1. Using truth table $(\neg P \wedge (\neg Q \wedge R)) \vee (Q \wedge R) \vee (P \wedge R) \Leftrightarrow R$

Soln:

$$(\neg P \wedge (\neg Q \wedge R)) \vee (Q \wedge R) \vee (P \wedge R) \Leftrightarrow R$$

P	Q	R	¬P	(¬Q∧R)	(Q∧R)	(P∧R)	¬P∧(¬Q∧R)	(¬P∧(¬Q∧R))∨(Q∧R)∨(P∧R)	R
T	T	T	F	F	T	T	F	T	T
T	T	F	F	F	F	F	F	F	F
T	F	T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	T	F	F	T	T
F	T	F	T	F	F	F	F	F	F
F	F	T	T	T	F	F	T	T	T
F	F	F	T	F	F	F	F	F	F

⇓ ① ⇓ ②

observing ① & ②

① = ②

$\therefore (\neg P \wedge (\neg Q \wedge R)) \vee (Q \wedge R) \vee (P \wedge R) \Leftrightarrow R$

2. Without using truth table prove that $(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg R) \wedge (P \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q)$

Soln:

L.H.S :

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \vee (P \vee \neg R) \wedge (P \vee R)$

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \vee (P \wedge P) \vee (P \wedge R) \vee (\neg R \wedge P) \vee (\neg R \wedge R)$

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \vee P \vee (P \wedge R) \vee F \vee (\neg R \wedge P)$

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \vee P \vee (P \wedge R) \vee (\neg R \wedge P)$

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \vee (P \vee Q)$

$\Leftrightarrow (P \vee Q)$

$\Leftrightarrow$ R.H.S

— Hence proved. —

3) Show that $\neg(P \wedge Q) \rightarrow (\neg P \vee (\neg P \vee Q)) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$

Soln:

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$\neg P \vee Q$	$(\neg P \vee (\neg P \vee Q))$	$\neg(P \wedge Q) \rightarrow (\neg P \vee (\neg P \vee Q))$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T

$\Downarrow$ ① (column $\neg P \vee Q$) $\Downarrow$ ② (last column)

From ① & ②

① = ②

$\therefore \neg(P \wedge Q) \rightarrow (\neg P \vee (\neg P \vee Q)) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$

4. Using truth table obtain PDNF and PCNF for statement formula $(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)\vee(Q\wedge R)$.

Soln:

P	Q	R	$\neg P$	$P\wedge Q$ ①	$\neg P\wedge R$ ②	$Q\wedge R$ ③	①∨②∨③
T	T	T	F	T	F	T	T
T	T	F	F	T	F	F	T
T	F	T	F	F	F	F	F
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	T	T	T
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	T	F	T
F	F	F	T	F	F	F	F

Then PDNF is $(P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)$; PCNF is $(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee\neg R)$.

5. Without using truth table obtain PDNF and PCNF for statement formula $(\neg P\to R)\wedge(Q\rightleftarrows P)$.

Soln:

PDNF:

Let ; $S \Leftrightarrow (\neg P\to R)\wedge(Q\rightleftarrows P)$

$\Leftrightarrow (P\vee R)\wedge((Q\wedge P)\vee(\neg Q\wedge\neg P))$

$$\Leftrightarrow ((P \vee R) \wedge (Q \wedge P)) \vee ((P \vee R) \wedge (\neg Q \wedge \neg P))$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg P) \vee (R \wedge \neg Q \wedge \neg P)$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge (R \vee \neg R)) \vee F \vee (R \wedge \neg Q \wedge \neg P)$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (R \wedge \neg Q \wedge \neg P)$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (R \wedge \neg Q \wedge \neg P)$$

which is required PDNF of S.

Derivate:

PCNF from PDNF collect the missing minterm from the PDNF of S to get PDNF of ¬S.

PDNF of $\neg S \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$
$\vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$

$$S \Leftrightarrow \neg \neg S \Leftrightarrow \neg \left[(P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\neg (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee \neg (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee \neg (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee \neg (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee \neg (\neg P \wedge Q \wedge R) \right]$$

$$\cancel{\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)}$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \Leftrightarrow \text{PCNF of } S.$$

6. Write following statement in symbolic form.

a) All man are giant.

b) Somebody get first prize.

Soln :

a) $M(x)$: x is a man

$G(x)$: x is giant

$(\forall(x))(M(x) \rightarrow G(x))$

b) $A(x)$: x is someone

$F(x)$: x get first prize.

$(\exists(x))(A(x) \wedge F(x))$

7. Obtain simplified Boolean expression is equivalent to $m_0 + m_1 + m_2 + \ldots$ Assume that the statement formula contain three variable P, Q, R.

