第2章．ARMA過程

2.1. AR(2)過程(2.18)の定常条件が(2.19)で与えられることを確認せよ．

proof)

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim W.N.(\sigma^2)$$

AR(2)過程に対するAR特性方程式は，

$$1 = \phi_1 z + \phi_2 z^2 \iff \frac{1}{z^2} - \phi_1 \frac{1}{z} - \phi_2 = 0$$

AR特性方程式の解の逆数をλと置くと，

$$\lambda^2 - \phi_1 \lambda - \phi_2 = 0 \quad \cdots ①$$

AR過程が定常 $\Rightarrow |z| > 1 \iff |\lambda| < 1$

よって，①式の解が$|\lambda| < 1$を満たす(ϕ_1, ϕ_2)の条件を求めればよい．

①より $\lambda = \dfrac{\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2}$

(i) λが実数のとき，つまり $\phi_1^2 + 4\phi_2 > 0$ のとき，

$$|\lambda| < 1 \iff |\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}| < 2 \iff -2 < \phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} < 2$$

$$-2 < \phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} \iff \phi_1^2 + 4\phi_1 + 4 > \phi_1^2 + 4\phi_2$$
$$\iff \phi_2 < 1 + \phi_1$$

一方，

$$\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} < 2 \iff \phi_1^2 + 4\phi_2 < \phi_1^2 - 4\phi_1 + 4$$
$$\iff \phi_2 < 1 - \phi_1$$

(ii) λが複素数，つまり $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$ のとき，

$$\lambda = \frac{\phi_1}{2} \pm \frac{\sqrt{-(+\phi_1^2 + 4\phi_2)}}{2} i \text{ より } |\lambda| = \sqrt{\left(\frac{\phi_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\pm\sqrt{-(\phi_1^2 + 4\phi_2)}}{2}\right)^2} = \sqrt{-\phi_2}$$

したがって，

$$\sqrt{-\phi_2} < 1 \iff \phi_2 > -1$$

以上より，AR(2)過程の定常条件は，

$$\begin{cases} \phi_2 > -1 \\ \phi_2 < 1 + \phi_1 \\ \phi_2 < 1 - \phi_1 \end{cases}$$

■

2.2. 次のモデルの中から、定常なモデルと反転可能なモデルを全て選択せよ。但し、$\varepsilon_t \sim W.N.(\sigma^2)$

(a) $y_t = 2 + \varepsilon_t$

(b) $y_t = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$

(c) $y_t = \varepsilon_t - 0.3\varepsilon_{t-1} + 0.7\varepsilon_{t-2}$

(d) $y_t = 0.5 y_{t-1} + \varepsilon_t$

(e) $y_t = 1.3 y_{t-1} - 0.4 y_{t-2} + \varepsilon_t$

(f) $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1}$

proof)

(a) これは、自己回帰モデルではない。

(b) これは、MA(1)過程である。したがって、定常過程である。
又、例2.6より反転可能ではない。

(c) これは、MA(2)過程であるので定常過程である。
又、MA特性方程式について、

$$1 - 0.3\theta + 0.7\theta^2 = 0 \Leftrightarrow 7\theta^2 - 3\theta + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow (7\theta - 10)(\theta + 1) = 0 \quad \therefore \theta = -1, \frac{10}{7}$$

したがって、反転可能ではない。

(d) これは、AR(1)過程である。
AR特性方程式 $1 = 0.5z \Leftrightarrow z = 2$
したがって、定常過程である。又、逐次的に変換することで、MA(∞)過程で表せるため、反転可能である。

(e) これは、AR(2)過程である。
AR特性方程式 $1 = 1.3z - 0.4z^2 \Leftrightarrow 4z^2 - 13z + 10 = 0$

$$\Leftrightarrow (4z - 5)(z - 2) = 0 \quad \therefore z = \frac{5}{4}, 2$$

したがって、定常過程である。

《例2.5を用いて考えると…》
$\phi_1 = 1.3,\ \phi_2 = -0.4$ であるので、定常過程の3条件を全て満たしている。
したがって、定常過程である。又、(d)と同様に反転可能である。

(f) これは、ARMA過程である。
MA過程は定常過程なので、AR過程の部分を見る。
AR特性方程式を解くと、
$1 = z$ 　$|z| > 1$ を満たさないので、定常過程ではない。
又、MA特性方程式を解くと、

$$1 + 0.5\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 2$$

$|\theta| > 1$ より、反転可能である。

Ans, 定常過程; (b), (c), (d), (e)
反転可能; (d), (e), (f)

2.3. MA(2) 過程

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}, \quad \varepsilon_t \sim W.N.(\sigma^2)$$

について、以下の問に答えよ。

(1) $E[y_t]$ を求めよ。

$$E[y_t] = E[\mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}]$$
$$= \mu \quad (\forall t>0.\ E[\varepsilon_t]=0\ (\because \varepsilon_t \text{はホワイト・ノイズ}))$$

