2023年3月29日

#### フォワード価格と先物価格が等しくなる証明

作成者　西村 翼

無リスク金利が一定であるという前提のもとでは，フォワード価格と先物価格は等しくなることを証明する．日間の先物契約があるとし，第日目の先物価格の終値を，1日当たりの無リスク金利の（一定である）として，以下の戦略を考える[[1]](#footnote-2)．

【ポジション】

1. 第0日目の終わり（スタート時点）に，単位の先物のロング・ポジションを取る．
2. 第1日目の終わりに，単位までロング・ポジションを増やす．
3. 第2日目の終わりに，単位までロング・ポジションを増やす．

といったように，日々ロング・ポジションを増やしていくと表 1のような状態になる．

表 先物とフォワード価格が等しいことを示す投資戦略

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 日付 | 0 | 1 | 2 |  |  |  |
| 先物価格 |  |  |  |  |  |  |
| 先物ポジション |  |  |  |  |  |  |
| 損益 | 0 |  |  |  |  |  |
| 日までの複利の損益 | 0 |  |  |  |  |  |

第日目の初めまでに，投資家はの買いポジションを持っていることになり，この日のポジションによる損益は以下の通りである．

この損益は，無リスク金利で日の終わりまで複利で運用されるものとすると，第日目の損益は以下の通りになる．

よって，この投資戦略の第日目の損益の合計は以下の通りになる．

ここで，は最終時点での現物価格に等しいから，この投資の最終価格は

であり，金額の無リスク金利への投資を上記投資と組み合わせると，そのポートフォリオの最終価値は，時点で以下のようになる．

先物の買いポジションには初期投資は必要ないから，結局を投資してを時点に受け取ったことになる．

次に，第0日目の終わりのフォワード価格をとする．金額を無リスク資産に投資し，単位のフォワード契約の買いポジションを締結すれば，時点で金額も保証される．よって，ここには2つの投資戦略ががあり，1つは当初の費用が必要であり，もう一つは，当初の費用が必要であり，どちらも時点でとなる．裁定機会は存在しないので，

となる．言い換えれば，先物価格とフォワード価格は等しいということで有る．この証明は1日刻みという時間間隔には特別意味はなく，諸条件が一致していれば，週単位の取引で行われるような先物取引でも，その価格はフォワード価格に一致する．

1. この戦略は，J. C. Cox, J. E. Ingerosoll とS. A. Rossによる ”The Relationship between Forward Prices and Futures Prices,” Journal of Financial Economics, 9 (December 1981), 321 – 46 から抜粋した． [↑](#footnote-ref-2)