LA 1 Definitionen

Diese Zusammenfassung setzt Grundwissen voraus:

- Relationen
- Abbildungen
- Mengen
- Aussagenlogik
- Rechenaxiome

Äquivalenzrelationen

Eine Äquivalenzrelation ist eine Relation $\sim$ auf die Menge M mit folgenden Eigenschaften:

- **Reflexiv**: $\forall x \in M : x \sim x$.
- **Symmetrie**: $\forall x, y \in M : x \sim y \Rightarrow y \sim x$.
- **Transitiv**: $\forall x, y, z \in M : x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

Ein Beispiel für eine Äquivalenzrelation ist $=$ auf die Menge $\mathbb{Z}$.

Es sei nun $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf die Menge M. Dann heisst für $x \in M$ die Teilmenge

$$[x]_\sim := \{y \in M | x \sim y\} \subseteq M$$

die **Äquivalenzklasse** von x (bezüglich $\sim$).

Gruppen

Es sei M eine Menge und $+$ eine Verknüpfungen auf M. Dann heisst das Paar $(M, +)$ eine *Gruppe*, wenn folgende Bedingungen gelten:

- Assoziativ: $\forall x, y, z \in M : (x + y) + z = x + (y + z)$.
- neutrales Element: $\exists e \in M \quad \forall x \in M : x + e = e + x = x$.
- inverses Element: $\forall x \in M \quad \exists y \in M : x + y = y + x = e$.

Eine besondere und wichtig Art der Gruppen sind die abelsche Gruppen (kommutative Gruppen). Damit eine Gruppe abelsch ist, muss die Verknüpfungen $+$ kommutativ sein.

Körper

Damit eine Menge K mit den zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ ein kommutativer Körper (Wird auch einfach nur Körper gennant) ist, müssen folgende Aussagen gelten:

- **Gesetze der Addition**
  - Assoziativität: $(x + y) + z = x + (y + z)$.
  - Eindeutiges neutrales Element: $0 + x = x$.
  - Eindeutiges inverses Element: $x + (-x) = 0$.
  - Kommutativität: $x + y = y + x$.
- **Gesetze der Multiplikation**
  - Assoziativität: $x \cdot (y \cdot y) = (x \cdot y) \cdot z$.
  - Eindeutiges neutrales Element: $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$.
  - Eindeutiges inverses Element: $x \cdot x^{-1} = 1 = x^{-1} \cdot x$.
  - Kommutativität: $x \cdot y = y \cdot x$.
- **Distributivgesetz** $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

- Gesetze die für **jeden** Körper gelten:
  - Multiplikation mit 0: $\forall x \in K : x \cdot 0 = 0$
  - Nullteilerfreiheit: $x, y \in K, x \neq 0, y \neq 0 \Rightarrow x \cdot y \neq 0$.

Ausserdem müssen die beiden Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ Verknüpfungen auf K sein. Also eine binäre Abbildung $K \times K \to K$. Entscheiden ist dabei, dass das Bild wieder ein Element von K seien muss   diese Forderung bezeichnet man auch als **Abgeschlossenheit**.

Abstrakte Vektorräume

Ein Vektorraum wird immer über einen Körper definiert! (Körper sind zB. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$). Ein Vektorraum V über Körper $\mathbb{K}$ hat folgende Eigenschaften:

- **Vektoraddition**:
  - (V1) Assoziativität $\forall u, v, w \in V : (u + v) + w = u + (v + w)$.
  - (V2) Eindeutiges neutrales Element
    $\exists! o \in V \quad \forall v \in V : o + v = v + o = v$.
  - (V3) Existenz eines inversen Elements
    $\forall v \in V \quad \exists!(-v) \in V : v + (-v) = (-v) + v = o$.
  - (V4) Kommutativität $\forall v, w \in V : v + w = w + v$.
- **Skalarmultiplikation**
  - (S1) Assoziativität $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \forall v \in V : \lambda(\mu v) = (\lambda\mu)(v)$.
  - (S2) Wirkung des neutralen Elements $\forall v \in V : 1 \cdot v = v$.
- **Vektoraddition und Skalarmultiplikation**
  - (D1) 1. Distributivgesetz
    $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall v, w \in V : \lambda(v + w) = (\lambda v) + (\lambda w)$.
  - (D2) 2. Distributivgesetz
    $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \forall v \in V : (\lambda + \mu)v = (\lambda v) + (\mu v)$.

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V eine Menge. Sind

$$+ : V \times V \to V, \quad (x, y) \mapsto x + y \quad \text{und} \quad \cdot : \mathbb{K} \times V \to V, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x \quad (1)$$

zwei Abbildungen, die den Eigenschaften (V1-4) (S1) (S2) und (D1) (D2) genügen, so heisst das Triple $(V, +, \cdot)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Morphismen

Seien $\mathbb{K}$ und $\mathbb{L}$ Körper; wir bezeichnen in beiden Körpern die Addition mit $+$ und die Multiplikation mit $\cdot$.

- Ein **Homomorphismus** von $\mathbb{K}$ nach $\mathbb{L}$ ist eine Abbildung f von $\mathbb{K}$ nach $\mathbb{L}$, wenn folgende Eigenschaften gelten:

  $$\forall x, y \in \mathbb{K} : f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ und } f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y).$$

  $$f(1) \neq 0.$$

  Ein Homomorphismus ist immer **injektiv**.

- Ein **bijektiver** Homomorphismus ist ein **Isomorphismus**. Die beiden Körper nennt man dann auch isomorph zueinander.

- Ein Homomorphismus einer Struktur auf sich selbst ist ein **Endomorphismus**

- Ein **bijektiver** Endomorphismus ist ein **Automorphismus**