Тема 6. Эйлеровы функции и их приложения

6.1. Гамма-функция

Определение 6.1. Гамма-функцией называется математическая функция вида

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt \tag{6.1}$$

Гамма-функция имеет широкое применение в научных исследованиям и при решении задач математического анализа, теории вероятностей, статистики и физики. Данная функция используется для обобщения факториала на множестве действительных и комплексных значений.

Гамма-функция является одной из важных не элементарных функций. Вычисление многих определенных интегралов производится через эту функцию. Для данных функций составлены подробные таблицы, поэтому решение задачи считается законченным, если результат выражается через гамма-функцию.

Изучим свойства этой функции.

Свойство 6.1. Область определения.

Гамма-функция является несобственным интегралом 1 рода. Отметим, что при некоторых значениях переменной x, подынтегральная функция разрывная при $t = 0$, и данный интеграл является несобственным интегралом 2 рода. Исследуем сходимость данного интеграла.

Δ Рассмотрим интегральное представление в виде суммы двух интегралов

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt = \int_0^{1} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt,$$

где

$$I_1 = \int_0^1 t^{x-1} \cdot e^{-t} dt, \tag{6.2}$$

$$I_2 = \int_1^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt. \tag{6.3}$$

Для функции $I_1 = \int_0^1 t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$ подынтегральную функцию заменим эквивалентной, а именно: $f(t, x) = t^{x-1} \cdot e^{-t} \sim t^{x-1}$ при $t \to 0$.

Интеграл (6.2) $I_1 = \int_0^1 t^{x-1} dt$ сходится при $1 - x < 1, x > 0$.

Рассмотрим функцию $g(t) = \frac{1}{t^2}$. Из курса математического анализа мы знаем, что несобственный интеграл $\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2}$ сходится. Сравним подынтегральную функцию интеграла I_2 и функцию $g(t)$. Для этого найдем следующий предел

$$\lim_{t \to \infty} \frac{t^{x-1} \cdot e^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \to \infty} \frac{t^{x+1}}{e^t} = 0.$$

Тогда имеем, что несобственный интеграл $\int_1^{\infty} g(t)dt$ сходится, следовательно, по предельному признаку сходимости сходится интеграл (6.3), то есть сходится интеграл

$$I_2 = \int\limits_1^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$$

для любого значения переменной x.

Таким образом, мы показали, что гамма-функция является сходящимся несобственным интегралом при любом $x > 0$. ▲

Свойство 6.2. Непрерывность гамма-функции.

Гамма-функция принадлежит классу непрерывных функций для любого $x > 0$, то есть $\Gamma(x) \in \mathrm{C}\big((x; +\infty)\big)$.

Δ Воспользуемся теоремой о непрерывности несобственных интегралов, зависящих от параметров. Возьмем любое $x > 0$. Гамма-функция $\Gamma(x)$ непрерывна в точке x. В силу плотности множества действительных чисел существуют такие x_0, A такие, что $x_0 < x < A$. Докажем, что этот интеграл (6.1) сходится равномерно на промежутке $[x_0; A]$.

Рассмотрим представление $\Gamma(x)$ в виде интегралов (6.2), (6.3):

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt = \int\limits_0^{1} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt + \int\limits_1^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt.$$

Если $x > 1$, то интеграл (6.2) является интегралом от непрерывной функции, следовательно, $I_1 \in \mathrm{C}\big([1; +\infty)\big)$.

Если $0 < x < 1$ $(x_0 < x < 1)$, то $|t^{x-1} \cdot e^{-t}| \le t^{x_0-1}$ и интеграл $\int_0^1 t^{x_0-1} dt$ сходится. Тогда по признаку Вейерштрасса интеграл I_1 сходится равномерно на промежутке $[x_0; A]$. Следовательно, $I_1 \in \mathrm{C}\big([x_0; 1)\big)$. Таким образом, мы показали, что I_1 непрерывна в любой точке x .

Рассмотрим интеграл (6.3). Отметим, что $I_2 = \int_1^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$ сходится равномерно на промежутке $[x_0; A]$, так как $|t^{x-1} \cdot e^{-t}| \le t^{A-1} \cdot e^{-t}$, а интеграл вида $\int_1^{+\infty} \frac{t^{A-1}}{e^{-t}} dt$ сходится. А так как подынтегральная функция непрерывна, то интеграл I_2 непрерывен на промежутке $[x_0; A]$, следовательно, непрерывен в точке x.

Таким образом показано, что $\Gamma(x) = I_1 + I_2$ непрерывна как сумма непрерывных функций. А в силу произвольного выбора точки x, имеем, что $\Gamma(x) \in \mathrm{C}\big((x; +\infty)\big)$. ▲

Пример 6.1. Найдем значение $\Gamma(1)$.

Δ Используя определение по формуле (6.1), посчитаем интеграл

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} dt = -e^{-t}|_0^{+\infty} = 1.$$

▲

Свойство 6.3. Дифференцируемость гамма-функции.

С помощью теоремы о дифференцируемости несобственных интегралов, зависящих от параметров, а именно: для функции

$$\Phi(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y) dx$$

производная вычисляется по формуле $\Phi`(y) = \int_a^{+\infty} f_y^`(x,y) dx$, нетрудно доказать, что гамма-функция $\Gamma(x)$ дифференцируема и ее производная вычисляется по формуле

$$\Gamma`(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} \cdot ln(t) dt.$$

Аналогично, можно получить, что

$$\Gamma``(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} \cdot ln^2(t) dt.$$

Отсюда следует, что гамма-функция является выпуклой функцией, имеющей единственный положительной минимум (рис. 9.1).

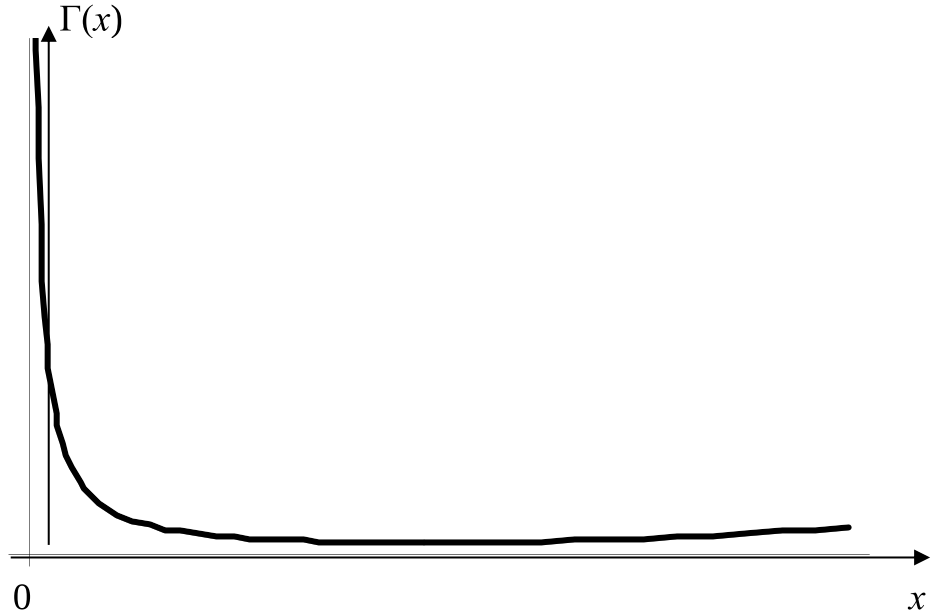

Рис. 6.1

Пример 6.2. Найдем значение $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Δ Используя определение по формуле (6.1), посчитаем интеграл

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-t} dt = \left\{ \begin{array}{c} \text{Введем замену} \\ \sqrt{t} = s, t = s^2, dt = 2sds \\ t = 0, s = 0 \\ t = +\infty, c = +\infty \end{array} \right\} =$$

$$= \int_0^{+\infty} 2 \cdot e^{-s^2 ds} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Воспользуемся известным} \\ \text{интегралом Эйлера — Пуассона} \\ \int_0^{+\infty} e^{-x^2 dx} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{array} \right\} = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

▲

Свойство 6.4. Справедлива формула понижения

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x). \tag{6.4}$$

Δ Докажем этот факт. Рассмотрим интеграл вида

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^{x+1-1} \cdot e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^x \cdot e^{-t} dt$$

Интегрируя этот интеграл по частям, получим

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x \cdot e^{-t} dt = \left\{ \begin{array}{c} \int u dv = uv - \int v du, \\ u = t^x, du = x \cdot t^{x-1} dt, \\ dv = e^{-t} dt, v = \int e^{-t} dt = -e^{-t} \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{t\to\infty} (-t^x \cdot e^{-t}) - \int_0^\infty -e^{-t} \cdot x \cdot t^{x-1} dt = 0 + x \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1} dt = x \cdot \Gamma(x). \ ▲$$

Свойство 6.5. Выражение гамма-функции через факториал.

