Matemática para Computação

Professor: Arialdo Silva
Data: 23/08/2013

Matriz estendida

O sistema linear pode ser representado na forma de matriz estendida (A,b), ou seja:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

$$(A,b) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & | & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & | & B_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & | & B_3 \end{pmatrix}$$

Método de Gauss com pivotamento diagonal

“Os métodos de eliminação consistem em transformar um sistema de equações lineares em outro equivalente através de operações elementares de linha. Consideremos o sistema de equações lineares” [Prof. Carlos Maurício].

$$Ax = b,$$
$$A = (a_{ij}) \; i,j = 1 \dots n, \; x = (x_j)^t \; j = 1 \dots n, \; b = (b_i)^t \; i = 1 \dots n$$
$$\text{com } det(A) \neq 0.$$

O método de eliminação de Gauss com pivotamento diagonal consiste em transformar o sistema dado, em um sistema triangular superior, utilizando operações de elementares de linha, onde em cada passo o elemento da diagonal principal é utilizado como pivô da operação.

Exemplo para aplicação:

- Ax = b

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Método de Gauss com pivotamento diagonal

- Primeiro pivô o elemento A11;
- m é o multiplicado obtido através da formula apresentada;
- Objetivo é ter o primeiro elemento da segunda linha e da terceira com o valor = 0;

$$(A,b) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & . & 1 \\ 3 & 2 & 1 & . & 1 \\ -3 & 1 & 3 & . & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{ll} pivo = 3 & \\ m = \frac{3}{pivo} & L_2 \Leftarrow L_2 - L_1 m \\ m = \frac{-3}{pivo} & L_3 \Leftarrow L_3 - L_1 m \end{array}$$

Método de Gauss com pivotamento diagonal

- Segundo pivô o elemento A22;
- Objetivo é ter o segundo elemento da terceira linha com o valor = 0;

$$(A,b) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & . & 1 \\ 0 & 2 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & 4 & . & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} pivo = 2 \\ m = \frac{1}{pivo} \quad L_3 \Leftarrow L_3 - L_2 m \end{array}$$

$$(A,b) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & . & 1 \\ 0 & 2 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 4 & . & 4 \end{pmatrix}$$

Método de Gauss com pivotamento diagonal

- Desta forma temos uma matriz triangular superior equivalente, onde podemos resolver o sistema Ax = b.

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & . & 1 \\ 0 & 2 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 4 & . & 4 \end{pmatrix}$$

  - Solução: $\overline{x} = (0, 0, 1)^t$

Método de Gauss com pivotamento parcial

- Assim como o pivotamento diagonal o pivotamento parcial também consiste em transformar o sistema dado em um sistema triangular superior, utilizando operações de elementares de linha, porem o seu pivô em cada passo é o elemento de maior valor absoluto da diagonal principal para baixo.
- Após identificar o elemento (pivô), a linha relacionada ao mesmo trocará de posição com a primeira linha.

Método de Gauss com pivotamento parcial

- Exemplo de aplicação:

$$(A,b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & . & 3 \\ 3 & 1 & 0 & . & 4 \\ 0 & 3 & 4 & . & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{maior} = 3 \\ \text{trocam-se as linhas 1 e 2} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & . & 4 \\ 1 & 2 & 3 & . & 3 \\ 0 & 3 & 4 & . & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ll} pivo = 3 & \\ m = \frac{1}{pivo} & L_2 \Leftarrow L_2 - L_1 m \\ m = \frac{0}{pivo} & L_3 \Leftarrow L_3 - L_1 m \end{array}$$

$$(A,b) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & . & 4 \\ 0 & \frac{5}{3} & 3 & . & \frac{5}{3} \\ 0 & 3 & 4 & . & 3 \end{pmatrix}$$

Método de Gauss com pivotamento parcial

- Continuando:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & . & 4 \\ 0 & 3 & 4 & . & 3 \\ 0 & \frac{5}{3} & 3 & . & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} pivo = 3 \\ m = \frac{1}{pivo} \quad L_3 \Leftarrow L_3 - L_2 m \end{array}$$

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & . & 4 \\ 0 & 3 & 4 & . & 3 \\ 0 & 0 & \frac{7}{9} & . & 0 \end{pmatrix}$$

Método de Gauss com pivotamento parcial

- Matriz equivalente triangular superior:

$$(A,b) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & . & 4 \\ 0 & 3 & 4 & . & 3 \\ 0 & 0 & \frac{7}{9} & . & 0 \end{pmatrix}$$

- Após resolver o sistema triangular superior, teremos o seguinte resultado:

$$\overline{x} = (1,1,0)^t$$

Bibliografia

- Apostila – Matemática para Computação v0,14 - Professor Calos Maurício;