#### 計量時系列分析

12月22日

# ARMA過程

【本章のまとめ】

時系列データを分析するための基本的なモデルである自己回帰移動平均（ARMA）過程を学習する．

## ARMA過程の性質

経済・ファイナンスデータに数多く含まれる自己相関をモデル化することする必要がある．自己相関をモデル化する方法は2つある．

**≪例≫**

とが相関を持つようなモデルを構築．

【1つ目】移動平均（ＭＡ）過程

とのモデルの共通の成分を含める方法が考えられる．例えば，とを

のようにモデル化すると，共通の部分をを通して，とが相関を持つことが期待される．

【2つ目】自己回帰（ＡＲ）過程

のモデルにを含めるような場合が考えられる．このような場合，を

のようなモデル化する．この場合，とが相関を持つことは明らか．

### MA過程

**移動平均（ＭＡ）過程（moving average process）**は，ホワイトノイズを拡張したもの．具体的には，ホワイトノイズの線形和で表される．1次MA過程（MA(1)過程）は，

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1‑1) |

で定義され，がＭＡ過程に従うときと表記される．MA(1)モデル(1‑1)は，最も基本的な(弱)定常過程のモデルにという項が追加された形をしている．このとき，

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1‑2) |

となるため，のモデルとのモデルがという共通項を持つので，との間に相関が生じる．また，MA (1)モデルは，最も基本的な(弱)定常過程モデルと比べてというパラメータが多くなっており，このパラメータが1次自己相関の強さを決定付ける．

【復習～弱定常性～】

任意のとについて，

が成立するとき，過程は**弱定常(weak stationary)**といわれる．

【復習～強定常性～】

任意のとに対して，の同時分布が同一となる場合，過程は**強定常(strict stationary)**といわれる．

【復習～ホワイトノイズの定義～】

すべての時点において，

が成立するとき，は**ホワイトノイズ(White noise)**と呼ばれる．

MA(1)過程をグラフにした場合，グラフは の平均 の周りを変動していることが分かる．MA(1)過程の期待値がであることを以下で確認する．

ただし，最後の等号はホワイトノイズの性質より成立する．

次に，MA(1)過程の分散については次の通り．

ただし，最後の等号はホワイトノイズの性質より成立する．このことより，MA(1)過程の分散はの分だけ，撹乱項の分散よりも大きくなることが分かる．

MA(1)過程の自己相関の値の表現方法について確認するために，MA(1)過程の自己共分散を求める．がホワイトノイズであること，つまりの自己共分散がであることを利用すると，1次自己共分散は

と求めることが出来る．これより，MA(1)過程の1次相関が

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1‑3) |

で与えられることが分かる．また，MA(1)過程の自己相関の絶対値がの時に，最大値をとることに注意されたい．

≪注意≫

一次自己相関の絶対値がより大きな過程はMA(1)過程ではモデル化出来ないのである．

最後に，MA(1)過程の2次以降の自己共分散と自己相関について考える．1次自己共分散の計算と同様にすると，

となることが分かる．

≪注意≫

MA(1)過程の2次以降の自己相関が0になること分かる．つまり，MA(1)過程は1次自己相関をモデル化することが出来るが，2次以降の自己相関を記述することが出来ない．

≪まとめ≫

* MA(1)過程は定常である．つまり，MA(1)過程はパラメータの値に関わらず，常に定常となる．
* MA(1)過程の2次以降の自己相関は0であるので，コレログラムは1次のみ0でない値をとり，2次以降は全て0となる．

【問題点】

MA(1)過程は1次の自己相関しかモデル化することが出来ない．しかしながら，MA(1)過程を一般化することは容易である．

一般的に，次移動平均過程は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1‑4) |

で定義され，MA(*q*)過程と表記される．

つまり，MA(*q*)過程は現在と*q*期間の過去のホワイトノイズの線形和に定数に加えたものである．上で確認したMA(1)過程の性質は，MA(*q*)過程に一般化することが出来，MA(*q*)過程の性質を定理としてまとめると次のようになる．

～定理(MA(*q*)過程の性質)～

MA(*q*)過程(1‑4)は以下の性質を持つ．

1. MA過程は常に定常である．

≪重要な点≫

* MA過程は常に定常である．
* MA(*q*)過程の次以降の自己相関は0である．

≪問題点≫

* MA(*q*)過程の次以降の自己相関は0である．

⇒言い換えると，次の自己相関をモデル化するためには，個のパラメータが必要である．したがって，長期間にわたる自己相関をモデル化するためには，多くのパラメータが必要になる．（パラメータを推計する必要を考えるとあまり…）

* MA(*q*)過程は観測できないホワイトノイズの線形和で表されるため，モデルの解釈が難しい．さらに，

同様な理由により，モデルの推定や予測が難しい．

### AR過程

自己回帰(AR)過程（autoregssive process）は，過程が自身の過去に回帰された形で表現される過程である．1次AR過程（AR(1)過程）は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1‑5) |

で定義され，がAR(1)過程に従うことはと表記される．

【AR(1)過程の性質】

MA過程と同様に，AR過程の確率的変動は撹乱項であるホワイトノイズによって決まる．AR過程の場合は，初期値をどのように考えるかは難しい問題である．しかし，の条件なし分布が定まっている場合は，その分布に従う確率変数とするのが一般的である．分布が定まっていない場合は，何らかの定数とすることが多い．

≪注意点≫

AR過程はMA過程と異なり，モデルが定常かどうかはパラメータの値に依存する．具体的には，AR(1)過程の場合は，の時に過程は定常となる．

以下では，AR(1)過程は定常であると仮定する．つまり，とする．

AR(1)過程の平均・分散・自己相関について確認していく．(1‑5)式について期待値・分散をとる．

≪平均≫

となる．ここで，が定常であることに注意すると，であるので，上式は

となるので，これよりが得られる．

≪分散≫

ただし，最後の等号は，撹乱項が過去のとは無相関であるので，であることより成立する．

が定常のとき，であるので，AR(1)過程の分散がで与えられることが分かる．

≪自己相関≫

次自己共分散を考えると，

が得られる．この両辺をで割ると

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1‑5) |

という**ユール・ウォーカー方程式（Yule-Walker equation）**が得られる．

【ユール・ウォーカーの方程式】

AR過程の自己相関が，が従う