Aula 13 de outubro

13 de outubro de 2025 14:49

Propriedades

1 - Números inteiros e divisibilidade

Conjunto dos números inteiros: Z={…..-3,-2,-1,0,1,2,3,…..}

Nota: o conjunto dos números positivos (inteiros) é o conjunto N (naturais)
{1,2,3, 4,…..}

2 - Divisibilidade (critérios) em inteiros

Sejam a,b numeros inteiros, pertencentes a Z em que b é diferente de zero

Dizemos que b divide a, ou b é divisor de a, se existir um numero inteiro k tal que a=b.k

Esta divisão designa-se por b|a.

Exemplos:

1) 3 | 12 b=3 e a=12

   3|12 porque 12=3*4

2) 5|25 porque 25=5*5
3) 6|15 ? Não pois não existe nenhum k inteiro tal que 6*k=15

3- Números primos

Definição: números primos são todos os que têm apenas dois divisores: o 1 e ele próprios.
Todos os restantes números, com exceção do 1, são números compostos

2,3,5,7,11,……

4- Algoritmo da divisão
Dados a,b números inteiros com b>0, existem q e r também inteiros tais que:
a=b*q+r com 0<=r<1

Q=quociente
R=resto

Exemplo: 17=5*3+2 q=3 r=2

Ex 3.1 da ficha tp n.º2

Determinar o quociente e o resto da divisão de 87 por 9

87:9=9*9+6 então 87:9=9 com resto 6
Logo q=9 e r=6

3.2 determina q e r tais que: 123=17*q+r com r>0 e r<17

123=17*7+4 logo q=7 e r=4

5 - Congruências

Definição: sejam a e b números inteiros e n Natural. Diz-se que a é congruente com b módulo n e escreve-se: $a \equiv b\ (mod\ n)\ se\ n|(a-b)$

Exemplo: 17≡ 5$(mod$ 12) porque 12|(17-5)

4.1 Verifica se 39≡ 3$(mod$ 12)

1º diferença 39-3=36 e 12|36, logo 39≡ 3$(mod12)$

4.2 Resolve a congruência x≡ 5$(mod8)$ e apresenta 3 soluções inteiras

X=5+8k

Para k=0 vem x=5
$5 \equiv 5(mod8)$

K=-1 vem x=5-8=-3
K=1 vem x=5+8=13

Exemplo: verificar se $25 \equiv 3(mod\ 7)$é $verdadeira$

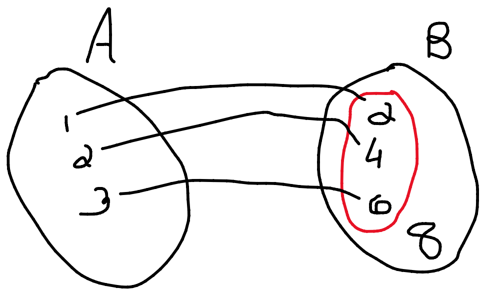
25-3=22 e 7|22 não é verdade, logo a congruência não é verdadeira

E se for $25 \equiv 4(mod\ 7)$? $25 - 4 = 21\ e\ 7|21, logo\ é\ verdadeira$

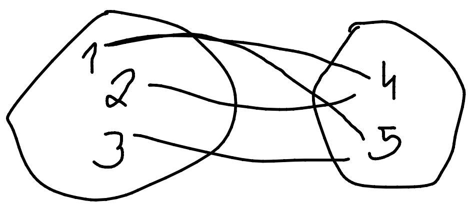
6 - Funções

Definição: uma função é toda a correspondência em que a cada elemento do conjunto de partida (domínio) faz corresponder um e um só elemento do conjunto de chegada.

Nota: Aos elementos do conjunto de chegada que têm correspondência chamamos contradomínio.



Domínio: D={1,2,3}
Contradomínio: D'={2,4,6}
O conjunto de chegada={2,4,6,8}
f(2)=4;   f(3)=6



Não é função porque o objeto 1 tem mais do que uma imagem!!!

Exemplo: Qual é a expressão que adiciona ao número 2 o triplo de um número?

2+3x ou seja f(x)=3x+2

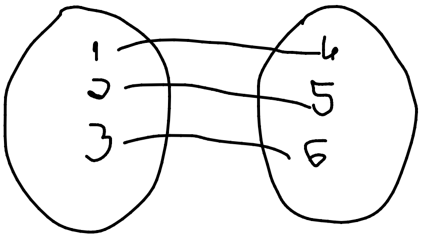
Qual é a expressão que designa: a soma do dobro de um número com 7?
f(x)=2x+7

Dada uma expressão f(x)=-2x-5

f(3)=?   F(3)=-2*3-5=-6-5=-11

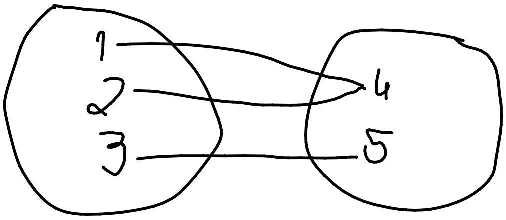
f(x)=10 $-2x - 5 = 10 \Leftrightarrow -2x = 10 + 5 \Leftrightarrow x = \frac{15}{-2} \Leftrightarrow x = -7{,}5$

