

# LA 1 Definitionen

Diese Zusammenfassung setzt Grundwissen voraus:

- Relationen
- Abbildungen
- Mengen
- Aussagenlogik
- Rechenaxiome

## Aequivalenzrelationen

Eine Aequivalenzrelation ist eine Relation  $\sim$  auf die Menge  $M$  mit folgenden Eigenschaften:

- **Reflexiv:**  $\forall x \in M : x \sim x$ .
- **Symmetrie:**  $\forall x, y \in M : x \sim y \Rightarrow y \sim x$ .
- **Transitiv:**  $\forall x, y, z \in M : x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$ .

Ein Beispiel fuer eine Aequivalenzrelation ist  $=$  auf die Menge  $\mathbb{Z}$ .

Es sei nun  $\sim$  eine Aequivalenzrelation auf die Menge  $M$ . Dann heisst fuer  $x \in M$  die Teilmenge

$$[x]_{\sim} := \{y \in M | x \sim y\} \subseteq M$$

die **Aequivalenzklasse** von  $x$  (beueglich  $\sim$ ).

## Gruppen

Es sei  $M$  eine Menge und  $+$  eine Verknuepfungen auf  $M$ . Dann heisst das Paar  $(M, +)$  eine *Gruppe*, wenn folgende Bedingungen gelten:

- Assoziativ:  $\forall x, y, z \in M : (x + y) + z = x + (y + z)$ .
- neutrales Element:  $\exists e \in M; \forall x \in M : x + e = e + x = x$ .
- inverses Element:  $\forall x \in M; \exists y \in M : x + y = y + x = e$ .

Eine besondere und wichtig Art der Gruppen sind die abelsche Gruppen (kommutative Gruppen). Damit eine Gruppe abelsch ist, muss die Verknuepfungen  $+$  kommutativ sein.

## Koerper

Damit eine Menge  $K$  mit den zwei Verknuepfungen  $+$  und  $\cdot$  ein kommutativer Koerper (Wird auch einfach nur Koerper genannt) ist, muessen folgende Aussagen gelten:

- **Gesetze der Addition**

- Assoziativitaet:  $(x + y) + z = x + (y + z)$ .
- Eindeutiges neutrales Element:  $0 + x = x$ .
- Eindeutiges inverses Element:  $x + (-x) = 0$ .
- Kommutativitaet:  $x + y = y + x$ .

- **Gesetze der Multiplikation**

- Assoziativitaet:  $x \cdot (y \cdot y) = (x \cdot y) \cdot z$ .
- Eindeutiges neutrales Element:  $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ .
- Eindeutiges inverses Element:  $x \cdot x^{-1} = 1 = x^{-1} \cdot x$ .
- Kommutativitaet:  $x \cdot y = y \cdot x$ .

- **Distributivgesetz**  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ .

- Gesetze die fuer **jeden** Koerper gelten:
  - Multiplikation mit 0:  $\forall x \in K : x \cdot 0 = 0$
  - Nullteilerfreiheit:  $x, y \in K, x \neq 0, y \neq 0 \Rightarrow x \cdot y \neq 0$ .

Ausserdem muessen die beiden Verknuepfungen  $+$  und  $\cdot$  Verknuepfungen auf  $K$  sein. Also eine binaere Abbildung  $K \times K \rightarrow K$ . Entscheiden ist dabei, dass das Bild wieder ein Element von  $K$  seien muss; diese Forderung bezeichnet man auch als **Abgeschlossenheit**.

## Abstrakte Vektorraeume

Ein Vektorraum wird immer ueber einen Koerper definiert! (Koerper sind zB.  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$ ). Ein Vektorraum  $V$  ueber Koerper  $\mathbb{K}$  hat folgende Eigenschaften:

- **Vektoraddition:**
  - (V1) Assoziativitaet  $\forall u, v, w \in V : (u + v) + w = u + (v + w)$ .
  - (V2) Eindeutiges neutrales Element  
 $\exists! o \in V; \forall v \in V : o + v = v + o = v$ .
  - (V3) Existenz eines inversen Elements  
 $\forall v \in V; \exists! (-v) \in V : v + (-v) = (-v) + v = o$ .
  - (V4) Kommutativitaet  $\forall v, w \in V : v + w = w + v$ .
- **Skalarmultiplikation**
  - (S1) Assoziativitaet  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}; \forall v \in V : \lambda(\mu v) = (\lambda \mu)(v)$ .
  - (S2) Wirkung des neutralen Elements  $\forall v \in V : 1 \cdot v = v$ .
- **Vektoraddition und Skalarmultiplikation**
  - (D1) 1. Distributivgesetz  
 $\forall \lambda \in \mathbb{K}; \forall v, w \in V : \lambda(v + w) = (\lambda v) + (\lambda w)$ .
  - (D2) 2. Distributivgesetz  
 $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}; \forall v \in V : (\lambda + \mu)v = (\lambda v) + (\mu v)$ .

Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper und  $V$  eine Menge. Sind

$$+ : V \times V \rightarrow V, \quad (x, y) \mapsto x + y \quad \text{und} \quad \cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x \quad (1)$$

zwei Abbildungen, die den Eigenschaften (V1-4) (S1) (S2) und (D1) (D2) genuegen, so heisst das Triple  $(V, +, \cdot)$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum.