LIBOR スワップレートのフォールバックと LIBOR スワップションのプライシング

Diva Analytics

2021 年 7 月 15 日

1 ISDA 非清算デリバティブと清算スワップ

- ISDA は 2021 年 1 月 25 日に 2006 ISDA 定義集の Supplement 70 が発効した。これ以降の新規トレードはここの IBOR フォールバックが有効となる。
- ISDA は 2020 IBOR Fallback プロトコルを公表して各金融機関がこれを批准し、2021 年 1 月 25 日に効力が発生した。これにより、過去約定トレードでも IBOR フォールバックが有効となった。
- FCA は 3 月 5 日に LIBOR の将来時点での恒久的公表停止 (または、公表は継続するかもしれないがそれ以降の LIBOR はマーケットを反映していない) ことを発表した。LIBOR の公表停止またはマーケットを反映しなくなる時期を、ドルのメインテナーは 2023 年 7 月 1 日から、それ以外の通貨・テナーは 2022 年 1 月 1 日からとした。この FCA の発表により Fallback Trigger Event が発生して、LIBOR フォールバックレートでのスプレッド調整値が実現 LIBOR と Compounded RFR との差の直近 5 年間の中央値として決定された。

LIBOR	ISDA fallback spread
GBP 3m LIBOR	11.93bp
GBP 6m LIBOR	27.66bp
JPY 3m LIBOR	0.835bp
JPY 6m LIBOR	5.809bp
USD 3m LIBOR	26.161bp
USD 6m LIBOR	42.826bp

(Table 1) ISDA Fallback Spread

- これを受け、ISDA 非清算デリバティブが参照している LIBOR の Fixing 日が、Index Cessation Effective Date 以降のものは、LIBOR カーブではなく、OIS カーブを用いて評価することになる。
- 一方、清算 LIBOR スワップに関しては、クリアリングハウスが Index Cessation Effective Date よりも前の特定の日に LIBOR スワップを準マーケット標準 (ISDA の Dynamic backward shift ではなく、変動レッグのみの Payment delay。ISDA Spread は変動レッグに付与される。）の OIS に変換することを発表している。週末の変換日に変換前の LIBOR スワップを LIBOR カーブで評価した時価と変換後の OIS を OIS カーブで評価した時価との差を現金の授受で補償するとしている。このため、現在の

ベストプラクティスでは、清算 LIBOR スワップは LIBOR フォワードカーブを用いてプライシング・評価されるようだ。

- Index Cessation Effective Date 以降に決まる LIBOR を参照する ISDA 非清算デリバティブは ISDA の Backward Shift を適用した上で OIS カーブで評価するが、清算 LIBOR スワップは LIBOR カーブで評価するという分断が起こっている。しかし、LIBOR カーブはフォールバックスプレッドを織り込んでいるとすれば、清算 LIBOR スワップの評価はそんなに悪くないが、実はそうでもない。
- LIBOR カーブで清算スワップを評価する場合は、LIBOR フォワードカーブは Index Cessation Effective Date を境に Real パートと Fake パートで分断されなければならない。
- 清算 LIBOR スワップの評価やリスク管理で、"Fake"な LIBOR カーブを使い続けている理由は、CCP が LIBOR カーブで評価して変動証拠金を計算していることと、OIS への変換日に LIBOR カーブで評価した時価と OIS カーブで評価した時価の差が現金で決済されることからであろう。しかし、変換日は Index Cessation Effective Date の直前であり、変換日に近づくにつれてマーケットで LIBOR スワップレートが観察されるかの保証はない。変換日での理論的なスワップレートは、相対市場での ISDA LIBOR スワップとの裁定から

$$LIBOR\ swap\ rate \approx OIS\ Rate + ISDA\ Fallback\ spread \tag{1}$$

となるはずだが、仮にマーケットで取引されていたとしても、せいぜい顧客との LIBOR スワップと OIS のスプレッドとして取引されたものであるから、需給により、(1) の裁定関係はなりたたないかもしれない。また、変換日に近づくにつれ LIBOR スワップの流動性が少なくなるので悪意を持ったマーケット参加者が操作しやすくなる。変換日の前後である LIBOR スワップの時価が次のように推移したとする。(Table 2) での時価の推移での変換日の LIBOR カーブでの評価は正しいものとする。変換日-2 から変換日 +1 までの PL は、140(変換日 +1 の時価）-100（変換日-2 の時価)-20（補償金）=20. これは、変動証拠金の受け取り金額と補償金の合計に一致する。一方、(Table 3) では変換日だけに LIBOR スワップマーケットが操作され、LIBOR カーブでの評価がゆがんだとする。この場合の PL は +140-100-170=-130 となり、変換日での LIBOR カーブでの評価は補償額を計算するものであり、それがゆがめられると、PL が操作される。

	変換日-2	変換日-1	変換日	変換日 +1
LIBOR カーブでの評価	+100	+120	+130	
OIS カーブでの評価			+150	+140
変動証拠金	-	+20	+30	-10
補償金			-20	

(Table 2) LIBOR スワップのキャッシュフロー (変換日での LIBOR カーブでの評価が正しいものである場合)

	変換日-2	変換日-1	変換日	変換日 +1
LIBOR カーブでの評価	+100	+120	-20	
OIS カーブでの評価			+150	+140
変動証拠金	-	+20	+30	-10
補償金			-170	

(Table 3) LIBOR スワップのキャッシュフロー（変換日での LIBOR カーブでの評価がゆがめられた場合）

2 スワップションの決済コンベンション

Pysical Settlement Method

- Physically Settlement: 権利行使時に、Bilateral non-cleared swap が発生する。権利行使によって発生した LIBOR スワップで参照される Index Cessation Effective Date 以降に Fixing を迎える LIBOR は、2020 IBOR Fallback Protocol によって Dynamic Backward Shift で Compound RFR in arrears+ 該当テナー LIBOR の ISDA spread に代替される。
- Cleared Phisical Settlement: 権利行使された場合に、指定されたクリアリングハウスでデリバーされたスワップが清算される (Cleared swap)。クリアリングハウスが Index Cessation Effective Date よりも前の特定の日に LIBOR スワップを市場標準の OIS に変換し、その日以降は LIBOR スワップの新規清算を停止するとしている。この場合、スワップションの清算方法は Collateralized Cash Price にフォールバックされる。

