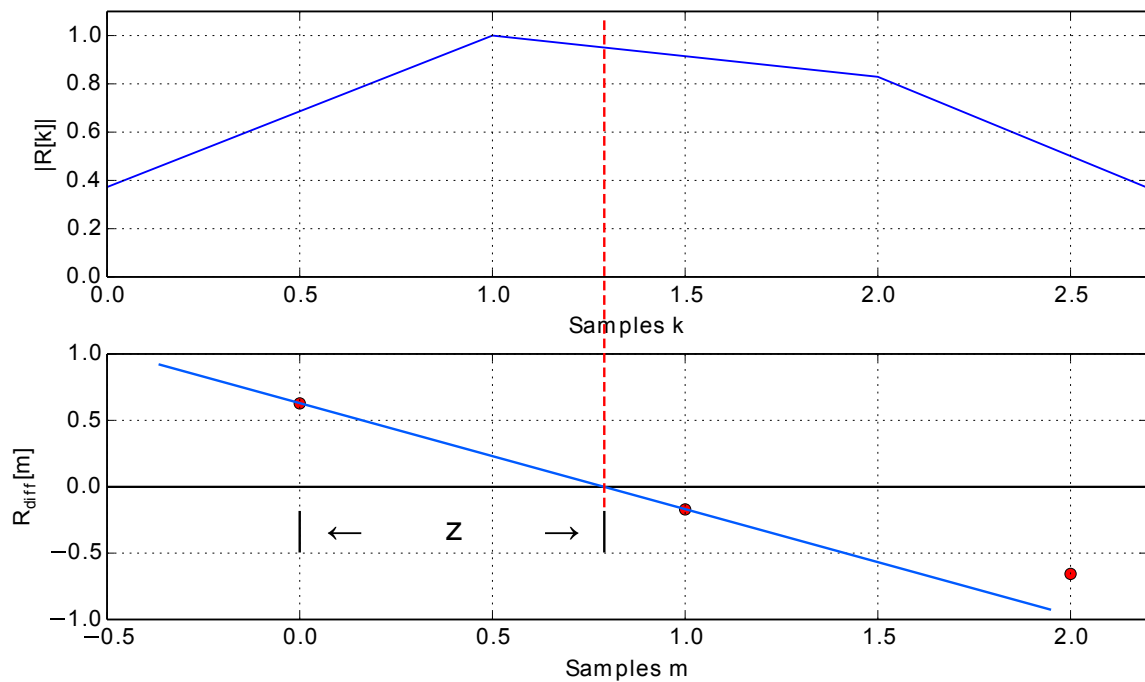
$$\frac{R_{diff}[m_l]}{R_{diff}[m_l] - R_{diff}[m_r]} = \frac{z}{1} \implies z = \frac{R_{diff}[m_l]}{R_{diff}[m_l] - R_{diff}[m_r]}, \quad (4.6)$$

wobei  $m_l$  bzw.  $m_r$  die Positionen der Samples links und rechts der Nullstelle bezeichnen.

Sobald man diese Stelle berechnet hat, kann man die neue Schätzung für das Maximum angeben:

$$k_{\hat{r}} = m_l + z + 0.5. \quad (4.7)$$

Der Wert 0.5 muss immer hinzuaddiert werden, da die Differenzsamples schließlich immer zwischen zwei Samples der KKF gebildet werden und deshalb nicht identisch sind (aufgrund dessen wurde für die Differenzfunktion auch ein anderes Symbol für die Veränderliche



**Abbildung 4.3:** Betroffene Samples der KKF sowie die zugehörigen Differenzen. Die eingezeichnete Gerade interpoliert die Nullstelle der Ableitung und somit das Maximum.

gewählt). Abbildung 4.3 veranschaulicht das Prinzip. Die so berechnete Schätzung liegt für das bekannte Beispiel bei 48.23 m.

Der Spezialfall, dass ein Wert der abgetasteten Ableitung direkt gleich 0 ist, darf natürlich auch nicht vergessen werden. Dies vereinfacht das Vorgehen dann allerdings, da diese Position direkt übernommen werden kann.

Die ermittelte Stelle wird schließlich noch umgerechnet und zurückgegeben. Im Falle einer längeren Korrelation mit mehreren Peaks muss wieder über die berechneten Werte gemittelt werden.

### 4.1.3 Erweiterung durch Kombination

Eine Erweiterung dieses Vorgehens besteht darin, die beiden erläuterten Verfahrensweisen zu kombinieren. Dies bietet sich im Falle von Korrelationen mit mehreren Maxima an.

Dazu wird zuerst die einfache Maximumsuche durchgeführt, um die groben Positionen festzustellen. Danach wird nur um diese interessanten Punkte herum differenziert und linearisiert, um die Ergebnisse zu verbessern.

Es handelt sich dabei um ein Implementierungsdetail, die Schätzung hat denselben Wert wie bei der zuvor besprochenen, kompletten Differenzierung. Allerdings werden hier einige Rechenschritte gespart.

## 4.2 Auswertung der Phasendifferenz

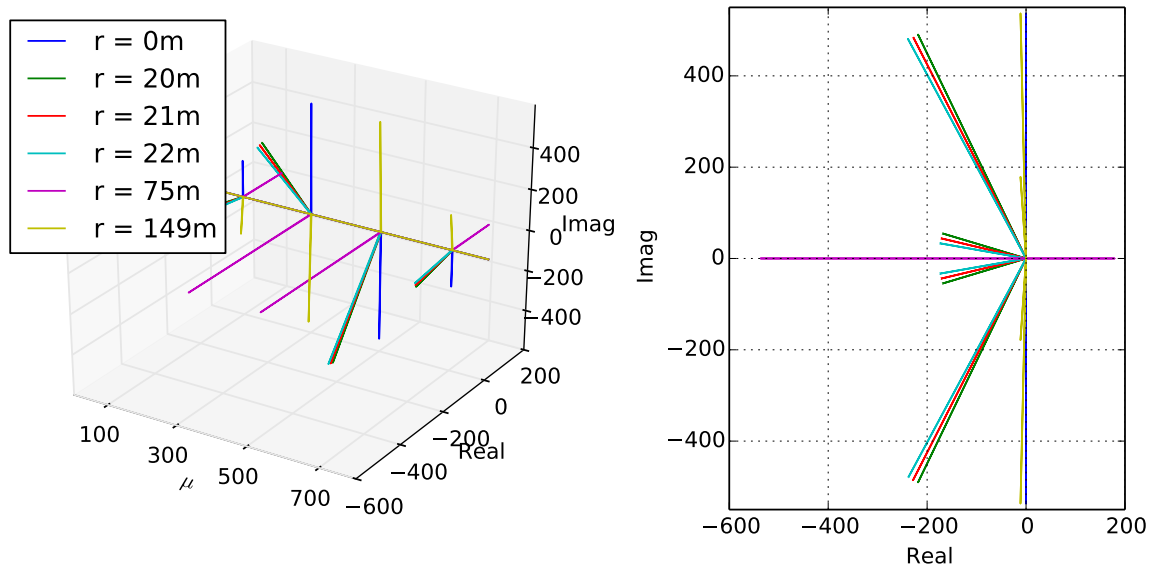
Das Prinzip der Auswertung der Phasendifferenz wurde in Abschnitt 2.1.2 vorgestellt. Durch die Mehrträgercharakteristik eignet sich das verwendete Signal gut für diese Methode. Das Ziel ist zunächst, die Phase der beiden Subträger im Empfangssignal zu bestimmen.

### 4.2.1 Bestimmung der Phasendifferenz

Dazu wird das Signal mittels DFT bzw. Fast Fourier Transformation (FFT) in den Frequenzbereich transformiert

$$R[\mu] = \text{DFT}\{e[k]\}. \quad (4.8)$$

Das so berechnete Spektrum weist an zwei Stellen hohe Peaks auf. Diese repräsentieren die Subträger. In Abbildung 4.4 ist das DFT-Spektrum des Empfangssignals für verschiedene



**Abbildung 4.4:** Durch FFT berechnete Spektren des Empfangssignals für verschiedene Distanzen. Frequenzbin 400 entspricht 0 Hz. Links der 3D-Plot, rechts reine Betrachtung der Phasen.

Distanzen dreidimensional dargestellt. Die größten Werte bei den Frequenzbins 300 und 500

entsprechen bei den gewählten Parametern Frequenzen von  $-1$  MHz und  $1$  MHz, es handelt sich also um die Subträger. Die Anteile bei  $\mu = 100$  und  $\mu = 700$  sind auf die rechteckige Gestalt des BOC-Signals zurückzuführen. Die theoretisch unendliche Anzahl der weiteren Harmonischen ist aufgrund der Bandbegrenzung nicht vorzufinden (s. Abschnitt 3.1).

Anhand der Frontalansicht ist gut zu erkennen, dass die betrachteten Frequenzbins betragsmäßig gleich bleiben, sich die Phase aber sukzessiv in die jeweils entgegengesetzte Richtung weiter dreht. Bei einer eingestellten Distanz von  $r = 149$  m ist die Phasendifferenz fast wieder wie zu Beginn, was das Ende des Eindeutigkeitsbereichs markiert.

In der implementierten Funktion wird das berechnete Spektrum zuerst in zwei Abschnitte unterteilt (die negativen und positiven Frequenzanteile). In beiden Teilarrays muss sich somit jeweils ein Subträger befinden. Diese lassen sich durch eine Maximumsuche feststellen.

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \arg \max(R[\mu]) \text{ für } 0 \leq \mu < \lfloor \frac{\mu_{max}}{2} \rfloor \\ \mu_2 &= \arg \max(R[\mu]) \text{ für } \lfloor \frac{\mu_{max}}{2} \rfloor \leq \mu \leq \mu_{max}\end{aligned}\tag{4.9}$$

Da das Ergebnis der FFT als komplexwertiges Array vorliegt, kann die Phase an den interessanten Stellen einfach bestimmt werden.

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \arg(R[\mu_1]) \\ \Phi_2 &= \arg(R[\mu_2])\end{aligned}\tag{4.10}$$

Im Anschluss muss schließlich die Phasendifferenz der beiden Subträger berechnet werden, welche dann ausgewertet wird.

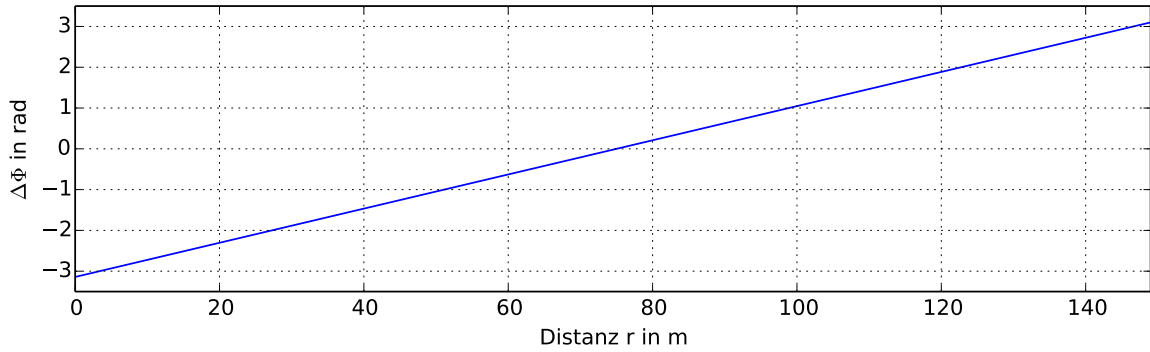
$$\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2\tag{4.11}$$

Die so berechnete Phasendifferenz ist in Abbildung 4.5 für verschiedene Distanzen im Eindeutigkeitsbereich aufgetragen.

Wie sich zeigt, besteht ein linearer Zusammenhang, der ausgenutzt wird, um auf die Distanz bzw. Laufzeit rückzuschließen. Wie in [4, 9] erwähnt, geschieht dies durch folgenden Zusammenhang:

$$\hat{r} = \frac{\Delta\Phi \cdot c_0}{2\pi \cdot \Delta f}.\tag{4.12}$$

Dieser muss allerdings leicht konkretisiert werden. Im Grunde muss ein Ausdruck für die Gerade gefunden werden, um der bestimmten Phasendifferenz einen Schätzwert für die Laufzeit zuzuweisen. Die Steigung ist durch  $2\pi \cdot \Delta f$  gegeben, wobei  $\Delta f$  im Idealfall gleich



**Abbildung 4.5:** Verlauf der Phasendifferenz für Distanzen im Eindeutigkeitsbereich

$f_{symbol}$  ist. Praktisch muss aber der tatsächliche Frequenzabstand der beiden Maxima herangezogen werden. Zusammen mit dem Ordinatenabschnitt  $\Delta\Phi_0$  erhält man für die gesuchte Distanz

$$\hat{r} = \frac{(\Delta\Phi - \Delta\Phi_0) \cdot c_0}{2\pi \cdot \Delta f}. \quad (4.13)$$

Bei  $\Delta\Phi_0$  handelt es sich um einen Referenzwert für die Distanz  $r = 0$ , d.h. es wird die Phasendifferenz der Subträger im Sendesignal berechnet. Dies ist nur in der Simulation von Bedeutung, im realen System werden die Differenzen der Ankunftszeitpunkte ausgewertet, sodass kein Wissen über den Sender (Synchronisation) notwendig ist. Somit sind alle Variablen bekannt und die Laufzeit/Distanz kann geschätzt werden.

