INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE

Matemática para Computação

Método de Decomposição LU

Prof.: Arialdo Silva

Objetivos

- Capacitar o aluno a utilizar o método de decomposição LU para resolução problemas matemáticos.
- Utilizar o método de decomposição LU para que um sistema possa ser resolvido como sistemas triangulares com baixo esforço computacional.
- Criar um código de um programa que aplique o método de decomposição LU no exemplo dado.

Métodos de decomposição LU

- Seja o sistema (com dimensão n x n), $Ax = b$, determinado, onde A satisfaz às condições da decomposição LU.
- Então o sistema $Ax = b$ pode ser escrito como:

$$LUx = b$$

Isto representa dois sistemas triangulares:

$$Ly = b \text{ e } Ux = y$$

Métodos de decomposição LU

- Os elementos da solução intermediária y podem ser obtidos diretamente do primeiro sistema, desde que a primeira equação envolve somente y1, a segunda somente y1 e y2 e assim por diante.;
- E os elementos de x podem ser obtidos semelhantemente do segundo sistema na seguinte ordem: xn , xn-1,….., x1
.

Métodos de decomposição LU

- Exemplo - Decomposição da matriz A em LU (L:Least, U:Upper)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Desta forma temos a primeira linha de **u.**

$$\begin{aligned} 1.u_{11} &= a_{11} \Rightarrow \boxed{u_{11} = a_{11}} \\ 1.u_{12} &= a_{12} \Rightarrow \boxed{u_{12} = a_{12}} \\ &\vdots \\ 1.u_{1n} &= a_{1n} \Rightarrow \boxed{u_{1n} = a_{1n}} \end{aligned}$$

Métodos de decomposição LU

- Após obter a Primeira linha de U, vamos calcular a primeira coluna de L:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$l_{21} u_{11} = a_{21} \Rightarrow \boxed{l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}}}$$

$$l_{31} u_{11} = a_{31} \Rightarrow \boxed{l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}}}$$

$$\vdots$$

$$l_{n1} u_{11} = a_{n1} \Rightarrow \boxed{l_{n1} = \frac{a_{n1}}{u_{11}}}$$

Continuando:

- Perceba que existe uma alternância entre o cálculo de das linhas de U e colunas de L:

$$l_{21}\, u_{12} + u_{22} = a_{22} \Rightarrow u_{22} = a_{22} - l_{21}\, u_{12}$$
$$l_{21}\, u_{13} + u_{23} = a_{23} \Rightarrow u_{23} = a_{23} - l_{21}\, u_{13}$$
$$\vdots$$
$$l_{21}\, u_{1n} + u_{2n} = a_{2n} \Rightarrow u_{2n} = a_{2n} - l_{21}\, u_{1n}$$
$$l_{31}\, u_{12} + l_{32}\, u_{22} = a_{32} \Rightarrow l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}\, u_{12}}{u_{22}}$$
$$l_{41}\, u_{12} + l_{42}\, u_{22} = a_{42} \Rightarrow l_{42} = \frac{a_{42} - l_{41}\, u_{12}}{u_{22}}$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$l_{n1}\, u_{12} + l_{n2}\, u_{22} = a_{n2} \Rightarrow l_{n2} = \frac{a_{n2} - l_{n1}\, u_{12}}{u_{22}}$$

Métodos de decomposição LU

- Utilizando as fórmulas genéricas para o calculo dos demais elementos de L e de U, existe uma ordem para executá-las.

- Após obter a primeira linha de U e a primeira coluna de L, calcule o restante na seguinte ordem:
  - segunda linha de U
  - segunda coluna de L
  - terceira linha de U
  - terceira coluna de L
  - ...

Métodos de decomposição LU

- Após o obter a primeira linhas de U e a primeira coluna de L conforme vimos anteriormente, para o restante utilizaremos a formula genérica:

Cálculo do termo genérico de U:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \quad i,j = 1 \ldots n, i \leq j$$

Cálculo do termo genérico de L:

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \right) \quad i,j = 1 \ldots n, i > j$$

Métodos de decomposição LU

- Exemplo:

$$\text{Seja } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Após a decomposição:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolver o sistema:

$$\text{Seja } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Resolver o sistema } Ax = b, \text{ onde } \quad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Processo de resolução:

$$Ax = b$$

Fazendo $A = LU$ temos

$$L \underbrace{Ux}_{y} = b$$

Resolvendo o sistema triangular inferior

$$Ly = b$$

achamos y
e
resolvendo o sistema triangular superior

$$Ux = y$$

achamos x

Processo de resolução:

- Portanto temos:
  - Ly = b para achar y:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

  - Resultado:

$$y = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Processo de resolução:

- Também temos:
  - Ux =y para achar x:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

  - Resultado de x:

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solução do sistema:

Assim, a solução de : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ é $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exercício

Resolver o sistema a seguir usando o método de decomposição LU:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Solução:

$$\overline{x} = (-3, 5, 0)^t$$

Cálculo do termo genérico de U:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \quad i, j = 1 \ldots n, i \leq j$$

Cálculo do termo genérico de L:

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \right) \quad i, j = 1 \ldots n, i > j$$