Cash Settlement Method

- Cash Price: 権利行使時に、キャッシュで清算する。精算額は下の (2) と同じだが、計算代理人が一方的に決めることが多く、Bilateral な担保通貨の Annuity でディスカウントすることが多い。
- Collateralized Cash Price: スワップション満期 T でのペイオフ、例えば、Payers の場合は

$$\sum_{i=1}^{N} \delta(T_{i-1}, T_i) D(T, T_0, T_i) * (S_T - K)^+ \tag{2}$$

を売り手が買い手に権利行使時 T のスポット日 T_0 に支払う。ここの満期時のスワップレートとして、USD と GBP の場合は ICE スワップレートを、JPY の場合は東京 LIBOR スワップレートを参照する。満期時のフォワード・ディスカウントファクター $D(T, T_0, T_i) = \frac{D(T,T_i)}{D(T,T_0)}$ から計算される Annuity 値はお互いに決めたクリアリングハウスで使うものを使用する。実務上はクリアリングハウスは Annuity を公表していないので、計算代理人のシステムからクリアリングハウスでの担保通貨を考慮して計算された値で合意する。
参照スワップレートがフォールバックされると、上の S_T としてフォールバックレートをつかう。
- Par Yield Curve Unadjusted: 割り引くディスカウントレートもスワップレートを使う。つまり、

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\frac{1}{m}}{\left(1 + \frac{S_T}{m}\right)^i} * (S_T - K)^+$$

ここで、m は 1 年間の固定レートの回数。満期時の Cash Annuity の値も客観的に求まる。GBP や以前の EUR でのスワップション決済の慣習。
参照スワップレートがフォールバックされると、Annuity を含めたすべての S_T がフォールバックされる。

3 ISDA Swap Rate

- GBP と USD ののデリバティブで参照されるスワップレートは、現在、IBA(ICE Benchmark Administration）が公表しており、ICE Swap Rate と呼ばれる。スワップテナーは、1y, 2y, ..,10y, 12y, 15y, 20y, 25y, 30y である。これに対応する ISDA の FRO は、
  - GBP: GBP-ISDA-Swap Rate(11:00 公表のもの）
  - USD: USD-ISDA-Swap Rate(11:00 公表のもの）, USD-ISDA-Swap Rate-3:00
- JPY のデリバティブで参照されるスワップレートは、現在、Refinitive が Reuters Screen 17143 page に公表しているおり、Tokyo Swap Rate と呼ばれる。LIBOR swap rate はテナーが 1y-40y で、10:00 と 15:00 に公表される。TIBOR swap rate はテナーが 1y-10y で、15:30 に公表される。JPY で Collateralized Cash Price は、15:00 の TSR(LIBOR) が用いられるようだ。
  - LIBOR swap rate は ISDA の FRO では、JPY-TSR-Reuters-10:00, JPY-TSR-Reuters-15:00
- 2020 年 12 月 14 日から、IBA は SONIA swap rate を公表している。ISDA Supplement 66 で GBP-SONIA Swap Rate が FRO として付け加えられた。今後、SOFR Swap Rate を公表する予定である。Refinitive も TONA swap rate を公表する予定である。

4 LIBOR Swap Rate のフォールバック式の導出

4.1 一般式の導出

Index Cessation Effective Date 以降のトレードで、マーケットでクオートされる標準的なスポット LIBOR スワップで、すべての参照 LIBOR が Compound RFR in arrears+ 該当テナー LIBOR の ISDA spread にすでにフォールバックしているものとする。それゆえ、スワップレートのフォールバックは Index Cessation Effective Date 以降用いられる。

同じテナーの標準的な RFR スワップレート S が分かっているとする。その場合の無裁定な LIBOR スワップレート $\widetilde{S}$ は[*1]、RFR ディスカウントを仮定して、

$$\widetilde{S} * A_{LIBOR,FixedLeg} = S * A_{RFR,FixedLeg} + FS * A_{LIBOR,FloatingLeg}$$

から

$$\widetilde{S} = S * \frac{A_{RFR,FixedLeg}}{A_{LIBOR,FixedLeg}} + FS * \frac{A_{LIBOR,FloatingLeg}}{A_{LIBOR,FixedLeg}} \tag{3}$$

ここで、FS は LIBOR スワップが参照しているテナーの LIBOR フォールバックレート・スプレッド（すでに決まっている、Table 1 参照)、$A_{Index,Leg}$ とは $Index(= RFR\ or\ LIBOR)$ スワップの Leg(=Fixed or Floating) の Annuity 値を表し、

$$A(t) = \sum_{i=1}^{N} \delta(T_i, T_{i-1}) D(t, T_i),\ t \leq T_0$$

*1 スワップレート・フォールバックレートの導出では ISDA フォールバックでの Dynamic Backward Shift は無視される。

A はそのレッグの支払い頻度 (Payment frequency) と Index スワップレート（固定レッグ）やフォールバック・スプレッドの Day count convention(act/360, act/365Fixed, or 30/360 等）に依存するので、明示的に

$$A(Freq, DCC)$$

とかくことにする。

もし、$A_{RFR,FixedLeg} = A_{LIBOR,FixedLeg} = A_{LIBOR,FloatingLeg}$ のときは、

$$\widetilde{S} = S + FS \tag{4}$$

が成り立つ。

(3) から LIBOR スワップレートのフォールバックレートを考えたとき、(4) が成り立つ以外の一般的な場合は、(3) の右辺は RFR スワップレートのみならず、RFR スワップレートの Annuity と LIBOR スワップレートの Annuity、及び LIBOR の Annuity に依存するが、これらの Annuity は客観的に観察ができない。よって、これらの Annuity 比率を近似的に RFR スワップレート S で表すことを考える。