#### 4.2.2 Erweiterung durch Matched-Filter

Die vorgestellte Herangehensweise lässt sich durch ein weiteres Element verbessern. Dem beschriebenen Ablauf wird dazu ein sogenanntes Matched-Filter vorausgeschaltet.

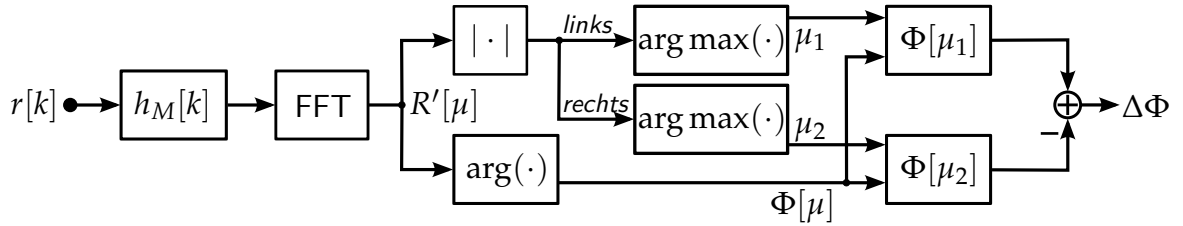
Ein Matched-Filter, auch bekannt als Korrelationsfilter, optimiert das SNR und hat die Impulsantwort

$$h_M(t) = \gamma g^*(T_d - t) \quad (4.14)$$

mit beliebigem, konstantem Faktor  $\gamma$ , der Zeitverschiebung  $T_d$  (für Kausalität) und dem Sendeimpuls  $g(t)$ . Das Filter ist also signalangepasst.

Das Blockschaltbild in Abbildung 4.6 zeigt schließlich den kompletten Ablauf der Laufzeitschätzung über die Phasendifferenz. Das Empfangssignal wird somit zunächst gefiltert, der in Gleichung 4.14 vorkommende Sendeimpuls entspricht dem Sendesignal. Das Ausgangssi-





**Abbildung 4.6:** Blockschaltbild zur Bestimmung der Phasendifferenz inkl. Matched-Filter

gnal wird danach mittels DFT transformiert und die Phasendifferenz wie zuvor erläutert berechnet und ausgewertet, was die Schätzung für die Distanz liefert.

### 4.3 Anwendung von MUSIC und ESPRIT

Die beiden Subraum-Verfahren MUSIC und ESPRIT wurden in Abschnitt 2.1.3 allgemein auf Basis eines Mehrwegekanalmodells vorgestellt. Da Mehrwegeausbreitung hier nicht betrachtet wird und das verwendete Signal eine besondere Charakteristik besitzt, ergeben sich einige Anpassungen und Vereinfachungen bei der konkreten Implementierung.

Auf eine Schätzung der Kanalübertragungsfunktion gemäß Gleichung 2.8 kann verzichtet werden. Da es sich um ein Zweitonsignal handelt, ersetzt das Auswählen der entsprechenden Frequenzen die Kanalschätzung. Deshalb kann direkt auf Basis des Empfangssignals gearbeitet werden. Auch bei Anwendung der Algorithmen wird also nun die Zweitoncharakteristik ausgenutzt und somit die Phasendifferenz bestimmt. Allerdings geschieht dies nun wie allgemein erläutert durch Bestimmung von Signal- und Rauschraum.

Dazu wird zunächst die Kovarianzmatrix benötigt, die Ausgangspunkt für das weitere Verfahren ist. Dafür muss das Spektrum des Empfangssignals berechnet werden. Im Unterschied zur Phasendifferenz aus Abschnitt 4.2 wird hier aber nicht nur eine FFT durchgeführt. Stattdessen werden jetzt mehrere FFTs von kürzeren Ausschnitten des Empfangssignals

berechnet. Die Anzahl der Samples  $N$  ist gleich einem Vielfachen der Signalperiode, sodass man

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \begin{bmatrix} S_0[\mu] & S_1[\mu] & \cdots & S_{M-1}[\mu] \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} S_0[0] & S_1[0] & \cdots & S_{M-1}[0] \\ S_0[1] & S_1[1] & \cdots & S_{M-1}[1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_0[N-1] & S_1[N-1] & \cdots & S_{M-1}[N-1] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.15)$$

erhält. Die Anzahl  $M$  der sich ergebenden FFTs  $S_m[\mu]$  hängt von der Länge der Empfangssequenz und  $N$  ab. Der Grundgedanke der Teilspektren ist dabei, dass die Information des Nutzsignals (also wie weit die Frequenzbins gegeneinander verdreht sind) in jeder Periode gleich ist und sich die Teilsequenzen somit nur aufgrund des Rauschens unterscheiden. Im Anschluss werden diejenigen Frequenzbins selektiert, bei denen sich die beiden Subträger befinden müssen. Diese Stellen ergeben sich aus

$$\mu_{1/2} = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \pm \left\lfloor \frac{f_{symbol} \cdot N}{2 \cdot f_{sampling}} \right\rfloor, \quad (4.16)$$

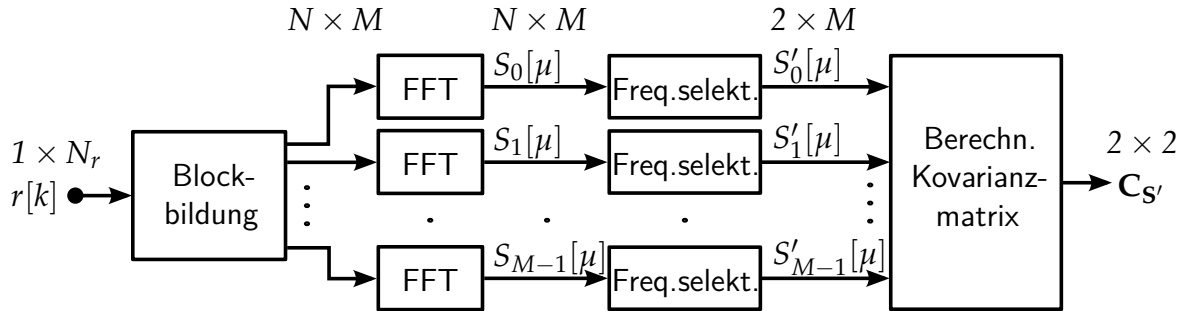
wobei die Frequenzbins nach aufsteigender Frequenz sortiert sind. Alternativ kann auch wieder nach den beiden Maxima im Betragsspektrum gesucht werden, wie bei der reinen Phasendifferenz beschrieben. Somit ergibt sich die Matrix

$$\mathbf{S}' = \begin{bmatrix} S_0[\mu_1] & S_1[\mu_1] & \cdots & S_{M-1}[\mu_1] \\ S_0[\mu_2] & S_1[\mu_2] & \cdots & S_{M-1}[\mu_2] \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Daraus wird die Kovarianzmatrix

$$\mathbf{C}_{\mathbf{S}'} = \frac{1}{2} \mathbf{S}' \mathbf{S}'^H \quad (4.18)$$

berechnet, welche somit die Dimension  $2 \times 2$  hat. Anschließend werden ihre Eigenwerte  $\lambda_{1,2}$  und Eigenvektoren  $u_{1,2}$  bestimmt. Wie in Abschnitt 2.1.3 erläutert, bilden die  $L$  größten Eigenvektoren eine Basis für den Signalraum, die restlichen eine Basis für den Rauschraum. Da sich in diesem Fall nur zwei Eigenwerte/-vektoren ergeben, vereinfacht sich dieser Schritt. Der Eigenvektor  $\mathbf{u}_s$  des größeren Eigenwertes zeigt direkt in die Richtung des Nutzsignals,

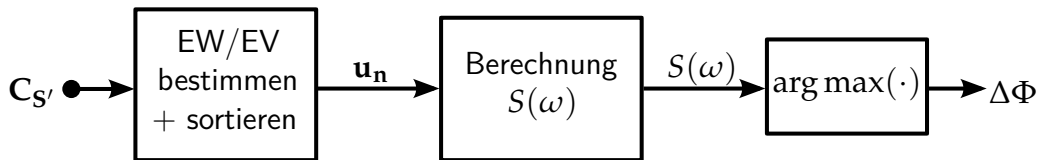


**Abbildung 4.7:** Blockschaltbild zur Berechnung der Kovarianzmatrix für MUSIC und ESPRIT

der Eigenvektor  $\mathbf{u}_n$  des kleineren Eigenwertes steht auf dem anderen orthogonal und zeigt in Richtung des Rauschens.

Die Berechnung der Kovarianzmatrix, welche Ausgangspunkt für beide Algorithmen ist, ist in Abbildung 4.7 nochmals zusammenfassend dargestellt. Darin wird nochmals deutlich, dass die DFT-Spektren von kurzen Blöcken aus dem Sendesignal berechnet und anschließend die relevanten Frequenzen selektiert werden. Zum besseren Verständnis wurden zusätzlich die Dimensionen der Signale nach jedem Schritt notiert.

#### 4.3.1 Implementierung von MUSIC

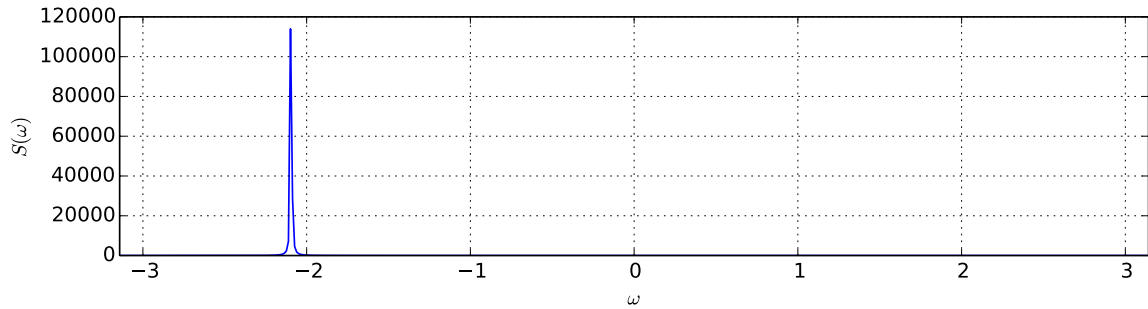


**Abbildung 4.8:** Blockschaltbild zum MUSIC-Algorithmus

Der weitere Verlauf für den MUSIC-Algorithmus ist in Abbildung 4.8 zu sehen. Zunächst muss also der zum Rauschen gehörige Eigenvektor der Kovarianzmatrix bestimmt werden, mithilfe dessen das Pseudospektrum  $S(\omega)$  erzeugt werden kann. Dazu werden für  $\omega \in [-\pi; \pi)$  Werte gemäß Gleichung 2.14 berechnet, hier also mittels

$$S(\omega) = \frac{1}{\|\mathbf{u}_n^H \mathbf{v}(\omega)\|^2}, \quad (4.19)$$

wobei  $\mathbf{v}(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & e^{-j\omega} \end{bmatrix}^T$  gilt. An dieser Stelle sei auch angemerkt, dass die Matrix  $\mathbf{V}$  hier nur aus diesem einen Spaltenvektor besteht, da nur ein Pfad existiert. Die Länge 2 korrespondiert mit der letztlichen Länge der FFTs, nachdem die Frequenzbins der Subträger selektiert wurden.



**Abbildung 4.9:** MUSIC-Spektrum für  $r = 25$  m

Das resultierende MUSIC-Spektrum hat genau ein Maximum, das dann gesucht und dessen Position bestimmt wird. So erhält man schließlich  $\omega_D$ . Für den absoluten Wert ist wieder das Subtrahieren eines Referenzwerts nötig. Die zu schätzende Laufzeit ergibt sich schließlich wie bei der reinen Phasendifferenzauswertung nach Gleichung 4.13.

#### 4.3.2 Implementierung von ESPRIT

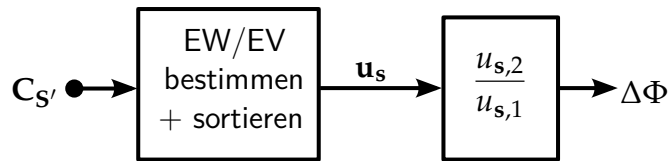
Der ESPRIT-Algorithmus arbeitet direkt auf dem Signalraum. Zuerst muss geklärt werden, wie die beiden Teilspektren erzeugt werden. Da  $\mathbf{V}$  von vornherein nur zwei Werte beinhaltet, gibt es nur die Möglichkeit, jeweils einen herauszuziehen. Die Auswahlmatrizen (s. Gleichung 2.15) lauten dementsprechend  $\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$  und  $\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ , sodass jeweils der erste bzw. zweite Eintrag ausgewählt wird. Die Matrix  $\mathbf{\Omega}$  aus Gleichung 2.16 und somit auch die dazu ähnliche Matrix  $\mathbf{\Psi}$  entsprechen in diesem Fall einem skalaren, komplexen Faktor  $\Psi$ , da nur ein Pfad angenommen wird und somit nur ein  $\omega$  gesucht wird. Mit  $\mathbf{J}_2 \mathbf{u}_s = u_{s,2}$  und  $\mathbf{J}_1 \mathbf{u}_s = u_{s,1}$  vereinfacht sich die Bestimmung dieses Faktors aus Gleichung 2.18 zu

$$\Psi = \frac{u_{s,2}}{u_{s,1}}. \quad (4.20)$$

Da es sich nicht mehr um eine Matrix handelt, entfällt die Eigenwertberechnung und es kann direkt die Laufzeit angegeben werden

$$\tau = \frac{-\arg(\Psi) - \Delta\Phi_0}{2\pi \cdot f_{symbol}}. \quad (4.21)$$

Die Phasendifferenz und somit die Laufzeit lässt sich also direkt aus dem zum Signalraum



**Abbildung 4.10:** Blockschaltbild zum ESPRIT-Algorithmus

gehörigen Eigenvektor bestimmen, was auch aus Abbildung 4.10 hervorgeht. Der ESPRIT-Algorithmus ist in diesem speziellen Anwendungsfall somit einfach anzuwenden und bietet Vorteile, auf die in Kapitel 5 eingegangen wird.

