1. 累乗根

$x^n = a$ となる x を a の n 乗根といい，$\sqrt[n]{a}$ と表す.

問題： 次の値を根号を用いて表せ

A. 7 の平方根

$\pm\sqrt{7}$

B. π の立方根

$\pm\sqrt[3]{\pi}$

C. -16 の 4 乗根

なし

2. 累乗根の性質

- $(\sqrt[n]{a})^n = a$
- $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

($a > 0, b > 0$ で m, n が 2 以上の整数のとき)

問題： 次の式を簡単にせよ.

A. $\sqrt[4]{27}\sqrt[4]{3}$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt[4]{27 \cdot 3} \\
&= \sqrt[4]{(3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot 3} \\
&= \sqrt[4]{3^4} = 3
\end{aligned}
$$

B. $\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}}$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt[3]{\frac{24}{3}} \\
&= \sqrt[3]{8}
\end{aligned}
$$

$= \sqrt[3]{2^3} = 2$

C. $\frac{\sqrt[3]{147}\sqrt[3]{63}}{7}$

$= \frac{\sqrt[3]{147 \cdot 63}}{7}$
$= \frac{\sqrt[3]{(7 \cdot 7 \cdot 3) \cdot (7 \cdot 3 \cdot 3)}}{7}$
$= \frac{\sqrt[3]{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}}{7}$
$= \frac{\sqrt[3]{7^3 \cdot 3^3}}{7}$
$= \frac{\sqrt[3]{7^3}\sqrt[3]{3^3}}{7}$
$= \frac{7 \cdot 3}{7}$
$= 3$

3. 指数の拡張

- $a^0 = 1$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ （ n は正の整数）
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ （ $a > 0$, m は整数, n は 2 以上の整数）

4. 指数法則

- $a^p a^q = a^{p+q}$
- $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} = \frac{1}{a^{q-p}}$
- $(a^p)^q = a^{pq}$
- $(ab)^p = a^p b^p$

($a > 0, b > 0$ で p, q が 実数のとき)

問題I： 次の計算をせよ. （ただし $x > 0, y > 0$）

A. $\{(x^{-2})^3\}^{-1}$

$= \{x^{-2 \cdot 3}\}^{-1}$
$= \{x^{-6}\}^{-1}$
$= x^{-6 \cdot (-1)}$
$= x^6$

B. $(x^2 y)(xy^{-2})$

$= x^2 \cdot x \cdot y \cdot y^{-2}$
$= x^3 y^{-1}$

C. $\frac{x^{-3}}{(x^2)^{-1}}$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{x^{-3}}{x^{2\cdot(-1)}} \\
&= \frac{x^{-3}}{x^{-2}} \\
&= x^{-3} \cdot x^2 \\
&= x^{-3+2} \\
&= x^{-1}
\end{aligned}
$$

D. $15^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{-\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}$

$$
\begin{aligned}
&= 5^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{-\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \\
&= 5^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \\
&= 5^0 \cdot 3^1 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

問題II： 次の各式を $\sqrt[n]{a^m}$ の形に表せ． （ただし $a > 0$）

A. $a^{0.375}$

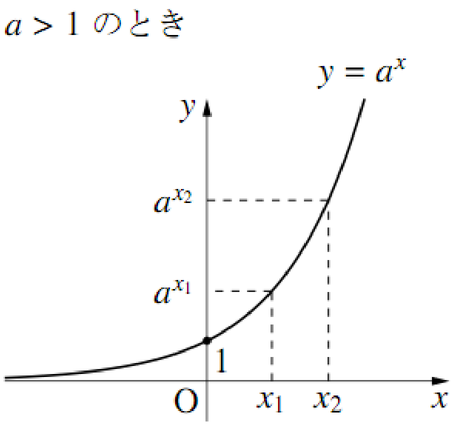
$$
\begin{aligned}
&= a^{\frac{375}{1000}} \\
&= a^{\frac{15}{40}} \\
&= a^{\frac{3}{8}} \\
&= \sqrt[8]{3}
\end{aligned}
$$

B. $\frac{1}{a^{0.75}}$

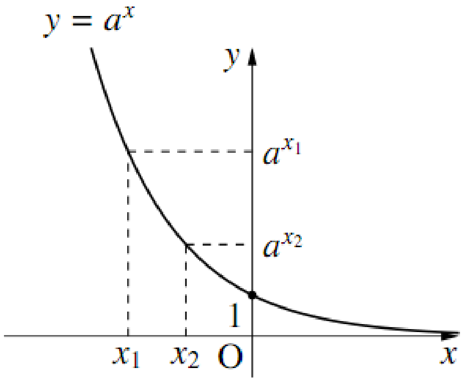
$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{a^{\frac{3}{4}}} \\
&= a^{-\frac{3}{4}} \\
&= \sqrt[4]{a^{-3}}
\end{aligned}
$$