LIBOR レッグや RFR スワップ固定レッグの DCC は Act/360 か Act/365F のみが普通だが、LIBOR スワップ固定レッグの DCC は、その通貨での金利の歴史にかかわるのでいろいろなコンベンションがある。ここでは、LIBOR スワップ固定レッグの DCC を 30/360、Act/360、Act/365F に限定して考える。Freq が同じ場合の Annuity 比率の値 (x（分子の DCC, 分母の DCC））を下のテーブルにまとめた[*2]。

·（分子）/LIBORFixed（分母）	Act/360	Act/365F	30/360
Act/360	1	365/360	365.25/360
Act/365F	360/365	1	365.25/365

(Table 4) 分子 (=·) の DCC と分母 (=LIBORFixed) の CDD の組み合わせの Annuity 比率 x

(3) 右辺の S に係る Annuity 比率は

$$\begin{aligned}
\frac{A_{RFR,FixedLeg}}{A_{LIBOR,FixedLeg}} &= \frac{A(RFRFixed, RFRFixed)}{A(LIBORFixed, LIBORFixed)} \\
&= \frac{A(LIBORFixed, RFRFixed)}{A(LIBORFixed, LIBORFixed)} * \frac{A(RFRFixed, RFRFixed)}{A(LIBORFixed, RFRFixed)} \\
&= x(RFRFixed, LIBORFixed)\frac{A(RFRFixed, RFRFixed)}{A(LIBORFixed, RFRFixed)}
\end{aligned} \tag{5}$$

また、(3) 右辺の FS に係る Annuity 比率は、Index_DCB を Index の DCC の分母の値 (=360 or 365) とすれば、

$$\begin{aligned}
\frac{A_{LIBOR,FloatingLeg}}{A_{LIBOR,FixedLeg}} &= \frac{A(LIBORFloating, LIBORFloating)}{A(LIBORFixed, LIBORFixed)} \\
&= \frac{A(LIBORFixed, LIBORFloating)}{A(LIBORFixed, LIBORFixed)} * \frac{A(LIBORFloating, LIBORFloating)}{A(LIBORFixed, LIBORFloating)} \\
&= x(LIBORFloating, LIBORFixed)\frac{A(LIBORFloating, LIBORFloating)}{A(LIBORFixed, LIBORFloating)} \\
&= x(LIBORFloating, LIBORFixed)\frac{\frac{LIBOR_DCB}{RFR_DCB}A(LIBORFloating, RFRFixed)}{\frac{LIBOR_DCB}{RFR_DCB}A(LIBORFixed, RFRFixed)} \\
&= x(LIBORFloating, LIBORFixed)\frac{A(LIBORFloating, RFRFixed)}{A(LIBORFixed, RFRFixed)}
\end{aligned} \tag{6}$$

[*2] Annuity 比率の分母分子で Freq が同じであれば、Freq の値は x に影響を与えない。

(5) と (6) を (3) に代入して、

$$\begin{aligned}\widetilde{S} &= S * \frac{A_{RFR,FixedLeg}}{A_{LIBOR,FixedLeg}} + FS * \frac{A_{LIBOR,FloatingLeg}}{A_{LIBOR,FixedLeg}} \\ &= x(RFRFixed, LIBORFixed) * S * \frac{A(RFRFixed, RFRFixed)}{A(LIBORFixed, RFRFixed)} \qquad (7) \\ &+ x(LIBORFloating, LIBORFixed) * FS * \frac{A(LIBORFloating, RFRFixed)}{A(LIBORFixed, RFRFixed)} \qquad (8)\end{aligned}$$

ここで、$A_{RFR,Freq}$ は RFR スワップレートの Day count convention を持ち、任意に指定した支払い頻度 (Freq) の Annuity とすると、様々な Freq を持つ RFR スワップレート S_{Freq} はスワップレートの定義から

$$S_{Freq} * A(Freq, RFRFixed) = S * A_{RFR,FixedLeg}(= PV\ of\ RFR\ FloatingLeg),\ Freq = M, Q, SA, A \qquad (9)$$

をみたす。よって、(7) で

$$S * \frac{A(RFRFixed, RFRFixed)}{A(LIBORFixed, RFRFixed)} = S_{LIBORFixedFreq} \qquad (10)$$

及び、(8) で

$$\frac{A(LIBORFloating, RFRFixed)}{A(LIBORFixed, RFRFixed)} = \frac{S_{LIBORFixedFreq}}{S_{LIBORFreq}} \qquad (11)$$

よって、

$$\widetilde{S} = x(RFRFixedDcc, LIBORFixedDcc)S_{LIBORFixedFreq} + x(LIBORDcc, LIBORFixedDcc)\frac{S_{LIBORFixedFreq}}{S_{LIBORFreq}} \qquad (12)$$

(12) までの展開で近似はない。もし、LIBOR スワップレートの支払い頻度や参照 LIBOR のテナーが、標準 RFR スワップレートの支払い頻度と異なるときは、$S_{LIBORFixedFreq}$ や $S_{LIBORFreq}$ はマーケットで観察されない。よって、近似として内部収益率 (IRR) を使って[*3]、$S_{LIBORFixedFreq}$ や $S_{LIBORFreq}$ を S で表す。

S の Freq/S_{Freq} の Freq	A	SA	Q	M
A	S	$2 * \left(\sqrt{1+S} - 1\right)$	$4 * \left(\sqrt[4]{1+S} - 1\right)$	$12 * \left(\sqrt[12]{1+S} - 1\right)$
SA	$\left(1+\frac{S}{2}\right)^2 - 1$	S	$4 * \left(\sqrt{1+\frac{S}{2}} - 1\right)$	$12 * \left(\sqrt[6]{1+\frac{S}{2}} - 1\right)$
Q	$\left(1+\frac{S}{4}\right)^4 - 1$	$2 * \left(\left(1+\frac{S}{4}\right)^2 - 1\right)$	S	$12 * \left(\sqrt[3]{1+\frac{S}{4}} - 1\right)$
M	$\left(1+\frac{S}{12}\right)^{12} - 1$	$2 * \left(\left(1+\frac{S}{12}\right)^6 - 1\right)$	$4 * \left(\left(1+\frac{S}{12}\right)^3 - 1\right)$	S

