

УДК 517.977

Управление плоским движением квадрокоптера

Канатников А. Н.¹, Акопян К. Р.^{1,*}

* mathmod@bmstu.ru

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Исследуется движение квадрокоптера. Летательный аппарат квадрокоптер рассматривается как твердое тело. Для него построена математическая модель движения и определены упрощенные модели движения в горизонтальной и вертикальной плоскости. Модели движения квадрокоптера в вертикальной и горизонтальной плоскостях исследованы на управляемость. Методом линеаризации обратной связи построено соответствующее программное управление для модели движения в горизонтальной плоскости. Методом нелинейной стабилизации разработано стабилизирующее управление для стабилизации программной траектории, построенной в горизонтальной плоскости.

Ключевые слова: плоское движение; управление; стабилизация; управляемость; квадрокоптер

Введение

Квадрокоптер — летательный аппарат с четырьмя несущими винтами (рис. 1). Две пары винтов имеют противоположные направления вращения, что позволяет в штатном режиме гасить динамические моменты, создаваемые винтами.

В множестве современных летательных аппаратов квадрокоптер относится к беспилотным летательным аппаратам (БПЛА), относительно дешевым и простым для проектирова-



Рис. 1. Квадрокоптер

ния. Квадрокоптеры способны летать в плохую погоду, зависать в воздухе на достаточно длительное время, вести наблюдение за объектами и выполнять много других задач. Они нашли свое применение в спасательных операциях, в сельском хозяйстве, в военном деле и в многих других областях.

Для квадрокоптеров актуальны задачи планирования маршрутов и управления. Эти задачи имеют много разных вариантов, в которых учитываются и ограниченные ресурсы современных БПЛА, и необходимость учета возможных препятствий, например, при организации полетов в пересеченной местности или в городской среде, и учет погодных условий (в частности, ветровой обстановки). Этим задачам посвящено много исследований, отраженных в целом ряде публикаций (отметим интересный обзор [1] по теме и ссылки в нем). Для синтеза управления этими аппаратами использовались самые разные подходы и методы: линейные аппроксимации [2], метод скользящих режимов [3], метод накрытий [4] и др.

В данной статье квадрокоптер рассматривается как твердое тело. Анализируются кинематические и динамические уравнения движения. Выделяются два случая движения: в вертикальной и в горизонтальной плоскостях. Управление строится с помощью приведения управляемой аффинной системы к каноническому виду [5] и использования метода нелинейной стабилизации [6].

Статья организована следующим образом. В разделе 1 проанализированы кинематическая и динамическая модель движения твердого тела, на основе которых моделируется движение квадрокоптера, в разделе 2 получена математическая модель движения квадрокоптера, в разделе 3 и 4 получены математические модели движения квадрокоптера в вертикальной и горизонтальной плоскостях. В разделе 5 исследована управляемость моделей. В разделе 6 построено программное управление. В разделе 7 построено стабилизирующее управление.

1. Движение твердого тела

Состояние твердого тела в пространстве можно определить, описав положение системы координат, связанной с квадрокоптером (подвижной системы координат), относительно системы координат, связанной с Землей (неподвижной системы координат).

Пусть $Oxyz$ — неподвижная система координат (ось z направлена по местной вертикали), $O'x'y'z'$ — подвижная система координат. Рассмотрим также промежуточную систему координат $O'xyz$, центр которой совмещен с центром подвижной системы координат (центром масс твердого тела), а оси направлены по осям неподвижной системы координат. Переход от промежуточной системы координат к подвижной можно выполнить путем трех поворотов (рис. 2):

- вокруг оси z на угол ψ против часовой стрелки (ψ — угол рыскания);
- вокруг нового положения y_1 оси y на угол ϑ по часовой стрелке (ϑ — угол тангажа);
- вокруг нового положения x_1 оси x на угол γ против часовой стрелки (γ — угол крена).

