1.5- O Método de Cholesky

1.5.1- O Processo de Decomposição de Cholesky

O Processo de Cholesky é definido para a resolução de sistemas lineares (n x n) cuja matriz do Sistema é Simétrica e Definida Positiva (ver livro de Ruggiero, M.A.G.) A decomposição feita a seguir considera estas hipóteses.

Seja:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & & 0 \\ g_{21} & g_{22} & \\ \cdots\cdots\cdots & & \\ g_{n1} & g_{n2}\cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21}\cdots\cdots & g_{n1} \\ & g_{22}\cdots\cdots & g_{n2} \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ 0 & & g_{nn} \end{pmatrix}$$

Aplicando a definição de produtos de matrizes obtemos:

a) Elementos diagonais.

$$\begin{aligned} a_{11} &= g_{11}^2 \\ a_{22} &= g_{21}^2 + g_{22}^2 \\ &\vdots \\ a_{nn} &= g_{n1}^2 + g_{n2}^2 + \cdots + g_{nn}^2 \end{aligned}$$

Assim:

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} g_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ g_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2 \right)^{1/2}, \; i = 2,3,\cdots,n \end{cases}$$

b) Elementos não diagonais.

b.1) 1ª coluna

$$\begin{aligned} a_{21} &= g_{21}g_{11} \\ a_{31} &= g_{31}g_{11} \\ &\vdots \\ a_{n1} &= g_{n1}g_{11} \end{aligned}$$

b.2) 2ª coluna

$$
\begin{aligned}
a_{32} &= g_{31}g_{21} + g_{32}g_{22} \\
a_{42} &= g_{41}g_{21} + g_{42}g_{22} \\
&\dots \\
a_{n2} &= g_{n1}g_{21} + g_{n2}g_{22}
\end{aligned}
$$

b.3) Para a j-ésima coluna , teríamos:

$$
\begin{aligned}
a_{j+1,j} &= g_{j+1,1}g_{j1} + g_{j+1,2}g_{j2} + \dots + g_{j+1,j}g_{jj} \\
a_{j+2,j} &= g_{j+2,1}g_{j1} + g_{j+2,2}g_{j2} + \dots + g_{j+2,j}g_{jj} \\
&\dots \\
a_{nj} &= g_{n1}g_{j1} + g_{n2}g_{j2} + \cdots + g_{nj}g_{jj}
\end{aligned}
$$

Assim

$$
(\mathrm{II})\begin{cases} g_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{g_{11}}, \; i = 2,3,\dots,n \\ g_{ij} = \left(a_{ij} - \displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} g_{ik}\, g_{jk} \right) \Big/ g_{jj} \;, 2 \langle j \langle i \end{cases}
$$

Utilizadas numa ordem conveniente as fórmulas (I) e (II) determinam os g_{ij}.
Uma ordem conveniente pode ser:

$g_{11}, g_{21}, g_{31}, \dots, g_{n1}; g_{22}, g_{32}, \dots, g_{n2}; \dots, g_{nn}$

Observação:

1.) Vimos no caso da decomposição LU, que det(A) = $u_{11}.u_{22}\dots u_{nn}$, uma vez que os elementos diagonais de L eram unitários.

No caso do método de Cholesky temos:

$A = G.G^t$

$\therefore$ det (A) = (det G)^2 = $(g_{11}\; g_{22} \dots\dots g_{nn})^2$

2.) Uma vez calculado G, a solução de Ax = b fica reduzida à solução do par de sistemas triangulares:

$Gy = b$
$G^t x = y$

Exemplo 1.5.1:

Seja:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

a.) Verificar se A pode ser decomposta em $G.G^t$

b.) Decompor A em $G.G^t$

c.) Calcular o determinante de A.

d.) Resolver o sistema Ax = b onde $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Solução:

a.) A é simétrica. Devemos verificar se é positiva definida. Temos:

$\det(A_1) = 1 > 0$

$\det(A_2) = 1 > 0$

$\det(A_3) = \det(A) = 2 > 0$

Logo A pode ser decomposta em $G.G^t$

b.)

$$g_{11} = \sqrt{a_{11}} \Rightarrow g_{11} = 1$$

$$g_{21} = \frac{a_{21}}{g_{11}} \Rightarrow g_{21} = 1$$

$$g_{31} = \frac{a_{31}}{g_{11}} \Rightarrow g_{31} = 0$$

$$g_{22} = \left(a_{22} - g_{21}^2\right)^{1/2} \Rightarrow g_{22} = 1$$

$$g_{32} = \frac{a_{32} - g_{31}g_{21}}{g_{22}} \Rightarrow g_{32} = -1$$

$$g_{33} = \left(a_{33} - g_{31}^2 - g_{32}^2\right)^{1/2} \Rightarrow g_{33} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

c.) $\det(A) = (g_{11}\ g_{22}\ g_{33})^2 = 2$

d.) Devemos resolver dois sistemas:

d1.) Gy = b

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Portanto:

$$y_1 = 2$$
$$y_1 + y_2 = 1 \Rightarrow y_2 = -1$$
$$-y_2 + \sqrt{2}y_3 = 7 \Rightarrow y_3 = 2\sqrt{2}$$

d.2.) $G^t . x = y$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Portanto:

$$\sqrt{2}x_3 = 2\sqrt{2} \Rightarrow x_3 = 2$$
$$x_2 - x_3 = -1 \Rightarrow x_2 = 1$$
$$x_1 + x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 1$$

Logo a solução de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ é } x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1.5.1- <u>Exercícios</u>

1.5.1.1) Sejam as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{pmatrix} ; \; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Escolha adequadamente e resolva um dos sistemas Ax = b, Bx = b, pelo processo de Cholesky, onde $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ 9 \end{pmatrix}$

1.5.1.2) Resolva o sistema abaixo pelo processo de Cholesky, completando adequadamente os espaços em branco.

$$\begin{cases} 2x_1 + \ldots x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 10x_2 + \ldots x_3 = 6 \\ \ldots x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -6 \end{cases}$$

1.5.1.3) Considerando-se que, o sistema de equações lineares algébricas Ax = b onde A é a matriz não singular, é transformado no sistema equivalente Bx = c, com $B = A^t.A$; $c = A^t.b$ onde A^t é a transposta de A, então, o último sistema pode sempre ser resolvido pelo processo de Cholesky (isto é, a matriz B satisfaz às condições para a aplicação do método).

Aplicar a técnica acima para achar, pelo processo de Cholesky, a solução do sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$