(Table 5) S_{Freq} をマーケット標準の S で表した近似式

例えば、マーケット標準の RFR スワップレート S の Freq が Annual、LIBOR スワップレートの Freq が SA のとき、

$$1 + S = \left(1 + \frac{S_{LIBORFixedFreq}}{2}\right)^2$$

[*3] タームストラクチャーがフラットと仮定しているといってもよい。

から

$$S_{LIBORFixedFreq} = 2 * \left(\sqrt{1+S} - 1\right)$$

また、マーケット標準の RFR スワップレート S の Freq が Q、LIBOR スワップが参照する LIBOR のテナーが 6m(Freq は SA) のとき、

$$\left(1+\frac{S}{4}\right)^4 = \left(1+\frac{S_{LIBORFreq}}{2}\right)^2$$

から、

$$S_{LIBORFreq} = 2 * \left(\left(1+\frac{S}{4}\right)^2 - 1\right)$$

この変換は、スワップレートを IRR としてペイオフを割り引く IRR 現金決済方式を想起させる。

4.2 円、ドル、及びスターリングポンドの LIBOR スワップレートのフォールバック式

(12) を使い、実際に円、ドル、及びスターリングポンドのスワップコンベンションに照らして、LIBOR スワップレートのフォールバック式を求める。USD, JPY, GBP のスワップコンベンション（支払い頻度と Day count convention) は以下の通りである。

	Swap Index	Leg	USD	JPY	GBP Tenor>1y	GBP Tenor=1y
Day Count Convention	LIBOR	Fixed	30/360	Act/365F	Act/365F	
		Floating	Act/360	Act/360	Act/365F	
	RFR	Fixed	Act/360	Act/365F	Act/365F	
		Floating	Act/360	Act/365F	Act/365F	
Payment Frequency	LIBOR	Fixed	SA	SA	SA	A
		Floating	Q	SA	SA	Q
	RFR	Fixed	A	A	A	
		Floating	A	A	A	

(Table 6) LIBOR スワップと RFR スワップの通貨ごとのコンベンション

- 円の場合、$LIBORFixedFreq = SA, LIBORFreq = SA, RFRFixedDcc = Act/365F, LIBORFixedDcc = Act/365F, LIBORDcc = Act/360$ なので、

$$\widetilde{S} = x(Act/365F, Act/365F)S_{SA} + x(Act/360, Act/365F)FS(6mLIBOR)\frac{S_{SA}}{S_{SA}} \tag{13}$$

$$= S_{SA} + \frac{365}{360}FS(6mLIBOR) \tag{14}$$

$$= 2 * \left(\sqrt{1+S} - 1\right) + \frac{365}{360}FS(6mLIBOR) \tag{15}$$

- ドルの場合は、$LIBORFixedFreq = SA, LIBORFreq = Q, RFRFixedDcc = Act/360, LIBORFixedDcc =$

$30/360, LIBORDcc = Act/360$ なので、

$$\widetilde{S} = x(Act/360, 30/360)S_{SA} + x(Act/360, 30/360)FS(3mLIBOR)\frac{S_{SA}}{S_Q} \tag{16}$$
$$= \frac{365.25}{360}S_Q + \frac{365.25}{360}FS(3mLIBOR)\frac{S_{SA}}{S_Q} \tag{17}$$
$$= \frac{365.25}{360} * \left[2 * \left(\sqrt{1+S} - 1\right) + FS(3mLIBOR)\frac{2 * \left(\sqrt{1+S} - 1\right)}{4 * \left(\sqrt[4]{1+S} - 1\right)}\right] \tag{18}$$
$$= \frac{365.25}{360} * \left[2 * \left(\sqrt{1+S} - 1\right) + FS(3mLIBOR)\frac{2 * \left(\sqrt{1+S} - 1\right)\left(\sqrt[4]{1+S} + 1\right)}{4 * \left(\sqrt[4]{1+S} - 1\right)\left(\sqrt[4]{1+S} + 1\right)}\right] \tag{19}$$
$$= \frac{365.25}{360} * \left[2 * \left(\sqrt{1+S} - 1\right) + FS(3mLIBOR)\frac{2 * \left(\sqrt{1+S} - 1\right)\left(\sqrt[4]{1+S} + 1\right)}{4 * \left(\sqrt{1+S} - 1\right)}\right] \tag{20}$$
$$= \frac{365.25}{360} * \left[2 * \left(\sqrt{1+S} - 1\right) + FS(3mLIBOR)\frac{\left(\sqrt[4]{1+S} + 1\right)}{2}\right] \tag{21}$$

- スターリングポンドでは、$RFRFixedDcc = LIBORFixedDcc = LIBORDcc = Act/365F$
  1 年のスワップレートでは、$LIBORFixedFreq = A, LIBORFreq = Q$ なので、

$$\begin{aligned}
\widetilde{S} &= x(Act/365F, Act/365F)S_A + x(Act/365F, Act/365F)FS(3mLIBOR)\frac{S_A}{S_Q} \\
&= S + FS(3mLIBOR)\frac{S}{4 * \left(\sqrt[4]{1+S} - 1\right)} \\
&= S + FS(3mLIBOR)\frac{S\left(\sqrt[4]{1+S} + 1\right)}{4 * \left(\sqrt[4]{1+S} - 1\right)\left(\sqrt[4]{1+S} + 1\right)} \\
&= S + FS(3mLIBOR)\frac{S\left(\sqrt[4]{1+S} + 1\right)}{4 * \left(\sqrt{1+S} - 1\right)} \\
&= S + FS(3mLIBOR)\frac{S\left(\sqrt[4]{1+S} + 1\right)\left(\sqrt{1+S} + 1\right)}{4 * \left(\sqrt{1+S} - 1\right)\left(\sqrt{1+S} + 1\right)} \\
&= S + FS(3mLIBOR)\frac{S\left(\sqrt[4]{1+S} + 1\right)\left(\sqrt{1+S} + 1\right)}{4 * S} \\
&= S + FS(3mLIBOR)\frac{\left(\sqrt[4]{1+S} + 1\right)\left(\sqrt{1+S} + 1\right)}{4}
\end{aligned} \tag{22}$$