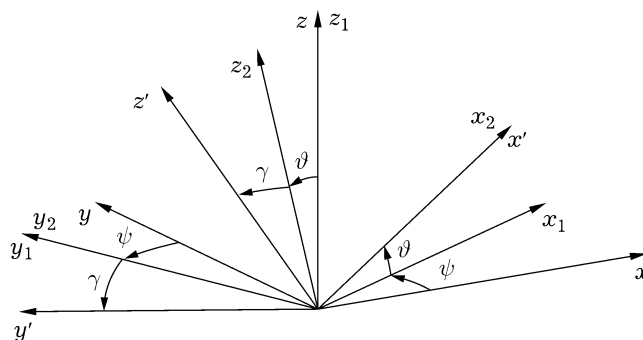


Рис. 2. Преобразование неподвижной системы координат в подвижную

Углы ψ , ϑ , γ называют углами Крылова. Кинематические уравнения в углах Крылова выглядят следующим образом [7]:

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sin \gamma}{\cos \vartheta} & \frac{\cos \gamma}{\cos \vartheta} \\ 0 & -\cos \gamma & \sin \gamma \\ 1 & -\sin \gamma \operatorname{tg} \vartheta & -\cos \gamma \operatorname{tg} \vartheta \end{pmatrix} \omega. \quad (1)$$

Уравнения динамики вращения твердого тела в углах Крылова имеют следующий вид [7]:

$$I\dot{\omega} + \omega \times I\omega = M, \quad (2)$$

где I — матрица инерции; ω — вектор угловой скорости; M — суммарный момент сил. Все данные записаны в подвижной системе координат. Вид матрицы инерции зависит от того, как направлены оси подвижной системы координат. Наиболее просто эта матрица записывается, если оси подвижной системы координат направлены по главным осям инерции. В этом случае

$$I = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}.$$

Уравнение (2) является векторным. Из них легко получить уравнения динамики в координатной записи:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = \frac{M_x}{I_x} - \frac{\omega_y \omega_z (I_z - I_y)}{I_x}; \\ \dot{\omega}_y = \frac{M_y}{I_y} - \frac{\omega_z \omega_x (I_x - I_z)}{I_y}; \\ \dot{\omega}_z = \frac{M_z}{I_z} - \frac{\omega_x \omega_y (I_y - I_x)}{I_z}. \end{cases}$$

Динамика центра масс определяется основным законом динамики

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g} + \frac{\mathbf{F}}{m},$$

где \mathbf{g} — вектор ускорения свободного падения; \mathbf{F} — сумма все сил, действующих на твердое тело за вычетом силы тяжести; m — масса твердого тела. Выделение силы тяжести в

отдельное слагаемое связано с тем, что эта сила привязана к неподвижной системе координат, в то время как остальные силы, формируемые органами управления и внешней средой, привязаны к подвижной системе координат.

В подвижной системе координат уравнения движения центра масс можно записать следующим образом:

$$\ddot{\mathbf{r}}_b = -Rg\mathbf{k}_z + \frac{\mathbf{F}_b}{m},$$

где \mathbf{r}_b и \mathbf{F}_b — радиус-вектор центра масс и вектор сил, записанные в подвижной системе координат, R — матрица перехода из промежуточной системы координат в подвижную, а \mathbf{k}_z — базисный орт неподвижной системы координат, направленный вдоль оси Oz . В углах Крылова матрица перехода имеет следующий вид:

$$R = \begin{pmatrix} c_\psi c_\vartheta & -s_\psi c_\gamma - c_\psi s_\vartheta s_\gamma & s_\psi s_\gamma - c_\psi s_\vartheta c_\gamma \\ s_\psi c_\vartheta & c_\psi c_\gamma - s_\psi s_\vartheta s_\gamma & -c_\psi s_\gamma - s_\psi s_\vartheta c_\gamma \\ s_\vartheta & c_\vartheta s_\gamma & c_\vartheta c_\gamma \end{pmatrix},$$

где $c_\psi, c_\vartheta, c_\gamma$ — косинусы соответствующих углов, а $s_\psi, s_\vartheta, s_\gamma$ — синусы этих углов.

Запишем уравнения движения центра масс в координатной форме:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{F}{m}(-\cos \gamma \cos \psi \sin \vartheta + \sin \gamma \sin \psi); \\ \ddot{y} = \frac{F}{m}(-\cos \psi \sin \gamma - \cos \gamma \sin \psi \sin \vartheta); \\ \ddot{z} = -g + \frac{F}{m} \cos \gamma \cos \vartheta. \end{cases}$$

