信息的表示和处理

编码

无符号(Unsigned)数的编码

设一个整数数据有 ω 位，我们可以将其写成位向量 $\vec{x}$ 来表示该向量，或者将其每一位都写出来

$$\vec{x}=[x_{\omega-1},x_{\omega-2},\cdots,x_1,x_0]$$

对于向量 $\vec{x}=[x_{\omega-1},x_{\omega-2},\cdots,x_1,x_0]$ ，有：

$$B2U_\omega(\vec{x})=\sum_{i=0}^{\omega-1}x_i2^i$$

补码(Two's-complement)数的编码

对于向量 $\vec{x}=[x_{\omega-1},x_{\omega-2},\cdots,x_1,x_0]$ ，有：

$$B2T_\omega(\vec{x})=-x_{\omega-1}2^{\omega-1}+\sum_{i=0}^{\omega-2}x_i2^i$$

对于补码数的编码，其实就是**无符号数的最高位变为负数**，其余都是一样的

我们以 4 位的无符号数与补码数为例，讨论二者的表示范围：

对于 4 位的无符号数的范围，有：$0\sim15$

对于 4 位的补码数的范围，有：$-8\sim7$

对于补码数而言，负数的个数有 8 个，**非负数**的个数也有 8 个，这导致了：$|TMin_\omega|=|TMax_\omega+1|$

其他编码方式

反码(Ones'Complement)编码

$$B2O_{\omega}(\vec{x}) = -x_{\omega-1}(2^{\omega-1}-1) + \sum_{i=0}^{\omega-2} x_i 2^i$$

反码编码只是在**补码的基础上**将最高位的权重从 $-2^{\omega-1}$ 变为 $-(2^{\omega}-1)$，其余都跟补码一样

原码(Sign-Magnitude)编码

$$B2S_{\omega}(\vec{x}) = (-1)^{x_{\omega-1}} + \sum_{i=0}^{\omega-2} x_i 2^i$$

原码的最高位为**符号位**，其余位来决定该数的大小

这两种编码都有一个问题是，对于数字 0 会有两种解释方式

在原码中 $[00\cdots0]$ 被解释为 $+0$，$[10\cdots0]$ 被解释为 -0

在反码中 $[00\cdots0]$ 被解释为 $+0$，$[11\cdots1]$ 被解释为 -0

实际上，浮点数的编码方式就是才有原码编码

无符号数与补码数的转换

对于补码和无符号数之间的转换，**底层的位值表示是不变的**，只是改变了**解释这些位的方式**

补码转无符号

```
T2U_{\omega}(\vec x) = \left { \begin{matrix}
x+2^{\omega}, & x \lt 0 \
x,           & x \ge 0
\end{matrix}\right.
```

无符号转补码

```
U2T_{\omega}(\vec x) = \left { \begin{matrix}
x , & x\le TMax \
x-2^{\omega} ,& x \gt TMax
\end{matrix}\right.
```

拓展一个数字的位表示

我们主要讨论从一个较小的类型转换到较大的类型

无符号的拓展

无符号的拓展被称为零拓展(zero extention)，只需要简单的在开头添加 0 即可，其原理如下：

定义长度为 ω 的位向量 $\vec{u} = [u_{\omega-1}, u_{\omega-2}, \cdots, u_1, u_0]$ 和长度为 ω' 的位向量 $\vec{u'} = [0, 0, \cdots, 0, u_{\omega-1}, u_{\omega-2}, \cdots, u_1, u_0]$ ，其中 $\omega' > \omega$

此时有：$B2U(\vec{u}) = B2U(\vec{u'})$

补码数的拓展

补码数的拓展被称为符号拓展(sign extention)，即在前面**添加最高有效位**

最高有效位为 0 ，那么添加 0 ；最高有效位为 1 ，那么添加 1

定义长度为 ω 的位向量 $\vec{u} = [u_{\omega-1}, u_{\omega-2}, \cdots, u_1, u_0]$ 和长度为 ω' 的位向量 $\vec{u'} = [u_{\omega-1}, u_{\omega-1}, \cdots, u_{\omega-1}, u_{\omega-1}, u_{\omega-2}, \cdots, u_1, u_0]$ ，其中 $\omega' > \omega$

我们有：$B2T(\vec{u}) = B2T(\vec{u'})$

推导：

我们只需证明：$B2T([u_{\omega-1}, u_{\omega-2}, \cdots, u_1, u_0]) = B2T([u_{\omega-1}, u_{\omega-1}, u_{\omega-2}, \cdots, u_1, u_0])$ ，便可以说明对于**任意位数的符号拓展，都是满足条件的**

我们按照补码数的定义展开，有：

$$B2T([u_{\omega-1}, u_{\omega-1}, u_{\omega-2}, \cdots, u_1, u_0]) = -u_{\omega-1}2^{\omega} + \sum_{i=0}^{\omega-1} u_i 2^i \quad = -u_{\omega-1}2^{\omega} + u_{\omega-1}2^{\omega-1} + \sum_{i=0}^{\omega-2} u_i 2^i \quad = -u_{\omega-1}2^{\omega-1} + \sum_{i=0}^{\omega-2} u_i 2^i \quad = B2T([u_{\omega-1}, u_{\omega-2}, \cdots,$$

本质上是使用属性：$2^{\omega} - 2^{\omega-1} = 2^{\omega-1}$

截断数字

截断无符号数

设 $\vec{x}$ 表示位向量 $[x_{\omega-1}, x_{\omega-2}, \cdots x_1, x_0]$ ，$\vec{x'}$ 为其**截断为 k 位**的结果：$\vec{x'} = [x_{k-1}, x_{k-2}, \cdots, x_1, x_0]$ ，我们有：$x' = x \bmod 2^k$

$$B2U_{\omega}([x_{\omega-1},x_{\omega-2},\cdots x_1,x_0]) \bmod 2^k = (\sum_{i=0}^{\omega-1} x_i 2^i) \bmod 2^k \qquad = (\sum_{i=0}^{k-1} x_i 2^i) \bmod 2^k = B2U_{\omega}([x_{k-1},x_{k-2},\cdots,x_1,x_0])$$

本质上是对于任意的 $i \ge k$，都有：$2^i \bmod 2^k = 0$

截断补码数

设 $\vec{x}$ 表示位向量 $[x_{\omega-1},x_{\omega-2},\cdots x_1,x_0]$，$\vec{x'}$ 为其**截断为 k 位**的结果：$\vec{x'} = [x_{k-1},x_{k-2},\cdots,x_1,x_0]$，我们有：$x' = U2T(x \bmod 2^k)$

本质上是先将位向量**截断为 k 位**，然后在**从补码的角度诠释位表示**

整数运算

右移方式

右移方式有两种：逻辑右移与算术右移

前者会直接补 0，后者会补**最高有效位**；如果最高有效位为 0，那么便补 0，如果最高有效位为 1，那么便补一

对于无符号数，**右移均为逻辑右移**

对于补码数，**右移均为算术右移**

无符号加法

设 $0 \le x,y \le 2^{\omega}$，有：

\begin{align*}
x+_{\omega}^{u}y=\left { \begin{array}{l} x+y,\quad &x+y\le 2^{\omega}\qquad \text{正常}\
x+y-2^{\omega},\quad &x+y\ge 2^{\omega}\qquad \text{溢出}
\end{array}\right.
\end{align*}

两个 ω 位的无符号数相加，其结果可能需要 $\omega+1$ 位来表示

若两个 ω 位的无符号数相加，如果加和**会自动截断为 ω 位**

无符号加法溢出的检测

设 $0 \le x,y \le UMax_{\omega}$，令 $s = x +_{\omega}^{u} y$，当且仅当 $s < x$ （或等价条件 $s < y$）成立时，发生了溢出

代码判断：

```
//未发生溢出时返回true，发生溢出时返回false
bool uadd_ok(unsigned x, unsigned y)
{
    unsigned sum = x + y;
    return sum >= x;
}
```

无符号的非

设 $0 \le x < 2^{\omega}$，其 ω 位的逆元 $-_{\omega}^{u}x$ 有下式给出：

\begin{align*}
-_{\omega}^{u}x&=\left { \begin{matrix} &x,&x=0\
&2^{\omega}-x,&x\gt 0
\end{matrix} \right.
\end{align*}

求无符号的非，本质上是对于一个无符号数 x，找到一个 y 使得：

$$(x +_{\omega}^{u} y) \bmod 2^{\omega} = 0$$

因此直接在 x 的基础上加一个**使其溢出的数**即可

补码加法

设 $-2^{\omega-1} \le x,y \le 2^{\omega-1}-1$，有：

\begin{align*}
x+_{\omega}^{t}y=\left { \begin{array}{l}x+y-2^{\omega},&x+y\ge 2^{\omega-1}\quad \text{正溢出}\
x+y,&-2^{\omega}\le x+y\le 2^{\omega-1}-1 \quad \text{正常}\
x+y+2^{\omega},&x+y\lt -2^{\omega-1} \quad \text{负溢出}
\end{array}\right.
\end{align*}

对于 ω 位的补码数可表示的最小值为 $-2^{\omega-1}$，可表示的最大值为 $2^{\omega-1}-1$

因此如果两个 ω 位的补码数相加，其结果可能需要 $\omega+1$ 位来表示

如果结果大于 $2^{\omega-1}-1$ ，则发生**正溢出**，$\omega-1$ 位的值由 0 变为 1，数值上相当于加和结果**减去** $2\times 2^{\omega-1}=2^{\omega}$

