

Моделирование движения квадрокоптера по траектории с минимальной ошибкой отклонения

Кочкаров А.А., НТЦ-3 ОАО «РТИ», Финансовый университет при Правительстве РФ

AKochkarov@oaorti.ru

Агишев Р.Т., МФТИ (ГУ)

agishev_ruslan@mail.ru

траектории [Mellinger D., Michael N., and Kumar V, 2010].

Аннотация

Данная статья описывает компьютерную модель квадрокоптера. Основной задачей спроектированной модели является моделирование движения БПЛА вдоль различных траекторий с минимальной ошибкой отклонения. Представлены результаты облета вдоль прямой линии и спирали, а также вдоль гладкой кривой, задаваемой контрольными точками. Для каждого варианта облета траектории предоставлены графики зависимости координат и скоростей БПЛА от времени, демонстрирующие малую величину ошибки отклонения от желаемой траектории.

1 Введение

В последние годы все большее применение в различных областях находят беспилотные летательные аппараты [Кочкаров А.А., 2015; Малинецкий Г.Г., Кочкаров А.А., 2014; Кочкаров А.А., Яцкин Д.В., Рахманов О.А., 2016; Кочкаров А.А., Калинов И.А., 2016; Кочкаров А.А., Яцкин Д.В., Калинов И.А., 2016]. В гражданской сфере чаще всего используются квадрокоптеры, т.е. дроны с четырьмя винтами. Легкость, малый размер, маневренность, простота управления – основные достоинства квадрокоптеров, которые позволяют использовать их во многих отраслях. Установка на квадрокоптеры дополнительного оборудования (например, камер) позволяет справляться с проблемами преследование нарушителей, обзора местности в тяжелых условиях (наводнение). В настоящее время квадрокоптеры широко используются в городских условиях с плотной застройкой. Поэтому движение по траектории является важным вопросом. Существует множество алгоритмов реализации траекторной задачи. Результатом данной работы является реализация алгоритма с минимальной ошибкой следования БПЛА желаемой

2 Математическая модель движения БПЛА

Движением квадрокоптера можно управлять, изменяя скорости вращения винтов. Аппарат движется относительно неподвижной инерциальной системы отсчета, связанной с Землей. Угловое положение аппарата задаем тремя углами Крылова: углами крена φ , тангажа θ и рыскания ψ , определяющими вращение вокруг осей соответственно.

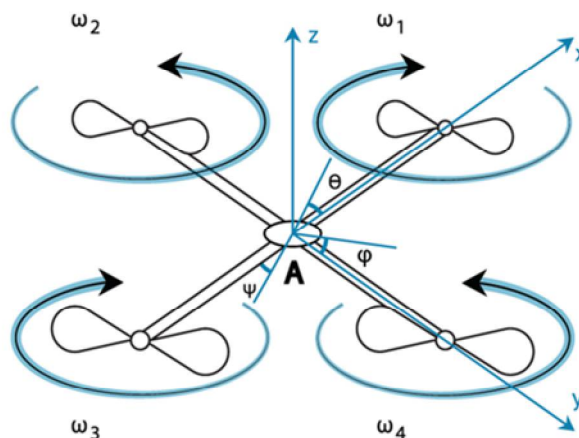


Рис. 1 Конфигурация "+" квадрокоптера

Второй закон Ньютона для квадрокоптера будет иметь вид:

$$m \frac{dv}{dt} = f,$$

f – вектор суммарной силы, приложенной к БПЛА

При переходе системы из неподвижной системы координат в подвижную уравнение движение принимает вид:

$$m \frac{dv}{dt} = m \left(\frac{d_A v}{dt} + w \times v \right) = f,$$

Связь между линейными скоростями и инерциальной и подвижной системой отчета задается соотношением:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = R v_A,$$

R – матрица поворота:

$$R = \begin{bmatrix} C_\psi C_\theta & C_\psi S_\theta S_\varphi - S_\psi C_\varphi & C_\psi S_\theta C_\varphi + S_\psi S_\varphi \\ S_\psi C_\theta & S_\psi S_\theta S_\varphi + C_\psi C_\varphi & S_\psi S_\theta C_\varphi - C_\psi S_\varphi \\ -S_\theta & S_\varphi C_\theta & C_\varphi C_\theta \end{bmatrix},$$

где $S_x = \sin(x)$,

$C_x = \cos(x)$.

