12月8日

#### 第3回（保険料計算原理の多変量への拡張）

|  |
| --- |
| **≪今回の目標≫**  「エッシャー変換・ワン変換」を多変量に拡張して**価格の線形性を持つようにする**． |

【復習】1変数Ver.の各変換による均衡価格．

|  |  |
| --- | --- |
| エッシャー変換 |  |
| ワン変換 | ≪別表現≫ |

上記2つの変換の欠点として，均衡価格の線形性が成立しないが，均衡価格(2.23)式の線形性を満たす．

≪ポイント≫

|  |  |
| --- | --- |
|  | リスクの価格付けは全リスク 多変量積率母関数を決定する(P38-39)． |
| ② | 市場の全リスク は変量正規分布に従う，かつリスクはこれらリスクの線形結合で表されているならば，Buhlmannの均衡価格に基づいて計算させるリスクは以下で与えられる． |
| ③ | 以下の確率密度関数により既存の確率密度関数を変換する方法を**多変量エッシャー変換**という．  エッシャー変換をより一般化すると…  エッシャー変換はと置いた場合に該当する． |
| ④ | であるとき，多変量エッシャー変換により変換されたは |
| ⑤ | 多変量ワン変換を導入するために，コピュラ関数を定義する．  ≪コピュラ関数≫  変量関数 に対して，コピュラ関数は以下で定義される．  つまり，コピュラ関数は変量関数  の依存性を表現する． |
| ⑥ | アルキメデス・コピュラ関数を以下で定義する． |
| ⑦ | を以下で定義しておき，変量正規分布に従うとする． |
|  |  |
|  |  |

≪均衡価格≫

リスク交換量とリスク交換費用において，とある投資家（保険購入者）の期待効用が最大となる，かつリスク交換量の和（裁定機会）となるようなリスク交換費用を**均衡価格**と呼ぶ．

均衡価格は線形性を満たす（期待値の線形性より明らか）．

|  |  |
| --- | --- |
| *f*  ：均衡価格  ：リスク |  |

すべての投資家が指数効用関数を持つ場合，均衡価格は以下の通り．

|  |  |
| --- | --- |
| ：リスク総量  ：市場の代表的投資家のリスク回避度 | (2.23) |

≪線形性のCheck≫

このとき，，： について，

≪仮定≫

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ： | 市場の全リスク |
|  | ： | によって生成される可算加法族 |
|  | ： | 可測な  このとき，（ボレル可測関数）が存在し， |

(2.23)式より，リスク均衡価格は(2.27)式で与えられ，線形性を満たす．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.27) |

変量の確率変数 に対して，積率母関数が存在するとする（ここでの存在は，可積分であることを言っていると思われる）．

このとき，(2.24)より

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.28) |

均衡価格は線形性を持っているので， (リスクはのポートフォリオ)であるならば，

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.29) |

つまり，リスクの価格付けは全リスクの積率母関数が分かれば求めることが出来る．

≪参考≫

全リスクが変量正規分布に従う場合，Buhlmannの均衡価格はCAPMと関連付けられる．

に対して，積率母関数は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.30) |

両辺に常用対数を取り，の第成分を微分すると，

したがって，

ゆえに，正規分布の場合は(2.29)式より，

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.31) |

を市場ポートフォリオととらえると，

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.32) |

となるので，

: ポートフォリオ

: 全リスク合計

このとき，は線形性を持つ（とが線形性を持つことより明らか）．

定理2.4

全リスクが変量正規分布に従うとし，あるリスクはこれらの線形結合で表されているとする．この時，Buhlmannの均衡価格に基づいて計算されるリスクの価格は以下で表される．

定理2.4による均衡価格は線形性を満たす．

（Check）

，：とする．このとき，

≪多変量エッシャー変換≫

には同時密度関数が存在するとする．この時，以下で与える変換を**多変量エッシャー変換**という．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.34) |

は非負かつ全体積分が1となるので，同時密度関数となる．

Buhlmannの均衡価格（2.27）は，

多変量エッシャー変換を用いて，均衡価格を表すと以下のとおりである．

：変換された確率測度による期待値．

(Check)

多変量エッシャー変換は線形性を持つのか？

とする．このとき，

であるから，多変量エッシャー変換による均衡価格は線形性を持つことが分かる．

≪補足≫

エッシャー変換をより一般化すると…

エッシャー変換はと置いた場合に該当する．

定理2.5

全リスクは，平均ベクトル，分散共分散行列 の 変量正規分布に従うとする．この時，多変量エッシャー変換は，リスクを平均ベクトルが，共分散行列が変量正規分布に変換する．

（Check）

リスクを平均ベクトルが，共分散行列が変量正規分布に従うとする．

このとき，密度関数は

ここで，

つまり，

これより，積率母関数を用いて

よって，

ここで，上式のをと変換することで，

【例2.3】

資産側からリスクを評価するための多変量エッシャー変換を考えよう．

≪多変量エッシャー変換≫

簡単のため，全体リスクは標準正規分布に従うとし，とする．このとき，定理2.5より，多変量エッシャー変換は正規分布を変換する．

市場に個の証券が存在し，番目の証券価格が以下で与えられるとする．

多変量エッシャー変換後のおいて， に従うので，

（補足）

以上より，確率変換前の確率測度の下での番目の証券価格は

と表され，証券の期待収益率に対して

が成立することが分かる．一般に無リスク金利とすれば，

ここで，とした場合，確率変換後の確率の下でのは標準正規分布にしたがい，証券価格は

したがって証券上に書かれたコールオプションの価格は，

ここで，を満たす集合とする．このとき，

2個目の期待値について，

ここで，の具体的表現を考えると，

であるから，

同様に，1つ目の項についても計算すると，結果が得られる．

≪一般的な話≫

|  |
| --- |
| 関数が-可測とは，  であることをいう．そのような関数を-可測関数（measurable function）と呼ぶ．  〈確認〉  は可測なであることより，に対して  が成り立つ．ここで，よりについて，  と書くことができる．これより， |