如果结果小于 -2^{ω} ，则发生**负溢出**，ω 位的会溢出为 1 ，由于我们需要将该位舍去，因此数值上相当于加和结果**加上** 2^{ω}

补码加法溢出的判断

设 $TMin\leq x,y\leq TMax$ ，令 $s=x+_{\omega}^{t}y$

当且仅当 $x>0,y>0$ 而 $s\leq 0$ 时，发生**正溢出**

当且仅当 $x<0,y<0$ 而 $s\geq 0$ 时，发生**负溢出**

代码判断：

```
//返回-1表示负溢出，1表示正溢出，0表示正常
int tadd_ok(int x, int y)
{
    int sum = 0;
    if(x < 0 && y < 0 && sum >= 0) return -1;
    else if(x > 0 && y > 0 && sum <= 0) return 1;
    else return 0;
}
```

该程序不能写成：

```
int tadd_ok(int x, int y)
{
    int sum = x + y;
    return (sum - x == y) && (sum - y == x);
}
```

这是因为，**无论补码加法是否溢出，`sum -x == y` 都始终成立**（补码加法是模数加法，具有循环的特性）

如果需要判断 $x-y$ 是否发生溢出，不能写成：

```
int tsub_ok(int x, int y)
{
    return tadd_ok(x, -y);
}
```

当 y 取除 $TMin$ 以外的任何值时，都是满足条件的，但当 $y=TMin$ 时，此函数做出了与我们期望相反的行为

当 $y=TMin$ 时，该函数认为只要 $x\geq 0$ 时就不会发生溢出，只要 $x<0$时就会发生溢出，但实际与此刚好相反

当 $y=TMin$ 时，$-y=TMin$ ，若 $x\geq 0$ ，其实际计算结果为**正数**，但位表示却为负数，因此发生了溢出；同理，若 $x;t0$ ，其实际计算结果**依旧**为**正数**，在位表示上，溢出的一位会被舍去，而符号位为 0 ，即位表示为正数，因此没有发生溢出

正确写法：

```
//溢出返回1，未溢出返回0
int tsub_ok(int x, int y)
{
    int sub = x - y;
    return (x > 0 && y < 0 && sub < 0) || (x < 0 && y > 0 && sub > 0);
}
```

补码的非

设 $TMin\leq x\leq TMax$ ，x 的补码非 $-_{\omega}^{t}x$ 由下式给出：

\begin{align*}
-_{\omega}^{t}x=\left { \begin{matrix} &TMin,&x=TMin\
&-x,&x\gt TMin
\end{matrix}\right.
\end{align*}

补码的非本质上同无符号的非一样，都是找一个数 y 使得 $(y+_{\omega}^{t}x) \bmod 2^{\omega}=0$ ，本质上都是模数加法的溢出

在位表示上，对于任意值 x ，$\sim x+1$ 所求得的值就是 x 的非，即 $-x$

快速求补码非的办法

在 x 的二进制表示中，设 k 为最右边的 1 的位置，即 x 的位表示为 $[x_{\omega-1},x_{\omega-2},\cdots,x_{k+1},1,0,\cdots,0]$ （只要 x 不为 0 就总能找到这样的 k）

这个值的非的位表示为 $[\sim x_{\omega-1},\sim x_{\omega-2},\cdots,\sim x_{k+1},1,0,\cdots,0]$

也就等同于，将 k 的左边所有位均**取反**

无符号乘法

对于 $0\le x,y\le UMax$ ，无符号乘法结果由下式给出：

$$x *_{\omega}^{u} y=(x*y)\bmod 2^{\omega}$$

两个 ω 位的数相乘，结果可能需要 2ω 位才能表示，因此无符号程序会将结果**截断为 ω 位**

补码乘法

对于 $TMin\le x,y\le TMax$ ，补码乘法结果由下式给出：

$$x *_{\omega}^{t} y=U2T((x*y)\bmod 2^{\omega})$$

其实就是将乘法结果**截断为 ω 位，然后再从补码的角度解释**

乘以常数

乘以 2 的次幂

我们先讨论乘以 2 的次幂的情况

无论是无符号数还是补码数，乘以 2^k 相当于将位表示左移 k 个单位，然后再对其进行截断，即：

$$ x*{\omega}^{u}2^k=B2U((x2^k)\bmod 2^{\omega})\ x{\omega}^{t}2^k=U2T((x*2^k)\bmod 2^{\omega}) $$