1 年以上のスワップレートでは、$LIBORFixedFreq = SA, LIBORFreq = SA$ なので、

$$\begin{aligned}
\widetilde{S} &= x(Act/365F, Act/365F)S_{SA} + x(Act/365F, Act/365F)FS(6mLIBOR)\frac{S_{SA}}{S_{SA}} \\
&= S_{SA} + FS(6mLIBOR) \\
&= 2 * \left(\sqrt{1+S} - 1\right) + FS(6mLIBOR)
\end{aligned} \tag{23}$$

(22) と (23) をまとめて、

$$\widetilde{S} = \begin{cases} S + FS(3mLIBOR)\frac{\left(\sqrt[4]{1+S}+1\right)\left(\sqrt{1+S}+1\right)}{4}, & tenor = 1y \\ 2 * \left(\sqrt{1+S} - 1\right) + FS(6mLIBOR), & tenor > 1y \end{cases}$$

5 フォールバックを織り込んだ LIBOR スワップションのプライシング

円 LIBOR スワップションの満期 T が Index Cessation Effective Date 以降であるとする。また、表記が簡略できることから権利行使日のスポットラグはないものとする ($T = T_0$)。満期での Payers Option のペイオフは、

日本円の場合

$$\begin{aligned} V_T &= A_T(SA, Act/365)\left(\widetilde{S}_T - K\right)^+ \\ &= A_T(SA, Act/365)\left(2 * \left(\sqrt{1+S_T} - 1\right) + \frac{365}{360}FS(6mLIBOR) - K\right)^+ \end{aligned}$$

これを、RFR Annuity 測度でプライシングすると、

ギルサノフの定理による測度変換

$$V_0 = A_0(A, Act/365F)E^{\mathbf{A}(\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_M)}\left[\frac{A_T(SA, Act/365F)}{A_T(A, Act/365F)}\left(2\left(\sqrt{1+S_T} - 1\right) + \frac{365}{360}FS(6mLIBOR) - K\right)^+\right] \tag{24}$$

- $\frac{A_T(SA, Act/365F)}{A_T(A, Act/365F)} = \frac{S_T}{S_T^{SA}}$ より、

$$V_0 = A_0(A, Act/365F)E^{\mathbf{A}(\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_M)}\left[\frac{S_T}{S_T^{SA}}\left(2 * \left(\sqrt{1+S_T} - 1\right) - \left(K - \frac{365}{360}FS(6mLIBOR)\right)\right)^+\right] \tag{25}$$

ここで、

$$S_T^{SA} \approx 2 * \left(\sqrt{1+S_T} - 1\right) \tag{26}$$

とスワップレートのフォールバック式と同じ近似すると、(25) は

$$\begin{aligned} V_0 &= A_0(A, Act/365F)E^{\mathbf{A}(\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_M)}\left[\frac{S_T}{2\left(\sqrt{1+S_T} - 1\right)}\left[2\left(\sqrt{1+S_T} - 1\right) - \left(K - \frac{365}{360}FS(6mLIBOR)\right)\right]^+\right] \\ &= A_0(A, Act/365F)E^{\mathbf{A}(\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_M)}\left[\left(S_T - \frac{S_T}{2\left(\sqrt{1+S_T} - 1\right)}\left(K - \frac{365}{360}FS(6mLIBOR)\right)\right)^+\right] \\ &= A_0(A, Act/365F)E^{\mathbf{A}(\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_M)}\left[\left(S_T - \frac{\sqrt{1+S_T}+1}{2}\left(K - \frac{365}{360}FS(6mLIBOR)\right)\right)^+\right] \end{aligned}$$

となる。ここで、$\frac{\sqrt{1+S_T}+1}{2} \approx 1$ とすると、

$$V_0 = A_0(A, Act/365F)E^{\mathbf{A}(\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_M)}\left[\left(S_T - \left(K - \frac{365}{360}FS(6mLIBOR)\right)\right)^+\right]$$

となり、ストライクが $K - \frac{365}{360}FS(6mLIBOR)$ の RFR スワップションとなり、LIBOR スワップレートのフォールバック式はある意味、理にかなっている。ここでの Annuity は RFR スワップの Annuity である。ところが、支払い頻度の調整である (26) 及び、$\frac{\sqrt{1+S_T}+1}{2} = 1$ を仮定している。

- $\{T_i\}_{i=1,\cdots,N}$ を支払い頻度 SA のスワップスケジュールとすると、(24) で

$$\frac{A_T(SA, Act/365F)}{A_T(A, Act/365F)} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\delta(T_{i-1}, T_i)D(T, T_i)}{\sum_{i=1}^{N/2}\delta(T_{2i-2}, T_{2i})D(T, T_{2i})} \tag{27}$$

ここで、Bond-annuity ratio をモデル化する。

$$G_i(S_T) = \frac{D(T,T_i)}{\sum_{j=1}^{N/2} \delta(T_{2j-2}, T_{2j}) D(T, T_{2j})}, \ i = 1, \cdots, N \tag{28}$$

フォワードボンドの時点 0 と時点 T が”パラレルシフト幅”y で関連づけられているとする。つまり、

$$D(T,T_i) = \frac{D(0,T_i)}{D(0,T)} e^{-(T_i - T)y}$$

このパラレルシフト額は、オプション満期の TONA スワップレート S_T とは

$$\begin{aligned} S_T &= \frac{1 - D(T,T_N)}{\sum_{j=1}^{N/2} \delta(T_{2j-2}, T_{2j}) D(T, T_{2j})} \\ &= \frac{1 - \frac{D(0,T_N)}{D(0,T)} e^{-(T_N - T)y}}{\sum_{j=1}^{N/2} \delta(T_{2j-2}, T_{2j}) \frac{D(0,T_{2j})}{D(0,T)} e^{-(T_{2j} - T)y}} \\ &= \frac{D(0,T) - D(0,T_N) e^{-(T_N - T)y}}{\sum_{j=1}^{N/2} \delta(T_{2j-2}, T_{2j}) D(0, T_{2j}) e^{-(T_{2j} - T)y}} \end{aligned}$$

