Matrizes

Sejam K um corpo comutativo (em particular $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$), m e n dois números naturais. Designa-se por **matriz sobre o corpo** K ou **matriz de entradas em** K a todo o conjunto de elementos do corpo K colocados numa tabela de dupla entrada com m linhas (ou filas horizontais) e n colunas (ou filas verticais), ou seja, uma tabela do tipo:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Numa versão simplificada é usual representar a matriz anterior por $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)$ onde i é o índice de linha $(i = 1, 2, \dots, n)$. A matriz $A_{m\times n}$ designa-se por **matriz do tipo** $m \times n$ ou, para simplificação de escrita, **matriz** $m \times n$.

A matriz $A_{m\times n}$ designa-se por **matriz real** (complexa) quando os seus elementos são números reais (números complexos). Cada entrada a_{ij} da matriz $A_{m\times n}$ é designada por **coeficiente** ou **elemento da matriz**.

O conjunto de todas as matrizes do tipo $m \times n$ representa-se por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathrm{K})$.

Definições

- Uma matriz $m \times n$ que tem todos os seus elementos iguais a zero designa-se por matriz nula e representa-se por $O_{m\times n}$.
- Uma matriz que tem o número de linhas (m) igual ao número de colunas (n) designa-se por matriz quadrada de ordem n ou simplesmente, matriz de ordem n e representa-se por A_n. No caso de $m \neq n$ a matriz designa-se por **matriz retangular** $m \times n$.
- Uma matriz $1 \times n$ $(m \times 1)$ designa-se por **matriz linha** (**matriz coluna**) e quando utilizada para representar um vetor, designa-se por vetor linha (vetor coluna).
- Designam-se por elementos principais (elementos secundários) de uma matriz quadrada $A_n = \left(a_{ij}\right)$ a todos os seus elementos em que $i = j$ $(i + j = n + 1)$, os quais estão dispostos ao longo da **diagonal principal** (**diagonal secundária**).

- Uma matriz quadrada $A_n = (a_{ij})$ designa-se por **matriz triangular superior (inferior)** quando todos os seus elementos abaixo (respetivamente acima) da diagonal principal são nulos, isto é, $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0(i < j \Rightarrow a_{ij} = 0)$.
- Uma matriz quadrada $A_n = (a_{ij})$ designa-se por **matriz diagonal** quando todos os seus elementos que não pertencem à diagonal principal são nulos, isto é, $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$, e representa-se por $A_n = diag(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.
- Uma matriz diagonal designa-se por **matriz escalar** quando todos os seus elementos principais são iguais, isto é, $A_n = diag(\lambda, \lambda, \dots, \lambda)$.
- Uma matriz diagonal de ordem n com todos os elementos principais iguais a 1 designa-se por **matriz identidade de ordem n** e representa-se por $I = diag(1, 1, \dots, 1)$.

Igualdade de matrizes

Diz-se que $A_{m\times n} = (a_{ij})$ e escreve-se $A = B$ quando os elementos homólogos (na mesma posição) das duas matrizes forem iguais, isto é, $\forall i, j, a_{ij} = b_{ij}$.

Operações com matrizes

1. A adição das matrizes $A_{m\times n} = (a_{ij})$ e $B_{m\times n} = (b_{ij})$, que se denota por **A+B** é uma matriz $C_{m\times n} = (c_{ij})$ que se obtém adicionando os elementos de A aos elementos homólogos de B, isto é $C = A + B \Leftrightarrow (c_{ij}) = (a_{ij}) + (b_{ij})$.
2. A subtração das matrizes $A_{m\times n} = (a_{ij})$ e $B_{m\times n} = (b_{ij})$, que se denota por **A-B** é uma matriz $C_{m\times n} = (c_{ij})$ que se obtém subtraindo os elementos de A aos elementos homólogos de B, isto é $C = A - B \Leftrightarrow (c_{ij}) = (a_{ij}) - (b_{ij})$

Propriedades da adição de matrizes

Sejam $A_{m\times n}$, $B_{m\times n}$ e $C_{m\times n}$ quais quer matrizes e $O_{m\times n}$ a matriz nula. Então, a adição de matrizes:

- É comutativa: A+B=B+A
- É associativa: A+(B+C)=A+(B+C)
- Admite a existência de elemento neutro: A+O=O+A=A
- Admite, para cada matriz A, uma matriz $A' = -A$ tal que $A + A' = A' + A = O$.