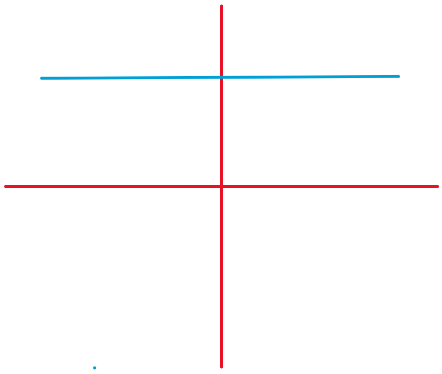
Injetividade



É uma função injetiva, porque cada objeto tem uma imagem diferente

Quando é que uma função não é injetiva?





Função constante não injetiva porque todos os objetos x têm a mesma imagem

$Uma\ função\ f\ é\ injetiva\ \Leftrightarrow \forall\ x1, x2 \in A, f(x1) = f(x2) \Rightarrow x1 = x2$

Ou

$\forall x1 \neq x2 \Rightarrow f(x1) \neq f(x2)$

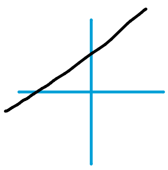
$\forall$ *significa qualquer seja ou para todo o elemento*

Exemplos:

1) Verificar se a função definida por f(x)=3x+2 é injetiva

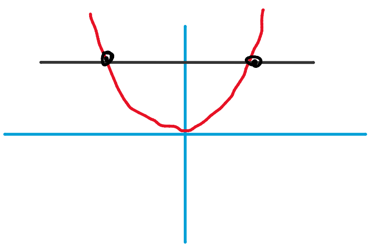
$f(x1) = f(x2) \Leftrightarrow 3x1 + 2 = 3x2 + 2 \Leftrightarrow 3x1 = 3x2 \Leftrightarrow x1 = x2$

Se x1=x2 então é porque são o mesmo objeto, logo f é uma função injetiva



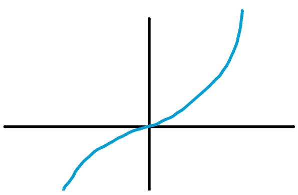
2) $f(x) = 2x^2$
   $f(x1) = f(x2) \Leftrightarrow 2x_1^2 = 2x_2^2 \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2$

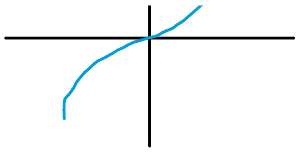
   Não se consegue garantir porque, por exemplo se x=-1 ou x=1, os objetos são diferentes mas a imagem é mesma.



Temos dois objetos diferentes com a mesma imagem, logo a função não é injetiva.

3) $f(x) = x^3$





É injetiva porque todo o objeto tem imagem diferente.

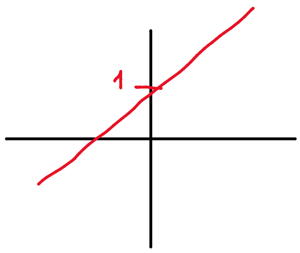
$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ $\quad porque\ por\ exemplo, se\ x = -1\ então\ (-1)^3 = -1$
Aqui garantimos que x1 e x2 são o mesmo objeto, logo é injetiva.

Exercício 5.3 da ficha Tp2

Verificar se f(x)=3x+1 é injetiva.

Para verificar se f é injetiva fazemos:

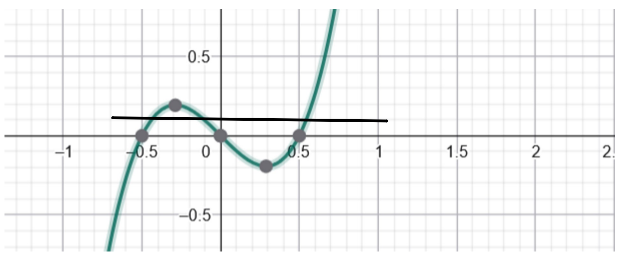
$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 3x_1 + \cancel{1} = 3x_2 + \cancel{1} \Leftrightarrow \cancel{3}x_1 = \cancel{3}x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2\ Logo\ a\ função\ é\ injetiva$



Exemplo 2: Verificar se a função $f(x) = 4x^3 - x = x(4x^2 - 1)$

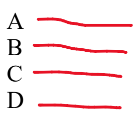
$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 4x_1^3 - x_1 = 4x_2^3 - x_2$