の関係がある。よって、y は S_T の関数であり、

$$y(S_0) = 0$$

このとき、(28) は

$$\begin{aligned} G_i(S_T) &= \frac{D(T,T_i)}{\sum_{j=1}^{N/2} \delta(T_{2j-2}, T_{2j}) D(T, T_{2j})} \\ &= \frac{S_T D(T,T_i)}{1 - D(T,T_N)} \\ &= \frac{S_T \frac{D(0,T_i)}{D(0,T)} e^{-(T_i - T)y}}{1 - \frac{D(0,T_N)}{D(0,T)} e^{-(T_N - T)y}} \\ &= \frac{S_T D(0,T_i) e^{-(T_i - T)y}}{D(0,T) - D(0,T_N) e^{-(T_N - T)y}} \end{aligned}$$

よって、(27) は

$$\begin{aligned} \frac{A_T(SA, Act/365F)}{A_T(A, Act/365F)} &= \frac{\sum_{i=1}^{N} \delta(T_{i-1}, T_i) D(T, T_i)}{\sum_{i=1}^{N/2} \delta(T_{2i-2}, T_{2i}) D(T, T_{2i})} \\ &= \sum_{i=1}^{N} \delta(T_{i-1}, T_i) G_i(S_T) \\ &= S_T \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta(T_{i-1}, T_i) D(0, T_i) e^{-(T_i - T) y(S_T)}}{D(0,T) - D(0,T_N) e^{-(T_N - T) y(S_T)}} \qquad (29) \\ &\equiv H(S_T) \qquad (30) \end{aligned}$$

これを (24) に代入して、

$$V_0 = A_0(A, Act/365F) E^{\mathbf{A}} \left[H(S_T) \left(2 * \left(\sqrt{1 + S_T} - 1 \right) - K' \right)^+ \right] \tag{31}$$

ここで、RFR スワップレートからみた調整ストライクレートは $K' = K - \frac{365}{360} FS(6mLIBOR)$

- ここでの $H(S_T)$ の S_T に対する感応度を、例として、(26) を仮定した近似式で確かめる。

$$H(S) \approx \frac{S}{2\left(\sqrt{1+S}-1\right)}$$

これから、

$$\begin{aligned} H'(S) &= \frac{\left(\sqrt{1+S}-1\right) - \frac{S}{2\sqrt{1+S}}}{2\left(\sqrt{1+S}-1\right)^2} \\ &= \frac{2\sqrt{1+S}\left(\sqrt{1+S}-1\right) - S}{4\left(\sqrt{1+S}-1\right)^2\sqrt{1+S}} \\ &= \frac{2\sqrt{1+S}\left(\sqrt{1+S}-1\right) - S}{4\left(\sqrt{1+S}-1\right)^2\sqrt{1+S}} \\ &= \frac{2\left(\left(1+\frac{S}{2}\right) - \sqrt{1+S}\right)}{4\left(\sqrt{1+S}-1\right)^2\sqrt{1+S}} > 0 \end{aligned}$$

これは、

$$1 + S_{SA} < \left(1 + \frac{S_{SA}}{2}\right)^2 = 1 + S$$

から

$$S_{SA} < S$$

よって、

$$1 + \frac{S}{2} > \sqrt{1+S}$$

- $f(S)$ は $f \in C^2$ を満たすものとする。$f(\cdot)$ の Fundamental theorem of Calculus（微分積分学の基本定理:微分と積分が互いに逆の操作・演算であることを主張する）は、

$$f(S) - f(\kappa) = \int_\kappa^S f'(u)du \tag{32}$$

及び、$f'(\cdot)$ の Fundamental theorem of Calculus は

$$f'(u) - f'(\kappa) = \int_\kappa^u f''(v)dv \tag{33}$$

が成り立つ。(33) を (32) に代入して

$$f(S) - f(\kappa) = \int_\kappa^S \left(f'(\kappa) + \int_\kappa^u f''(v)dv\right) du$$

よって、

$$f(S) = f(\kappa) + f'(\kappa)\left(S - \kappa\right) + \int_\kappa^S \int_\kappa^u f''(v)dvdu \tag{34}$$

右辺第 3 項の u と v を入れ替えて

$$
\begin{aligned}
\int_\kappa^S \int_\kappa^u f^{''}(v) dv du &= \int_\kappa^S \int_v^S f^{''}(v) du dv \\
&= \int_\kappa^S f^{''}(v) (S-v) \, dv \\
&= \mathbf{1}_{\{S>\kappa\}} \int_\kappa^S f^{''}(v) (S-v) \, dv + \mathbf{1}_{\{S<\kappa\}} \int_S^\kappa f^{''}(v) (v-S) \, dv \\
&= \int_\kappa^\infty f^{''}(v) (S-v)^+ \, dv + \int_{-\infty}^\kappa f^{''}(v) (v-S)^+ \, dv
\end{aligned}
$$

となるので、(34) は

$$
f(S) = f(\kappa) + f'(\kappa) (S-\kappa) + \int_\kappa^\infty f^{''}(v) (S-v)^+ \, dv + \int_{-\infty}^\kappa f^{''}(v) (v-S)^+ \, dv \tag{35}
$$

- (31) から

$$
f(S) = H(S) \left[2 \left(\sqrt{1+S} - 1 \right) - K' \right]^+ \tag{36}
$$

とおく。ここで、

$$
H(S) = S \frac{\sum_{i=1}^N \delta(T_{i-1}, T_i) D(0, T_i) e^{-(T_i - T) y(S)}}{D(0,T) - D(0,T_N) e^{-(T_N - T) y(S)}}
$$

特に、

$$
H(S_0) = \frac{\sum_{i=1}^N \delta(T_{i-1}, T_i) D(0, T_i)}{\sum_{i=1}^{N/2} \delta(T_{2i-2}, T_{2i}) D(0, T_{2i})} = \frac{A_0(SA, Act/365F)}{A_0(A, Act/365F)}
$$