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{6.5}$$

Δ Придадим в формуле понижения $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$ $x = n$ (целое положительное число) и применим данную формулу n раз, получим

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = n!$$

Итак, имеем $\Gamma(n+1) = n!$ ▲

Функция $\Gamma(x)$ для целочисленных значений аргумента совпадает с обычным факториалом

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$
$$\Gamma(1) = 1 = 0!$$

Иногда полезно применять так называемую формулу дополнения.

Свойство 6.6. Для гамма-функции справедлива формула дополнения

$$\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{sin(\pi x)}, 0 < x < 1. \tag{6.6}$$

Δ Заменим в формуле (6.6) x на $x+1$, получим

$$\Gamma(x+1) \cdot \Gamma(-x) = \frac{\pi}{sin(\pi(x+1))} = \frac{\pi}{sin(\pi x)}. \tag{6.7}$$

Отсюда и из справедливости формулы (6.7) при $0<x<1$ вытекает справедливость равенства (6.6) при любом x, не являющемся целым числом.

Применяя повторно формулу (6.6), получаем

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)\cdot(x+n-2)\cdot\ldots\cdot(x+1)\cdot x\cdot\Gamma(x). \tag{6.8}$$

Отсюда при $x=\frac{1}{2}$ имеем

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) =$$
$$= \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)\cdot(2n-1)}{2^n}\cdot\sqrt{\pi}.$$

Итак, имеем $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot\sqrt{\pi}$. ▲

Пример 6.3. Найдем значение $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$.

∆ Используя формулу (6.4), имеем

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \Gamma\left(1+\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}\cdot\Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) =$$

$$= \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5\cdot3\cdot1}{2^3}\cdot\sqrt{\pi} = \frac{15}{8}\cdot\sqrt{\pi}. \ ▲$$

6.2. Бета-функция

Определение 6.2. Бета-функцией называется математическая функция, зависящая от двух параметров x, y, и которая определяется несобственным интегралом 2-го рода

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}\cdot(1-t)^{y-1}dt\,, x>0, y>0. \tag{6.7}$$

Перейдем к рассмотрению свойств этой функции.

Свойство 6.7. Подынтегральная функция имеет разрыв при $x<1$ на нижнем пределе интегрирования и при $y<1$ на верхнем пределе интегрирования. Интеграл (6.7) сходится при $x>0, y>0$ и расходится при $x\le 0, y\le 0$.

Доказательство можно провести аналогично доказательству сходимости интеграла Эйлера (гамма-функция).

Свойство 6.8. Бета-функция является симметрической функцией, то есть $\mathrm{B}(x,y)=\mathrm{B}(y,x)$.

∆ В формуле (6.7) положим $\tau = 1-t, t = 1-\tau$. Имеем

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}\cdot(1-t)^{y-1}dt = \int_0^1 (1-\tau)^{x-1}\cdot\tau^{y-1} = \mathrm{B}(y,x).$$

▲

Свойство 6.9. Для бета-функции справедливо следующее выражение

$$\mathrm{B}(x,y)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\cdot dt. \tag{6.8}$$

Свойство 6.10. Между гамма-функцией и бета-функцией существует зависимость

$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Δ Рассмотрим гамма-функцию

$$\Gamma(x)=\int\limits_0^{+\infty}t^{x-1}\cdot e^{-t}dt$$

И сделаем замену $t=az$, где $z>0$ – переменная, $a>0$ – параметр.

$$\Gamma(x)=\int\limits_0^{+\infty}(az)^{x-1}\cdot e^{-az}\cdot adz=a^x\cdot\int\limits_0^{+\infty}z^{x-1}\cdot e^{-az}\cdot dz,$$

из последнего равенства

$$\frac{\Gamma(x)}{a^x}=\int\limits_0^{+\infty}z^{x-1}\cdot e^{-az}\cdot dz.$$

Подставив в полученное равенство $x\sim x+y, a\sim 1+a$, получим

$$\frac{\Gamma(x+y)}{(1+a)^x}=\int\limits_0^{+\infty}z^{x+y-1}\cdot e^{-(1+a)z}\cdot dz. \tag{6.9}$$