指数関数

$y = a^x$ （ただし $a > 0, a \neq 1$ ）



$0 < a < 1$ のとき



問題

A. $y = \left(\frac{8}{5}\right)^x$ のグラフをかけ

$a > 1$ の場合で，$(0, 1)$ と $\left(1, \frac{8}{5}\right)$ を通る

B. $y = \left(\frac{5}{8}\right)^x$ のグラフをかけ

$0 < a < 1$ の場合で，$(0, 1)$ と $\left(-1, \frac{8}{5}\right)$ を通る

C. $y = 2^x$ のグラフとの関係を考えて，$y = 2 \cdot 2^x$ のグラフをかけ

$y = 2^x$ のグラフを x 軸方向に -1 平行移動したもの

D. 方程式 $3^{2x-1} - 5 \cdot 3^{x-1} = 12$ を解け

以下のように変形できる：
$\frac{3^{2x}}{3} - 5 \cdot \frac{3^x}{3} = 12$
$\frac{1}{3}(3^x)^2 - \frac{5}{3}3^x = 12$
ここで，$X = 3^x$ とおいて，
$\frac{1}{3}X^2 - \frac{5}{3}X - 12 = 0$
$X^2 - 5X - 36 = 0$
$(X+4)(X-9) = 0$
$X = -4, 9$
$-4 = 3^x$ となる x は存在しない．よって，
$9 = 3^x$
$\therefore x = 2$

対数

$m = \log_a N \iff N = a^m$

対数の性質

基本性質

- $\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1$
- $\log_a MN = \log_a M + \log_a N, \quad \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
- $\log_a M^n = n \log_a M$

底の変換

- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

（$a > 0, a \neq 1, \quad M, N > 0$ のとき）

問題I： 次の値を求めよ

A. $\log_2 128$

$= \log_2 2^7$
$= 7$

B. $\log_2 0.25$

$= \log_2 \frac{1}{4}$
$= \log_2 1 - \log_2 4$
$= 0 - 2$
$= -2$

問題II： 次の式を計算せよ

A. $\log_3 6 + \log_3 \frac{3}{2}$

$$
\begin{aligned}
&= \log_3 6 \cdot \tfrac{3}{2} \\
&= \log_3 9 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

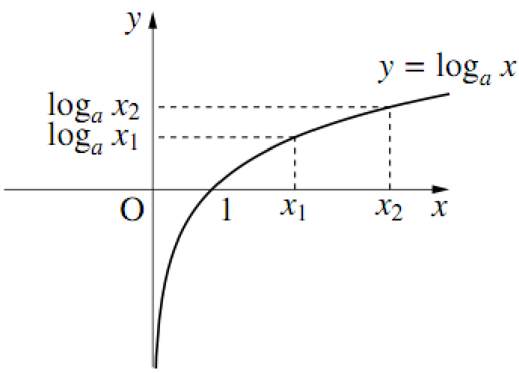
B. $\log_7(49^{-2}) + \log_7(\sqrt{7})$

$$
\begin{aligned}
&= \log_7(49^{-2}) + \log_7(7^{\frac{1}{2}}) \\
&= -2\log_7 49 + \tfrac{1}{2}\log_7 7 \\
&= -2\log_7(7^2) + \tfrac{1}{2}\log_7 7 \\
&= -2 \cdot 2 + \tfrac{1}{2} \cdot 1 \\
&= -\tfrac{7}{2}
\end{aligned}
$$

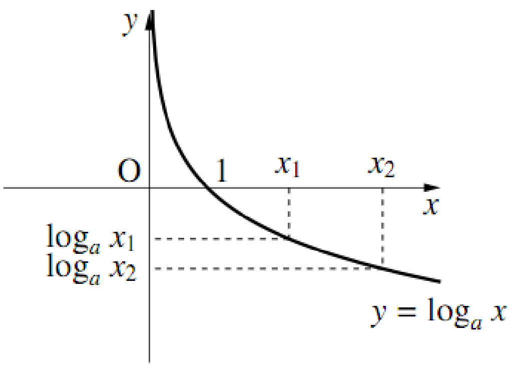
対数関数

$m = \log_a x$ （ただし $a > 0, a \neq 1$ ）

$a > 1$ のとき



$0 < a < 1$ のとき



問題I： 次の関数のグラフをかけ

A. $y=\log_5 x$

$a>1$ の場合で，$(1,0)$ と $(5,1)$ を通る

B. $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x)$

$0<a<1$ の場合を y 軸に関して反転したもので，$(1,0)$ と $(-2,-1)$ を通る

問題II： 次の方程式を解け

A. $2\log_4 x=1$

$$2\cdot\frac{\log_2 x}{\log_2 4}=1$$
$$2\cdot\frac{\log_2 x}{2}=1$$
$$\log_2 x=1$$
$$x=2^1$$
$$\therefore x=2$$

B. $log_{10}(x-48)+\log_{10} x=2$

$$\log_{10}((x-48)x)=\log_{10}100$$
$$(x-48)x=100$$
$$x^2-48x-100=0$$
$$(x+2)(x-50)=0$$
真数は正とすると，$x=50$