$H'(S)$ や $H^{''}(S)$ の具体的な計算は Appendix 参照。(36) から

$$
\begin{aligned}
f'(S) &= \mathbf{1}_{\{2(\sqrt{1+S}-1)-K' \ge 0\}} \left(H'(S) \left(2 \left(\sqrt{1+S} - 1 \right) - K' \right) + \frac{H(S)}{\sqrt{1+S}} \right) \\
f^{''}(S) &= \delta \left(2 \left(\sqrt{1+S} - 1 \right) - K' \right) \frac{1}{\sqrt{1+S}} \left(H'(S) \left(2 \left(\sqrt{1+S} - 1 \right) - K' \right) + \frac{H(S)}{\sqrt{1+S}} \right) \\
&\quad + \mathbf{1}_{\{2(\sqrt{1+S}-1)-K' \ge 0\}} \left(H''(S) \left(2 \left(\sqrt{1+S} - 1 \right) - K' \right) + 2 \frac{H'(S)}{\sqrt{1+S}} - \frac{H(S)}{2 (1+S)^{3/2}} \right) \\
&\quad = \delta \left(2 \left(\sqrt{1+S} - 1 \right) - K' \right) \frac{H(S)}{1+S} \\
&\quad + \mathbf{1}_{\{2(\sqrt{1+S}-1)-K' \ge 0\}} \left(H''(S) \left(2 \left(\sqrt{1+S} - 1 \right) - K' \right) + 2 \frac{H'(S)}{\sqrt{1+S}} - \frac{H(S)}{2 (1+S)^{3/2}} \right)
\end{aligned}
$$

から、$\kappa = S_0$ として (36) を (35) に適用する。

$$
\begin{aligned}
H(S) \left[2 \left(\sqrt{1+S} - 1 \right) - K' \right]^+ &= H(S_0) \left[2 \left(\sqrt{1+S_0} - 1 \right) - K' \right]^+ \\
&+ \mathbf{1}_{\{2(\sqrt{1+S_0}-1)-K' \ge 0\}} \left(H'(S_0) \left(2 \left(\sqrt{1+S_0} - 1 \right) - K' \right) + \frac{H(S_0)}{\sqrt{1+S_0}} \right) (S_T - S_0) \\
&+ \int_{S_0}^\infty \left[\delta \left(2 \left(\sqrt{1+v} - 1 \right) - K' \right) \frac{H(S)}{1+S} + \mathbf{1}_{\{2(\sqrt{1+v}-1)-K' \ge 0\}} (\cdots) \right] (S_T - v)^+ \, dv \\
&+ \int_{-\infty}^{S_0} \left[\delta \left(2 \left(\sqrt{1+v} - 1 \right) - K' \right) \frac{H(S)}{1+S} + \mathbf{1}_{\{2(\sqrt{1+v}-1)-K' \ge 0\}} (\cdots) \right] (v - S_T)^+ \, dv
\end{aligned} \tag{37}
$$

- ここで、OTM オプションを考え

$$S_0 \leq K' \tag{38}$$

とする。$1+S_0 < \left(1+\frac{S_0}{2}\right)^2$ と (38) から、

$$2\left(\sqrt{1+S_0}-1\right) < S_0 \leq K' \tag{39}$$

この場合、(37)の第 1 項と 2 項は (39) からゼロ[*4]、第 4 項の非積分変数 v と S_0 の関係 $v < S_0$ と (39) から

$$0 > 2\left(\sqrt{1+S_0}-1\right) - K' > 2\left(\sqrt{1+v}-1\right) - K'$$

. よって、第 4 項はゼロ。(37)は第 3 項のみが寄与して

$$\begin{aligned}
&H(S_T)\left[2\left(\sqrt{1+S_T}-1\right)-K'\right]^+ \\
&= \int_{S_0}^{\infty} \delta\left(2\left(\sqrt{1+v}-1\right)-K'\right)\frac{H(v)}{1+v}\left(S_T-v\right)^+ dv \\
&+ \int_{S_0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{2(\sqrt{1+v}-1)-K'\geq 0\}}\left(H''(v)\left(2\left(\sqrt{1+v}-1\right)-K'\right)+2\frac{H'(v)}{\sqrt{1+v}}-\frac{H(v)}{2\left(1+v\right)^{3/2}}\right)\left(S_T-v\right)^+ dv \\
&= \frac{H\left(\left(1+\frac{K'}{2}\right)^2-1\right)}{\left(1+\frac{K'}{2}\right)^2}\left[S_T-\left(\left(1+\frac{K'}{2}\right)^2-1\right)\right]^+ \\
&+ \int_{S_0}^{\left(1+\frac{K'}{2}\right)^2-1}\left(H''(v)\left(2\left(\sqrt{1+v}-1\right)-K'\right)+2\frac{H'(v)}{\sqrt{1+v}}-\frac{H(v)}{2\left(1+v\right)^{3/2}}\right)\left(S_T-v\right)^+ dv
\end{aligned}$$

よって、(38) のストライクを持つ場合、(31) は

$$V_0^{OTM}$$

$$= A_0 E^{\mathbf{A}(\mathbf{T}_0,\mathbf{T}_M)}\left[H(S_T)\left(2\left(\sqrt{1+S_T}-1\right)-K'\right)^+\right] \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
&= A_0\frac{H\left(\left(1+\frac{K'}{2}\right)^2-1\right)}{\left(1+\frac{K'}{2}\right)^2}E^{\mathbf{A}(\mathbf{T}_0,\mathbf{T}_M)}\left[\left[S_T-\left(\left(1+\frac{K'}{2}\right)^2-1\right)\right]^+\right] \\
&+ A_0 E^{\mathbf{A}(\mathbf{T}_0,\mathbf{T}_M)}\left[\int_{S_0}^{\left(1+\frac{K'}{2}\right)^2-1}\left(H''(v)\left(2\left(\sqrt{1+v}-1\right)-K'\right)+2\frac{H'(v)}{\sqrt{1+v}}-\frac{H(v)}{2\left(1+v\right)^{3/2}}\right)\left(S_T-v\right)^+ dv\right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{H\left(\left(1+\frac{K'}{2}\right)^2-1\right)}{\left(1+\frac{K'}{2}\right)^2}P\left[\left(1+\frac{K'}{2}\right)^2-1\right] \tag{41}$$

$$+ \int_{S_0}^{\left(1+\frac{K'}{2}\right)^2-1}\left(H''(v)\left(2\left(\sqrt{1+v}-1\right)-K'\right)+2\frac{H'(v)}{\sqrt{1+v}}-\frac{H(v)}{2\left(1+v\right)^{3/2}}\right)P\left[v\right]dv \tag{42}$$

