628

(1)

入射 X 線の運動量p_1は、 $p_1 = \frac{h\nu}{c}$ …①

散乱 X 線の運動量p_2は、 $p_2 = \frac{h\nu'}{c}$ …②

電子の運動量p_3は、 $p_3 = mv$ …③

である。

x方向について、

$p_1 = p_2 \cos\theta + p_3 \cos(-\phi)$

y方向について、

$0 = p_2 \sin\theta + p_3 \sin(-\phi)$

これらの式に①,②,③式を代入して、

$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c}\cos\theta + mv\cos\phi$ …④

$0 = \frac{h\nu'}{c}\sin\theta - mv\sin\phi$ …⑤

(2)

$E = h\nu$ (X 線のエネルギー)

$K = \frac{1}{2}mv^2$ (電子の運動エネルギー)

より、

$E = E' + K$

$h\nu = h\nu' + \frac{1}{2}mv^2$ …⑥

(3)

⑥式より、

$h(\nu - \nu') = \frac{1}{2}mv^2$

$(\nu - \nu') = \frac{mv^2}{2h} = \frac{m^2v^2}{2hm}$ …⑦

④,⑤式を2乗して、

$\frac{h^2}{c^2}(\nu - \nu'\cos\theta)^2 = m^2v^2\cos^2\phi$ …⑧

$\frac{h^2}{c^2}\nu'^2\sin^2\theta = m^2v^2\sin^2\phi$ …⑨

⑧+⑨式より

$\frac{h^2}{c^2}\left\{(\nu - \nu'\cos\theta)^2 + \nu'^2\sin^2\theta\right\} = m^2v^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi)$

$\frac{h^2}{c^2}\left(\nu^2 - 2\nu\nu'\cos\theta + \nu'^2\cos^2\theta + \nu'^2\sin^2\theta\right) = m^2v^2$

$$\frac{h^2}{c^2}\left(\nu^2 - 2\nu\nu' \cos\theta + {\nu'}^2\right) = m^2 v^2$$

これを⑦式に代入して、

$$(\nu - \nu') = \frac{1}{2hm} \cdot \frac{h^2}{c^2}\left(\nu^2 - 2\nu\nu' \cos\theta + {\nu'}^2\right)$$
$$(\nu - \nu') = \frac{1}{2m} \cdot \frac{h}{c^2}\left((\nu - \nu')^2 + 2\nu\nu'(1 - \cos\theta)\right)$$
$$(\nu - \nu') = \frac{h}{mc^2} \cdot \nu\nu'(1 - \cos\theta) \qquad ((\nu - \nu')^2 = 0より)$$
$$(\nu - \nu') = \frac{h\nu^2}{mc^2}(1 - \cos\theta) \quad (\nu \fallingdotseq \nu' \ \rightarrow\ \nu\nu' = \nu^2より)$$