Таким образом, математическая модель движения твердого тела в углах Крылова имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{F}{m}(-\cos \gamma \cos \psi \sin \vartheta + \sin \gamma \sin \psi); \\ \ddot{y} = \frac{F}{m}(-\cos \psi \sin \gamma - \cos \gamma \sin \psi \sin \vartheta); \\ \ddot{z} = -g + \frac{F}{m} \cos \gamma \cos \vartheta; \\ \dot{\psi} = \frac{\sin \gamma}{\cos \vartheta} \omega_y + \frac{\cos \gamma}{\cos \vartheta} \omega_z; \\ \dot{\vartheta} = -\omega_y \cos \gamma + \omega_z \sin \gamma; \\ \dot{\gamma} = \omega_x - \omega_y \sin \gamma \operatorname{tg} \vartheta - \omega_z \cos \gamma \operatorname{tg} \vartheta; \\ \dot{\omega}_x = \frac{M_x}{I_x} - \frac{\omega_y \omega_z (I_z - I_y)}{I_x}; \\ \dot{\omega}_y = \frac{M_y}{I_y} - \frac{\omega_z \omega_x (I_x - I_z)}{I_y}; \\ \dot{\omega}_z = \frac{M_z}{I_z} - \frac{\omega_x \omega_y (I_y - I_x)}{I_z}. \end{cases} \quad (3)$$

2. Математическая модель квадрокоптера

Математическую модель квадрокоптера получим из модели движения твердого тела, учтя в ней конкретный вид сил и моментов, генерируемых двигателями аппарата.

Схематично квадрокоптер представлен на рис. 3. Подвижная система координат выбрана так, что оси x' и y' направлены на пары противоположных роторов, а ось z' перпендикулярна плоскости, в которой расположены роторы. Двигатели квадрокоптера формируют силы тяги f_1, f_2, f_3, f_4 , направленные вдоль оси z' подвижной системы координат. Силы тяги винтов создают крутящие моменты M_1, M_2, M_3, M_4 , направленные по осям x' и y' , а сами винты — динамические моменты $M_{d1}, M_{d2}, M_{d3}, M_{d4}$, направленные по оси z' .

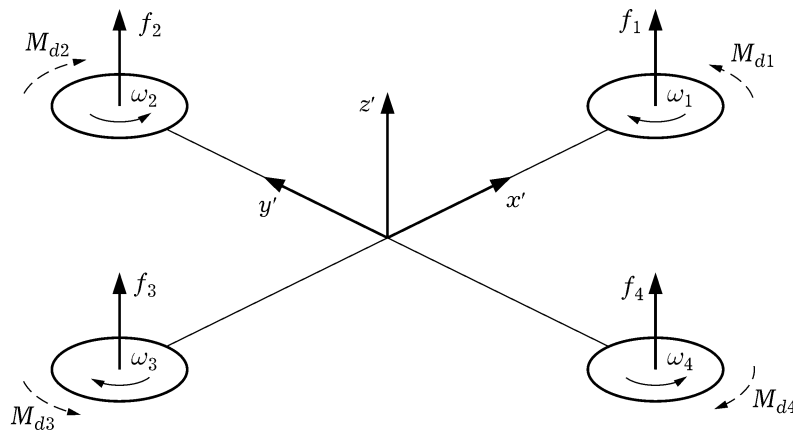


Рис. 3. Схема квадрокоптера

Сила каждого i -го ротора и соответствующий динамический момент определяются скоростью ω_i вращения ротора. Мы используем следующую модель [8]:

$$f_i = k\omega_i^2, \quad M_{d,i} = b\omega_i^2,$$

где k, b — коэффициенты пропорциональности, отражающие особенности роторов. Из этих соотношений вытекает, что динамические моменты роторов пропорциональны силам тяги: $M_{d,i} = (b/k)f_i$. Поэтому удобно взамен скоростей ω_i в качестве управлений рассматривать силы f_i тяги роторов.

Суммарный крутящий момент M_f всех четырех роторов можно записать формулой

$$M_f = l(f_2 - f_4)\mathbf{k}'_x + l(f_3 - f_1)\mathbf{k}'_y, \quad (4)$$

где l — расстояние от центра масс до центра ротора; \mathbf{k}'_x и \mathbf{k}'_y — орты связанной системы координат, направленные по соответствующим осям. Динамические моменты роторов дают вектор M_d , направленный вдоль оси Oz' связанной системы координат, который с учетом направлений вращения роторов можно записать в виде

$$M_d = \frac{b}{k}(f_1 - f_2 + f_3 - f_4)\mathbf{k}'_z. \quad (5)$$

Наконец, суммарная сила четырех роторов записывается в виде

$$\mathbf{F} = (f_1 + f_2 + f_3 + f_4)\mathbf{k}'_z. \quad (6)$$

Таким образом, в общей модели (3) движения твердого тела в случае квадрокоптера имеем

$$F = f_1 + f_2 + f_3 + f_4, \quad M_x = (f_2 - f_4)l, \quad M_y = (f_3 - f_1)l, \quad M_z = \frac{b}{k}(f_1 - f_2 + f_3 - f_4). \quad (7)$$

Система (3) с выражениями (7) представляет собой аффинную систему с четырьмя управлениями f_1, f_2, f_3, f_4 .