На квадрокоптер действует сила тяжести. В подвижной системе координат сила тяжести принимает вид:

$$F_g = \begin{bmatrix} mg \sin(\theta) \\ -mg \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ -mg \cos(\varphi) \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Также на квадрокоптер действует подъемная сила:

$$F = k(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2),$$

где k - экспериментально определяемая постоянная, а ω_i - скорость вращения i -ого винта.

Описание движения квадрокоптера задает следующая совокупность уравнений:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = -g \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_\psi S_\theta C_\varphi + S_\psi S_\varphi \\ S_\psi S_\theta C_\varphi - C_\psi S_\varphi \\ C_\varphi C_\theta \end{bmatrix} \frac{F}{m}.$$

Эту систему необходимо дополнить силой сопротивления набегающего потока воздуха:

$$F_{comp} = c_d \frac{\rho v^2}{2} S,$$

Допустим далее, что тело квадрокоптера является симметричным, представляет собой шар радиусом R_s и массой M_s , на расстоянии от которого находятся моторы, представленные в виде материальных точек массой M_m на расстоянии длины лучей l от центра, что изображено на рис. 2:

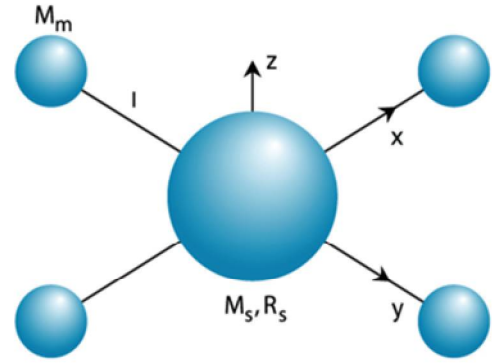


Рис. 2 Схематическое изображение квадрокоптера

Тензор инерции такого тела имеет вид:

$$J = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix},$$

где компоненты тензора выглядят следующим образом:

$$J_x = J_y = \frac{2M_s R_s^2}{5} + 2l^2 M_m,$$

$$J_z = \frac{2M_s R_s^2}{5} + 4l^2 M_m,$$

Угловые ускорения определяются уравнениями Эйлера:

$$I \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(F_2 - F_4) \\ L(F_3 - F_1) \\ M_1 - M_2 + M_3 - M_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times I \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}.$$

Линеаризованная с учетом малости углов тангажа и крена математическая модель квадрокоптера в подвижной системе отсчета имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = -g\theta - \text{sign}(\dot{x})c_d \frac{\rho \dot{x}^2}{2} S_x \\ \ddot{y} = g\varphi - \text{sign}(\dot{y})c_d \frac{\rho \dot{y}^2}{2} S_y \\ \ddot{z} = g - \frac{F}{m} - \text{sign}(\dot{z})c_d \frac{\rho \dot{z}^2}{2} S_z \\ \ddot{\varphi} = \frac{2}{J_x} l k \omega_0 (\omega_4 - \omega_2) \\ \ddot{\theta} = \frac{2}{J_y} l k \omega_0 (\omega_3 - \omega_1) \\ \ddot{\psi} = \frac{2}{J_z} b \omega_0 (-\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 + \omega_4) \end{array} \right.$$

3 Управление движением БПЛА

В задаче следования БПЛА заданной траектории важно быстрое стремление к нулю ошибки отклонения по координате. Для этой цели необходимо потребовать, чтобы координаты БПЛА удовлетворяли уравнениям:

$$(\ddot{r}_{i,T} - \ddot{r}_{i,des}) + k_{d,i}(\dot{r}_{i,T} - \dot{r}_i) + k_{p,i}(r_{i,T} - r_i) = 0$$

$$i = \overline{1,3}$$

Последние равенства описывают работу ПД-регулятора [Вадутов О.С., 2014]. Решения каждого из трех уравнений экспоненциально стремятся к желаемым значениям $r_{i,des}$.