Se x=1 vem 4*1-1=3 e se x=-1 vem 4*(-1)+1=-4+1=-3

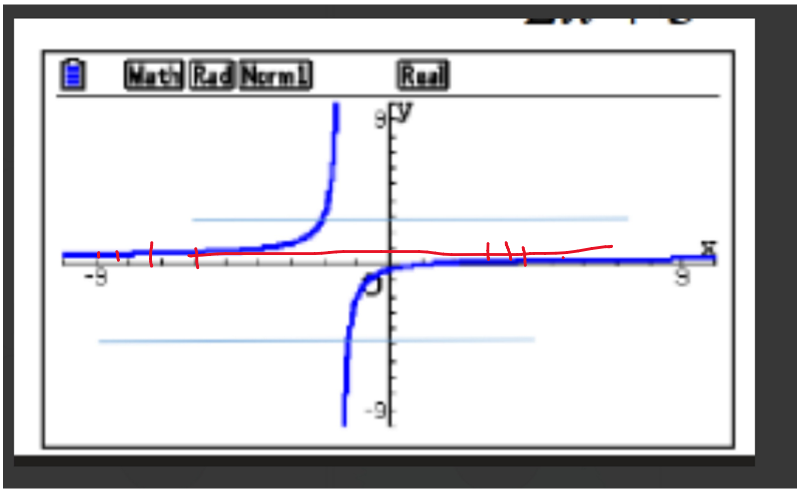


Exemplo 3: Verificar se f(x)=-2x+4 é injetiva

$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow -2x_1 + 4 = -2x_2 + 4 \Leftrightarrow -2x_1 = -2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2\ \ logo\ f\ é\ injetiva$



Não é injetiva



Função sobrejetiva: uma função é sobrejetiva se o seu contradomínio corresponde ao conjunto de chegada

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

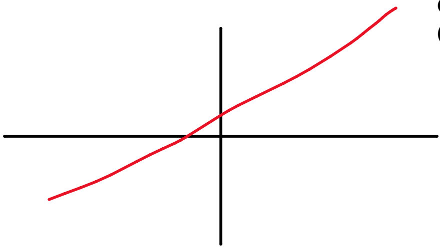
Onjunto de chegada

domínio

Exemplo: Seja f definida em
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com a seguinte expressão $f(x) = 3x + 1$

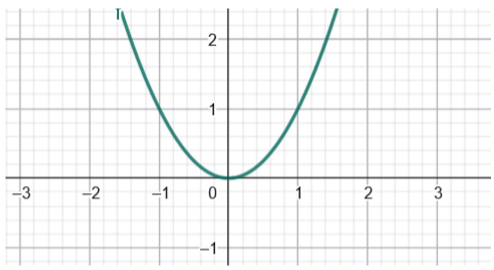
Como temos uma reta, o contradomínio (y) é o conjunto dos números reais

D=$\mathbb{R}$ e D´ = $\mathbb{R}$



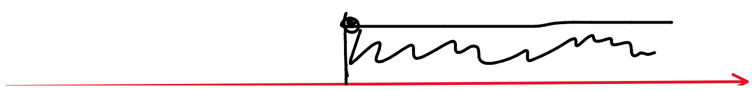
Então como o D´coincide com o connjunto de chegada, f é sobrejetiva

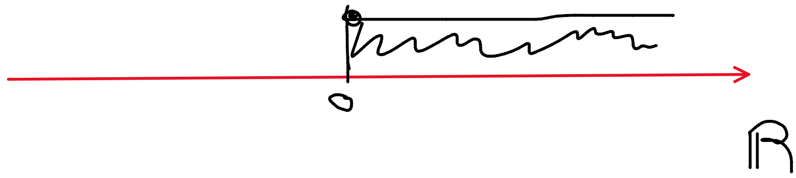
Exemplo:
Exemplo: Seja f definida em
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com a seguinte expressão $f(x) = x^2$



D=$\mathbb{R}$
D´=[0,+∞[

Como o D´não coincide com o conjunto de chegada, f não é sobrejetiva.





Definição: Quando uma função é injetiva e sobrejetiva, então ela é bijetiva.

Exemplo: f(x)=3x+1 já vimos que é injetiva e é sobrejetiva, logo é bijetiva.

Se f é uma função bijetiva então admite ninversa e designa-se por $f^{-1}(x)$

$3^{-1} = \frac{1}{3}\ porque\ \frac{1}{3}\ é\ o\ inverso\ de\ 3$

Exemplo: $f(x) = 3x + 1\ Para\ determinar\ a\ função\ inversa\ de\ f\ fazemos$:

$y = 3x + 1 \Leftrightarrow y - 1 = 3x \Leftrightarrow \frac{y-1}{3} = x \circlearrowleft y = \frac{x-1}{3} \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$

Na determinação da função inversa o domínio de f passa a ser o contradomínio de f^{-1}
E o contradomínio de f passa a ser o domínio de f^{-1}

6. Permutações - n!

N!=n(n-1)(n-2)……x1

$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

Nota: $0! = 1$

Exemplos:
A) Quantas permutações tem o conjunto {1,2,3,4}?
4!=$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

B) Quantas permutações diferentes se podem fazer com as letras da palavra ANA?

Quando existem letras repetidas dividem o fatorial pelo fatorial do numero de letras que se repete

$\frac{3!}{2!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 3$

Exemplo: Quantas permutações de 5 elementos diferentes começam por 1 considerando os algarismos 1,2,3,4,5.