(2) γ_0 を求めよ。

条件式より、$y_t - \mu = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}$

よって、

$$\gamma_0 = Var(y_t) = E[(y_t-\mu)^2]$$
$$= E[(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2})^2]$$
$$= E[\varepsilon_t^2] + \theta_1^2 E[\varepsilon_{t-1}^2] + \theta_2^2 E[\varepsilon_{t-2}^2]$$
$$= (1+\theta_1^2+\theta_2)^2 \sigma^2$$

(3) γ_1 を求めよ。

$$\gamma_1 = Cov(y_t, y_{t-1}) = Cov(\theta_1 \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) + Cov(\theta_2 \varepsilon_{t-2}, \theta_1 \varepsilon_{t-2}) \quad (\because \varepsilon_t \sim W.N.(\sigma^2) \text{より}\ i \neq j \Rightarrow Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j)=0)$$
$$= (\theta_1 + \theta_1\theta_2)\sigma^2$$

(4) γ_2 を求めよ。

$$\gamma_2 = Cov(y_t, y_{t-2}) = Cov(\mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}, \mu + \varepsilon_{t-2} + \theta_1 \varepsilon_{t-3} + \theta_2 \varepsilon_{t-4})$$

一致してるのここだけ

$$= Cov(\theta_2 \varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-2})$$
$$= \theta_2 \sigma^2$$

(5) $k \geq 3$ に対して、$\gamma_k = 0$ となることを証明せよ。

$$\gamma_k = Cov(y_t, y_{t-k}) = Cov(\mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}, \mu + \varepsilon_{t-k} + \theta_1 \varepsilon_{t-k-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-k-2})$$
$$= 0 \quad (k \geq 3 \text{より}, t-2 > t-k \text{なので…})$$

2.4. ARMA(1,1) 過程

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}, \quad \varepsilon_t \sim W.N.(\sigma^2)$$

について、以下の問に答えよ。

(1) 定常条件を求めよ。

ARMA過程 = AR過程 + MA過程

MA過程は定常過程なので、AR過程が定常であればよい。

例2.5より、$|\phi_1| < 1$ であればよい。

KOKU

CamScannerでスキャン

(2) 反転可能条件を求めよ．
MA過程をAR過程で書き換えることが出来る ⇒ MA特性方程式の解が $|z| > 1$ を満たす．
MA特性方程式は，

$$0 = 1 + \theta_1 z \iff z = \frac{1}{\theta_1}$$

したがって，$|z| > 1 \Rightarrow |\theta_1| < 1$ ∎

(3) μ を求めよ．
条件式の両辺に期待値をとると，

$$E[y_t] = c + \phi_1 E[y_t] + E[\varepsilon_t] + \theta_1 E[\varepsilon_{t-1}]$$

$$\iff \mu = c + \phi_1 \mu$$

$$\iff \mu = \frac{c}{1-\phi_1}$$ ∎

(4) γ_0 を求めよ。

$$\gamma_0 = Var(y_t) = \phi_1^2 Var(y_{t-1}) + Var(\varepsilon_t) + \theta_1^2 Var(\varepsilon_{t-1}) + 2Cov(\phi_1 y_{t-1}, \theta_1 \varepsilon_{t-1})$$

$$= \phi_1^2 \gamma_0 + \sigma^2 + \theta_1^2 \sigma^2 + 2\phi_1\theta_1\sigma^2$$

$$\iff \gamma_0 = \frac{1+2\phi_1\theta_1+\theta_1^2}{1-\phi_1^2}\sigma^2$$

(5) γ_1 を求めよ．

$$\gamma_1 = Cov(y_t, y_{t-1}) = \phi_1 Var(y_t) + Cov(y_{t-1}, \varepsilon_t) + \theta_1 \cdot Cov(y_{t-1}, \varepsilon_{t-1})$$

$$= \phi_1 \cdot \gamma_0 + 0 + \theta_1 \sigma^2$$

$$= \frac{\phi_1(1+2\phi_1\theta_1+\theta_1^2)+\theta_1(1-\phi_1^2)}{1-\phi_1^2}\sigma^2 = \frac{(1+\phi_1\theta_1)(\phi_1+\theta_1)}{1-\phi_1^2}\sigma^2$$

(6) ρ_1 を求めよ．

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{(1+\phi_1\theta_1)(\phi_1+\theta_1)}{1+2\phi_1\theta_1+\theta_1^2}$$

(7) ユール・ウォーカー方程式を用いて，$k \geq 2$ において ρ_k を求めよ．
2次以降のユール・ウォーカー方程式を用いて

$$\rho_k = \rho_{k-1} \cdot \phi_1 = \rho_{k-2} \cdot \phi_1^2 = \cdots = \rho_1 \phi_1^{k-1}$$

$$= \frac{(1+\phi_1\theta_1)(\phi_1+\theta_1)}{1+2\phi_1\theta_1+\theta_1^2}\phi_1^{k-1}$$ ∎