2021年3月2日

#### 単位根過程

今まで扱ってきた時系列モデルは**定常過程**を前提としてきた．しかし，「経済・ファイナンスデータ」の中には，定常過程の性質を持たないものが多い．そこで，今回**単位根過程**について学習し，定常過程との違い等を確認していく．

# 単位根過程の性質

## 単位根過程

【**弱定常過程**】

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 任意のとに対して，   |  |  | | --- | --- | |  | (1.4) | |  | (1.5) |   が成立する場合，過程は**弱定常**(weak stationary)と言われる． |

【定常過程の特徴】

* 期待値と自己共分散が時間を通じて一定であることが仮定されている．
* **トレンド**を持たない．
* **平均回帰的**（過程が長期的に必ず平均の方向に戻ってくる）である．

**↓**

定常過程の代表的な性質であるが，経済・ファイナンスデータの中にはこれらの性質を持たないことが多い．

**≪例≫**

1. GDPや物価などを考えると，経済成長とともに平均的に一定の割合で上昇することが期待される．

⇒一定の割合で成長していく系列は，一般的に

という形で表すことが出来るので，線形トレンドを持つように振る舞う．

1. 株価や為替レートを予測することは難しく，**平均回帰性**を持つとは言い難い．

**単位根過程**は非定常過程の代表的な過程であり，定常過程をもとに定義される．

**定義5.1（単位根過程）**

原系列が非定常過程であり，差分系列 が定常過程であるとき，過程は**単位根過程**（unit root process）と言われる．

単位根過程と呼ばれる理由

➡誤差項が定常過程であるAR過程を用いて表現した時，AR特性方程式(2.15)がという解を1つ持つ．

**【単位根過程の別名】**

* 差分系列が定常となるので，単位根過程は**差分定常過程**（difference stationary process）と呼ばれる．
* **1次和分過程**（integreted process）もしくはI(1)過程とも呼ばれ，が１次和分過程であることはと表記される．

単位根過程の差分系列が定常かつ反転可能なARMA()過程となるとき，単位根過程は次数()の**自己回帰和分移動（ARIMA）過程**もしくは，ARIMA()過程と呼ばれる．

**定義5.2（和分過程）**

階差分をとった系列は非定常過程であるが，階差分をとった系列が定常過程に従う過程は，次和分過程もしくは過程と呼ばれる．また過程は定常過程で定義される[[1]](#footnote-1)．

**定義5.3（ARIMA過程）**

階差分をとった系列が定常かつ反転可能なARMA()過程に従う過程に従う過程は次数()の自己回帰和分移動平均過程もしくはARIMA()過程と呼ばれる[[2]](#footnote-2)．

和分過程や和分次数はAR特性方程式におけるという解の個数に等しいことが知られている．

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **定義5.4（ランダムウォーク）**  過程が   |  |  |  | | --- | --- | --- | |  |  | (5.1) |   と表現される時，は**ランダムウォーク**（random walk）と呼ばれる．ただし，とする．また，定数項はドリフト率と呼ばれ，(5.1)はドリフト率のランダムウォークと呼ばれることもある． |

ランダムウォークは，撹乱項が期待値0のi.i.d.系列でAR係数が1に等しいAR(1)過程ということが出来る．また，(5.1)式より

と書き直すことが出来，右辺は最も基礎的な定常過程(1.8)となっているので，ランダムウォークの差分系列は定常過程であり，ランダムウォークが単位根過程であることが分かる．

以下では，ランダムウォーク(5.1)式を用いて，単位根過程と定常過程の性質の違いを見ていく．

## 単位根過程のトレンド

【単位根過程の重要な性質】

1. 単位根過程は線形トレンドで記述できる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2) |

ここでは**確率的トレンド**と呼ばれる．

この結果より，ドリフト率のランダムウォークが線形トレンドで書けることが分かる．一般的に，単位根過程の定数項は線形トレンドの傾きを表す．線形トレンドを記述できるモデルとしては，トレンド定常過程と呼ばれる過程もある．

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **定義5.5（トレンド定常過程）**  を定常過程として，   |  |  | | --- | --- | |  | (5.3) |   と表される過程は**トレンド定常定常**(trend stationary process)と呼ばれる． |

トレンド定常過程は，定常項にトレンド項を加えた過程であり，トレンド定常過程が線形トレンドを記述できることは明らかである．単位根過程とトレンド定常過程はともに線形トレンドを記述できるが，両者が記述する線形トレンドは少し異なる．

**≪チェック≫（仮定…との平均は0）**

* **トレンド定常過程**

(5.3)式より，

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2) |

は定常過程であり，有限の分散を持つから，(5.4)式よりトレンド定常過程の場合は，とトレンドの差はほぼ一定の範囲に収まる．

* **単位根過程**

(5.2)式より単位根過程は線形トレンドだけではなく、確率的トレンドも有しているため，とトレンドの差はほぼ一定の範囲に収まらない．

具体的に見ていくと，確率的トレンドは定数だけでなく，i.i.d.確率変数を足し合わせてものであり，

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.5) |

(5.5)式から分かる通り，確率的トレンドは平均的な挙動は変化しないが，不確実性が線形的に増大していく．

ランダムウォークが(5.1)の時，(5.2)と(5.5)より

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

であるので，は，が大きくなるにつれて，線形的に大きくなることが分かる．

単位根過程がどのような意味で線形トレンドをモデル化しているかというと，

が成立するので，

となるため，単位根過程は線形トレンドをモデル化していることになる．

## 単位根過程の予測

単位根過程であっても，第3章で述べた予測の原則が変わることはない．

**≪例≫**

**ランダムウォーク**

⇒AR係数が1に等しいAR過程である．

を過去のと将来のの部分に分解して(3.5)，(3.6)式を用いればよい．

**≪チェック≫（ランダムウォークの期先の予測）**

先ほど同様に，ドリフト率は線形トレンドを記述するために必要なものであり，ここでは定常過程の予測の性質を比較するために，とする．このとき，(5.2)式と同様にして

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.6) |

となるため，期先最適予測は，

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.7) |

となる．

**【定常AR(1)過程とランダムウォーク】**

|  |  |
| --- | --- |
| **類似点** | **相違点** |
| 予測がにしか依存しない． | **≪定常AR(1)過程≫**  ウェイトが指数的に減衰していき，長期予測はの値に関わらず，過程の期待値に収束する．（係数の絶対値が1よりも小さいため）  **≪ランダムウォーク≫**  ウェイトが1の全く減衰しないため，予測期間がどんなに長くなってもの影響が消えることがなく，期待値の0に近づいていく事がない． |

単位根過程の予測においては，過去の観測値の影響が消えることはなく，単位根過程は平均回帰的ではない．

【ランダムウォークにおけるMSE】

ランダムウォークの予測のMSEを考えると，(5.6)，(5.7)式より

であることが分かるので，予測のMSEは

となる．

このことより，ランダムウォークの予測のMSEは線形的に増大していく事が分かる．

## 単位根過程のインパルス応答関数

ランダムウォーク(5.1)式に関しては，(5.6)に注意すると，，

が成立すること分かる．つまり，インパルス応答関数は常に1であり，ショックは恒久的な影響を持つ．それに対して，定常過程はウォルド分解より，MA過程で表現可能であり，さらにその係数は0に収束していく事が知られている．したがって，定常過程においては，ショックは一時的な影響しか持たない．

1. 過程を長期分散が正である定常過程で定義する場合もある．長期分散については，後ほど定義． [↑](#footnote-ref-1)
2. ARIMA()過程の定義に，階差分をとった系列が非定常であるという条件は含まれていないが，この条件は，階差分をとった系列が反転可能なARMA過程になるという条件に含まれることに注意されたい． [↑](#footnote-ref-2)