2021年2月12日

#### 時系列分析 第4回

# 区間予測

|  |  |
| --- | --- |
| **点予測** | 時点における値 から 期後の値 の値1つだけを予測する． |
| **区間予測** | 時点における値 から 期後の値 を の確率で含むような区間を予測する．このとき， 期先 **区間予測**という． |

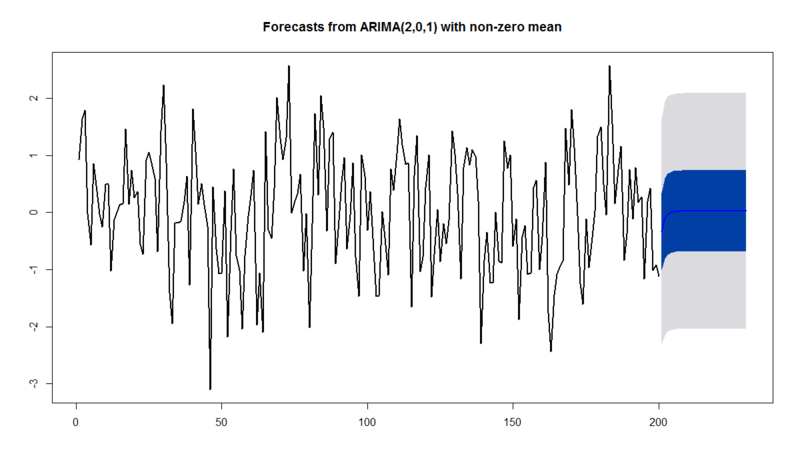


図 1　区間予測の例（青色：信頼区間95％，灰色：信頼区間50％）

【区間予測の利点】

* 区間予測を確率的に評価することが出来る．（点予測の場合，1点の重みは0より確率が0となる．）
* 区間予測の不確実性は区間の長さで表現される．
* 平均的な値以外の値の予測に用いる．

【期先の区間予測の構築（過程）】

定常AR過程は，(3.10)式のように書くことが出来る．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.10) |

が所与であったとすると，(3.10)式における確率変数は だけとなる．が正規分布に従うと仮定されているので， を所与としたとき，は**正規分布**に従うことが分かる．

最適予測 (3.11)式

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.11) |

が条件付き期待値に等しかったことより，の条件付き分布はとなること分かる．

の時，正規分布の両側 点は1.96であるので，

が成立する．これを について整理すると，

となるので，この結果により，1期先95%区間予測は，

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.15) |

で与えられることが分かる．

一般に，期先95%区間予測についても，以上の議論は成立し，期先95%区間予測は次のように与えられる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.16) |

# MA過程の予測

* 過程は，観測できない の線形和で が表現されているため，予測がやや難しく．
* 過程が反転可能であるとき，つまり過程が過程で表現される時， の値を求めることが出来る．
* 過程が反転可能である場合は，過去のが観測できるとして，予測を考えることが出来るため，予測の議論は非常に簡単になる．

↓

無限個の観測値 が存在する場合と，有限個の場合に分けて議論を進めていく．

## 無限個の観測値がある場合の予測

反転可能な過程は，一般的に過程で書き直すことが出来る．

もし，無限個のの過去観測値がある，つまりとすると，

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.17) |

として過去の値を求めることが出来る．

【ポイント】

上記のことより，無限個の観測値が存在する ⇒ を求めることが出来る．

つまり，が持つ情報とが持つ情報は**全く同じ**である．

したがってこの場合には，(3.5)，(3.6)式に加えて以下の式が成り立つ．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.18) |

【過程と過程について】

|  |  |
| --- | --- |
| **過程** | **過程** |
| が将来のを含んでいるため，を過去のとに書き直す必要がある． | は将来もしくは過去のしか含んでいないため，それらの条件付き期待値は，(3.6)と(3.18)式によって完全に求めることが出来る． |

**【例：】**

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.19) |

**1期先の予測**

であることより，(3.6)，(3.18)式を用いると最適予測は，

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.20) |

となり，そのは，

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.21) |

95%区間予測についても，過程と同様にすればよい．

**2期先の予測**

先ほど同様に最適予測を考えると，

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

であることより，が成り立つ．

**3期先の予測**

3期先の予測は，

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.22) |

最適予測においては，将来のは0で置き換えられるため， となり，最適化予測は単に過程の（条件なし）期待値に等しくなる．また，

は過程の分散に等しくなることが分かる．また，4期先以降の予測は，3期先予測と全く一緒になる．

**定理3.2（過程の最適予測の性質）**

過程の最適予測は以下の性質を持つ．

1. 期までの最適予測は全て観測値 に依存する．
2. 期先以上の予測は単に過程の期待値に等しい．
3. 期までの予測のは予測期間 が増大するにつれて単調に増大していき，期先以上の予測のは過程の分散に等しくなる．

## 有限個の観測値しかない場合の予測

【例：過程】

|  |  |
| --- | --- |
| **3期以降の予測** | **1期，2期先の予測** |
| は将来の しか含まず，将来の の条件付き期待値は0であるので，期待値が最適予測となる．また，は過程の分散に等しい． | やを計算する必要がある．  1つの簡便な方法は，の初期値を0として，から逐次的に求めていく． |

# ARMA過程の予測

**過程の予測⇒過程の予測 + 過程の予測**

|  |  |
| --- | --- |
| **無限個の過去観測値が存在** | **有限個の過去観測値が存在** |
| を過去のとで表現し，(3.5)，(3.6)，(3.18)式を用いる． | 過程の予測で話した通り，の初期値を0として，から逐次的に求めていく． |

**【例：過程】**

このとき， は

で計算されるため， の近似値は

として求めることが出来る．

は，

と書けるので，1期先予測は，

この予測の近似的なはとなるので，これらを(3.16)に代入することで，近似的な1期先95%区間予測を求めることが出来る．