296

(1)

(a)

正しい時刻を示すときの周期,部屋の温度,振り子の長さを$T_0[s]$,$T_{room}[K]$,$l_0[m]$、
1日につき1.0秒遅れるときの周期,振り子の長さを$T_1[s]$,$l_1[m]$、
1日につき7.2秒遅れるときの周期,振り子の長さを$T_2[s]$,$l_2[m]$、
線膨張率を$\alpha[1/K]$
とする。

1日につき1.0秒遅れるときの周期を考えてみる。
1日(86400秒)に振り子が往復する回数は等しいので、

$$\frac{86401}{T_1}=\frac{86400}{T_0}$$

$$\therefore T_1=\frac{86401}{86400}T_0$$

同様に、1日につき7.2秒進むときの周期を考えてみる。

$$\frac{86392.8}{T_2}=\frac{86400}{T_0}$$

$$\therefore T_2=\frac{86392.8}{86400}T_0$$

$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ より、　　（単振り子の周期の公式）

$$\frac{86401}{86400}T_0=2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} \quad \cdots①$$

$$\frac{86392.8}{86400}T_0=2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}} \quad \cdots②$$

式①,②より、

$$\frac{86401}{86392.8}=\sqrt{\frac{l_1}{l_2}} \quad （①÷②）$$

$$\therefore l_1=(1+1.90\times10^{-4})l_2$$

振り子がl_2からl_1に膨張するとき、その長さの変化Δlは、

$$\Delta l=1.90\times10^{-4}l_2$$

となる。

$\Delta l = \alpha l \Delta T$ より、　（熱膨張の公式）
$\Delta l = 1.90 \times 10^{-4} l_2$ ， $l = l_2$ ， $\Delta T = 300 - 280 = 20K$
を代入して、
$1.90 \times 10^{-4} l_2 = \alpha l_2 \cdot 20$
$\alpha = 9.5 \times 10^{-6} [1/K]$

(b)

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ より、
$T = T_0$ ， $l = l_0$
を代入して、
$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}}$　　　$\cdots$③

式①,③より、
$\frac{86400}{86401} = \sqrt{\frac{l_0}{l_1}}$　　　（③÷①）
$\therefore l_0 = (1 - 2.31 \times 10^{-5}) l_1$

よって、振り子がl_1からl_0に膨張するとき、その長さの変化Δlは、
$\Delta l = -2.31 \times 10^{-5} l_1$
となる。

$\Delta l = \alpha l \Delta T$ より、　（熱膨張の公式）
$\Delta l = -2.31 \times 10^{-5} l_1$ ， $\alpha = 9.5 \times 10^{-6} [1/K]$ ， $l = l_1$ ， $\Delta T = (T_{room} - 300)K$
を代入して、
$-2.31 \times 10^{-5} l_1 = 9.5 \times 10^{-6} l_1 \cdot (T_{room} - 300)$
$\frac{-2.31 \times 10^{-5}}{9.5 \times 10^{-6}} = T_{room} - 300$
$\therefore T_{room} = 298K$

(2)

$270K$の時に1日に5秒進み、

$300K$の時に1日に5秒遅れる、

振り子の棒の線膨張率をα_{limit}

とする。

1日につき5.0秒進むときの周期T_1、

1日につき5.0秒遅れるときの周期T_2、

はそれぞれ、

$T_1 = \frac{86395}{86400} T_0$

$T_2 = \frac{86405}{86400} T_0$

と表せる。

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ より、

$\frac{86395}{86400} T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}$ $\cdots$④

$\frac{86405}{86400} T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}$ $\cdots$⑤

$\frac{86395}{86405} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}$ （④÷⑤）

$\therefore l_1 = (1 - 1.16 \times 10^{-4}) l_2$

振り子がl_2からl_1に膨張するとき、その長さの変化Δlは、

$\Delta l = -1.16 \times 10^{-4} l_2$

となる。

$\Delta l = \alpha l \Delta T$ より、 （熱膨張の公式）

$\Delta l = -1.16 \times 10^{-4} l_2$ ， $\alpha = \alpha_{limit}$ ， $l = l_2$ ， $\Delta T = 270 - 300 = -30K$

を代入して、

$-1.16 \times 10^{-4} l_2 = \alpha_{limit} l_2 \cdot (-30)$

$\alpha_{limit} = 0.386 \times 10^{-5} [1/K]$

線膨張率が$0.386 \times 10^{-5} [1/K]$以下の材料であれば条件に合う時計を作ることができる。

よって振り子の棒の材料として使用できるものは、

6(モリブデン),7(タングステン),8(インバール)

となる。