

Designa-se por **transposição** a operação que consiste em trocar as linhas pelas colunas de uma matriz. A matriz que se obtém de $A_{m \times n} = (a_{ij})$ trocando as linhas pelas colunas designa-se por **matriz transposta** de A e representa-se por \mathbf{A}^T , isto é, $A_{n \times m}^T = (a'_{ij})$ onde $a'_{ij} = a_{ji}, \forall i,j$.

Propriedades da transposição de matrizes

Se $A_{m \times n} = (a_{ij})$, $B_{m \times n} = (b_{ij})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ então

- $(A^T)^T = A$;
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;
- $(A + B)^T = A^T + B^T$.

Se $A_{m \times n} = (a_{ij})$ e $B_{n \times p} = (b_{jk})$ então

- $(AB)^T = B^T A^T$.

Definições

Diz-se que a matriz quadrada A de ordem n é:

- **simétrica** quando $A^T = A$;
- **antissimétrica** quando $A^T = -A$;
- **ortogonal** quando $A^T A = AA^T = I_n$.

Uma matriz A de ordem n diz-se **invertível, regular ou não singular** quando existir uma matriz X de ordem n tal que

$$AX = I_n \text{ e } XA = I_n. \quad (1)$$

A matriz X designa-se por **inversa** da matriz A e representa-se por \mathbf{A}^{-1} .

Uma matriz que não admite inversa designa-se por matriz **singular, não regular ou não invertível**.

Observações

1. Só as matrizes quadradas admitem inversa, mas nem todas as matrizes quadradas são invertíveis!
2. Note que, se existir uma matriz que satisfaça uma das igualdades de (1) então também verifica a outra igualdade. Assim, para determinar a inversa de uma matriz A é suficiente encontrar uma matriz que satisfaça uma das igualdades de (1). Neste caso, A é invertível e $X = A^{-1}$, em (1).
3. Se A for uma matriz invertível então a sua matriz inversa é única.

Propriedades da matriz inversa

- A matriz I_n é invertível e $(I_n)^{-1} = I_n$.
- Se $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ é uma matriz diagonal com elementos principais todos não nulos, então A é invertível e $A^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, \dots, \frac{1}{a_{nn}}\right)$.
- Se A é uma matriz invertível então A^{-1} é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Se A é uma matriz invertível e $\alpha \in \mathbb{K}$ um escalar não nulo então αA é invertível e $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$.
- Se A e B são duas matrizes invertíveis então a matriz AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Se A é uma matriz invertível então, para $k \in \mathbb{N}$, a matriz A^k é invertível e $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.
- Se A é uma matriz invertível então a matriz A^T é invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Exercícios

1. Considere as matrizes A , B e C tais que

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 10 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad AC = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 8 & 0 \\ 14 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule $(AC)^T$, $B^T A^T$ e $(ACB^T)A^T$.

2. Verifique se as seguintes matrizes são simétricas ou antissimétricas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 15 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Complete a matriz $A = \begin{bmatrix} * & * & -5 & 3 \\ 2 & * & * & * \\ * & -1 & * & * \\ * & 4 & -7 & * \end{bmatrix}$ de modo que seja:

(a) simétrica;

(b) antissimétrica.

4. Verifique se as seguintes matrizes são ortogonais.

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. Determine o valor lógico das seguintes proposições, justificando convenientemente.

- (a) Se A é uma matriz simétrica então é quadrada.
- (b) A matriz A é simétrica se é quadrada.

6. Sejam A e B matrizes de ordem n e I a matriz identidade de ordem n . Prove que:

- (a) $A + A^T$ é uma matriz simétrica.
- (b) $A - A^T$ é uma matriz antissimétrica.
- (c) $AB + B^T A^T$ é uma matriz simétrica.
- (d) se B é uma matriz simétrica então $ABA^T + I$ é uma matriz simétrica.
- (e) se A é uma matriz antissimétrica e B uma matriz simétrica então $ABA + I$ é simétrica.

7. Determine a inversa das seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

8. Mostre que a inversa da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ é a matriz $\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$.

9. Sabendo que A , B e C são matrizes invertíveis de ordem n , resolva as seguintes equações matriciais em ordem a X .

- | | | | |
|------------------|-------------------------------|--------------------------|---------------------------|
| (a) $BX = A$. | (b) $X^{-1}A^{-1} = B^{-1}$. | (c) $AX^{-1} = B$. | (d) $[(AX)^T]^{-1} = B$. |
| (e) $AXB = AB$. | (f) $(AXB)^T = BA$. | (g) $[AX^{-1}B]^T = C$. | |