更新日：2022年2月9日

#### 4.3 基準財の変換

これまでの議論では，無リスク資産を基準財（ニューメレール）としていた．このとき，「資産価格の基本定理（P58）」より相対価格がマルチンゲールであることと裁定機会がないことは同値であった．

|  |
| --- |
| 【今回の議論】  ➡ 問題によっては，基準財を変更した方が便利（例えば，フォワード価格）であることを示し，その場合の測度変換の公式を導入． |

まず，2つの証券との価格過程をそれぞれ以下の確率微分方程式に従うとする．

ただし，2つのブラウン運動の相関をとする．また，によって生成されるフィルトレーション（情報系）をとする．

のに関する相対価格を考える．伊藤の商公式より，相対価格の従う確率微分方程式は

|  |  |
| --- | --- |
| ただし， | （4.31） |

相対価格がマルチンゲールになるように測度変換を行う．つまり，ドリフト項が0となるように測度変換を行う．（定理3.2（Girsanovの定理））

|  |  |
| --- | --- |
|  | （4.32） |

は変換後の確率測度に関して標準ブラウン運動である．

【例4.8（エクスチェンジオプション）】

2つの証券を交換するヨーロピアンタイプのデリバティブ（エクスチェンジオプション）のペイオフは，

リスク中立化法（無リスク資産を基準財にする）によると，時点におけるペイオフをとすると，エクスチェンジオプションの価格は以下の通り．

を求めるためにはの**2次元同時分布を評価**しなければいけない．

ここで，基準財をからに変更してみよう．つまり，相対価格を以下の通りに設定．

このとき，満期において

であるから，行使価格1のコールオプションの評価に帰着される．

【ポートフォリオの複製】

|  |  |
| --- | --- |
| リスク中立化法 | 今回（基準財の変更） |
| でポートフォリオを複製 | でポートフォリオを複製 |

を複製ポートフォリオの時点における価格とする．

(**↓** を基準財とすると…)

したがって，を時点に依存しない定数とすると

故に，

はの下で，(4.32)式に従うので，

（Check）伊藤の公式（1.ver）よりとおくと，

したがって，

例2.2を振り返ると

であるならば，

|  |  |
| --- | --- |
|  | （2.17） |

であったので，これと比較すると，

であり，エクスチェンジオプションの価格は以下で与えられる．

ただし，

【例4.9（確率金利モデル）】

割引国債価格を基準財とする証券の相対価格を

とすると，これはの満期のフォワード価格である．

先ほどの議論と同様に，ある確率測度に関して標準ブラウン運動が存在し，フォワード価格が

|  |  |
| --- | --- |
|  | （4.33） |

と書けたとする．(4.33)よりはフォワード価格をマルチンゲールとする確率測度であるため，「フォワード測度」と呼ばれる．

|  |  |
| --- | --- |
| リスク中立化法 | フォワード中立化法 |
| でポートフォリオを複製 | でポートフォリオを複製 |

先ほどと同様に，を複製ポートフォリオの時点における価格とする．

をマルチンゲールとする確率測度に対して期待値を取ると，

したがって，

このように，フォワード価格をマルチンゲールとする確率測度を利用して価格付けを行う方法を「**フォワード中立化法**」という．

【フォワード中立化法のメリット】

金利が確率的に変動する場合に有効的である．リスク中立化法とフォワード中立化法を比較してみる．

|  |  |
| --- | --- |
| リスク中立化法 | フォワード中立化法 |
| の同時分布が必要!!! | は確定的であるため，の分布さえ分かればいい!!! |

≪注意点≫

1. リスク中立測度からフォワード中立測度への測度変換は，

|  |  |
| --- | --- |
|  | （4.36） |

をラドン・ニコディム密度過程とする測度変換に対応．つまり，フォワード中立化法(4.34)では，見かけ上で金利の影響が消えているだけで，実際には，に金利の影響が反映されている．

【演習問題4.6】

観測確率に関するリスク資産の価格過程を

満期の割引国債のフォワードレート過程を

とする．ただし，は定数，は確定関数，とは互いに独立な標準ブラウン運動とする．以下の問いに答えよ．

1. のもとで，のフォワード価格およびのフォワード価格が従う確率微分方程式を求めよ．
2. およびがマルチンゲールとなるように測度変換を行え．
3. の上に書かれた満期，行使価格のヨーロピアンコールオプションの価格を求めよ．

(Proof)

1. ≪手順≫
   * フォワードレート過程より割引債の価格過程を導出．
   * 求めた価格過程とまたはの価格過程より，伊藤の商公式を用いることでフォワード価格を導出する．
2. ≪手順≫
   * ドリフト項が０となるように測度変換を行えばよい．
3. ≪手順≫
   * 求めた新たな確率測度上では，フォワード価格はマルチンゲールであることを利用して，オプション価格を導出する．

【実際に解いていく】

1. フォワ―ドレート過程より，

ここで，だったので，代入すると

上式をに関して微分をすると，

|  |
| --- |
| ≪補足≫微分に関する公式  を用いている． |

一方で，，であったことを利用して，

以上より，

ここでは，簡単のため以下の通りに置き換えた．

したがって，以下の同値条件を用いることで無リスク資産の相対価格が従う確率微分方程式を導き出せる．

|  |
| --- |
| ≪確率微分方程式に関する同値条件[[1]](#footnote-2)≫ |

同様に，がしたがう確率微分方程式を伊藤の公式(1.Ver)より求めると，

したがって，

1. 1より無リスク資産とリスク性資産の相対価格に関するSDEが得られたので，下式を変形することで，ともにマルチンゲールにする確率測度の下でのブラウン運動が得られる．

【無リスク資産】

【リスク性資産】

1. フォワード測度を用いると，コールオプションの価格は以下で評価できる．

一方で，2よりフォワード測度上で，リスク性資産のSDEは

伊藤の公式(1.Ver)より，

ここで，は確定的な関数（は確定的な関数なので）であるから，満期時点における相対価格は対数正規分布に従う．

上記より，

であり，ヨーロピアンコールオプション価格は以下の通りとなる．

# Appendix

|  |
| --- |
| 【補論】  は平均1のマルチンゲール（指数マルチンゲール）である．  (Proof)  とおくと，  したがって，  つまり，は確率積分で表されるので，マルチンゲールである． |

1. 木島（1999）「期間構造モデルと金利デリバティブ」（P19）を参照いただきたい．伊藤の公式を用いれば導き出せる． [↑](#footnote-ref-2)