В равенстве (6.9) умножим левую и правую части на выражение z^{x-1} и проинтегрируем

$$\Gamma(x+y)\cdot\int\limits_0^{+\infty}\frac{a^{x-1}}{(1+a)^{x+y}}da=\int\limits_0^{+\infty}a^{x-1}\cdot da\int\limits_0^{+\infty}z^{x+y-1}\cdot e^{-(1+a)z}\cdot dz. \tag{6.10}$$

В левой части равенства (6.10) узнаем бета-функцию по формуле (6.8), а именно:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{a^{x-1}}{(1+a)^{x+y}}da=B(x,y).$$

Справа в равенстве (6.10) поменяем порядок интегрирования:

$$\int_0^{+\infty} z^{x+y-1}\cdot e^{-z}\cdot dz\int_0^{+\infty} a^{x-1}\cdot e^{-az}\cdot da =$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{введем замену}\\ az=b, a=\frac{b}{z}, db=zda, da=\frac{1}{z}db\end{matrix}\right\}=$$

$$=\int_0^{+\infty} z^{x+y-1}\cdot e^{-z}\cdot dz\int_0^{+\infty} \left(\frac{b}{z}\right)^{x-1}\cdot e^{-b}\cdot\frac{1}{z}db =$$

$$=\int_0^{+\infty} z^{x+y-1}\cdot e^{-z}\cdot dz\int_0^{+\infty} \frac{b^{x-1}}{z^x}\cdot e^{-b}db =$$

$$=\int_0^{+\infty} z^{x+y-1}\cdot e^{-z}\cdot dz\cdot\frac{1}{z^x}\int_0^{+\infty} b^{x-1}\cdot e^{-b}db =$$

$$=\int_0^{+\infty} z^{y-1}\cdot e^{-z}\cdot dz\cdot\Gamma(x)=\Gamma(y)\cdot\Gamma(x).$$

Таким образом, подставляя в (6.10) полученные преобразования интегралов, мы имеем

$$\Gamma(x+y)\cdot B(x,y)=\Gamma(y)\cdot\Gamma(x),$$

откуда следует связь бета- и гамма-функций

$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{6.11}$$

▲

Определение 6.3. Бета- и Гамма-функции, определенные формулами (6.7) и (6.1) называются интегралами Эйлера первого и второго рода соответственно.

Некоторые интегралы могут быть вычислены с помощью рассматриваемых функций. Приведем некоторые примеры.

Пример 6.4. Вычислить интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cdot x^6 dx$$

используя формулы Эйлера 1-го и 2-го рода.

Δ

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cdot x^6 dx=\left\{\begin{matrix}\text{используем гамма} - \text{функцию}\\ \Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}\cdot e^{-t}dt\end{matrix}\right\}=$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cdot x^5 \frac{1}{2} dx^2 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cdot (x^2)^{\frac{5}{2}} dx^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cdot (x^2)^{\frac{7}{2}-1} dx^2 = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(1+\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}.$$

▲

Пример 6.5. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+x^2)^3}}$$

используя формулы Эйлера 1-го и 2-го рода.

Δ

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+x^2)^3}} = \left\{ \text{используем } \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} dx = \frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \right\} =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\cdot x^{-1} dx^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{(x^2)^{-\frac{1}{2}} dx^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{4}}} = \left\{ \begin{array}{c} \alpha - 1 = -\frac{1}{2}, \alpha = \frac{1}{2}; \\ \alpha + \beta = \frac{3}{4}, \beta = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right).$$

▲

Пример 6.6. Докажем некоторое полезное равенство

$$I(\alpha,\beta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{\alpha}(x)\cdot cos^{\beta}(x) dx = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{\beta+1}{2}\right),$$

используя формулы Эйлера 1-го и 2-го рода.

Δ

$$I(\alpha,\beta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{\alpha}(x)\cdot cos^{\beta}(x) dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{\alpha-1}(x) \cdot cos^{\beta-1}(x) \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)\, dx$$

$$= \{\sin(x) \cdot \cos(x)\, dx = dsin^2(x)\}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{\alpha-1}(x) \cdot cos^{\beta-1}(x) dsin^2(x) = \begin{Bmatrix} \text{замена } sin^2(x) = t, \\ x_\text{н} = 0, t_\text{н} = 0, \\ x_\text{в} = \dfrac{\pi}{2}, t_\text{в} = 1 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{\alpha-1}{2}} \cdot (1-t)^{\frac{\beta-1}{2}} dt = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}\right).$$

▲

Приведем без доказательства некоторые полезные соотношения, используемые на практике:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{\alpha}(x) \cdot cos^{\beta}(x) dx = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$