乘以任意常数

对于乘以任意常数 K 的情况，我们将 K 的二进制表示写出来：$[(0\cdots0)(1\cdots1)(0\cdots0)]$ ，必然会是**连续**的 $0,1$ 交替的情况

例如，14 可以写为 $[(0\cdots0)(111)(0)]$，考虑**位位值**从 n 到 m 的一组连续的 1 （$n\ge m$ ，且二者均从 0 开始）。（对 14 来说，$n=3,m=1$ ）我们可以用以下两种方式来将乘以任意常数 K 转换成加法、减法与移位操作：

- $(x\ll n)+(x\ll(n-1))+\cdots+(x\ll m)$
- $(x\ll(n+1))-(x\ll m)$

问题：如果加法、减法、移位所需的时间相同，那么当 n,m 取不同值时，编译器该如何决定选择哪一种操作？

分类讨论：

如果 $n=m$ ，那么第一种只需要一次移位，第二种需要一次减法和两次移位

如果 $n=m+1$ ，那么第一种需要两次移位和一次加法，第二种需要两次移位和一次减法

如果 $n>m+1$ ，那么第二种只会需要两次移位和一次减法，第一种需要 $n-m+1$ 次移位和 $n-m$ 次加法

综上，我们有如下结论：

- 若 $n=m$ ，选第一种
- 若 $n=m+1$ ，哪种都行
- 若 $n>m+1$，选第二种

除以 2 的幂

取整的描述

对于除法，我们期望其结果**总是舍去小数**，这一点对正数和负数我们都期望是成立的

例如，我们期望：$5\div2=2,\ -5\div2=-2$

这种舍入我们称为**向零舍入**，即直接舍去小数位

为了更便于描述该过程，我们需要引入两个符号：下取整与上取整

对于任意实数 x ，我们定义 $\lfloor x\rfloor$ 生成唯一**整数** x' 使得 $x'\le x<x'+1$ ，$\lceil x\rceil$ 生成唯一**整数** x' 使得 $x'-1<x\le x'$

例如：

$\lfloor 2.5\rfloor$ 生成 $x'=2$ ，使得 $x'\le 2.5<x'+1$

$\lfloor -2.5\rfloor$ 生成 $x'=-3$ ，使得 $x'\le -2.5<x'+1$

$\lceil 2.5\rceil$ 生成 $x'=3$ ，使得 $x'-1<2.5\le x'$

$\lceil -2.5\rceil$ 生成 $x'=-2$ ，使得 $x'-1<-2.5\le x'$

我们发现，对于整数的**向零舍入**，恰好用**下取整**便可以描述，而对于负数的**向零舍入**，我们需要**上取整**才可以描述

无符号除法

若一个无符号数除以 2^k ，则对其执行**算术右移 k 个单位**，所得二进制表示便是**下取整**的结果

例如：$5=[0101]$ ，将其右移一位（除以 2^1 ），所得位表示为 $2=[0010]$ ，我们发现这恰好变式**下取整**

对于无符号数值 x 和整数 k 而言，$x \gg k = \lfloor x/2^k \rfloor$

补码除法

对于补码的除法，我们需要在右移的过程中保证符号不变，因此必须执行**算术右移**

我们从一个例子出发，考虑对负数直接执行算术右移的操作后，其结果如何

如果我期望将 $-5=[1011]$ 右移一位除以 2^1 ，那么所得位表示为 $-3=[1101]$

我们发现，不论是逻辑右移还是算术右移，其结果**都是下取整。**这对于正数是合理的，但对于负数却不是我们希望的，我们需要一种办法将下取整转换为上取整

我们利用如下等式：

$$\lceil x/y \rceil = \lfloor (x+y-1)/y \rfloor$$

例如，当 $x=-30,\ y=4$ 时，$\lceil -30/4 \rceil = -7$ ，此时我们有 $x+y-1=-27$ ，而 $\lfloor (x+y-1)/y \rfloor = \lfloor -27/4 \rfloor = -7$

对于补码数 x 和整数 k 而言，$x \gg k = \lceil x/2^k \rceil = \lfloor (x+2^k-1)/2^k \rfloor = (x+(1 \ll k)-1) \gg k$

到此为止，我们已经讨论了除以 2 的幂次的情况，但不幸的是，除法无法像乘法那样推广到除以任意常数 K。换句话说，对于任意常数 K ，我们无法将其简单地转为**除以多个 2 的幂次相加的情况**

你也许会想，任意一个数都可以分解为 2 的幂次，并且乘法与除法都满足**分配律**，为什么除法不能像乘法那样分解呢？

这里的问题在于，除法会有**舍入**的问题（而乘法不具有这种问题），如果将其简单的分解为多个数相除，那么小数的部分将会全部被舍去，这将会导致最终的结果与我们所预期的相差过大

浮点数