3. Движение квадрокоптера в вертикальной плоскости

В случае движения квадрокоптера в вертикальной плоскости выберем неподвижную систему координат так, что движение будет происходить в плоскости Oxz , т.е. при таком движении имеем $y = 0$. Дополнительно будем считать, что выполняется условие $\psi = 0$.

Учитывая условия $y \equiv 0$ и $\psi \equiv 0$, из второго уравнения системы (3) заключаем, что $\gamma \equiv 0$, а с помощью условия $\psi \equiv 0$ из четвертого уравнения находим, что $\omega_z \equiv 0$. Из шестого уравнения системы уже с учетом $\gamma \equiv 0$ и $\omega_z \equiv 0$ получаем $\omega_x \equiv 0$. Наконец, из 7-го и 9-го уравнений делаем вывод, что $M_x \equiv M_z \equiv 0$.

Перечисленные соотношения позволяют упростить базовую систему (3), сократив количество уравнений до четырех:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{F}{m} \sin \vartheta; \\ \ddot{z} = -g + \frac{F}{m} \cos \vartheta; \\ \dot{\vartheta} = -\omega_y; \\ \dot{\omega}_y = \frac{M_y}{I_y}. \end{cases} \quad (8)$$

В упрощенную модель управления входят через переменные F и M_y согласно формулам (7). При этом условия $M_x \equiv M_z \equiv 0$ накладывают на управления следующие связи:

$$f_2 - f_4 = 0, \quad f_1 - f_2 + f_3 - f_4 = 0.$$

Эти связи означают, что в системе (8) фактически двумерное управление. Для удобства выполним замену управлений, полагая

$$u_1 = f_2, \quad u_2 = f_3 - f_1.$$

Тогда $F = 4u_1$, $M_y = u_2$. Отметим, что по значениям u_1, u_2 с учетом связей управления f_1, f_2, f_3, f_4 восстанавливаются однозначно.

В результате замены управлений приходим к следующей аффинной системе, описывающей движение квадрокоптера в вертикальной плоскости:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{4u_1}{m} \sin \vartheta; \\ \ddot{z} = -g + \frac{4u_1}{m} \cos \vartheta; \\ \dot{\vartheta} = -\omega_y; \\ \dot{\omega}_y = \frac{lu_2}{I_y}. \end{cases} \quad (9)$$

4. Движение квадрокоптера в горизонтальной плоскости

Движение квадрокоптера в горизонтальной плоскости означает, что координата z его положения в процессе движения не меняется, т.е. $z = c = \text{const}$. Дополнительно наложим ограничение на ориентацию квадрокоптера в виде $\vartheta = 0$.

Из третьего уравнения системы (3) заключаем, что

$$F \cos \gamma = mg. \quad (10)$$

Из пятого уравнения этой системы с учетом, что $\vartheta = 0$, находим

$$\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma = 0. \quad (11)$$

Уравнение (11) связывает три фазовых переменных. Удобно левую часть уравнения рассмотреть как новую фазовую переменную. В связи с этим фазовые переменные ω_x, ω_z заменим новыми переменными μ, ν согласно формулам

$$\begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}.$$

С учетом преобразований и подстановок получим производные новых фазовых переменных в силу системы:

$$\begin{cases} \dot{\mu} = \frac{M_y}{I_y} \cos \gamma - \frac{M_z}{I_z} \sin \gamma - \left(\frac{I_x - I_z}{I_y} \cos^2 \gamma - \frac{I_y - I_x}{I_z} \sin^2 \gamma + 1 \right) \nu \omega_x; \\ \dot{\nu} = \frac{M_y}{I_y} \sin \gamma + \frac{M_z}{I_z} \cos \gamma - \left(\frac{I_x - I_z}{I_y} - \frac{I_y - I_x}{I_z} \right) \nu \omega_x. \end{cases}$$

Ограничение (11) после замены переменных примет вид $\mu = 0$. Из этого ограничения вытекает, что $\dot{\mu} = 0$, т.е.

$$\frac{M_y}{I_y} \cos \gamma - \frac{M_z}{I_z} \sin \gamma - \left(\frac{I_x - I_z}{I_y} \cos^2 \gamma - \frac{I_y - I_x}{I_z} \sin^2 \gamma + 1 \right) \nu \omega_x = 0. \quad (12)$$

