INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
FLUMINENSE

Matemática para Computação

Método de Decomposição Cholesky

Prof.: Arialdo Silva

Objetivos

- Capacitar o aluno a utilizar o método de decomposição Cholesky para resolução problemas matemáticos.
- Utilizar o método de decomposição Cholesky para que um sistema possa ser resolvido como sistemas triangulares com baixo esforço computacional.
- Criar um código de um programa que aplique o método de decomposição Cholesky no exemplo dado.

Matriz Transposta

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Transposta de uma matriz

Considere uma matriz $A = (a_{ij})_{(m \times n)}$. A matriz transposta de A, representada por A^t, é uma matriz da forma pela $A^t = (b_{ji})_{(n \times m)}$, tal que: $b_{ji} = a_{ij}$

Matriz Transposta

A matriz **A** é de ordem m x n, enquanto A^t é de ordem n x m.

Essa "inversão" das ordens das duas matrizes se deve ao fato de que para obter a transposta de **A** devemos "transformar" cada uma de suas linhas em colunas.

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}_{3\,x\,2} \qquad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{2\,x\,3}$$

Matriz Simétrica

Dizemos que uma matriz quadrada A de ordem n é simétrica quando ela for igual à sua transposta. Ou seja, A é denominada simétrica se: $A = A^t$.

Observe que somente matrizes quadradas podem ser simétricas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}_{3\,x\,3} \qquad A^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}_{3\,x\,3}$$

Métodos de decomposição Cholesky

Teorema: Seja $A = (a_{ij}) \quad i,j = 1..n$ uma matriz simétrica e definida positiva, então existe uma matriz $R = (r_{ij}) \quad i,j = 1..n$ triangular superior com diagonal positiva tal que $A = R^t R$.

Definição: A matriz A é dita matriz simétrica quando $a_{ij} = a_{ji} \quad i,j = 1..n$.

Definição: A matriz A é dita definida positiva quando $\Delta_i > 0 \quad i = 1..n$

Métodos de decomposição Cholesky

Processo de decomposição Cholesky

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{13} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} r_{11} & & & & \\ r_{12} & r_{22} & & & \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ r_{1n} & r_{2n} & r_{3n} & \dots & r_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} \\ & r_{22} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ & & r_{32} & \dots & r_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & r_{nn} \end{pmatrix}$$

Métodos de decomposição Cholesky

Similarmente ao método de decomposição LU, para calcular os elementos da primeira linha de A temos que multiplicar a primeira linha de R^t por cada coluna de R. Como a primeira linha de R^t só tem um elemento, é possivel calcular cada elemento da primeira linha de R.

Métodos de decomposição Cholesky

Calculando a primeira linha de R usando a primeira linha de A:

$$a_{11} = r_{11} \cdot r_{11} \Rightarrow r_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$a_{12} = r_{11} \cdot r_{12} \Rightarrow r_{12} = \frac{a_{12}}{r_{11}}$$

$$a_{13} = r_{11} \cdot r_{13} \Rightarrow r_{13} = \frac{a_{13}}{r_{11}}$$

$$\cdots$$

$$a_{1n} = r_{11} \cdot r_{1n} \Rightarrow r_{1n} = \frac{a_{1n}}{r_{11}}$$

Métodos de decomposição Cholesky

Calculando a segunda linha de R usando a segunda linha de A:

$$a_{22} = r_{12}r_{12}+r_{22}r_{22} = r_{12}^2+r_{22}^2 \Rightarrow r_{22}^2 = a_{22}-r_{12}^2 \Rightarrow r_{22} = \sqrt{a_{22} - r_{12}^2}$$

$$a_{23} = r_{12}r_{13} + r_{22}r_{23} \Rightarrow r_{23} = \frac{a_{23} - r_{12}r_{13}}{r_{22}}$$

$$a_{24} = r_{12}r_{14} + r_{22}r_{24} \Rightarrow r_{24} = \frac{a_{24} - r_{12}r_{14}}{r_{22}}$$

$$\cdots$$

$$a_{2n} = r_{12}r_{1n} + r_{22}r_{2n} \Rightarrow r_{2n} = \frac{a_{2n} - r_{12}r_{1n}}{r_{22}}$$

Métodos de decomposição Cholesky

Cálculo do termo genérico de R pertencente à diagonal principal:

$$r_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki}^2} \quad i = 1 \ldots n$$

Cálculo do termo genérico de R não pertencente à diagonal principal:

$$r_{ij} = \frac{1}{r_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki} r_{kj} \right) \quad j = i + 1 \ldots n$$

Métodos de decomposição Cholesky

Resolve-se o sistema $Ax = b$ fazendo $A = R^t R$, assim temos $Ax = b \Rightarrow R^t R x = b$.
Fazendo $Rx = y$ temos

$$R^t y = b$$

.
Assim resolve-se

$$R^t y = b$$

em y e

$$Rx = y$$

em x obtendo-se a solução.

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ Resolver o sistema } Ax = b \text{ onde } b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$A = R^t R$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Continuação do exemplo:

$R^t y = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$Rx = y$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Logo a solução de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ é } x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Trabalho:

Resolver o sistema a seguir usando o método de Cholesky:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 10 \\ 4 & 10 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Solução:

$$\overline{x} = (1, -2, 1)^t$$