LA 1 Definitionen

Diese Zusammenfassung setzt Grundwissen voraus:

- Abbildungen
- Mengen
- Aussagenlogik
- Rechenaxiome

Koerper

Damit eine Menge K mit den zwei Verknuepfungen $+$ und $\cdot$ ein kommutativer Koerper (Wird auch einfach nur Koerper gennant) ist, muessen folgende Aussagen gelten:

- **Gesetze der Addition**
  - Assoziativitaet: $(x + y) + z = x + (y + z)$.
  - Eindeutiges neutrales Element: $0 + x = x$.
  - Eindeutiges inverses Element: $x + (-x) = 0$.
  - Kommutativaet: $x + y = y + x$.
- **Gesetze der Multiplikation**
  - Assoziativitaet: $x \cdot (y \cdot y) = (x \cdot y) \cdot z$.
  - Eindeutiges neutrales Element: $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$.
  - Eindeutiges inverses Element: $x \cdot x^{-1} = 1 = x^{-1} \cdot x$.
  - Kommutativaet: $x \cdot y = y \cdot x$.
- **Distributivgesetz** $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.
- Gesetze die fuer **jeden** Koerper gelten:
  - Multiplikation mit 0: $\forall x \in K : x \cdot 0 = 0$

- Nullteilerfreiheit: $x, y \in K, x \neq 0, y \neq 0 \Rightarrow x \cdot y \neq 0$.

Ausserdem muessen die beiden Verknuepfungen $+$ und $\cdot$ Verknuepfungen auf K sein. Also eine binaere Abbildung $K \times K \to K$. Entscheiden ist dabei, dass das Bild wieder ein Element von K seien muss; diese Forderung bezeichnet man auch als **Abgeschlossenheit**.

Abstrakte Vektorraeume

Ein Vektorraum wird immer ueber einen Koerper definiert! (Koerper sind zB. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$). Ein Vektorraum V ueber Koerper $\mathbb{K}$ hat folgende Eigenschaften:

- **Vektoraddition**:
  - (V1) Assoziativitaet $\forall u, v, w \in V : (u + v) + w = u + (v + w)$.
  - (V2) Eindeutiges neutrales Element
    $\exists! o \in V; \forall v \in V : o + v = v + o = v$.
  - (V3) Existenz eines inversen Elements
    $\forall v \in V; \exists!(-v) \in V : v + (-v) = (-v) + v = o$.
  - (V4) Kommutativaet $\forall v, w \in V : v + w = w + v$.
- **Skalarmultiplikation**
  - (S1) Assoziativitaet $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}; \forall v \in V : \lambda(\mu v) = (\lambda\mu)(v)$.
  - (S2) Wirkung des neutralen Elements $\forall v\ inV : 1 \cdot v = v$.
- **Vektoraddition und Skalarmultiplikation**
  - (D1) 1. Distributivgesetz
    $\forall \lambda \in \mathbb{K}; \forall v, w \in V : \lambda(v + w) = (\lambda v) + (\lambda w)$.
  - (D2) 2. Distributivgesetz
    $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}; \forall v \in V : (\lambda + \mu)v = (\lambda v) + (\mu v)$.

Wenn nun $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ und V eine Menge sind. Und

$$+ : V \times V \to V, \quad (x, y) \mapsto x + y \quad \text{und} \quad \cdot : \mathbb{K} \times V \to V, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x \tag{1}$$

zwei Abbildungen sind, die den Eigenschaften (V1-4) (S1) (S2) und (D1) (D2) genuegen, so heisst das Triple $(V, +, \cdot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.