Уравнения (10) и (12) представляют собой ограничения на управления. Таким образом, в рассматриваемом случае управление двумерно. Выполним замену управлений:

$$u_1 = \frac{M_x}{I_x}, \quad u_2 = \frac{M_y}{I_y} \sin \gamma + \frac{M_z}{I_z} \cos \gamma.$$

Получим следующую аффинную систему:

$$\begin{cases} \ddot{x} = g \operatorname{tg} \gamma \sin \psi; \\ \ddot{y} = -g \operatorname{tg} \gamma \cos \psi; \\ \dot{\psi} = \nu; \\ \dot{\gamma} = \omega_x; \\ \dot{\omega}_x = u_1 - \frac{I_z - I_y}{I_x} \nu^2 \cos \gamma \sin \gamma; \\ \dot{\nu} = u_2 - \left(\frac{I_x - I_z}{I_y} + \frac{I_y - I_x}{I_z} \right) \nu \omega_x \sin \gamma \cos \gamma. \end{cases} \quad (13)$$

5. Управляемость аффинных систем, описывающих движение квадрокоптера

Один из методов построения управления для аффинной системы — приведение ее к каноническому виду. Необходимым условием существования у аффинной системы регулярного канонического вида. В этом разделе мы проверим системы (9) и (13) на управляемость.

Рассмотрим аффинную систему

$$\dot{x} = A(x) + B(x)u, \quad (14)$$

где $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ и $u \in \mathbb{R}^m$ — векторы состояния и управления; $A(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))^T$ — гладкая векторная функция; $B(x) = (B_1(x), \dots, B_m(x)) = (b_{ij}(x))$ — гладкая функциональная матрица. Этой системе соответствуют гладкие векторные поля

$$A = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad B_j = \sum_{i=1}^n b_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Введем обозначения $\operatorname{ad}_A^0 B = B$, $\operatorname{ad}_A^k B = [A, \operatorname{ad}_A^{k-1} B]$, где $[\cdot, \cdot]$ — коммутатор векторных полей A и B .

Рассмотрим распределения

$$U_k = \operatorname{span} \left(\operatorname{ad}_A^j B_i, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, k} \right), \quad k = 0, 1, \dots$$

Чтобы аффинная система (14) приводилась к каноническому виду, необходимо и достаточно, чтобы распределения U_k были инволютивны.

Проверим эти условия для систем (9) и (13).

Движение в горизонтальной плоскости. Для аффинной системы (13)

$$A = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ g \operatorname{tg} \gamma \sin \psi \\ \dot{y} \\ -g \operatorname{tg} \gamma \cos \psi \\ \nu \\ \omega_x \\ -\kappa_1 \nu^2 \cos \gamma \sin \gamma \\ -\kappa_2 \nu \omega_x \cos \gamma \sin \gamma \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

где

$$\kappa_1 = \frac{I_z - I_y}{I_x}, \quad \kappa_2 = \frac{I_x - I_z}{I_y} - \frac{I_y - I_x}{I_z}.$$

Ясно, что распределение $U_0 = \text{span}(B_1, B_2)$ инволютивно. Далее,

$$\text{ad}_A B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\kappa_2 \nu \cos \gamma \sin \gamma \end{pmatrix}, \quad \text{ad}_A B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2\kappa_1 \nu \cos \gamma \sin \gamma \\ -\kappa_2 \omega_x \cos \gamma \sin \gamma \end{pmatrix}.$$

Непосредственный подсчет показывает, что распределение

$$U_1 = \text{span}(B_1, B_2, \text{ad}_A B_1, \text{ad}_A B_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\kappa_1 \nu \cos \gamma \sin \gamma \\ 0 & 1 & -\kappa_2 \nu \cos \gamma \sin \gamma & -\kappa_2 \omega_x \cos \gamma \sin \gamma \end{pmatrix}$$

является инволютивным. Аналогично можно убедиться в том, что распределение U_3, U_4 также инволютивно. Из анализа этих распределений вытекает, что система (13) приводится к каноническому виду с индексами приводимости (4, 4).

Движение в вертикальной плоскости. Для аффинной системы (9) координаты дрейфа A и управляющих векторных полей B_1, B_2 имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ \dot{z} \\ -g \\ -\omega_y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -(4/m) \sin \vartheta \\ 0 \\ (4/m) \cos \vartheta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ l/I_y \end{pmatrix}.$$

Непосредственным вычислением убеждаемся, что $U_0 = \text{span}(B_1, B_2)$ инволютивно.