Der in der Gleichung auftretende Referenzwert für die Phasendifferenz ist erneut nötig, da die Träger bei den verwendeten Signalen bereits im Sendesignal zueinander verdreht sind. Im realen System wäre es sinnvoll, die Signale bereits vor Berechnung der Kovarianzmatrix mit entsprechenden Drehfaktoren zu multiplizieren, durch die beispielsweise auch Phasendrehungen aufgrund der Empfangsfilter rückgängig gemacht werden könnten. Die Beachtung des Referenzwerts im letzten Schritt wäre dadurch nicht mehr nötig.

# KAPITEL 5

---

## Evaluierung der Schätzverfahren

---

Um die Qualität der umgesetzten Algorithmen zur Laufzeitschätzung bewerten zu können, wurden jeweils Simulationen unter unterschiedlichen Bedingungen durchgeführt. Zunächst werden die Ergebnisse für den rauschfreien Fall betrachtet und Auffälligkeiten erklärt. Anschließend wird die Performance für additives weißes Gaußsches Rauschen bei unterschiedlichen Signal-zu-Rausch-Verhältnissen untersucht und mit der CRLB verglichen, welche für das verwendete BOC-Signal spezifiziert wird. Zudem wird der Einfluss eines Frequenzversatzes untersucht.

Sofern nicht anders beschrieben, werden folgende Testparameter angenommen, die auch bisher schon verwendet wurden:

Parameter	Symbol	Wert
Symbolfrequenz	$f_{symbol}$	2.0 MHz
Abtastfrequenz	$f_{sampling}$	8.0 MHz
Signaldauer	$T$	100 $\mu$ s
Distanz	$r$	0 m - 149 m (1 m-Schritte)

**Tabelle 5.1:** Parameter für die durchgeführten Simulationen

## 5.1 Rauschfreier Fall

Um herauszufinden, wie nah die Schätzergebnisse an die wahren Distanzen herankommen, ob es einen Bias oder andere Auffälligkeiten gibt, wurden für die Verfahren Tests für Distanzen im Eindeutigkeitsbereich durchgeführt. Dazu wurde die Signalausbreitung von 0 m bis 149 m im Abstand von 1 m simuliert und anschließend der Fehler

$$\epsilon = \hat{r} - r \quad (5.1)$$

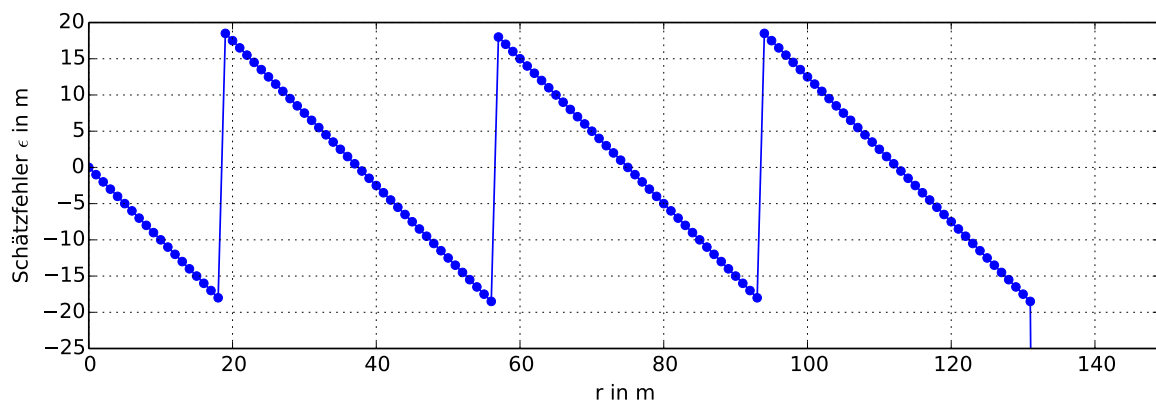
aufgetragen. Es geht zunächst um die reine Laufzeitinformation, die sich aus dem Empfangssignal im Bestfall ziehen lässt. Deshalb wird die Rauschleistung hier gleich 0 gesetzt, sodass es sich bei der Kanalsimulation um eine reine Verzögerung handelt.

### 5.1.1 Korrelation

Bei Auswertung der Korrelation zeigen sich je nach Verfahren deutliche Unterschiede bei den Schätzfehlern. Diese werden im Folgenden aufgezeigt und erläutert.

#### 5.1.1.1 Einfache Maximumsuche

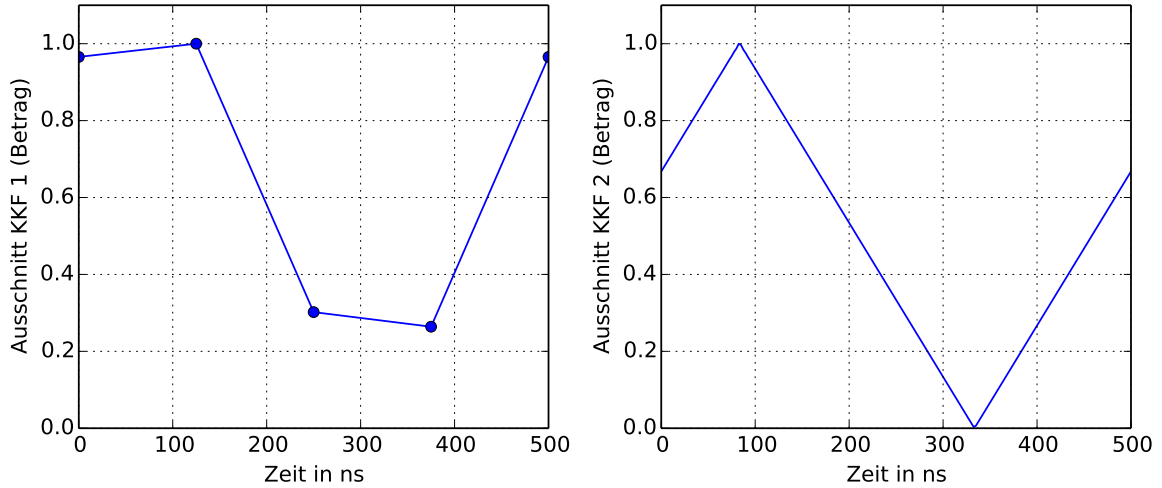
Das simple Verfahren der samplebasierten Maximumsuche weist große Abweichungen der geschätzten Entfernung auf, wie in Abbildung 5.1 zu sehen ist. Wie man erkennt,



**Abbildung 5.1:** Schätzfehler für verschiedene Distanzen bei einfacher Maximumsuche

hat der Fehler eine regelmäßige Form. Die maximale Abweichung beträgt 18.75 m, die Periode 37.5 m. Ruft man sich ins Gedächtnis, wie der Algorithmus vorgeht, so ist diese

Fehlerform gut verständlich. Durch das Sampling wird die KKF durch eine begrenzte Zahl an Abtastwerten dargestellt. Abbildung 5.2 veranschaulicht dies für  $r = 25$  m. Da dieses



**Abbildung 5.2:** Veranschaulichung der gesampelten KKF (KKF 1) mit  $f_{\text{sampling}} = 8.0$  MHz und der quasi-kontinuierlichen KKF (KKF 2,  $f_{\text{sampling}} = 400$  MHz) für  $r = 25$  m

Verfahren schlicht nach dem größten Abtastwert sucht, hängt die Genauigkeit direkt von der Abtastfrequenz ab. Liegt das wahre Maximum nämlich zwischen zwei Samples, so wird zum nächstgelegenen auf- oder abgerundet. Dies passiert auch in dem abgebildeten Beispiel. Der eigentliche Peak bei ca. 83 ns wird nicht detektiert, stattdessen wird der Abtastwert bei 125 ns herangezogen. Der „worst case“ tritt ein, wenn das wahre Maximum genau in der Mitte liegt, es ergibt sich so ein Fehler von (hier) 18.75 m. Die Gestalt der Fehlerkurve wiederholt sich somit, sobald das Maximum der kontinuierlichen Korrelation vom nächsten Sample dargestellt wird, sodass klar wird, dass die Periode dem umgerechneten Sampleabstand entspricht. Da das wahre Maximum im schlimmsten Fall zentral zwischen zwei Abtastwerten liegt, ergibt sich der maximale Fehler rechnerisch als halber Sampleabstand:

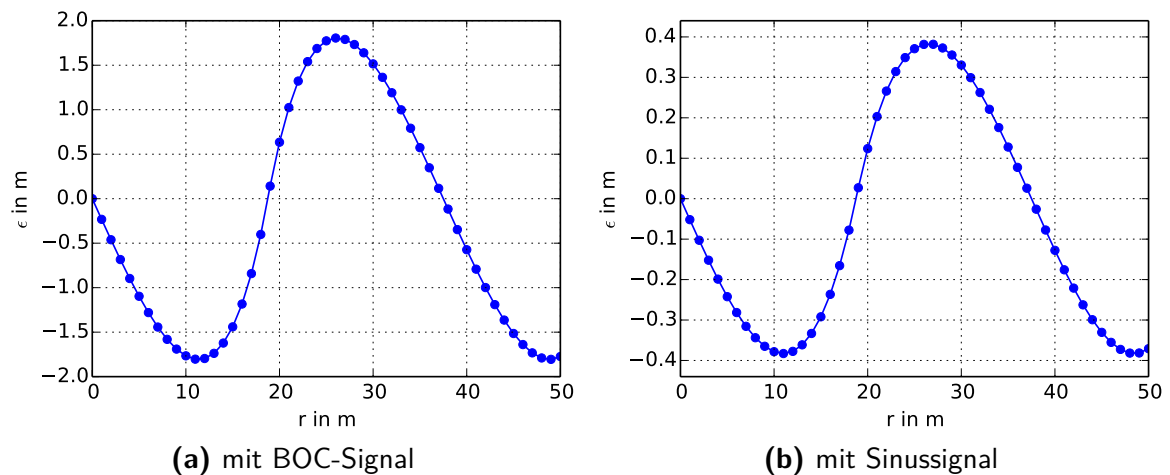
$$\epsilon_{\max} = \frac{c_0}{2 \cdot f_{\text{sampling}}} = \frac{3.0 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}{2 \cdot 8.0 \text{ MHz}} = 18.75 \text{ m.} \quad (5.2)$$

Diese Herangehensweise lässt sich also nur verbessern, indem man die Abtastfrequenz erhöht.



## 5.1.1.2 Verbesserung durch Interpolation

Um genauere Ergebnisse zu erhalten, ohne die Abtastrate übermäßig anheben zu müssen, bedarf es deshalb einer anderen Optimierung. In Abschnitt 4.1.2 wurde die Interpolation der Differenzierung der KKF erklärt. Damit kommt man wesentlich näher an die eigentliche Distanz heran. In Abbildung 5.3 ist der Schätzfehler wie zuvor dargestellt.



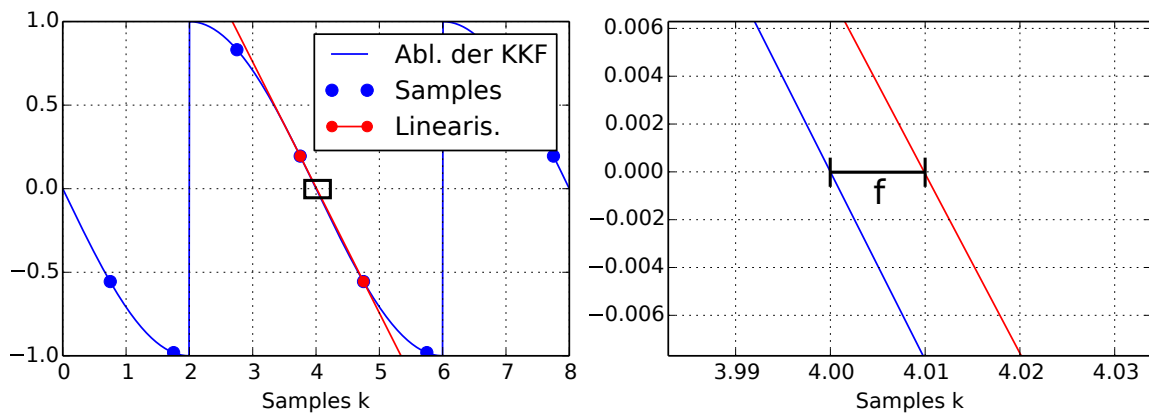
**Abbildung 5.3:** Schätzfehler für verschiedene Distanzen nach Interpolation der Maxima

Der maximale Fehler ist erheblich gesunken und liegt nun bei knapp unter zwei Metern. Allerdings hat die Kurve auch hier eine systematische Gestalt, ihre Periode beträgt erneut 37.5 m und scheint somit wieder von der Abtastfrequenz abhängig zu sein. Der Verdacht bestätigt sich, wenn man die Abtastfrequenz beispielsweise verdoppelt. Dies hat eine Halbierung der Fehlerkurvenperiode sowie eine Reduzierung der Maximalabweichung zur Folge. Um auszuschließen, dass die auftretende Abweichung von der Kanalsimulation hervorgerufen wird, wurde das Vorgehen mit dem sinusförmigen Sendesignal wiederholt. Wie man erkennt, ist die Form des Fehlers einschließlich der Periode gleich. Nur die Amplitude ist gegenüber des BPSK-modulierten Signals geringer und in positiver sowie negativer Auslenkungsrichtung bei ca. 0.38 m.

