Exercise 2.6.

割引債 $B(t,T)$ が以下の確率微分方程式を満たすとする.

$$dB(t,T) = B(t,T)\,r(t)\,dt + B(t,T)\sum_{i=1}^{n}\Sigma_i(t,T)\,dW_i(t)$$

但し, $W_i(t)$ はリスク中立測度 Q の下で独立な標準ブラウン運動とする. このとき, dP_T/dQ を $\Sigma_i(t,T)$ と $W_i(t)$ を用いて表せ.

proof)

$f(x,y,t) = \frac{x}{y}$ とする. このとき, $f_x(x,y,t) = \frac{1}{y}$, $f_y(x,y,t) = -\frac{x}{y^2}$, $f_t(x,y,t) = 0$

$f_{xx}(x,y,t) = 0$, $f_{yy}(x,y,t) = \frac{2x}{y^3}$, $f_{xy}(x,y,t) = -\frac{1}{y^2}$

2次元 Ver. の伊藤の公式を用いると,

$$df(B(t,T),B(t),t) = \underbrace{f_t(B(t,T),B(t),t)\,dt}_{=0} + f_x(B(t,T),B(t),t)\,dB(t,T) + \underbrace{\frac{1}{2}f_{xx}(B(t,T),B(t),t)\,(dB(t,T))^2}_{=0}$$

$$+ f_y(B(t,T),B(t),t)\,dB(t) + \underbrace{\frac{1}{2}f_{yy}(B(t,T),B(t),t)\,(dB(t))^2}_{=0} + \underbrace{f_{xy}(B(t,T),B(t),t)\,(dB(t,T)\,dB(t))}_{=0}$$

ここで, $dB(t,T) = B(t,T)\,r(t)\,dt + B(t,T)\sum_{i=1}^{n}\Sigma_i(t,T)\,dW_i(t)$

$dB(t) = B(t)\,r(t)\,dt$

であるので,

$$(dB(t,T))^2 = \sum_{i=1}^{n}\Sigma_i^2(t,T)\,dt, \quad dB(t,T)\,dB(t) = 0, \quad (dB(t))^2 = 0$$

ここで, 以下の性質を利用している. (但し, $i \neq j$)

	dt	$dW_i(t)$	$dW_j(t)$
dt	0	0	0
$dW_i(t)$	0	dt	$\rho_{ij}dt$
$dW_j(t)$	0	$\rho_{ij}dt$	dt

ρ_{ij} は $dW_i(t)$ と $dW_j(t)$ の瞬時相関係数
(今回は $W_i \perp W_j$ より $\rho_{ij} = 0$)

したがって,

$$df(B(t,T),B(t),t) = \frac{1}{B(t)}\cdot\left\{\cancel{B(t,T)r(t)dt} + \overset{B(t,T)}{\sum_{i=1}^{n}}\Sigma_i(t,T)\,dW_i(t)\right\} - \frac{B(t,T)}{B(t)^2}\cdot\cancel{B(t)r(t)dt}$$

$$= \frac{B(t,T)}{B(t)}\sum_{i=1}^{n}\Sigma_i(t,T)\,dW_i(t)$$

これより, ラドン・ニコディム過程 $\xi(t)$ が以下の SDE に従うことが分かる.

$$d\xi(t) = \xi(t)\sum_{i=1}^{n}\Sigma_i(t,T)\,dW_i(t)$$

$g(x,t) = \log x$ と置き, 1次元 Ver. の伊藤の公式を用いると,

$$dg(\xi(t),t) = g_x(\xi(t),t)\,d\xi(t) + \frac{1}{2}g_{xx}(\xi(t),t)\,(d\xi(t))^2 + \underbrace{g_t(\xi(t),t)\,dt}_{=0}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\Sigma_i(t,T)\,dW_i(t) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Sigma_i(t,T)^2\,dt$$

よって, $$\xi(t) = \exp\left\{\int_0^t\sum_{i=1}^{n}\Sigma_i(u,T)\,dW_i(u) - \frac{1}{2}\int_0^t\sum_{i=1}^{n}\Sigma_i(u,T)^2\,du\right\}$$

$t = T$ とすることによって,

$$\frac{dP_T}{dQ} = \exp\left\{\int_0^T\sum_{i=1}^{n}\Sigma_i(u,T)\,dW_i(u) - \frac{1}{2}\int_0^T\sum_{i=1}^{n}\Sigma_i(u,T)^2\,du\right\}$$

∎