Вычислим первые коммутаторы:

$$\text{ad}_A B_1 = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \\ \omega_y \cos \vartheta \\ -\cos \vartheta \\ \omega_y \sin \vartheta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ad}_A B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Непосредственным вычислением убеждаемся, что распределение

$$U_1 = \text{span} (B_1, B_2, \text{ad}_A B_1, \text{ad}_A B_2)$$

инволютивным не является. Таким образом, система (9) не приводится к каноническому виду.

6. Синтез управления для горизонтального движения квадрокоптера

Метод построения программного или стабилизирующего управления для аффинных систем канонического вида известен [6]. Воспользуемся этим методом для построения управления движением квадрокоптера в горизонтальной плоскости.

Как показано выше, система (13) приводится к каноническому виду с индексами приводимости (4, 4). В качестве базисных функций канонического вида можно взять координатные функции x и y . Трехкратное дифференцирование этих функций в силу системы дает соотношения

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= g\nu \cos \psi \operatorname{tg} \gamma + g\omega_x \frac{\sin \psi}{\cos^2 \gamma}, \\ \ddot{y} &= g\nu \sin \psi \operatorname{tg} \gamma - g\omega_x \frac{\cos \psi}{\cos^2 \gamma}. \end{aligned}$$

Продифференцировав эти выражения в силу системы еще раз, получим представление системы (13) в каноническом виде:

$$\begin{cases} x^{\text{IV}} = -g\nu^2 A \sin \psi + 2g\nu\omega_x B \cos \psi + g\omega_x^2 C \sin \psi + gu_1 \frac{\sin \psi}{\cos^2 \gamma} + gu_2 \cos \psi \operatorname{tg} \gamma, \\ y^{\text{IV}} = g\nu^2 A \cos \psi + 2g\nu\omega_x B \sin \psi - g\omega_x^2 C \cos \psi - gu_1 \frac{\cos \psi}{\cos^2 \gamma} + gu_2 \sin \psi \operatorname{tg} \gamma. \end{cases} \quad (15)$$

где

$$A = (1 + J_x) \operatorname{tg} \gamma, \quad B = \left(\frac{1}{\cos^2 \gamma} - \frac{J_y + J_z}{2} \sin^2 \gamma \right), \quad C = \frac{2 \sin \gamma}{\cos^3 \gamma}.$$

В этом представлении переменные $\psi, \gamma, \omega_x, \nu$ отражают исходные координаты как функции новых координат $x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}, y, \dot{y}, \ddot{y}, \ddot{\ddot{y}}$.

Представление (15) можно записать в векторной форме:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{\text{IV}} = P + Qu, \quad (16)$$

где

$$P = g \begin{pmatrix} -\nu^2 A \sin \psi + 2\nu\omega_x B \cos \psi + \omega_x^2 C \sin \psi \\ \nu^2 A \cos \psi + 2\nu\omega_x B \sin \psi - \omega_x^2 C \cos \psi \end{pmatrix}, \quad Q = g \begin{pmatrix} \frac{\sin \psi}{\cos^2 \gamma} & \cos \psi \operatorname{tg} \gamma \\ -\frac{\cos \psi}{\cos^2 \gamma} & \sin \psi \operatorname{tg} \gamma \end{pmatrix}.$$

Предположим, что задана пространственная траектория движения $r_*(t) = (x_*(t), y_*(t))^T$. Тогда в соотношении (16) в каждый момент времени t известны значения P_* и Q_* матриц P и Q , которые выражаются через значения функций x_* и y_* и их производных:

$$\begin{aligned} \sin \psi_* &= \frac{\ddot{x}_*}{\sqrt{(\ddot{x}_*)^2 + (\ddot{y}_*)^2}}, & \cos \psi_* &= -\frac{\ddot{y}_*}{\sqrt{(\ddot{x}_*)^2 + (\ddot{y}_*)^2}}, \\ \operatorname{tg} \gamma_* &= \frac{\sqrt{(\ddot{x}_*)^2 + (\ddot{y}_*)^2}}{g}, & \nu_* &= \frac{\ddot{x}_* \cos \psi_* + \ddot{y}_* \sin \psi_*}{g \operatorname{tg} \gamma_*}, \\ \omega_{x*} &= \frac{\ddot{x}_* \sin \psi_* - \ddot{y}_* \cos \psi_*}{g \cos^2 \gamma_*}. \end{aligned}$$

