LA 1 Definitionen

Diese Zusammenfassung setzt Grundwissen voraus:

- Abbildungen
- Mengen
- Aussagenlogik
- Rechenaxiome

Koerper

Damit eine Menge K mit den zwei Verknuepfungen $+$ und $\cdot$ ein kommutativer Koerper (Wird auch einfach nur Koerper gennant) ist, muessen folgende Aussagen gelten:

- **Gesetze der Addition**
  - Assoziativitaet:
    $$(x + y) + z = x + (y + z).$$
  - Eindeutiges neutrales Element:
    $$0 + x = x.$$
  - Eindeutiges inverses Element:
    $$x + (-x) = 0.$$
  - Kommutativaet:
    $$x + y = y + x.$$
- **Gesetze der Multiplikation**

- Assoziativitaet:

$$x \cdot (y \cdot y) = (x \cdot y) \cdot z.$$

- Eindeutiges neutrales Element:

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x.$$

- Eindeutiges inverses Element:

$$x \cdot x^{-1} = 1 = x^{-1} \cdot x.$$

- Kommutativaet:

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

- **Distributivgesetz**

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

- Gesetze die fuer **jeden** Koerper gelten:
  - Multiplikation mit 0:

$$\forall x \in K : x \cdot 0 = 0$$

  - Nullteilerfreiheit:

$$x, y \in K, x \neq 0, y \neq 0 \Rightarrow x \cdot y \neq 0.$$

Ausserdem muessen die beiden Verknuepfungen + und $\cdot$ Verknuepfungen auf K sein. Also eine binaere Abbildung $K \times K \to K$. Entscheiden ist dabei, dass das Bild wieder ein Element von K seien muss; diese Forderung bezeichnet man auch als **Abgeschlossenheit**.

Abstrakte Vektorraeume

Ein Vektorraum wird immer ueber einen Koerper definiert! (Koerper sind zB. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$). Ein Vektorraum V ueber Koerper $\mathbb{K}$ hat folgende Eigenschaften:

- **Vektroaddition**:
  - (V1) Assoziativitaet $\forall u, v, w \in V : (u+v)+w = u+(v+w)$.
  - (V2) Eindeutiges neutrales Element $\exists! o \in V ; \forall v \in V : o+v = v+o = v$.
  - (V3) Existenz eines inversen Elements $\forall v \in V ; \exists! (-v) \in V : v+(-v) = (-v)+v = o$.
  - (V4) Kommutativaet $\forall v, w \in V : v+w = w+v$.
- **Skalarmultiplikation**
  - (S1) Assoziativitaet $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}; \forall v \in V : \lambda(\mu v) = (\lambda\mu)(v)$.
  - (S2) Wirkung des neutralen Elements $\forall v \ inV : 1 \cdot v = v$.
- **Vektoraddition und Skalarmultiplikation**
  - (D1) 1. Distributivgesetz $\forall \lambda \in \mathbb{K}; \forall v, w \in V : \lambda(v+w) = (\lambda v)+(\lambda w)$.
  - (D2) 2. Distributivgesetz $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}; \forall v \in V : (\lambda+\mu)v = (\lambda v)+(\mu v)$.

Wenn nun $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ und V eine Menge sind. Und

$$+ : V \times V \to V, \quad (x, y) \mapsto x+y \quad \text{und} \quad \cdot : \mathbb{K} \times V \to V, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x \tag{1}$$

zwei Abbildungen sind, die den Eigenschaften (V1-4) (S1) (S2) und (D1) (D2) genuegen, so heisst das Triple $(V, +, \cdot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.