2022年5月2日

#### 最適化問題

# Markowitzの平均分散アプローチ

平均分散アプローチとは，Markowitz(1952)によって提案された資産運用における個別資産への投資配分を決定するための手法であり，現代ポートフォリオ理論の先駆けとなっただけでなく，今日における資産運用の理論体系の礎となった．

平均分散アプローチは，リターン（期待収益率）を確保しつつ，リスク（ボラティリティ）を極力抑え，リターンとリスクのバランスの取れた最適なポートフォリオを組むことを目的とした手法である．具体的には，投資期間中に達成したいリターンを設定し，その目標を達成できる範囲で可能な限りリターンの分散，つまりボラティリティの二乗を小さく抑えるように投資比率を選択する．数式に落とし込むと，以下の最適化問題を解くことに等しい．

|  |  |
| --- | --- |
| subject to |  |

ここで，は次元の列ベクトル，はすべての要素が1である次元の列ベクトルである．本分析では，この平均分散アプローチを元として，毎期のポートフォリオの最適化を実施する．

# TDFにおける毎期ポートフォリオの最適化について

本分析では，〇章にて説明したMarton問題により得られたグライドパスをベースに，毎期の市場環境に呼応してリバランスを実施しながら積み立てを実施した場合によるTDFの積立額について検証する．また，ポジションの策定においては，以下の2通りの最適化を考える．

【最適化の方法】

1. TDF加入者の期待収益率を所与とした場合における，リスクの最小化．リスクの最小化にも期待ショートフォールの最小化とトラッキングエラーの最小化などが考えられるが，現時点では分散最小化を検討する．
2. TDF加入者が許容しうるリスクを所与とした場合における，累積リターンの最大化

## リスク最小化の場合

上記にて説明した通り，リターンが所与として与えられた場合におけるリスクの最小化を目的としたポートフォリオの構築を実施する．具体的に数式にした場合は以下の通りである．ただし，国内債券，外国債券のウェイトをそれぞれ，国内株式，外国株式のウェイトをそれぞれとし，とし，空売りはなしとする．実際の分析では，投資期間中の任意の時点での最適化を実施する．具体的には，TDF加入時点が22歳，退職時点を65歳時点とすると，

|  |  |
| --- | --- |
| subject to  加えて，対象資産のグライドパスをそれぞれとすると，以下の通りに投資制約を課す．ただし，でありはユーザー選択である． |  |

ただし，自身の所感としては内外債券へ投資すれば投資するほど，リスクは抑えられると考えられるため，リスクを最小にするポートフォリオは，制約条件下での内外債券へのウェイトが一番大きいパターンが導かれると考える．ただし，分散効果による影響も考えられるため，実際に数値を見ることで自身のイメージと一致しているか確認したい．

## リターン最大化の場合

先ほどとは異なり，次は累積リターンの最大化を行う．具体的には，TDF加入者の許容しうるリスクを所与とし，リスク以下の範囲でリターンを最大とするポートフォリオを策定する．ただし，各資産のアロケーションは2.1節と同様にグライドパスからを許容範囲内として変更することを可能とする．

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

この最適化についても同様に，投資期間中の任意の時点に対して最適化を実施する．

##### Markowitzの平均分散アプローチの導出

ここでは，ラグランジュの未定乗数法による平均分散フロンティアの導出について述べる．平均分散フロンティアとは，一定の期待収益率(リターン)に対して，収益率の分散を最小にするような集合である．また，平均分散フロンティアの導出方法には，他に収益率の直行分解を用いた方法も存在するが，今回は割愛する．

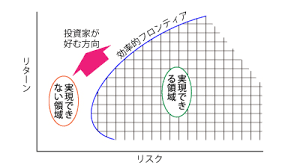


図 　平均分散（効率的）フロンティアのイメージ

各資産の期待収益率を縦に並べた次元ベクトルを，すなわちとすると，ポートフォリオの期待収益率と分散は以下で表現される．ただし，はポートフォリオのウェイト，つまり次元ベクトルである．

このとき，一定の期待収益率に対する最小分散を求める問題は以下の通りに定式化される．

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

，を未定のパラメータとして，この問題をラグラジアン

を用いて解く．最小化のための1階の条件は，

である．ここで，市場は完備であると仮定すると，ポートフォリオを構成する各資産は独立であるので，は正則である．したがって，が存在し，

|  |  |
| --- | --- |
|  | ※ |

となる．これを制約条件の式に代入すると，

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

上記方程式を行列表記すると以下の通りである．

となる．ここで，

である．の場合に上記の連立方程式を解くと，

が得られる．これを※式に代入すれば，最小分散を与えるポートフォリオ・ウェイトのベクトルが，次のように求まる．

|  |  |
| --- | --- |
| ただし， |  |

である．は，次元のベクトルになっている，ここで，の分子をと置き換える．このとき，

であることに注意すると，

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

分子を整理すると，

ここでは，の関係と，の定義式を用いた．上式を整理すれば，

となる．これを分散の式に代入すれば，

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

となる．これは，平面において，，を原点とし，を漸近線とする双曲線となる．これが，平均分散フロンティアである．

一般に，収益率の期待値が大きいほど，また収益率の分散が小さいほど望ましい．したがって，平均分散フロンティアの上に乗らないポートフォリオを選択することは望ましくない．

##### 安全資産が存在する場合の平均分散フロンティア

これまで考えてきたのは，市場にリスク性資産しか存在しない場合であった．安全資産が存在する場合，まずそれを除外して，リスクのある資産のみの平均分散フロンティアを描く．そして，縦軸上の安全資産に対応する点から双曲線に接線を引く．この線及びそれと対称な線が，この場合の平均分散フロンティアとなる．

その式は，次のように求められる．先ほど得られた双曲線を微分して接線の傾きを求めると，

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

安全資産の収益率をとすると，がこの接線の縦軸との接戦と一致する条件は，

双曲線の方程式を用いてこれを整理すると，双曲線上の接線の縦座標は，

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

となる．これを双曲線の方程式に代入して整理すると，接線の横座標は，

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

したがって接線の傾きは，

となる．したがって，平均分散フロンティアの式は，

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |