Elementos da Teoria dos Conjuntos

1.1 – Noções Básicas de Conjuntos

Relação de Pertença

Indica se um elemento pertence ou não a um conjunto.

Símbolo:

$\in$: pertence

$\notin$: não pertence

- Exemplo:
  Seja o conjunto A = {1, 3, 5}:

- $1 \in A$
- $2 \notin A$

Igualdade de Conjuntos

Dois conjuntos são iguais se contêm exatamente os mesmos elementos.

- Exemplo:
  A = {1, 2, 3}, B = {3, 2, 1}
  ⇒ (A = B) (a ordem dos elementos não altera o conjunto)

Conjunto Vazio

É o conjunto que não possui nenhum elemento.

- Notação: $\emptyset \ \ ou \ \{\}$
- Exemplo:

$$C = \{x \in \mathbb{N}: x < 0\} = \emptyset$$

Inclusão de Conjuntos

Dizemos que $A \subseteq B$ se todo o elemento de A também pertence a B.

- Inclusão própria: $A \subset B \ (e \ A \neq B)$
- Inclusão imprópria: $A \subseteq B$ (pode ocorrer que A=B)
  Exemplo: $A = \{1, 2\} \ \ e \ B = \{1, 2, 3\} \ então \ A \subset B$

Operações com Conjuntos

União: Todos os elementos que estão em A, em B ou ambos.

- Notação: $A \cup B$
- Exemplo: $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\} \Rightarrow A \cup B = \{1, 2, 3\}$

Interseção: Apenas os elementos comuns aos dois conjuntos

- Notação: $A \cap B$
- Exemplo: $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\} \Rightarrow A \cap B = \{ 2\}$

Diferença

Elementos de A que não estão em B

- Notação: A\B
- Exemplo: $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\} \Rightarrow A \setminus B = \{ 1\}$

Complementar

São os elementos do universo U que não pertencem a um conjunto A.

- Notação: $A^c = U \setminus A$
- Exemplo: $U = \{1, 2, 3, 4\}, A = \{1, 3\} \Rightarrow A^c = \{2, 4\}$

1.2 – Produto Cartesiano e Relações

Produto Cartesiano

O produto cartesiano de dois conjuntos A e B é o conjunto de pares ordenados:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

- Exemplo: $A = \{1, 2\}, B = \{x, y\} \Rightarrow A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y)\}$

Relações

Uma relação entre dois conjuntos A e B é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$.

- Exemplo: $A = \{1, 2\}, B = \{a, b\}$

  Uma relação possível: $R = \{(1, a), (2, b)\}$

Operações com Relações

União de relações: $R_1 \cup R_2 - pares\ que\ pertencdem\ a\ R_1, R_2\ ou\ a\ ambos$

Interseção de relações: $R_1 \cap R_2 - pares\ que\ pertencdem\ a\ ambos$

Diferença: $R_1 \backslash R_2$

Inversa: Troca-se a ordem dos elementos em cada par

Se $(a, b) \in R \ \Rightarrow (b, a) \in R^{-1}$

Composição de relações:

$$Se\ R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C, então: S \circ R = \{(a, c) | \exists b \in B: (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}$$

Exercícios – Teoria dos Conjuntos

1. Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, indique se as afirmações são verdadeiras ou fals.
   (a) $2 \in A$
   (b) $4 \in A$
   (c) $3 \notin A$
2. Verifique se os conjuntos são iguais:
$$A = \{a, b, c\}\ e\ B = \{b, c, a\}$$
3. Dê um exemplo de conjunto vazio e justifique.
4. Verifique se $A \subseteq B, sendo\ A = \{1, 3\}\ e\ B = \{1,2,3,4\}$
5. Dê dois conjuntos A e B tais que $A \cap B = \emptyset$
6. Determine:
   (a) $\{1,2,3\} \cup \{3,4,5\}$
   (b) $\{1,2,3\} \cap \{3,4,5\}$
7. Seja $A = \{x \in \mathbb{N}: x < 5\}$. Defina A em extensão.
8. Seja $U = \{1,2,3,4,5\}, A = \{2,4\}$, determine A^c.
9. Sejam $A = \{1,2,3,4\}\ e\ B = \{2,4,6\}$. Determine:
   (a) A\B
   (b) B\A

10. Indique a veracidade da seguinte afirmação:

$$\emptyset \subseteq A, para\ qualque\ conjunto\ A$$

11. Sejam $A = \{1,2\}, B = \{a, b\}. Calcule\ A \times B$
12. Com base no exercício anterior, dê um exemplo de uma relação R tal que $R \subseteq A \times B$
13. Determine a inversa da relação $R = \{(1, a), (2, b)\}$.
14. Sejam $A = \{0,1\}, B = \{x, y\}. Defina\ todos\ os\ pares\ B \times A$.
15. Dada a relação $R = \{(2,4), (3,9), (4,16)\}, determine\ R^{-1}$.
16. Defina duas relações $R\ e\ S\ tais\ que\ R \cap S = \emptyset$.