Soln :

no. of variable = 3

no. of statement formula $= 2^3 = 8$

$m_0 = \neg P . \neg Q . \neg R$ | $m_4 = P . \neg Q . \neg R$

$m_1 = \neg P . \neg Q . R$ | $m_5 = P . \neg Q . R$

$m_2 = \neg P . Q . \neg R$ | $m_6 = P . Q . \neg R$

$m_3 = \neg P . Q . R$ | $m_7 = P . Q . R$

$\Leftrightarrow m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7$

$\Leftrightarrow (\neg P.\neg Q.\neg R) + (\neg P.\neg Q.R) + (\neg P.Q.\neg R) + (\neg P.Q.R) +$
$(P.\neg Q.\neg R) + (P.\neg Q.R) + (P.Q.\neg R) + (P.Q.R)$

$\Leftrightarrow \neg P.\neg Q(R+\neg R) + \neg P.Q.(R+\neg R) + P.\neg Q(R+\neg R)$
$+ P.Q(R+\neg R)$

$\Leftrightarrow \neg P.\neg Q + \neg P.Q + P.\neg Q + P.Q$

$\Leftrightarrow \neg P(Q+\neg Q) + P(Q+\neg Q)$

$\Leftrightarrow \neg P + P$

$\Leftrightarrow 1$ //

8. Simplify the Boolean expression.

a) $(y \vee x) \wedge (y \vee z) \wedge (y \vee z')$

b) $(y \vee x) \wedge ((x \wedge y') \vee y)'$

Soln:

a) $\Leftrightarrow (y \vee x) \wedge (y \vee z) \wedge (y \vee z')$

$\Leftrightarrow (x \vee y \vee (z \wedge z')) \wedge (x \wedge x') \vee y \vee z) \wedge ((x \wedge x') \vee y \vee z')$

$\Leftrightarrow (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee z') \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (x' \vee y \vee z) \wedge$
$(x \vee y \vee z') \wedge (x' \vee y \vee z')$

$\Leftrightarrow (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee z') \wedge (x' \vee y \vee z) \wedge (x' \vee y \vee z')$

$\Leftrightarrow (x \vee y (z \wedge z')) \wedge (x' \vee y (z \wedge z')$

$\Leftrightarrow (x \vee y) \wedge (x' \vee y)$

$\Leftrightarrow (x \wedge x') \vee y$

$\Leftrightarrow y.$

b) $(y \vee x) \wedge ((x \wedge y') \vee y)'$

$\Leftrightarrow (x \vee y) \wedge ((x \vee y) \wedge (y \wedge y'))'$

$\Leftrightarrow (x \vee y) \wedge ((x \vee y) \wedge 1)'$

$\Leftrightarrow (x \vee y) \wedge (x \vee y)'$

$\Leftrightarrow (x \vee y) \wedge (x' \vee y')$

$\Leftrightarrow (x \wedge x') \vee (y \wedge y')$

$\Leftrightarrow 1$ //

9. In Boolean Algebra prove:- $ab' + bc' + ca' = a'b + b'c + c'a$.

Soln:

L.H.S:

$\Leftrightarrow ab' + bc' + ca'$

$\Leftrightarrow ab'(c+c') + (a+a')bc' + ca'(b+b')$

$\Leftrightarrow ab'c + ab'c' + abc' + a'bc' + a'bc$
$+ a'b'c$

$\Leftrightarrow a'b(c+c') + b'c(a+a') + c'a(b+b')$

$\Leftrightarrow a'b + b'c + c'a$

$\Leftrightarrow$ R.H.S,

10. Using K-map simplify the Boolean expression:
$wxy'z' + wx'yz + wx'y'z' + w'xy'z' + w'xyz + w'y'x'z'$.

Soln :-

$\overset{8}{w}\overset{4}{x}\overset{2}{y'}\overset{1}{z'} = 12$ $\qquad w'xyz = 7$

$wx'yz = 11$ $\qquad w'xy'z' = 4$

$wx'y'z' = 8$ $\qquad w'y'x'z' = 0$

wx \ yz	00	01	11	10
00	1 (0)	(1)	(3)	(2)
01	1 (4)	(5)	1 (7)	(6)
11	1 (12)	(13)	(15)	(14)
10	1 (8)	(9)	1 (11)	(10)

$F \Leftrightarrow w'xyz + wx'yz + y'z'$

$$\boxed{\begin{array}{c} F \Leftrightarrow (w'x + wx')yz + y'z', \\ \text{(or)} \\ F \Leftrightarrow w'xyz + wx'yz + y'z', \end{array}}$$