ここで、$P\left[K\right]$ は現在のストライクが K の TONA Payers オプションである。

[*4] いずれにしても、後でリスク中立での期待値 $E^A\left[\cdot\right]$ をとるので、$E^A\left[S_T-S_0\right]=0$

- $H(S)$ を現在の Annuity 比率 $H(S_0)$ で一定と近似すると、(41) は

$$V_0^{OTM} \approx \frac{H\left(S_0\right)}{\left(1+\frac{K'}{2}\right)^2} P\left[\left(1+\frac{K'}{2}\right)^2-1\right] - H(S_0)\int_{S_0}^{\left(1+\frac{K'}{2}\right)^2-1} \frac{1}{2\left(1+v\right)^{3/2}} P\left[v\right] dv \tag{43}$$

- さらに、$K' = S_0$ である ATM オプションを考える。(43) から、

$$\begin{aligned} V_0^{ATM} &\approx \frac{H(S_0)}{\left(1+\frac{S_0}{2}\right)^2} P\left[\left(1+\frac{S_0}{2}\right)^2-1\right] - H(S_0)\int_{S_0}^{\left(1+\frac{S_0}{2}\right)^2-1} \frac{1}{2\left(1+v\right)^{3/2}} P\left[v\right] dv \\ &\approx \frac{H(S_0)}{\left(1+\frac{S_0}{2}\right)^2} P\left[\left(1+\frac{S_0}{2}\right)^2-1\right] \end{aligned}$$

6 Appendix

$$S_T = \frac{D(0,T) - D(0,T_N)e^{-(T_N-T)y}}{\sum_{j=1}^{N/2}\delta(T_{2j-2},T_{2j})D(0,T_{2j})e^{-(T_{2j}-T)y}}$$

から、

$$\begin{aligned} \frac{dS_T}{dy} &= \frac{D(0,T_N)(T_N-T)e^{-(T_N-T)y}\frac{D(0,T)-D(0,T_N)e^{-(T_N-T)y}}{S_T} - \left(D(0,T)-D(0,T_N)e^{-(T_N-T)y}\right)\sum_{j=1}^{N/2}\delta(T_{2j-2},T_{2j})(T_{2j}-T)D(0,T_{2j})e^{-(T_{2j}-T)y}}{\left(\frac{D(0,T)-D(0,T_N)e^{-(T_N-T)y}}{S_T}\right)^2} \\ &= \frac{S_T D(0,T_N)(T_N-T)e^{-(T_N-T)y} - S_T^2\sum_{j=1}^{N/2}\delta(T_{2j-2},T_{2j})(T_{2j}-T)D(0,T_{2j})e^{-(T_{2j}-T)y}}{D(0,T)-D(0,T_N)e^{-(T_N-T)y}} \end{aligned}$$

よって、

$$\frac{dy}{dS_T} = \frac{D(0,T)-D(0,T_N)e^{-(T_N-T)y}}{S_T(T_N-T)D(0,T_N)e^{-(T_N-T)y} - S_T^2\sum_{j=1}^{N/2}\delta(T_{2j-2},T_{2j})(T_{2j}-T)D(0,T_{2j})e^{-(T_{2j}-T)y}}$$

$$h(S) = \frac{\sum_{i=1}^{N}\delta(T_{i-1},T_i)D(0,T_i)e^{-(T_i-T)y(S)}}{D(0,T)-D(0,T_N)e^{-(T_N-T)y(S)}}$$

とすれば、

$$\frac{dh}{dy} = \frac{\left(D(0,T)-D(0,T_N)e^{-(T_N-T)y(S)}\right)\sum_{i=1}^{N}\delta(T_{i-1},T_i)D(0,T_i)(T_i-T)e^{-(T_i-T)y(S)} - D(0,T_N)(T_N-T)e^{-(T_N-T)y(S)}\sum_{i=1}^{N}\delta(T_{i-1},T_i)D(0,T_i)e^{-(T_i-T)y(S)}}{\left(D(0,T)-D(0,T_N)e^{-(T_N-T)y(S)}\right)^2}$$

$$h'(S) = \frac{dh}{dy}\frac{dy}{dS_T} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\delta(T_{i-1},T_i)D(0,T_i)(T_i-T)e^{-(T_i-T)y(S)} - \frac{D(0,T_N)(T_N-T)e^{-(T_N-T)y(S)}}{D(0,T)-D(0,T_N)e^{-(T_N-T)y(S)}}\sum_{i=1}^{N}\delta(T_{i-1},T_i)D(0,T_i)e^{-(T_i-T)y(S)}}{SD(0,T_N)(T_N-T)e^{-(T_N-T)y} - S^2\sum_{j=1}^{N/2}\delta(T_{2j-2},T_{2j})D(0,T_{2j})(T_{2j}-T)e^{-(T_{2j}-T)y}}$$

練習 1 各自、$H(S) = S * h(S)$ とした $H'(S)$ を求めよ。また、$H''(S)$ を求めよ。

注意事項

- 当資料（本文及びデータ等）の著作権を含む知的所有権は（株）Diva Analytics に帰属し、事前に（株）Diva Analytics への書面による承諾を得ることなく、本資料およびその複製物に修正・加工することは堅く禁じられています。また、本資料およびその複製物を送信および配布・譲渡することは堅く禁じられています。
- 当資料（本文及びデータ等）は主として（株）Diva Analytics が入手したデータ、もしくは信頼できると判断した情報に基づき作成されていますが、情報の正確性、完全性、適宜性、将来性およびパフォーマンスについて（株）Diva Analytics は保証を行っておらず、またいかなる責任を持つものではありません。