Auf Basis der Sinusschwingung soll der von der Distanz abhängige Fehler nun genauer untersucht werden. Dazu muss nochmals über das Vorgehen der Interpolation nachgedacht werden. Im Falle des sinusförmigen Signals ist die Korrelation mit dem Empfangssignal erneut eine Sinusschwingung. Deren Ableitung (hier die Differenzen benachbarter Samples) stellt ebenfalls einen (Co)Sinus dar. Dieser wird aufgrund der digitalen Repräsentation aber

nur von einer begrenzten Anzahl an Abtastwerten dargestellt, weshalb es nötig wird, die Nullstelle der Ableitung durch Interpolation anzunähern (siehe Abschnitt 4.1.2).

Genau dieser Aspekt ist der Grund für die vorliegende Form des Fehlers. Je nach Distanz wird das Empfangssignal und somit die KKF bzw. deren Ableitung von Samples an leicht verschobenen Stellen dargestellt. Dies war auch schon Ursache für die Abweichungen im vorherigen Abschnitt, da das eigentliche Maximum eventuell zwischen zwei Samples liegt. Die Genauigkeit der Interpolation wird dadurch ebenfalls beeinflusst. Der Grund ist, dass die sinusförmige Ableitung im Bereich des Vorzeichenwechsels durch eine Gerade interpoliert wird. Je nach Position der Punkte (also der Abtastwerte), durch welche die Gerade gelegt wird, wird die eigentliche Nullstelle mehr oder weniger gut getroffen (siehe Abbildung 5.4).



**Abbildung 5.4:** Veranschaulichung des Interpolationsfehlers bei sinusförmigem Signal

Durch Betrachtung dieses Umstands wird im Folgenden ein Ausdruck für den entfernungsabhängigen Fehler hergeleitet. Die Signale werden dazu auf Sampleebene betrachtet. Für die in Tabelle 5.1 angegebenen Parameter beinhaltet eine Periode der KKF sowie ihrer Ableitung acht Abtastwerte, im Folgenden allgemein mit  $N$  bezeichnet und mithilfe von Gleichung 4.5 berechenbar. Gesucht ist der Fehler  $f$  in Sampleeinheiten. Dieser gibt an, wie groß die Differenz zwischen der wirklichen Nullstelle des Sinus und der Nullstelle der Geraden ist.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird ein Sinus ohne Phasenverschiebung angenommen, wie er in Abbildung 5.4 zu sehen ist. Er wird fortan mit

$$s(k) = \sin\left(2\pi \cdot \frac{1}{N} \cdot k\right) \quad (5.3)$$

bezeichnet. Es ist leicht zu erkennen, dass die zum Maximum der Korrelation gehörige Nullstelle der Ableitung (Vorzeichenwechsel von positiv auf negativ) bei  $n_{kont} = \frac{N}{2}$  liegt. Die Sprünge bei  $k = 2$  und  $k = 6$  entstehen, da vom Betrag der KKF ausgegangen wird. Es kann dennoch mit der reinen Sinusschwingung fortgefahren werden, da nur der Bereich zwischen den Sprüngen von Bedeutung ist.

Als nächstes gilt es, einen allgemeinen Ausdruck für die Gerade zu finden. Diese wird durch die beiden zur wahren Nullstelle benachbarten Samples festgelegt. Der linke Abtastpunkt werde mit  $x$  bezeichnet, der rechte lässt sich somit aufgrund des einheitlichen Sampleabstands mit  $x + 1$  ausdrücken. Interessant ist das Geschehen für  $x \in [\frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2}]$ . Für die linke Intervallgrenze fällt der rechte Punkt direkt mit der Nullstelle zusammen, für die rechte Intervallgrenze passiert dasselbe mit dem linken Punkt, sodass in diesen beiden Fällen  $f = 0$  gilt. Mit dem gesuchten Ausdruck lässt sich auch das Verhalten dazwischen spezifizieren.

Für die Funktionsgleichung der Gerade abhängig von  $k$  und  $x$  benötigt man wie üblich Steigung und Ordinatenabschnitt. Für die Steigung setzt man den Abstand in y-Richtung mit dem Abstand in x-Richtung ins Verhältnis:

$$m_g = \frac{s(x+1) - s(x)}{x+1 - x} = s(x+1) - s(x). \quad (5.4)$$

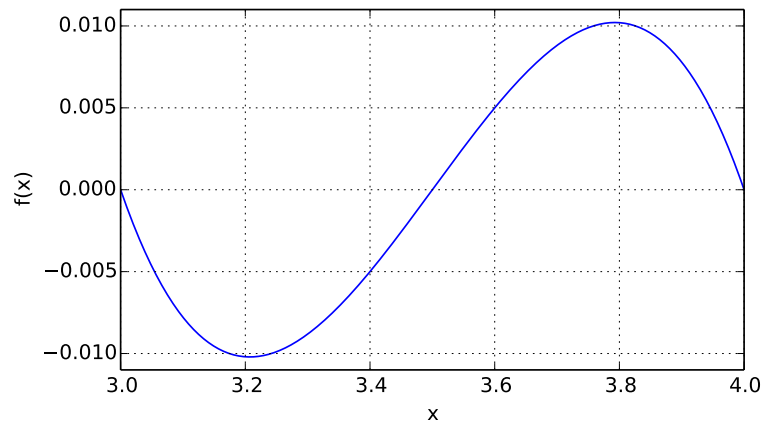
Mit dem Ordinatenabschnitt, der sich durch Einsetzen eines Punktes bestimmen lässt, ergibt sich als Geradengleichung

$$g(k, x) = [s(x+1) - s(x)] \cdot k + s(x) - [s(x+1) - s(x)] \cdot x. \quad (5.5)$$

Um die Nullstelle  $n_{int}$  zu bestimmen, muss die Gleichung gleich 0 gesetzt und anschließend nach  $k$  aufgelöst werden. Um die Abweichung durch die Interpolation zu berechnen, muss nur noch die wahre Nullstelle abgezogen werden. So erhält man für den Fehler

$$f(x) = n_{int} - n_{cont} = \frac{[s(x+1) - s(x)] \cdot x - s(x)}{s(x+1) - s(x)} - \frac{N}{2}. \quad (5.6)$$

Plottet man diese Funktion für den besagten Bereich von  $x$ , so ergibt sich der Graph in Abbildung 5.5. Man erkennt, dass er dieselbe Gestalt hat wie die zuvor gezeigten distanzabhängigen Fehlerkurven. Interessant ist auch, dass der Fehler nicht nur an den Intervallgrenzen, also hier konkret bei  $x = 3$  und  $x = 4$  Null wird. Auch bei  $x = 3.5$  fallen



**Abbildung 5.5:** Plot des erhaltenen Ausdrucks für den Linearisierungsfehler

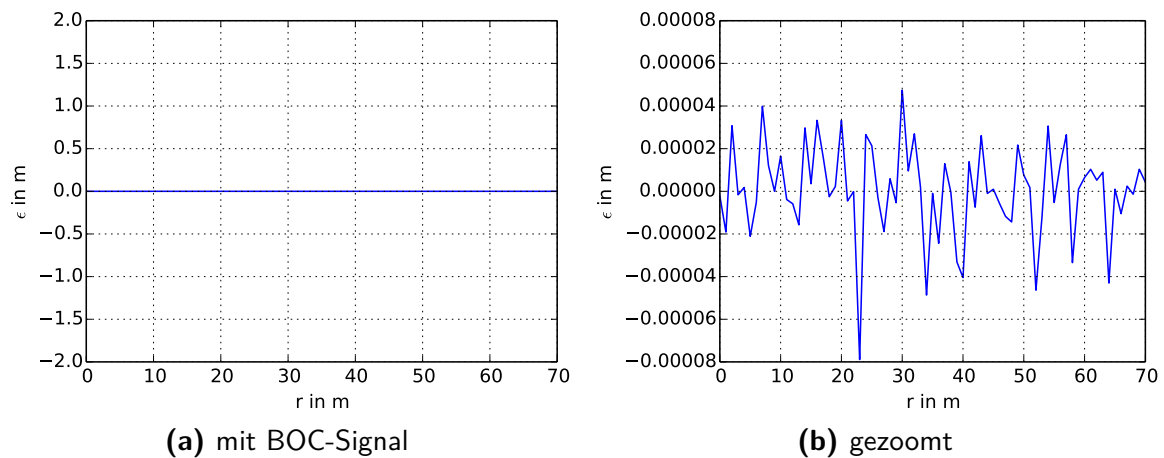
die Nullstellen zusammen. Die beiden Abtastpunkte sind hier nämlich gleich weit von der wahren Nullstelle entfernt, sodass die konstruierte Gerade genau durch diese führt. Auch die Amplituden stimmen überein. Die maximale Abweichung von etwa 0.0102 Sampleeinheiten ergibt mit Abtastfrequenz und Lichtgeschwindigkeit gewichtet den maximalen Fehler von ca. 0.383 m.

Bei Nutzung des BPSK-modulierten Signals tritt dieses Phänomen ebenfalls auf. Zwar wäre die kontinuierliche KKF eigentlich ein periodisches Dreieckssignal und dessen Ableitung ein periodisches Rechtecksignal. In diesem Fall wäre eine Interpolation nicht gewinnbringend und auch nicht notwendig. Allerdings ähnelt die Korrelation abgetasteter BOC-Signale der Korrelation der abgetasteten Sinusschwingung, da die Signale entsprechend bandbegrenzt wurden und das BOC-Signal bei dem angegebenen Verhältnis aus Symbol- und Abtastfrequenz so im Grunde aus zwei überlagerten Sinusschwingungen besteht. Erst bei weitaus höheren Abtastraten und damit höherer Bandbegrenzung nähert sich die Gestalt der abgetasteten KKF der kontinuierlichen (s. Abb. 5.2). Bei den hier gewählten Parametern hat der distanzabhängige Schätzfehler in Abbildung 5.3 abgesehen von einer etwas höheren Amplitude somit aber dieselbe Form wie die Fehlerkurve des reinen Sinussignals.

### 5.1.2 Phasendifferenz

Auch für die Schätzung mittels Phasendifferenz wurden Simulationen für Distanzen im Eindeutigkeitsbereich durchgeführt. Da die Erweiterung mit Matched-Filter nur bei verrauschten Empfangssignalen eine Rolle spielt, wird hier die grundlegende Variante betrachtet.

Basierend auf den vorausgesetzten Parametern ergibt sich für das BPSK-modulierte



**Abbildung 5.6:** Schätzfehler nach Auswertung der Phasendifferenz für verschiedene Distanzen

Sendesignal das in Abbildung 5.6 dargestellte Verhalten. Im Gegensatz zum Ergebnis bei der Korrelation zeigt sich bei der Phasendifferenz ein konstanter Fehler von 0 m. Dies gilt sowohl für das Sinussignal als auch für das BOC-Signal. Zunächst war bei letzterem auch ein regelmäßiger Fehler zu erkennen. Da dieser aber beim Sinussignal nicht auftrat, musste die Ursache in der Kanalsimulation liegen, die daraufhin noch einmal verändert wurde (s. Abschnitt 3.3).