Управляющие движением квадрокоптера величины (силы тяги четырех моторов и создаваемые ими моменты) далее выражаются через переменные, определяющие положение (координаты x, y, z) и ориентацию (углы крена, тангажа и рысканья) БПЛА в пространстве. Получаем полный набор соотношений для задачи следования траектории [N. Michael, D. Mellinger, Q. Lindsey, and V. Kumar, 2010]:

$$F = m \cdot (g - K_{d,z}\dot{z} - K_{p,z}(z - z_{des})),$$

$$\ddot{x}_T = \ddot{x}_{des} + K_{p,x}(x_{des} - x) + K_{d,x}(\dot{x}_{des} - \dot{x}),$$

$$\ddot{y}_T = \ddot{y}_{des} + K_{p,y}(y_{des} - y) + K_{d,y}(\dot{y}_{des} - \dot{y}),$$

$$\phi_{des} = \frac{1}{g}(\ddot{x}_T \cdot \sin(\psi_{des}) - \ddot{y}_T \cdot \cos(\psi_{des})),$$

$$\theta_{des} = \frac{1}{g}(\ddot{x}_T \cdot \cos(\psi_{des}) + \ddot{y}_T \cdot \sin(\psi_{des})),$$

$$p_{des} = 0, q_{des} = 0, r_{des} = \dot{\psi}_{des},$$

$$\vec{M} = \begin{bmatrix} K_{p,\phi}(\phi_{des} - \phi) + K_{d,\phi}(p_{des} - p) \\ K_{p,\theta}(\theta_{des} - \theta) + K_{d,\theta}(q_{des} - q) \\ K_{p,\psi}(\psi_{des} - \psi) + K_{d,\psi}(r_{des} - r) \end{bmatrix}.$$

С помощью данной системы уравнений реализована модель движение квадрокоптера по двум заданным траекториям: вдоль прямой линии и спирали, см. рис. 3, 4.

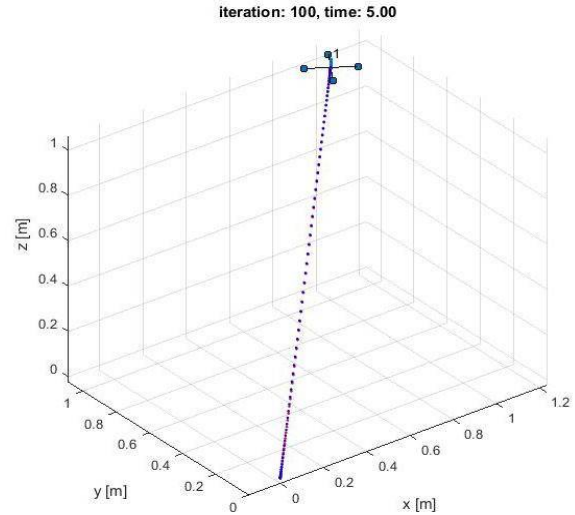


Рис. 3. Движение квадрокоптера вдоль прямой линии.

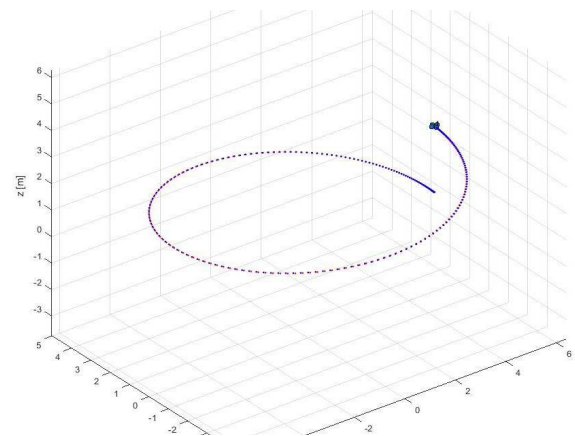


Рис. 4. Движение квадрокоптера вдоль спирали.

На графиках красными точками отмечена траектория БПЛА, синими – желаемая траектория. Ошибки траекторий отслеживались с помощью графиков зависимости координат и скоростей от времени, рис. 5-8. С их помощью производилась настройка ПД-регуляторов.

