Licenciatura em EI

Álgebra Linear 1º ano | 1º semestre

Ficha TP n.º4 Operações com matrizes

---

1. Determine, se possível, os parâmetros a,b,c e d tais que:

$$\begin{bmatrix} 5a+7 & d+1 & a+1 \\ 6b & c & b \\ c-2a & 5+c & c-d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 7 & 3 \\ 12 & 13 & 2 \\ 11 & 18 & 7 \end{bmatrix}$$

2. Considere a matriz real $A = \begin{bmatrix} a^2 & b & 0 \\ 0 & c^2-1 & 0 \\ d+1 & 0 & e \end{bmatrix}$.

   Determine os valores de a, b, c, d, e $\in \mathbb{R}$ de modo a que A seja:

   (a) a matriz nula; (b) uma matriz triangular superior;

   (c) uma matriz diagonal; (d) a matriz identidade.

3. Escolha duas matrizes da lista seguinte de tal forma que a sua soma esteja definida e calcule a matriz soma.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

4. Sejam $A \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$ e $C \in \mathcal{M}_{1\times 3}(\mathbb{R})$. Indique quais dos produtos seguintes estão definidos e, para cada um desses casos, diga qual o tipo de matriz obtida.

   (a) ABC; (b) CAB; (c) BAC.

5. Complete o seguinte quadro de forma que os produtos considerados sejam possíveis.

Matriz	A	B	C	D	$ABCD$	$BCDA$	$CDAB$	$DABC$
Nº de linhas					5		4	
Nº de colunas						3		2

6. Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 6 \\ 6 & -2 & 10 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \text{ e } E = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Realize, se possível, as seguintes operações:

(a) DB e BD; (b) $\frac{1}{2}C - 2\,DB$; (c) $BC + CB$;

(d) $A^2 - A$; (e) EC; (f) CE.

7. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule AB e BA.

(b) Que conclusões pode tirar sobre a comutatividade do produto matricial?

8. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Verifique que $AB = AC$ e $BD = CD$.

(b) Será que, para quaisquer matrizes A, B, C onde os produtos sejam possíveis de efetuar, podemos afirmar que é verdade

$$AB = AC \Rightarrow B = C?$$

9. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escolha uma maneira de as ordenar de tal modo que o produto das quatro matrizes esteja definido.

10. Sejam A e B matrizes comutáveis de ordem n. Mostre que:

   (a) $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$;

   (b) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

11. Considere as matrizes A, B e a matriz nula O. Determine o valor lógico das seguintes proposições, justificando convenientemente.

   (a) $AB = O \Leftrightarrow A = O \vee B = O$;

   (b) $A = O \vee B = O \Rightarrow AB = O$.