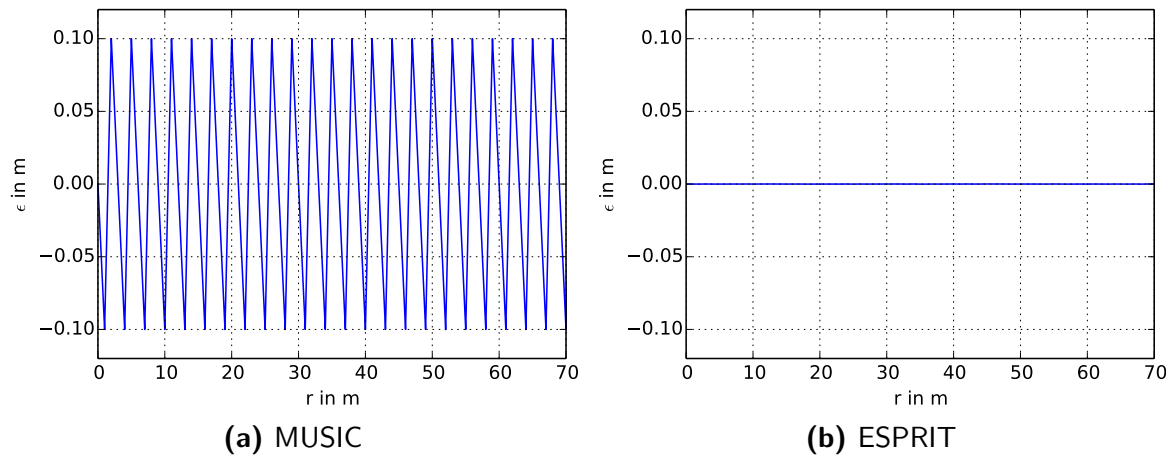
Interpolationsungenauigkeiten, die bei der Korrelation das Problem waren, können hier nicht auftreten, da an keiner Stelle interpoliert werden muss. Die Schätzung der Distanz erfolgt direkt über die Phasendifferenz der beiden Träger, welche im Normalfall vom Sampling nicht beeinflusst wird. Lediglich bei ungünstiger FFT-Länge kann es passieren, dass die Subträger in die nächstgelegenen Frequenzbins „verschmieren“ und der Frequenzabstand dadurch nicht mehr genau mit der Symbolfrequenz übereinstimmt.

Abgesehen davon kommt es zu minimalsten Abweichungen, wie man in Abbildung 5.6 (b) erkennt. Diese sind aber auf numerische Ungenauigkeiten zurückzuführen, sodass sich für beide Signale bei fehlenden Störeinflüssen optimale Schätzwerte ergeben.

### 5.1.3 Subraum-Verfahren

Auch die beiden hochauflösenden Algorithmen MUSIC und ESPRIT wurden zuerst ohne Rauscheinfluss getestet. Hierbei zeigt sich jeweils ein leicht unterschiedliches Bild. Wie in Abbildung 5.7 (a) ersichtlich wird, kommt es bei Anwendung des MUSIC-Verfahrens

zu einem Fehler in Sägezahnform über dem Eindeutigkeitsbereich. Diese Erscheinung



**Abbildung 5.7:** Schätzfehler des MUSIC- und ESPRIT-Algorithmus für verschiedene Distanzen (mit BOC-Signal)

hat allerdings eine einfache Begründung. Bei der Erzeugung des MUSIC-Spektrums nach Gleichung 4.19 werden die Werte für eine festgelegte Menge an  $\omega$  zwischen  $-\pi$  und  $\pi$  erzeugt. Das erhaltene Pseudospektrum liegt deshalb auch nur in abgetasteter Form vor, weshalb die detektierte Spitze im Spektrum mitunter leicht über oder unter dem wahren Wert liegt. Das dargestellte Ergebnis wurde für 500 Werte für  $\omega$  berechnet. Erhöht man die Auflösung, so sinkt die Amplitude des Fehlers proportional. Durch Verdoppeln sinkt der maximale Fehler beispielsweise von 10 cm auf 5 cm. Die Genauigkeit kann hierbei also beliebig erhöht werden, ohne Parameter des Systems verändern zu müssen. Allerdings geht dies auf Kosten der Rechenkomplexität.

Beim ESPRIT-Algorithmus ist hingegen keine Abweichung erkennbar. Das Ergebnis in Abbildung 5.7 (b) gleicht dem der Phasendifferenz. Dies ist dadurch zu begründen, dass kein Spektrum erzeugt und das Maximum gesucht werden muss, was wieder zu Ungenauigkeiten wie bei MUSIC führen würde. Stattdessen wird das Ergebnis direkt aus den Eigenvektoren der Kovarianzmatrix berechnet. Ein weiterer positiver Effekt dieser Tatsache ist, dass die Berechnung deutlich schneller erfolgt, da die Berechnung aller Spektralwerte, von denen die Mehrheit eigentlich nutzlos ist, entfällt.

## 5.2 Betrachtung für AWGN

Die Algorithmen wurden zuvor für ideale Bedingungen getestet. Nun wird betrachtet, wie sich der Einfluss von weißem Gaußschen Rauschen auf die Genauigkeit auswirkt. Es ist zu erwarten, dass diese für steigende Rauschleistung sinken wird. Um ein Bewertungskriterium zu haben, wird im Folgenden zunächst das zu erwartende Träger-zu-Rausch-Verhältnis  $\frac{C}{N_0}$  bestimmt und die bereits allgemein vorgestellte CRLB für die verwendeten Signale konkret berechnet.

### 5.2.1 Berechnung der CRLB

Die Berechnung der jeweiligen unteren Schranke für die Distanzschätzung basiert auf Gleichung 2.27. Zur Berechnung wird für  $T_s$  die Signallänge von  $100 \mu\text{s}$  herangezogen.  $f_s$ , die Subchipfrequenz, entspricht der halben Symbolfrequenz und somit  $1.0 \text{ MHz}$ . Für die Chipfrequenz  $f_c$  wird der Kehrwert der Signaldauer  $\frac{1}{T_s} = 10 \text{ kHz}$  gewählt. Die Bandbreite  $B$  ist schließlich durch die Abtastfrequenz von  $8.0 \text{ MHz}$  gegeben. Durch Einsetzen dieser Werte lässt sich das Integral zur Bestimmung der RMS-Bandbreite numerisch berechnen, es ergibt sich ein Wert von  $\beta_{RMS}^2 = 1.6 \cdot 10^{12} \text{ Hz}^2$ . Was außerdem benötigt wird, ist das zu erwartende SNR, wobei hier mit dem von der Bandbreite unabhängigen  $\frac{C}{N_0}$  gearbeitet wird. Um dieses Verhältnis zu erhalten, muss zuerst die Empfangsleistung  $P_{RX}$  bestimmt werden. Allein aufgrund der Freiraumausbreitung erfährt das Signal eine distanzabhängige Dämpfung. Statt die allgemeine Form der Ausbreitungsdämpfung zu verwenden, wird hier ein empirisches Modell zugrunde gelegt, das auf Messungen in einem Waldgebiet bei Forchheim beruht. Der Pfadverlust in dB  $PL_{dB}$  lässt sich demnach für Distanzen zwischen  $10 \text{ m}$  und  $140 \text{ m}$  mittels der Formel

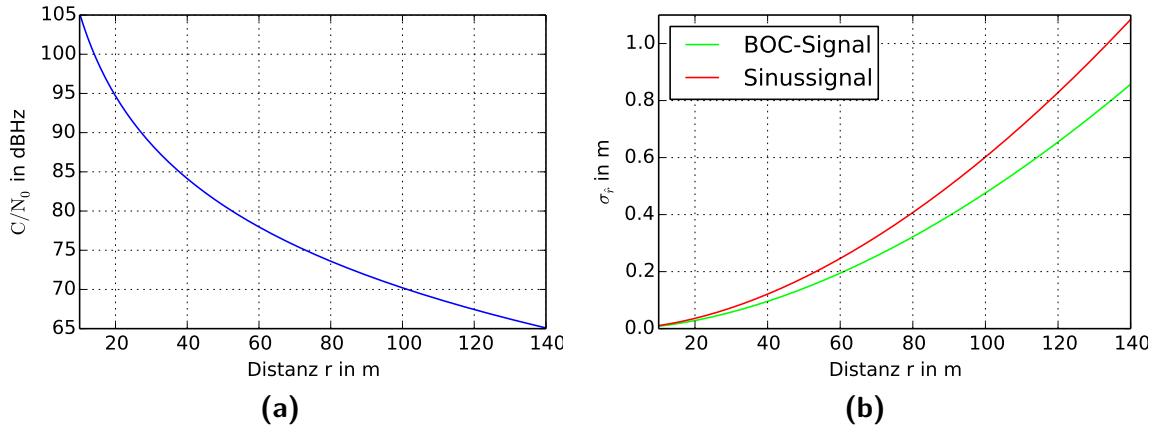
$$PL_{dB}(r) = 17 \text{ dB} + 10 \text{ dB} \log \left( \frac{r^{3.5}}{\text{m}} \right) + 20 \text{ dB} \log \left( \frac{f_c}{10^9 \text{ Hz}} \right) \quad (5.7)$$

bestimmen,  $f_c$  bezeichnet dabei die Trägerfrequenz. Die resultierende Empfangsleistung wird anschließend mit der Rauschzahl des Empfängers  $NF$  und der (thermischen) Rauschleistungsichte  $N_0$  ins Verhältnis gesetzt. So ergibt sich schließlich (in dBHz)

$$\begin{aligned} \left( \frac{C}{N_0} \right)_{dBHz} &= P_{RX,dB} - NF_{dB} - N_{0,dB} = \\ &= P_{TX,dB} - PL_{dB}(r) - NF_{dB} - 10 \log(k \cdot T_n) \end{aligned} \quad (5.8)$$

mit der Sendeleistung  $P_{TX}$ , der Boltzmann-Konstante  $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ W s K}^{-1}$  und der Temperatur  $T_n = 290 \text{ K}$  [9]. Zudem wurde  $NF_{dB} = 8 \text{ dB}$  angenommen.

Abbildung 5.8(a) zeigt den Verlauf des  $\frac{C}{N_0}$  über Distanzen im Gültigkeitsbereich des genutzten Ausbreitungsmodells, wobei von  $P_{TX,dB} = -10 \text{ dBm}$  und  $f_c = 868 \text{ MHz}$  ausgegangen wurde. Damit sind alle Parameter bekannt und die CRLB für das vorliegende Szenario kann berechnet werden. Die Wurzel aus der resultierenden CRLB und damit die Standardabweichung  $\sigma_{\hat{r}}$  des optimalen Schätzers ist in Abbildung 5.8(b) dargestellt. Auch



**Abbildung 5.8:** (a): Träger-zu-Rauschverhältnis abhängig von der Distanz; (b): Resultierende Schranke für die Standardabweichung der Distanzschätzung

für das Sinussignal wurde die CRLB geplottet. Der einzige Unterschied in der Berechnung liegt in der RMS-Bandbreite. Diese ist aufgrund der einfachen Gestalt im Frequenzbereich näherungsweise durch  $\beta_{RMS}^2 = \left( \frac{f_{symbol}}{2} \right)^2 = 1.0 \cdot 10^{12} \text{ Hz}^2$  gegeben, sodass die Schranke im Vergleich zum BOC-Signal etwas höher ist.

Die jeweilige Schranke wird in den folgenden Diagrammen immer mit eingezeichnet sein, um einen Anhaltspunkt bezüglich der Güte der Schätzverfahren zu liefern.



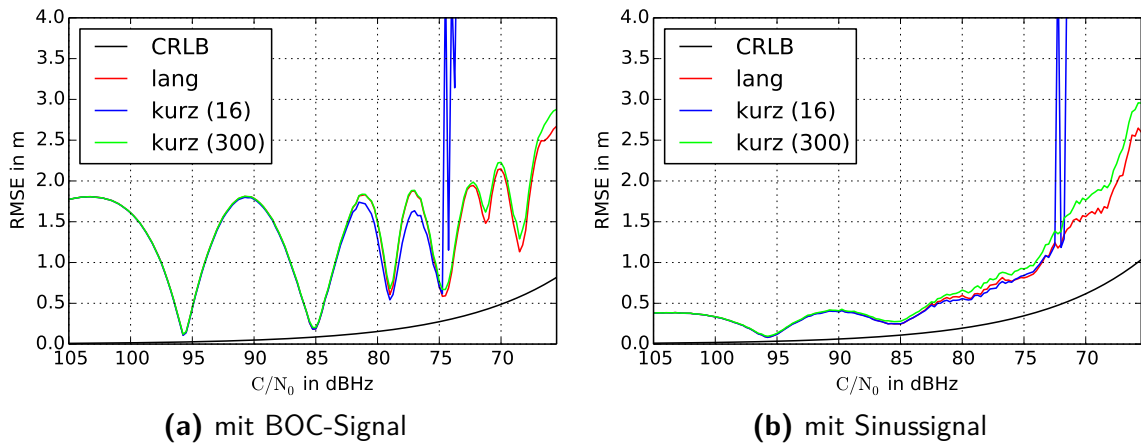
### 5.2.2 Korrelation

Zur Veranschaulichung der Performance unter Rauscheinfluss wurden für Träger-zu-Rausch-Verhältnisse zwischen 105 dBHz und 65.5 dBHz in 0.25 dBHz-Schritten die entsprechenden Distanzen simuliert (also etwa zwischen 10 m und 140 m) und anschließend geschätzt. Pro  $\frac{C}{N_0}$  wurden  $N = 1000$  Läufe durchgeführt und jeweils der Root Mean Square Error (RMSE) gemäß

$$RMSE = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (\hat{r}_n - r)^2 \quad (5.9)$$

berechnet.