3. A **multiplicação** de $\lambda \in K$ **pela matriz** $A_{m\times n} = (a_{ij})$, que se denota por λA, é uma matriz $C_{m\times n} = (c_{ij})$ que se obtém multiplicando todos os elementos da matriz A pelo escalar λ, isto é, $C_{m\times n} = \lambda A_{m\times n} \Leftrightarrow (c_{ij}) = (\lambda a_{ij})$

Propriedades da multiplicação de um escalar por uma matriz

Sejam $A_{m\times n}$ e $B_{m\times n}$ duas quaisquer matrizes, λ e μ dois quaisquer elementos do corpo K. Então, a multiplicação de um escalar por uma matriz:

- É distributiva em relação à adição de matrizes: $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- É distributiva em relação à adição de escalares: $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- É associativa em relação à multiplicação de escalares: $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
- Admite a existência de elemento neutro da multiplicação por um escalar: $1. A = A$

4. O produto ou a multiplicação da matriz $A_{m\times n} = (a_{ij})$ pela matriz $B_{n\times p} = (b_{jk})$, que se denota por AB, é uma matriz $C_{m\times p} = (c_{ik})$ que se obtém multiplicando as linhas da matriz A pelas colunas da matriz B, isto é, o elemento c_{ik} do produto é a soma algébrica dos produtos dos elementos da linha *i* pelos correspondentes elementos da coluna *k*, ou seja,

$$C_{m\times p} = A_{m\times n} \times B_{n\times p} \Leftrightarrow (a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk})$$

Nota: A partir da definição do produto de duas matrizes A e B é fácil verificar que este só está definido quando o número de colunas da primeira matriz (A) é igual ao número de linhas da segunda matriz (B), isto é, $A_{m\times n}B_{n\times p} = C_{m\times p}$

Propriedades da multiplicação de matrizes

Sejam A, B e C, quaisquer matrizes de dimensões apropriadas, I e O as matrizes identidade e nula, respetivamente, $\lambda \in K$. Então a multiplicação de matrizes:

- Não é comutativa, em geral: $AB \neq BA$
- É associativa: $A(BC) = (AB)C$
- É distributiva à esquerda, em relação à adição de matrizes: $A(B + C) = AB + AC$
- É distributiva à esquerda em relação à adição de matrizes: $(B + C)A = BA + CA$
- É associativa em relação à multiplicação por um escalar: $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$

- Verifica $A_{m\times n}I_n = A_{m\times n}$ e $I_m A_{m\times n} = A_{m\times n}$
- Verifica $A_{m\times n}O_{n\times p} = O_{m\times p}$ e $O_{p\times m}A_{m\times n} = O_{p\times n}$

Definições:

- Duas matrizes A e B, de ordem n, dizem-se permutáveis, comutáveis ou que comutam entre si quando $AB = BA$.

  Observação: Uma vez que $I_n A_n = A_n = A_n I_n$, então qualquer matriz de ordem *n* é comutável com I_n.
- Seja A uma matriz de ordem n. A matriz A diz-se idempotente quando $A^2 = A$.

Exercícios:

1. Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

(a) Indica o elemento a_{13};
(b) Indica o elemento a_{21};
(c) Indica os elementos da diagonal principal.

2. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $e\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x \end{bmatrix}$ indica o valor de x para que A=B.

3. Considera a matriz real $\begin{bmatrix} a^2 & b & o \\ 0 & c^2 - 1 & 0 \\ d+1 & 0 & e \end{bmatrix}$.

   Determine ao valores de *a, b, c, d* e *e* ∈ ℝ de modo que A seja:

   (a) Uma matriz nula;

   (b) Uma matriz triangular superior;

   (c) Uma matriz diagonal;

   (d) A matriz identidade.

4. Efetue (quando possível):

   a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

5. Calcule:

   (a) $3\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

   (b) $(-1)\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

6. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ calcule AB e BA (se possível) e comente o resultado.

7. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ $e\ B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ calcule, se possível AB.

8. Mostre que $A + O = A\ para\ A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

9. Mostre que $AI = IA\ para\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

10. Verifique se são verdadeiras as igualdades seguintes:

    (a) $A + B = B + A$

    (b) $(A + B) + C = A + (B + C)$ para $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\ e\ C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

11. Verifique que $A(B + C) = AB + AC\ para\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\ e\ C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

12. Verifique se as matrizes são idempotentes:

    (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

    (b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

    (c) $C = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

13. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, encontre\ uma\ matriz\ X\ tal\ que\ 2A - 3X = O$

14. Determine o número real λ tal que $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\ e\ B = \lambda I$ satisfazem a condição $A + B = 5I$

15. Se A é uma matriz quadrada tal que $A^2 = O$(mas $A \neq O$), dê um exemplo possível de Ae verifica a propriedade.

16. Mostre que, para qualquer matriz A e escalar λ:

$$(\lambda A)' = \lambda(A')$$

onde $A' = -A$.

Verifique com $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\lambda = -2$.

17. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ $e\ B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

$Calcule\ AB\ e\ depois\ (2A)B. confirme\ que\ (2A)B = 2(AB).$

18. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
    Calcule A^2, A^3, A^4e deduza uma fórmula geral para A^n.