Также известны значения четвертых производных x_*^{IV} и y_*^{IV} . Это позволяет из уравнения (16) определить управление u_* , которое оказывается программным:

$$u_* = Q_*^{-1}(r_*^{\text{IV}} - P_*).$$

Для построения стабилизирующего управления в виде обратной связи рассмотрим отклонение $z = r - r_*$ вектора состояния r от предписанной траектории $r_*(t)$. В каноническом виде известны значения вектора z и первых трех его производных по времени. Четвертая производная z^{IV} определяется соотношением

$$z^{\text{IV}} = r^{\text{IV}} - r_*^{\text{IV}} = P + Qu - r_*^{\text{IV}}. \quad (17)$$

Потребуем, чтобы вектор z удовлетворял линейному дифференциальному уравнению

$$z^{\text{IV}} + K_1 \ddot{z} + K_2 \dot{z} + K_3 z + K_4 z = 0, \quad (18)$$

у которого нулевое положение равновесия асимптотически устойчиво. Здесь K_1, K_2, K_3, K_4 — некоторые матрицы. Эти матрицы можно выбрать диагональными, и тогда векторное уравнение (18) на четыре скалярных не связанных друг с другом уравнения. Асимптотическую устойчивость нулевого положения равновесия можно обеспечить, если диагональные элементы матриц K_1, K_2, K_3, K_4 выбрать так, что соответствующие характеристические многочлены линейных дифференциальных уравнений будут иметь только действительные отрицательные корни, причем дополнительно предполагаем, что эти корни разные.

Из уравнений (17) и (18) находим управление

$$u_{\text{st}} = Q^{-1}(z^{\text{IV}} + r_*^{\text{IV}} - P) = Q^{-1}(r_*^{\text{IV}} - K_1 \ddot{z} - K_2 \dot{z} - K_3 z - K_4 z - P),$$

применение которого обеспечивает стремление к нулю отклонения z и тем самым стабилизацию движения системы на предписанной траектории.

Заключение

В статье проанализированы уравнения движения квадрокоптера, рассматриваемого как твердое тело. Из этих уравнений получены модели движения квадрокоптера в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Эти модели являются аффинными с векторным (двумерным) управлением, они проанализированы на управляемость. Выяснилось, что модель движения в вертикальной плоскости не приводится к каноническому виду, в то время как модель движения в горизонтальной плоскости приводится. Для модели движения в горизонтальной плоскости предложены программное и стабилизирующее управления, реализующие движение квадрокоптера вдоль заданной пространственной траектории.

Список литературы

1. Chovancová A., Fico T., Chovanec L., Hubinský P. Mathematical Modelling and Parameter Identification of Quadrotor (a survey) // *Procedia Engineering*. 2014. Vol. 96. P. 172–181. DOI: [10.1016/j.proeng.2014.12.139](https://doi.org/10.1016/j.proeng.2014.12.139)
2. Rinaldi F., Chiesa S., Quagliotti F. Linear Quadratic Control for Quadrotors UAVs Dynamics and Formation Flight // *Journal of Intelligent & Robotic Systems*. 2013. Vol. 70, no. 1-4. P. 203–220. DOI: [10.1007/s10846-012-9708-3](https://doi.org/10.1007/s10846-012-9708-3)
3. Bouadi H., Simoes Cunha S., Drouin A., Mora-Camino F. Adaptive sliding mode control for quadrotor attitude stabilization and altitude tracking // *Proc. 12th IEEE international symposium on computational intelligence and informatics (CINTI 2011)*. Budapest: Hungary, 2011. P. 449–455. DOI: [10.1109/CINTI.2011.6108547](https://doi.org/10.1109/CINTI.2011.6108547)
4. Белинская Ю.С., Четвериков В.Н. Управление четырехвинтовым вертолетом // *Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн.* 2012. № 5. С. 157–171. DOI: [10.7463/0512.0397373](https://doi.org/10.7463/0512.0397373)
5. Крищенко А.П. Преобразование многомерных аффинных управляемых систем // *Управляемые нелинейные системы*. М.: ВНИИСИ. 1991. № 2. С. 5–14.
6. Крищенко А.П. Стабилизация программных движений нелинейных систем // *Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика*. 1985. № 6. С. 108–112.
7. Канатников А.Н. Моделирование вращения твердого тела // *Нелинейная динамика и управление: Сб. статей. Вып. 7*. Под ред. С.В. Емельянова, С.К. Коровина. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. С. 335–348.
8. Tayebi A., McGilvray S. Attitude stabilization of a four-rotor aerial robot // *Proc. 43rd IEEE Conf. on Decision and Control*. 2004. Vol. 2. P. 1216–1221. DOI: [10.1109/CDC.2004.1430207](https://doi.org/10.1109/CDC.2004.1430207)