Abbildung 5.9 zeigt die Ergebnisse bei Bestimmung der Maxima der Korrelation. Es handelt sich dabei um die interpolierende Variante, die reine Maximumsuche ist praktisch nicht sinnvoll einsetzbar. Dargestellt sind die Graphen unter Verwendung des BPSK-modulierten sowie des sinusförmigen Signals. Des Weiteren werden die Unterschiede einer Korrelation



**Abbildung 5.9:** RMSE bei Distanzschätzung mittels Korrelation (mit langem sowie kurzen Replicas)

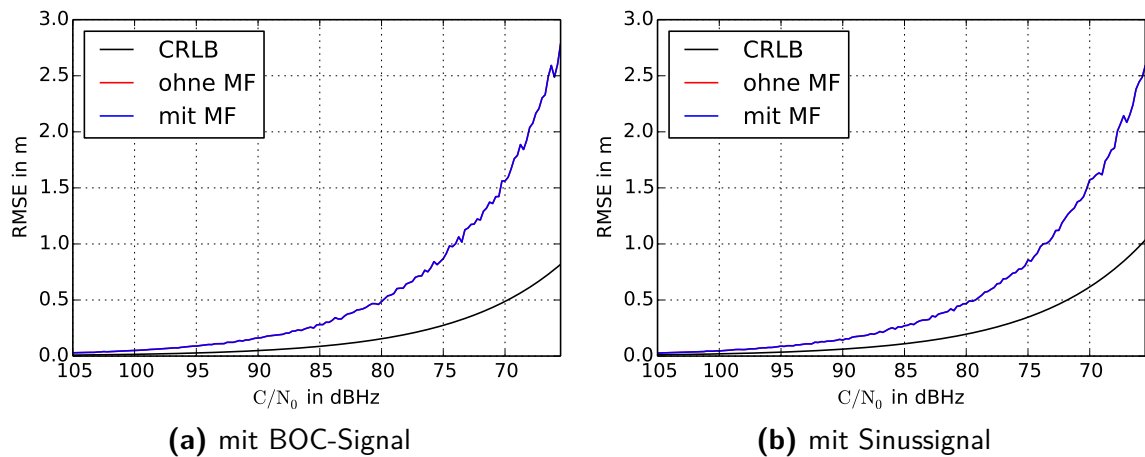
mit längerem Replica sowie kürzerem Replica deutlich. Wird die Kopie des Sendesignals zu kurz, so kommt es bei niedrigeren Signal-Stör-Abständen zu großen Fehlern. Abgesehen davon erweist sich die Korrelation mit einer längeren Kopie als stabiler und liefert auch bei stärkerem Rauschen leicht bessere Ergebnisse als die kurze Variante.

Besonders interessant ist aber v.a. die ungleichmäßige Gestalt mit abwechselnden Maxima und Minima. Diese lässt sich auf den Einfluss der Interpolationsfehler zurückführen, die in Abschnitt 5.1.1.2 untersucht wurden. So steht z.B. das Minimum bei 96 dBHz mit einer

Distanz von 18.75 m in Zusammenhang. Eben dort hat man im rauschfreien Fall einen fehlerfreien Schätzwert (vgl. Abb. 5.3). Zwischen diesen optimalen Werten macht sich der Interpolationsfehler v. a. beim BOC-Signal deutlich bemerkbar. Das Sinussignal führt zu einem kleineren systematischen Fehler, weshalb es auch hier besser abschneidet. Für größere Rauschleistungen fällt dieser Effekt schließlich aber nicht mehr so sehr ins Gewicht.

### 5.2.3 Phasendifferenz

Bei der Auswertung der Phasendifferenz der beiden Subträger ergibt sich das Bild in Abbildung 5.10. Erneut wurde der Testlauf für die beiden Signalformen durchgeführt. Außerdem wurde überprüft, ob der Einsatz des Matched-Filter die Ergebnisse verbessern kann.

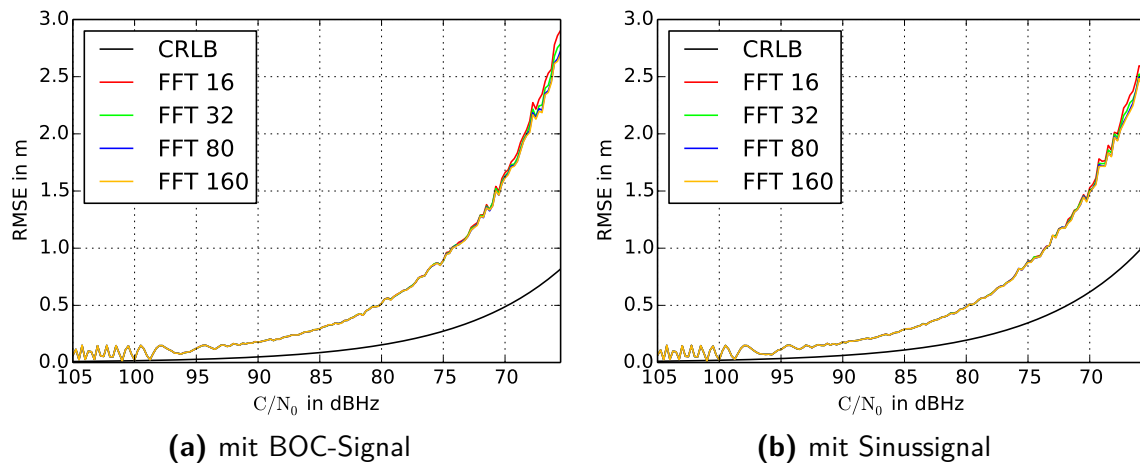


**Abbildung 5.10:** RMSE bei Auswertung der Phasendifferenz (ohne sowie mit Matched-Filter)

Man erkennt zum einen, dass das sinusförmige Signal auch hier etwas bessere Schätzwerte zur Folge hat. Eine wichtige Erkenntnis ist des Weiteren, dass das Voranstellen eines Matched-Filters praktisch keine Verbesserung bringt, die Ergebnisse sind für beide Varianten identisch. Durch das Matched-Filter wird versucht, das SNR zu optimieren, indem nur Bereiche des Spektrums betrachtet werden, in denen sich auch tatsächlich Signalanteile befinden. Allerdings werden die Phasen sowieso nur an zwei Punkten des Empfangssignalspektrums betrachtet. Das (weiße) Rauschen verteilt sich hingegen über das gesamte Spektrum. Das Matched-Filter hat somit an den relevanten Stellen einen kaum erkennbaren Effekt und liefert deshalb annähernd gleiche Ergebnisse.

### 5.2.4 MUSIC und ESPRIT

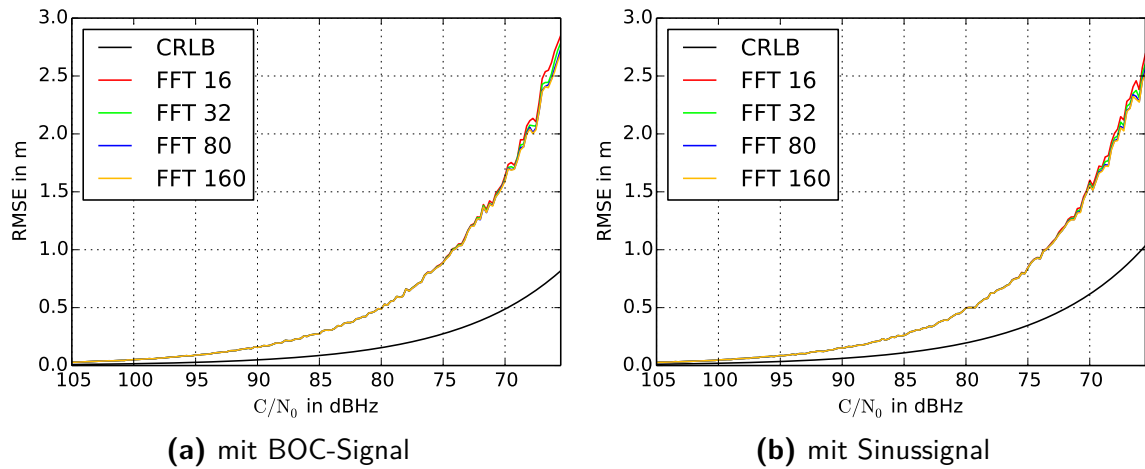
Die beiden Algorithmen MUSIC und ESPRIT ähneln sich in den erzielten Ergebnissen, da beide auf derselben Subraumzerlegung arbeiten und nur die gesuchte Phasendifferenz auf unterschiedliche Weise extrahieren.



**Abbildung 5.11:** Performance des MUSIC-Algorithmus für verschiedene FFT-Längen

Bei Nutzung des MUSIC-Algorithmus zeigt sich das Verhalten in Abbildung 5.11. Man erkennt, dass das Sinussignal erneut etwas besser abschneidet. Des Weiteren zeigen sich für geringere Störabstände kleine Unterschiede bei unterschiedlichen FFT-Längen. Bei den FFTs der kürzeren Sequenzen fällt das Rauschen im Verhältnis stärker ins Gewicht. Zwar werden weiterhin die Phasen von nur zwei Frequenzbins betrachtet, allerdings wird das Spektrum von nun weitaus weniger Samples repräsentiert, wodurch der Rauschanteil pro Sample ansteigt. Die Bestimmung von Signal- und Rauschraum kann dies nicht gänzlich kompensieren. Zudem zeigen sich bei hohem  $\frac{C}{N_0}$  kleine „zickzack“-artige Ausprägungen. Diese stehen mit dem in Abschnitt 5.1.3 erläuterten Effekt in Verbindung und fallen nur bei kleiner Rauschleistung ins Gewicht.

Dieselben Simulationen wurden für das ESPRIT-Verfahren durchgeführt. Auch dieser zeigt für längere FFT-Längen etwas bessere Ergebnisse. Da die Kovarianzmatrix auf dieselbe Art und Weise berechnet wird wie beim MUSIC-Algorithmus ergibt sich auch dieselbe Begründung. Das Sägezahnmuster ist hier hingegen nicht zu erkennen. Die Schätzungen kommen wie schon erläutert direkt ohne Erzeugung eines Pseudospektrums zustande, es wird lediglich der zum Signalraum gehörige Eigenvektor benötigt. Außerdem sei erwähnt, dass sich diese Tatsache auch in der Geschwindigkeit der Berechnungen deutlich bemerkbar gemacht

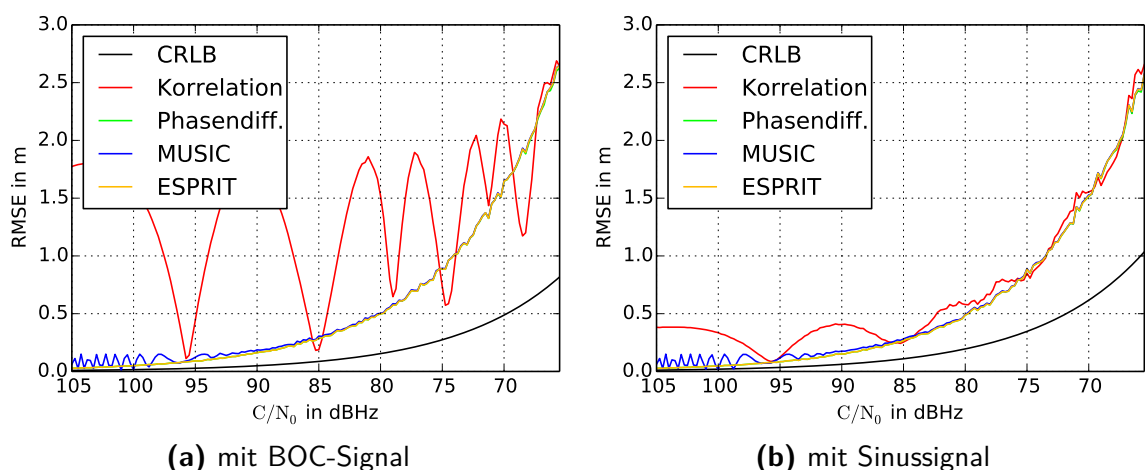


**Abbildung 5.12:** Performance des ESPRIT-Algorithmus für verschiedene FFT-Längen

hat. Durch die große Anzahl an Durchläufen fiel die Erzeugung des Pseudospektrums und die darauffolgende Maximumsuche beim MUSIC-Verfahren spürbar ins Gewicht. In Sachen Rechenkomplexität ist somit klar der ESPRIT-Algorithmus zu bevorzugen.

### 5.2.5 Vergleich

Um die unterschiedlichen Verfahren vergleichen zu können, wurde ein weiterer Testlauf durchgeführt. Hier wurden die verschiedenen Algorithmen mit den jeweils günstigsten Parametern angewandt. Das Ergebnis für BOC- und Sinussignal ist in Abbildung 5.13 zu sehen. Wie schon bei der Einzelbetrachtung aufgefallen ist, ist der RMSE bei Nutzung des



**Abbildung 5.13:** Vergleich des RMSE aller Verfahren

BPSK-modulierten Signals stets etwas höher. Dies steht in Widerspruch zu der Tatsache, dass die Cramer-Rao-Schranke für diesen Signaltyp etwas niedriger ist als beim Sinus. Grund dafür ist, dass die Nebenkeulen, die im Falle des BOC-Signals bei  $\pm 3.0$  MHz vorzufinden sind, bei den phasenbasierten Verfahren nicht genutzt werden. Da die Leistung der Signale normiert ist, haben die eigentlichen Subträger beim reinen Sinussignal mehr Energie als beim BOC-Signal, sodass die Ergebnisse dabei etwas besser sind. Bei der Korrelation sollte die Erwartung hingegen eigentlich erfüllt werden.