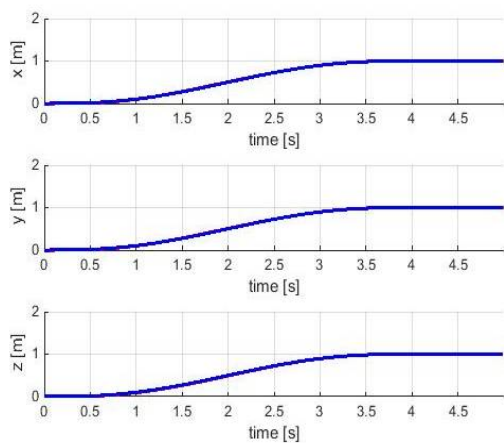


Рис. 5. Графики $\vec{r}(t)$ при движении вдоль прямой линии.

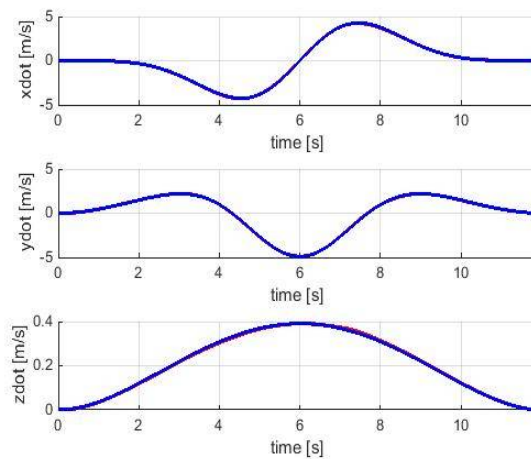


Рис. 8. Графики $\vec{v}(t)$ при движении вдоль спирали.

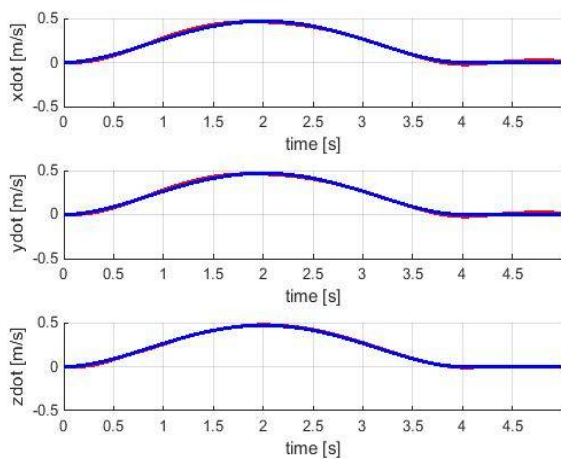


Рис. 6. Графики $\vec{v}(t)$ при движении вдоль прямой линии.

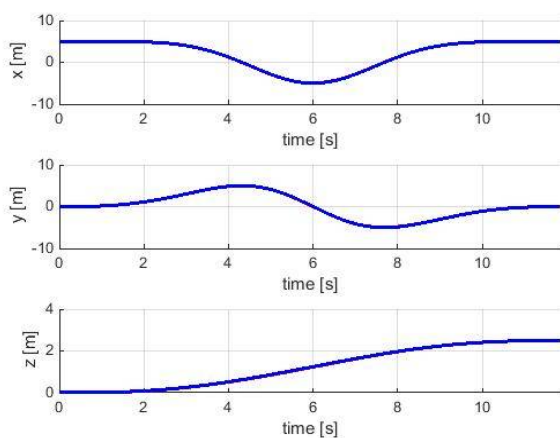


Рис. 7. Графики $\vec{r}(t)$ при движении вдоль спирали.

4 Траектория, задаваемая контрольными точками

Более интересной и полезной с практической точки зрения выглядит задача проектирования движения БПЛА по траектории, задаваемой лишь контрольными точками. В реальности зачастую приходится иметь дело с препятствиями. Благодаря своей маневренности и способности зависать в воздухе, квадрокоптеры используются в городской плотно застроенной среде. Важным ограничением также является малое отклонение БПЛА от намеченной траектории. Из уравнений движения квадрокоптера можно получить, что управляющие сигналы (силы тяги и создаваемые моменты) зависят от $\ddot{\vec{r}}_{int}^{(4)}$. Поэтому для построения гладких кривых, проходящих через заданный набор точек, используется вариационный метод минимизации четвертой производной по времени от координаты [Daniel Mellinger and Vijay, 2011]. Т.е. для нахождения кривой, соединяющей две соседние контрольные точки траектории, решается математическая задача:

$$p^*(t) = \arg \min_{p(t)} \int_0^T (p^{(4)})^2 dt$$

Здесь $p^*(t)$ – искомая траектория, T – время, затрачиваемое на ее прохождение до следующей контрольной точки. Решение подобной вариационной задачи эквивалентно решению дифференциального уравнения 8-ого порядка Эйлера-Лагранжа. Поэтому искомую траекторию нужно задать как полином 7-ой степени времени, например:

$$p_i(t) = \alpha_{i0} + \alpha_{i1} \frac{t - S_{i-1}}{T_i} + \dots + \alpha_{i7} \left(\frac{t - S_{i-1}}{T_i} \right)^7$$

$$S_0 = 0, S_i = \sum_{k=1}^i T_k$$

Здесь введены обозначения: S_i – время достижения i -ой контрольной точки при движении из начальной. Все описанные таким образом полиномы p_i , $i=1..n$, должны удовлетворять $8n$ условиям для нахождения всех констант α_{ij} , $i=1..n$, $j=0..7$, а именно:

$$p_i(S_{i-1}) = w_{i-1}, p_i(S_i) = w_i, i = \overline{1, n}$$

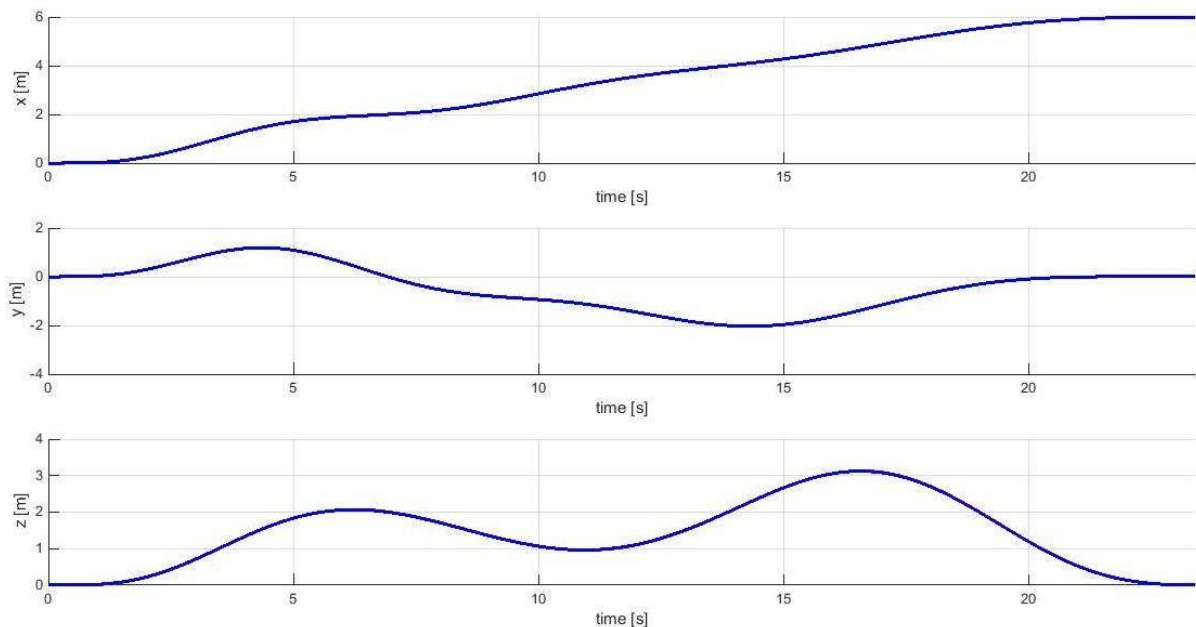
$$p_1^{(k)}(S_0) = p_n^{(k)}(S_n) = 0, k = \overline{1, 3}$$

$$p_i^{(k)}(S_i) = p_{i+1}^{(k)}(S_i), k = \overline{1, 6}$$

Такая система уравнений относительно неизвестных α_{ij} далее записывается в матричном виде:

$$A\alpha = b$$

Здесь A – матрица, размером $8n \times 8n$, α – столбец искомых коэффициентов, b – матрица $8n \times 3$. Решая систему уравнений отдельно для каждого из столбцов матрицы b , получаем коэффициенты, задающие траектории $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ соответственно. Результаты моделирования движения через 6 контрольных точек приведены на рис. 9.



