

LA 1 Definitionen

Diese Zusammenfassung setzt Grundwissen voraus:

- Relationen
- Abbildungen
- Mengen
- Aussagenlogik
- Rechenaxiome

Aequivalenzrelationen

Eine Aequivalenzrelation ist eine Relation \sim auf die Menge M mit folgenden Eigenschaften:

- **Reflexiv:** $\forall x \in M : x \sim x$.
- **Symmetrie:** $\forall x, y \in M : x \sim y \Rightarrow y \sim x$.
- **Transitiv:** $\forall x, y, z \in M : x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

Ein Beispiel fuer eine Aequivalenzrelation ist $=$ auf die Menge \mathbb{Z} . Es sei \sim

eine Aequivalenzrelation auf die Menge M . Dann heisst fuer $x \in M$ die Teilmenge

$$[x]_{\sim} := \{y \in M | x \sim y\} \subseteq M$$

die **Aequivalenzklasse** von x (beueglich \sim).

Gruppen

Es sei M eine Menge und $+$ eine Verknuepfungen auf M . Dann heisst das Paar $(M, +)$ eine *Gruppe*, wenn folgende Bedingungen gelten:

- Assoziativ: $\forall x, y, z \in M : (x + y) + z = x + (y + z)$.
- neutrales Element: $\exists e \in M; \forall x \in M : x + e = e + x = x$.
- inverses Element: $\forall x \in M; \exists y \in M : x + y = y + x = e$.

Eine besondere und wichtig Art der Gruppen sind die abelsche Gruppen (kommutative Gruppen). Damit eine Gruppe abelsch ist, muss die Verknuepfungen $+$ kommutativ sein.

Koerper

Damit eine Menge K mit den zwei Verknuepfungen $+$ und \cdot ein kommutativer Koerper (Wird auch einfach nur Koerper genannt) ist, muessen folgende Aussagen gelten:

- **Gesetze der Addition**

- Assoziativitaet: $(x + y) + z = x + (y + z)$.
- Eindeutiges neutrales Element: $0 + x = x$.
- Eindeutiges inverses Element: $x + (-x) = 0$.
- Kommutativaet: $x + y = y + x$.

- **Gesetze der Multiplikation**

- Assoziativitaet: $x \cdot (y \cdot y) = (x \cdot y) \cdot z$.
- Eindeutiges neutrales Element: $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$.
- Eindeutiges inverses Element: $x \cdot x^{-1} = 1 = x^{-1} \cdot x$.
- Kommutativaet: $x \cdot y = y \cdot x$.

- **Distributivgesetz** $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

- Gesetze die fuer **jeden** Koerper gelten:
 - Multiplikation mit 0: $\forall x \in K : x \cdot 0 = 0$
 - Nullteilerfreiheit: $x, y \in K, x \neq 0, y \neq 0 \Rightarrow x \cdot y \neq 0$.

Ausserdem muessen die beiden Verknuepfungen $+$ und \cdot Verknuepfungen auf K sein. Also eine binaere Abbildung $K \times K \rightarrow K$. Entscheiden ist dabei, dass das Bild wieder ein Element von K seien muss; diese Forderung bezeichnet man auch als **Abgeschlossenheit**.

Abstrakte Vektorraeume

Ein Vektorraum wird immer ueber einen Koerper definiert! (Koerper sind zB. \mathbb{Q} , \mathbb{R} und \mathbb{C}). Ein Vektorraum V ueber Koerper \mathbb{K} hat folgende Eigenschaften:

- **Vektoraddition:**
 - (V1) Assoziativitaet $\forall u, v, w \in V : (u + v) + w = u + (v + w)$.
 - (V2) Eindeutiges neutrales Element
 $\exists! o \in V; \forall v \in V : o + v = v + o = v$.
 - (V3) Existenz eines inversen Elements
 $\forall v \in V; \exists! (-v) \in V : v + (-v) = (-v) + v = o$.
 - (V4) Kommutativaet $\forall v, w \in V : v + w = w + v$.
- **Skalarmultiplikation**
 - (S1) Assoziativitaet $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}; \forall v \in V : \lambda(\mu v) = (\lambda \mu)(v)$.
 - (S2) Wirkung des neutralen Elements $\forall v \in V : 1 \cdot v = v$.
- **Vektoraddition und Skalarmultiplikation**
 - (D1) 1. Distributivgesetz
 $\forall \lambda \in \mathbb{K}; \forall v, w \in V : \lambda(v + w) = (\lambda v) + (\lambda w)$.
 - (D2) 2. Distributivgesetz
 $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}; \forall v \in V : (\lambda + \mu)v = (\lambda v) + (\mu v)$.

Sei \mathbb{K} ein Körper und V eine Menge. Sind

$$+ : V \times V \rightarrow V, \quad (x, y) \mapsto x + y \quad \text{und} \quad \cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x \quad (1)$$

zwei Abbildungen, die den Eigenschaften (V1-4) (S1) (S2) und (D1) (D2) genuegen, so heisst das Triple $(V, +, \cdot)$ ein \mathbb{K} -Vektorraum.