Die durch die Korrelation ermittelten Schätzwerte weisen aber fast immer stärkere Abweichungen als die übrigen Algorithmen auf. Dies ist der nicht-perfekten Interpolation und dem sich daraus ergebenden systematischen Fehler geschuldet, der beim BOC-Signal größer ausfällt und damit bessere Ergebnisse als beim Sinussignal unmöglich macht. Dieses liefert somit trotz höherer CRLB auch hier bessere Werte. Lediglich für Weiten, bei denen der systematische Fehler verschwindet, kommt man näher an - bzw. teilweise unter - den mittleren Fehlerwert der anderen Verfahren. Besonders deutlich wird der Unterschied für hohe Träger-Rausch-Verhältnisse, denn auch hier existiert der Interpolationsfehler, wohingegen die phasenbasierten Schätzer fast fehlerfreie Ergebnisse liefern. Da der Interpolationsfehler mit zunehmender Abtastrate abnimmt, könnten sich die Ergebnisse durch Upsampling verbessern lassen, was hier aber nicht genauer betrachtet wird.

Die direkte Phasendifferenzbestimmung sowie MUSIC und ESPRIT kommen für ein  $\frac{C}{N_0}$  von bis zu etwa 80 dBHz recht nahe an die CRLB heran. Der Unterschied zwischen RMSE und optimaler Standardabweichung beträgt hier ca. 0.3 m. Für größere Rauschleistungen nimmt die Differenz zu, das Verhältnis aus tatsächlichem Fehler und dem Wert der Schranke liegt aber stets zwischen 2 und 2.5.

Große Unterschiede der im Spektralbereich arbeitenden Algorithmen zueinander sind hingegen nicht zu erkennen. Die Subraumverfahren MUSIC und ESPRIT (hier jeweils mit FFT-Länge 160) liefern fast identische Ergebnisse. Nur durch die Abhängigkeit des MUSIC-Algorithmus vom abgetasteten Pseudospektrum ergeben sich kleinste Abweichungen, die sich bei kleinem Rauscheinfluss in der sägezahnförmigen Gestalt der Kurve äußern. Im Vergleich zur reinen Auswertung der Phasendifferenz erreicht man durch die Subraumzerlegung allerdings keine besseren Ergebnisse. Abhängig von der Länge der Teilsequenzen, von denen die FFTs berechnet werden, schneiden MUSIC und ESPRIT stattdessen etwas schlechter ab, für längere Teilspektren nähern sich die Fehlerkurven der klassischen Phasendifferenzbestimmung.

## 5.3 Einfluss eines Frequenzversatzes

Eine weitere Störursache, auf die die implementierten Schätzverfahren untersucht werden müssen, ist ein möglicher Frequenzversatz. Dies bedeutet, dass das hochfrequente Signal sich beim Empfänger nicht mehr an der ursprünglichen Position im Spektrum befindet. Wird das Empfangssignal dann bei weiterer Annahme der eigentlichen Trägerfrequenz ins Basisband gemischt, so ergibt sich ein asymmetrisches Spektrum. Eine andere Ursache sind ungenaue Oszillatoren, sodass das Abmischen an sich den Offset zur Folge hat. Die Frage ist nun, welchen Einfluss ein solcher Frequenzversatz auf die Schätzverfahren hat und welche Anpassungen getroffen werden müssen, um eventuelle Probleme dabei zu beheben.

Um einen Frequenzversatz in der Simulation hervorzurufen, wird der Verschiebungssatz nochmals betrachtet. In Abschnitt 2.1.2 wurde er angeführt, um den Zusammenhang zwischen Laufzeit und Phasendrehung zu beschreiben. Aufgrund der Dualität gilt dieser Zusammenhang auch in umgekehrter Weise. Ein Frequenzversatz  $f_e$  wird also erreicht, indem das Zeitsignal mit einer komplexen Exponentialfolge multipliziert wird. Im Diskreten ergibt sich das frequenzverschobene Empfangssignal somit zu

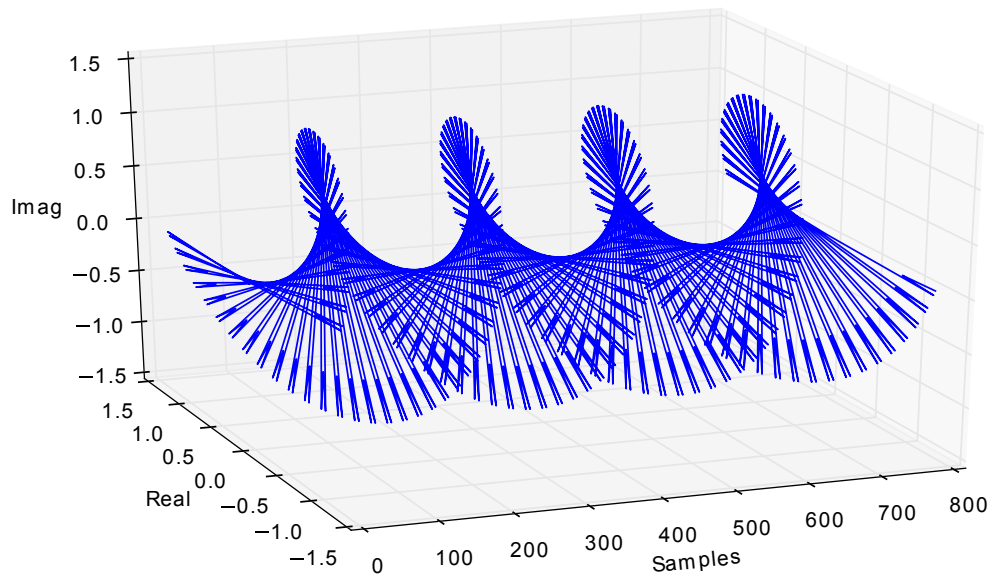
$$r'[k] = r[k] \cdot e^{-j2\pi \frac{f_e}{f_{\text{sampling}}} k}. \quad (5.10)$$

Aufgrund der Multiplikation mit der Exponentialschwingung legt sich das Signal spiralförmig um die Zeitachse, wie in Abbildung 5.14 zu sehen ist. Je nach Offset ergibt sich eine kürzere oder längere Periode, im abgebildeten Fall erfährt das Signal nach 400 Samples eine vollständige Drehung.

Die Reaktion der implementierten Verfahren auf dieses Empfangssignal wird im Folgenden untersucht, wobei sich Unterschiede erneut hauptsächlich zwischen Korrelation und den übrigen Verfahren ergeben.

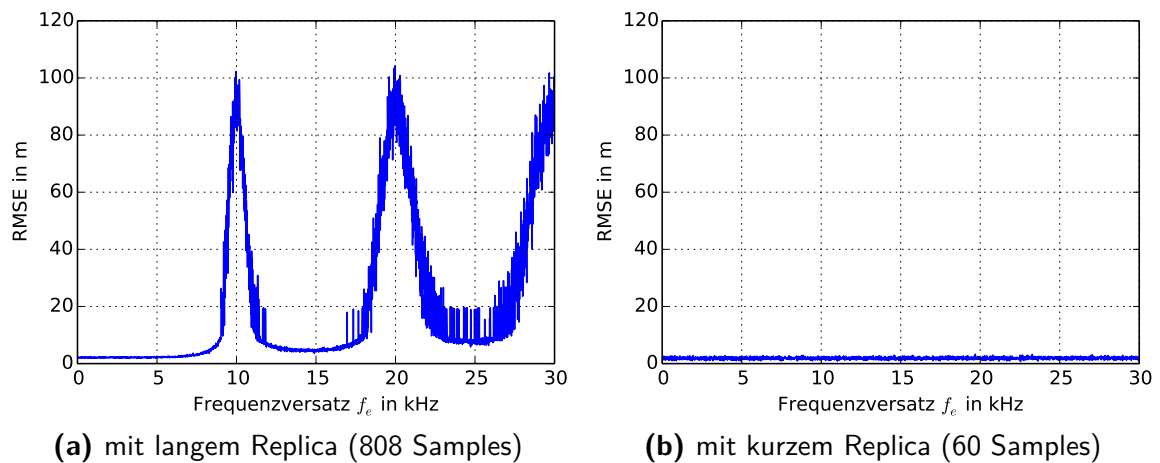
### 5.3.1 Auswirkungen auf die Korrelation

Die beschriebene Drehung des Zeitsignals macht Anpassungen bei der Schätzung durch Korrelation notwendig. Die Korrelation wurde für steigende Werte eines Frequenzoffsets getestet. Dazu wurde eine Distanz von 100 m sowie ein  $\frac{C}{N_0}$  von 70 dBHz eingestellt und pro Frequenzwert wurden 100 Durchläufe durchgeführt. Dabei zeigt sich das Verhalten aus Abbildung 5.15 (a). Wie man erkennt, ergeben sich ausgeprägte Fehler bei Vielfachen



**Abbildung 5.14:** 3D-Plot des Empfangssignals bei  $f_e = 20$  kHz (ohne Rauschen)

von 10 kHz. Ab dieser Grenze ist ein Anstieg der Störanfälligkeit allgemein festzustellen. Um diese Ausprägungen zu reduzieren, gibt es die Möglichkeit, nicht mehr mit einer längeren Sendesignalkopie zu korrelieren, sondern einer entsprechend kürzeren Sequenz. Diese Alternative wurde bereits in Abschnitt 4.1 erwähnt. Wie man in Abbildung 5.15 (b)

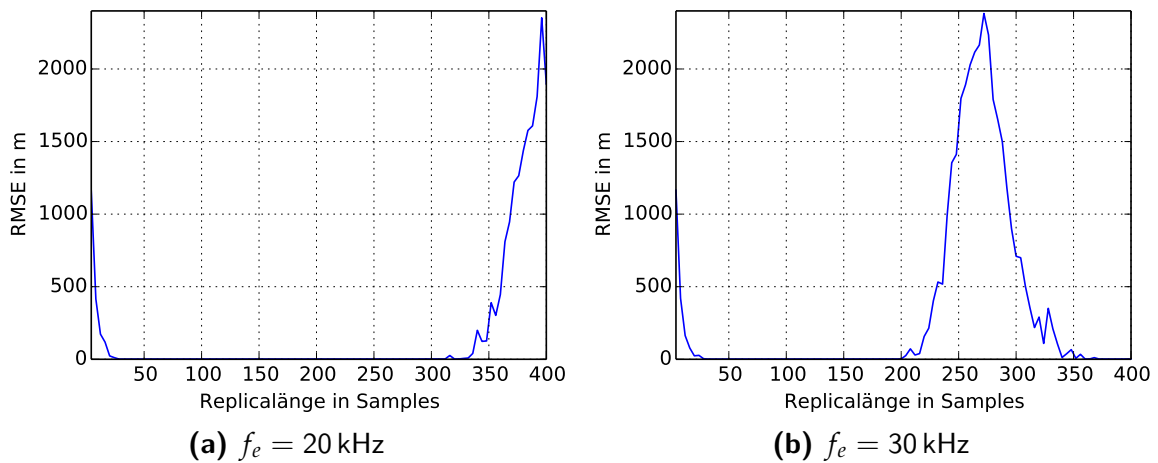


**Abbildung 5.15:** Reaktion der Korrelation auf verschiedene Frequenzoffsets

erkennt, ist der Fehler nun unabhängig vom Frequenzversatz. Es bleiben nun nur noch die im Rauschen begründeten Abweichungen sowie der systematische Fehler für die Distanz 100 m. Diese Verbesserung hängt mit der aus der Frequenzverschiebung resultierenden

komplexen Spiralgestalt zusammen. Probleme ergeben sich, sobald sich die Replicalänge der Zeitdauer nähert, in der das Empfangssignal eine vollständige  $2\pi$ -Drehung erfährt. Je höher der Offset und damit je kürzer die Periode der Exponentialschwingung, desto kürzer muss der Korrelationsausschnitt sein. Denn aufgrund der Tatsache, dass die Korrelationswerte kohärent aufaddiert werden, löschen sich diese im Grunde gegenseitig aus, wenn das Replica lang genug ist, v. a. wenn die Länge mit der Schwingung der Exponentialfolge korrespondiert.

Auf der anderen Seite wurde schon bei der Analyse des Rauschverhaltens deutlich, dass die Robustheit gegenüber Rauschen mit abnehmender Replicalänge sinkt (s. Abbildung 5.9). Deshalb ist ein Kompromisswert zu finden, für den sowohl die Frequenzversatz- als auch Rausch-bedingte Störanfälligkeit minimal ist. Um diesen zu bestimmen, wurde



**Abbildung 5.16:** RMSE für verschiedene Replicalängen mit Frequenzversatz  $f_e$

der mittlere quadratische Fehler bei einem Frequenzversatz von  $f_e = 20 \text{ kHz}$  bzw.  $f_e = 30 \text{ kHz}$  für unterschiedlich lange Replicas bestimmt. In Abbildung 5.16 erkennt man, dass Sendesignalkopien bis zu einer Länge von 25 Samples in beiden Fällen zu kurz und damit gegenüber Rauschen nicht widerstandsfähig sind. Im Falle von  $f_e = 20 \text{ kHz}$  sind auch Längen über 320 Samples nicht empfehlenswert, hier beginnt das Auftreten des erläuterten Effekts. Dieser Wert lässt sich auch gut in Abbildung 5.14 nachvollziehen, denn wie schon erwähnt erfährt das Signal nach 400 Samples eine vollständige Umdrehung. Bei  $f_e = 30 \text{ kHz}$  tritt das Problem schon ab einer Länge von 200 Samples auf. Somit sollte entsprechend ein Wert im Zwischenbereich gewählt werden, um gute Ergebnisse zu erzielen.



Falls durch diese Maßnahmen kein befriedigendes Ergebnis erreicht wird, kann eine vorgeschaltete Schätzung der Frequenzablage bedacht werden. Mit diesem Wissen könnte das Signal zurückgedreht und damit ohne weitere Anpassungen weiter gearbeitet werden.

### 5.3.2 Folgen für die phasenbasierten Algorithmen

Im Falle der direkten Auswertung der Phasendifferenz und beim MUSIC- und ESPRIT-Algorithmus fällt die Kompensation eines Frequenzoffsets leichter, denn hier wird auf Basis des Spektrums gearbeitet. Der Versatz verschiebt dieses zwar, die jeweiligen Phasen bleiben aber gleich. Dies gilt auch für die Subträger sowie für deren Abstand.

Der einzige Aspekt, der beachtet werden muss, ist die Bestimmung der Subträger. Die Formel 4.16 darf nicht angewandt werden, da sich die Subträger ja nicht mehr an denselben Stellen wie im Sendesignal befinden. Stattdessen können sie durch Maximumsuche im Betragsspektrum detektiert werden, wie bei der reinen Phasendifferenzmethode erläutert (s. Kap. 4.2). Abgesehen davon können die Verfahren wie beschrieben eingesetzt werden, ohne dass mit schlechteren Schätzwerten zu rechnen ist.

# KAPITEL 6

---

## Zusammenfassung und Ausblick

---

Im Rahmen dieser Arbeit wurden verschiedene Ansätze zur Laufzeitschätzung mit Mehrträgersignalen untersucht. Aufgrund der notwendigen Energieeffizienz des Senders handelt es sich um ein Signal, bei dem der Großteil der Signalenergie möglichst weit an die Bandgrenzen gesetzt wird, sodass sich zwei Subträger bilden. Neben der Distanzschätzung durch Korrelation ergibt sich dadurch auch die Möglichkeit der Phasendifferenzauswertung.

Dementsprechend wurden vier Verfahren beschrieben. Bei der Korrelation aus Sende- und Empfangssignal wurde mit der linearen Interpolation der Differenzierung eine Möglichkeit aufgezeigt, die Genauigkeit der Ergebnisse zu verbessern. Ein systematischer Fehler lässt sich aufgrund der suboptimalen Interpolationsmethode dennoch nicht vermeiden.

Ein anderer Ansatz wurde bei der Bestimmung der Phasendifferenz der Subträger verfolgt. Mithilfe der DFT werden die Phasen der Subträger bestimmt und deren Differenz berechnet. Da zwischen Phasendrehung im Frequenzbereich und Laufzeit des Signals ein linearer Zusammenhang besteht, kann auf diese rückgeschlossen werden.

Die hochauflösenden Schätzalgorithmen MUSIC und ESPRIT wurden ebenfalls untersucht. Dazu wird eine Kovarianzmatrix aus den FFTs kürzerer Teilsequenzen gebildet und eine Zerlegung in Signal- und Rauschraum vorgenommen, was die Genauigkeit im Vergleich zur direkten Phasendifferenzbestimmung steigern sollte.

Beim Testen der implementierten Algorithmen zeigten sich teils Effekte, welche auf die Kanalsimulation zurückzuführen waren. Durch eine angepasste Methode zur Realisierung der Subsampleverzögerung konnten diese behoben werden. Die Evaluierung unter Einfluss von additivem weißen Rauschen hat schließlich ergeben, dass sich der Interpolationsfehler bei der Korrelation v. a. für hohe Träger-Rausch-Verhältnisse deutlich bemerkbar macht, was im Vergleich zu den übrigen Schätzverfahren stets schlechtere Ergebnisse bedeutet.

So wird die CRLB zwar auch bei der Auswertung der Phasendifferenz nicht ganz erreicht, allerdings erkennt man, dass die Abweichungen gleichmäßig mit zunehmender Rauschleistung und damit analog zu dieser ansteigen. Eine erhoffte Verbesserung durch die Anwendung der Subraumalgorithmen konnte nicht festgestellt werden, stattdessen ergeben sich leicht schlechtere Schätzwerte, wenn die Teilsequenzen zu kurz werden.

Auch ein etwaiger Frequenzversatz wurde in Betracht gezogen. Auf die phasenbasierten Schätzer hat dies keine Auswirkungen, da Subträgerabstand und Phasendrehung unverändert bleiben. Bei der Korrelation sind hingegen Anpassungen notwendig, da das empfangene Basisbandsignal komplexwertig wird. Zur Kompensation wird in diesem Fall mit kürzeren Replicas korreliert.

Schlussfolgernd lässt sich sagen, dass die reine Phasendifferenzauswertung im Falle des angenommenen Einweg-Kanalmodells die zuverlässigsten Ergebnisse liefert. Gleichzeitig hält sich auch der Aufwand hierbei in Grenzen, sodass dieses Verfahren vorzuziehen ist.

Da es sich bei den Einsatzorten des entwickelten Ortungssystems vornehmlich um Wälder handelt, ist die Betrachtung mit dem hier verwendeten Kanalmodell noch nicht ausreichend. Zur weiteren Einordnung der Schätzverfahren ist deshalb eine genauere Untersuchung unter Mehrwegeausbreitung sinnvoll. Hinsichtlich der Mehrwegerobustheit wäre es auch interessant, Mehrträgersignale mit mehr als zwei Subträgern zu betrachten und diese explizit zu nutzen. Der folgende Schritt wäre schließlich, die erzielten Simulationsergebnisse mit realen Messungen zu stützen.

---

## Literaturverzeichnis

---

- [1] ENGEL, Ulrich: A Theoretical Performance Analysis of the Modernized GPS Signals. In: *Position, Location and Navigation Symposium, 2008 IEEE/ION*, 2008, S. 1067–1078 (Zitiert auf Seiten 14 und 17)
- [2] KAY, Steven M.: *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory*. Prentice Hall PTR, 1993 (Zitiert auf Seiten 13 und 14)
- [3] LAAKSO, Timo I. ; VÄLIMÄKI, Vesa ; KARJALAINEN, Matti ; LAINE, Unto K.: Splitting the Unit Delay - Tools for fractional delay filter design. In: *IEEE Signal Processing Magazine* Bd. 13, 1996, S. 30–60 (Zitiert auf Seite 21)
- [4] LI, Xin ; ZHANG, Yimin: Multifrequency-based Range Estimation of RFID Tags. In: *RFID, 2009 IEEE International Conference on*, 2009, S. 147–154 (Zitiert auf Seiten 7 und 30)
- [5] LI, Xinrong ; PAHLAVAN, Kaveh: Super-Resolution TOA Estimation with Diversity for Indoor Geolocation. In: *IEEE Transactions on Wireless Communications* Bd. 3, 2004, S. 224–234 (Zitiert auf Seite 9)
- [6] LINDNER, Thomas: *Gemeinsame Schätzung von Verzögerung und Einfallswinkel bei breitbandigen Funksignalen*, Georg-Simon-Ohm-Hochschule Nürnberg, Diplomarbeit, September 2013 (Zitiert auf Seiten 10 und 11)
- [7] MISRA, Pratap ; ENGE, Per: *Global Positioning System*. 2. Ganga-Jamuna Press, 2006 (Zitiert auf Seiten 4 und 6)
- [8] MODDEMEIJER, Rudy: On the determination of the position of extrema of sampled correlators. In: *IEEE Transactions on Signal Processing*, 39 (1), 1991, S. 216–219 (Zitiert auf Seiten 7 und 27)

- [9] NOWAK, Thorsten ; HIEROLD, Martin ; KOELPIN, Alexander ; HARTMANN, Markus ; TRÖGER, Hans-Martin ; THIELECKE, Jörn: System and Signal Design for an Energy-efficient Multi-frequency Localization System / Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg. 2014. – Forschungsbericht (Zitiert auf Seiten 7, 14, 16, 30 und 47)
- [10] OZIEWICZ, Marian: On Application of MUSIC Algorithm to Time Delay Estimation in OFDM Channels. In: *IEEE Transactions on Broadcasting* Bd. 51, 2005, S. 249–255 (Zitiert auf Seite 10)
- [11] PEI, Soo-Chang ; LAI, Yun-Chiu: Closed Form Variable Fractional Time Delay Using FFT. In: *IEEE Signal Processing Letters* Bd. 19, 2012, S. 299–302 (Zitiert auf Seite 22)
- [12] PILLAI, S. U. ; KWON, Byung H.: Forward/Backward Spatial Smoothing Techniques for Coherent Signal Identification. In: *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing* Bd. 37, 1989, S. 8–15 (Zitiert auf Seite 10)
- [13] REBEYROL, Emilie ; MACABIAU, Christophe ; LESTARQUIT, Laurent ; RIES, Lionel ; ISSLER, Jean-Luc ; BOUCHERET, Marie-Laure ; BOUSQUET, Michel: BOC Power Spectrum Densities. In: *Proceedings of the National Technical Meeting of the Institute of Navigation, ION-NTM 2005*, 2005 (Zitiert auf Seite 17)
- [14] ROY, Richard ; KAILATH, Thomas: ESPRIT - Estimation of Signal Parameters Via Rotational Invariance Techniques. In: *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing* Bd. 37, 1989, S. 984–995 (Zitiert auf Seite 11)
- [15] SCHMIDT, Ralph O.: Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation. In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* Bd. 34, 1986, S. 276–280 (Zitiert auf Seite 10)
- [16] YU, Kegen ; SHARP, Ian ; GUO, Jay: *Ground-Based Wireless Positioning*. John Wiley and Sons, Ltd, 2009 (Zitiert auf Seiten 5 und 6)

---

## Abbildungsverzeichnis

---

2.1	Korrelation eines PN-Codes mit sich selbst verzögert . . . . .	4
2.2	Ideale und bandbegrenzte Autokorrelationsfunktion . . . . .	5
2.3	Blockdiagramm eines modernen Empfängers . . . . .	6
2.4	Beispiel zur Veranschaulichung der Phasendifferenz . . . . .	8
2.5	Spektrale Charakteristik des eingesetzten Mehrträgersignals . . . . .	16
3.1	Erzeugtes Sendesignal komplett und gezoomt . . . . .	19
3.2	Blockschaltbild zum angenommenen Kanalmodell . . . . .	20
3.3	Abtastung der sinc-Funktion . . . . .	22
3.4	Beispielhaftes Empfangssignal . . . . .	23
4.1	Zyklische KKF zwischen Empfangs- und Sendesignal mit längerem und kürzerem Replica . . . . .	25
4.2	Blockschaltbild zur Distanzschätzung durch Korrelation mit Interpolation .	27
4.3	Veranschaulichung der Interpolation der Korrelationsdifferenzierung . . . .	28
4.4	Spektren des Empfangssignals für verschiedene Distanzen . . . . .	29
4.5	Verlauf der Phasendifferenz für Distanzen im Eindeutigkeitsbereich . . . .	31
4.6	Blockschaltbild zur Bestimmung der Phasendifferenz inkl. Matched-Filter .	32
4.7	Blockschaltbild zur Berechnung der Kovarianzmatrix für MUSIC und ESPRIT	34
4.8	Blockschaltbild zum MUSIC-Algorithmus . . . . .	34
4.9	Beispielhaftes MUSIC-Spektrum . . . . .	35
4.10	Blockschaltbild zum ESPRIT-Algorithmus . . . . .	36
5.1	Schätzfehler bei einfacher Maximumsuche in der KKF . . . . .	38
5.2	Gesampelte und quasi-kontinuierliche KKF . . . . .	39
5.3	Schätzfehler nach Interpolation der Maxima der KKF . . . . .	40

---

5.4	Veranschaulichung des Interpolationsfehlers . . . . .	41
5.5	Plot des erhaltenen Ausdrucks für den Linearisierungsfehler . . . . .	43
5.6	Schätzfehler nach Auswertung der Phasendifferenz . . . . .	44
5.7	Schätzfehler des MUSIC- und ESPRIT-Algorithmus . . . . .	45
5.8	Träger-zu-Rauschverhältnis und CRLB abhängig von der Distanz . . . . .	47
5.9	RMSE bei Distanzschätzung mittels Korrelation . . . . .	48
5.10	RMSE bei Auswertung der Phasendifferenz . . . . .	49
5.11	RMSE bei Nutzung des MUSIC-Algorithmus . . . . .	50
5.12	RMSE bei Nutzung des ESPRIT-Algorithmus . . . . .	51
5.13	Vergleich des RMSE aller Verfahren . . . . .	51
5.14	Komplexes Signal nach Frequenzversatz . . . . .	54
5.15	Reaktion der Korrelation auf verschiedene Frequenzoffsets . . . . .	54
5.16	RMSE für verschiedene Replicallängen mit Frequenzversatz . . . . .	55

---

## Tabellenverzeichnis

---

5.1	Parameter für die durchgeführten Simulationen . . . . .	37
-----	---	----