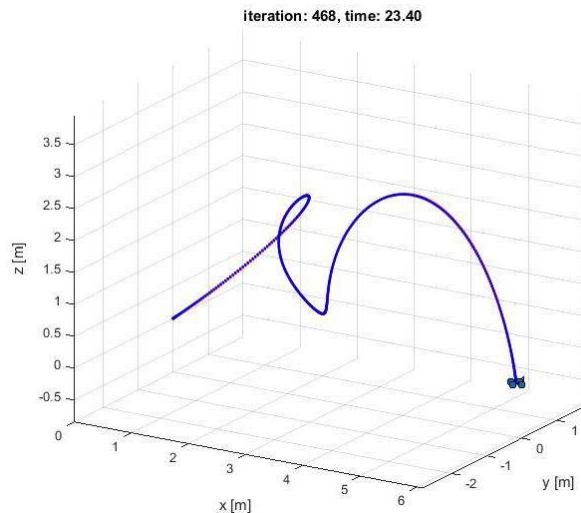


Рис. 9. Движение вдоль гладкой кривой, заданной контрольными точками:

$$\begin{aligned} (0 \ 0 \ 0) &\rightarrow (1 \ 1 \ 1) \rightarrow (2 \ 0 \ 2) \rightarrow \\ (3 \ -1 \ 1) &\rightarrow (4 \ -2 \ 2) \rightarrow \\ (5 \ -1 \ 3) &\rightarrow (6 \ 0 \ 0) \end{aligned}$$

На рис. 10 далее приведены графики полиномов, полученных в результате решения вариационной задачи.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 16-01-00342, грант № 16-29-04268) и гранта Президента РФ (НШ-6831.2016.8).

Рис. 10. Зависимость координат от времени при движении через 6 контрольных точек.

Список литературы

- Кочкаров А.А. *Некоторые особенности применения малых и сверхмалых беспилотных летательных аппаратов* // Труды Второй Всероссийской научно-технической конференции молодых конструкторов и инженеров «Минцевские чтения», посвященной 120-летию со дня рождения академика А.Л. Минца и 60-летию аспирантуры Радиотехнического института. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. – С. 301-304.
- Малинецкий Г.Г., Кочкаров А.А. *Будущее российского оружия и междисциплинарные подходы* // Интеллект и технологии. – 2014. – № 1(7). – С. 48-51.
- Кочкаров А.А., Яцкин Д.В., Рахманов О.А. *Особенности решения задачи геометрического мониторинга* // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2016. – № 2(175). – С. 158–168.
- Кочкаров А.А., Калинов И.А. *Создание программно-аппаратного комплекса пространственной навигации и мониторинга мультироторного БПЛА на основе модифицированного алгоритма визуальной одометрии* // Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. – 2016. – № 09. – С. 74–91.
- Кочкаров А.А., Яцкин Д.В., Калинов И.А. *Новый подход в применении малых БПЛА для мониторинга сложных пространств* // Интеллект и технологии. – 2016. – № 2(14). – С. 68-71.
- Mellinger D., Michael N., and Kumar V. *Trajectory Generation and Control for Precise Aggressive Maneuvers with Quadrotors* // Int. Symposium on Experimental Robotics, December 2010.
- Вадутов О.С. *Настройка типовых регуляторов по методу Циглера-Никольса* // Издательство Томского политехнического университета, 2014.
- Michael N., Mellinger D., Lindsey Q., and Kumar V. *The GRASP Multiple Micro-UAV Testbed*, IEEE Robotics and Automation Magazine, 2010.
- Mellinger D., Kumar V. *Minimum Snap Trajectory Generation and Control for Quadrotors* // 2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation Shanghai International Conference Center May 9-13, 2011, Shanghai, China.