The plane motion control of the quadrocopter

Kanatnikov A. N.¹, Akopyan K. R.^{1,*}

[*mathmod@bmstu.ru](mailto:mathmod@bmstu.ru)

¹Bauman Moscow State Technical University, Russia

Keywords: plane motion, control, stabilization, controllability, quadrocopter

Among a large number of modern flying vehicles, the quadrocopter relates to unmanned aerial vehicles (UAV) which are relatively cheap and easy to design. Quadrocopters are able to fly in bad weather, hang in the air for quite a long time, observe the objects and perform many other tasks. They have been applied in rescue operations, in agriculture, in the military and many other fields.

For quadrocopters, the problems of path planning and control are relevant. These problems have many variants in which limited resources of modern UAV, possible obstacles, for instance, for flying in a cross-country terrain or in a city environment and weather conditions (particularly, wind conditions) are taken into account. Many research studies are concerned with these problems and reflected in series of publications (note the interesting survey [1] and references therein). Various methods were used for the control synthesis for these vehicles: linear approximations [2], sliding mode control [3], the covering method [4] and so on.

In the paper, a quadrocopter is considered as a rigid body. The kinematic and dynamic equations of the motion are analyzed. Two cases of motion are emphasized: a motion in a vertical plane and in a horizontal plane. The control is based on transferring of the affine system to the canonical form [5] and the nonlinear stabilization method [6].

References

1. Chovancová A., Fico T., Chovanec L., Hubinský P. Mathematical Modelling and Parameter Identification of Quadrotor (a survey). *Procedia Engineering*, 2014, vol. 96, pp. 172–181. DOI: [10.1016/j.proeng.2014.12.139](https://doi.org/10.1016/j.proeng.2014.12.139)
2. Rinaldi F., Chiesa S., Quagliotti F. Linear Quadratic Control for Quadrotors UAVs Dynamics and Formation Flight. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 2013, vol. 70, no. 1-4, pp. 203–220. DOI: [10.1007/s10846-012-9708-3](https://doi.org/10.1007/s10846-012-9708-3)

3. Bouadi H., Simoes Cunha S., Drouin A., Mora-Camino F. Adaptive sliding mode control for quadrotor attitude stabilization and altitude tracking. *Proc. 12th IEEE international symposium on computational intelligence and informatics (CINTI 2011)*, Budapest, Hungary, 2011, pp. 449–455. DOI: [10.1109/CINTI.2011.6108547](https://doi.org/10.1109/CINTI.2011.6108547)
4. Belinskaya Yu.S., Chetverikov V.N. Control of four-propeller rotorcraft. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2012, no. 5, pp. 157–171. DOI: [10.7463/0512.0397373](https://doi.org/10.7463/0512.0397373) (in Russian).
5. Krishchenko A.P. Transformation of multidimensional affine control systems. *Upravlyaemye nelinejnye sistemy* [Nonlinear control systems], VNIISI, Moscow, 1991, no. 2, pp. 5–14. (in Russian).
6. Krishchenko A.P. Stabilization of program motions of nonlinear-systems. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*, 1985, no. 6, pp. 108–112. (English version of journal: *Soviet Journal of Computer and Systems Sciences*, 1986, vol. 24, no. 2, pp. 65–69).
7. Kanatnikov A.N. Modeling Control of Rigid Body Rotation. *Nelineinaia dinamika i upravlenie: sb. st. Vyp. 7* [Nonlinear dynamics and control: collected articles. Iss. 7], Moscow, Phismatlit Publ., 2010, pp. 79–94. (English translation: *Computational Mathematics and Modeling*, 2013, vol. 24, no. 3, pp. 404–417. DOI: [10.1007/s10598-013-9186-x](https://doi.org/10.1007/s10598-013-9186-x)).
8. Tayebi A., McGilvray S. Attitude stabilization of a four-rotor aerial robot. *Proc. 43rd IEEE Conf. on Decision and Control*, 2004, vol. 2, pp. 1216–1221. DOI: [10.1109/CDC.2004.1430207](https://doi.org/10.1109/CDC.2004.1430207)