Problem Set

Celebration

For 7th Dreamincode Programming Contest

By Nithouson

2017.10

注意事项：

1.本组题目由单人完成，**限时 120min**，满分 250 分。

2.**所有题目均为程序设计题，需提交完整的程序代码**（.c/.cpp/.py），**时间截止后**由 judge 运行用例进行评判，也就是说**答题期间不能得到实时评测结果**，所以请对程序进行充分的测试，考虑各种可能的例外情况，建议必要时自己编拟例子进行测试。每个用例正确可得该用例的分数。题中所给限时为 C/C++的要求，Python 语言的限时原则上为此值的 5 倍。超时不得分（时间以程序计时模块测试结果为准，从读入第一行数据起到输出结束止）。

3.关于各大题的提示：祝顺利完成前四题，若不明白第五题要干什么，请在心里打我。（但我在努力讲 orz）

4.如发现题目或样例中的错误，请及时指出。从本组比赛结束时起到所有选手完成比赛时止，请对题目及答案保密。谢谢配合。

1.整数集上的行列式（本题满分 50 分）

请运用线性代数的知识，编写一个求解整数行列式值的程序。

输入：第一行为一个整数 n，之后 n 行每行 n 个整数，为待求的行列式。

输出：一个整数，行列式的值。

数据规模：对于 60%的用例，$1 \le n \le 10$；对于全部的用例，$1 \le n \le 25$；行列式中的每个整数绝对值不超过 10，所求结果不超过 int 范围。

限时：单个用例 5000ms

输入样例 1：

4

1 2 3 4
2 3 4 1
3 4 1 2
4 1 2 3

输出样例 1：

160

输入样例 2：

9

1 2 2 2 2 2 2 2 2
2 2 2 2 2 2 2 2 2
2 2 3 2 2 2 2 2 2
2 2 2 4 2 2 2 2 2
2 2 2 2 5 2 2 2 2

2 2 2 2 2 6 2 2 2
2 2 2 2 2 2 7 2 2
2 2 2 2 2 2 2 8 2
2 2 2 2 2 2 2 2 9

输出样例 2：

-10080

2.掷骰子游戏（本题满分 50 分）

通常的骰子为正六面体，但我们也可以用其它四种正多面体（正四面体，正八面体，正十二面体，正二十面体）以及它们的组合来玩掷骰子游戏。思考一下，如果 A 同时掷 6 个 4 面骰，B 同时掷 4 个 6 面骰，总点数之和大的一方获胜，谁的胜率大？下面的程序就来解决这类问题。

输入：两行，第一行为五个整数，分别代表 A 掷的 4,6,8,12,20 面骰的个数；第二行也为五个整数，分别代表 B 掷的 4,6,8,12,20 面骰的个数。

输出：A 获胜（A 的点数之和**严格大于** B）的概率，用小数表示，精确到小数点后 4 位。

数据规模：记 A，B 骰子个数中较大的一个为 n，对于 60%的用例，$1 \leq n \leq 6$；对于全部的用例，$1 \leq n \leq 10$.

限时：单个用例 5000ms

输入样例：

6 0 0 0 0

0 4 0 0 0

输出样例：

0.5447

3.非梅森素数（本题满分 50 分）

设 p 为素数，形如2^p-1的素数称为梅森素数。（事实上若2^n-1 为素数，则用因式分解方法可以证明 n 一定为素数。)在 http://primes.utm.edu/largest.html 展示的已知最大素数排行榜上，前六个都是梅森素数，最大的一个是$2^{74207281}-1$，它有 22338618 位。已知最大的非梅森素数是$10223\times 2^{31172165}+1$.

而对于每个奇数，我们总可以把它写成$a\times 2^m+1$的形式，其中$a\geq 1$，a 为奇数，$m\geq 1$. 本题中我们考察以上形式的素数中满足 a，m 均为素数的数。

输入：一个正整数 n

输出：不超过 n 且具有$p\times 2^q+1$形式的素数个数，其中 p，q 均为素数，$p\neq 2$。

数据规模：对于 60%的用例，$1\leq n\leq 250000$；对于全部的用例，$1\leq n\leq 10^7$.

限时：单个用例 5000ms

输入样例：

100

输出样例：

6

4.图的 Hamilton 圈（本题满分 50 分）

试在一个没有指向自身的边和多重边的有向图中，判断是否有 Hamilton 圈（即包含所有顶点的回路）。

输入：第一行为一个正整数 n，代表图的阶数；之后 n 行为图的 0-1 邻接矩阵.

输出：“Yes”或“No”，代表是否有 Hamilton 圈。

数据规模：对于 60%的用例，$n \leq 6$；对于所有用例，$n \leq 20$.

限时：单个用例 5000ms

输入样例 1：

```
4
0 0 0 0
0 0 1 0
0 0 0 1
0 1 0 0
```

输出样例 1：

```
No
```

输入样例 2：

```
4
0 1 1 1
1 0 1 1
1 1 0 1
1 1 1 0
```

输出样例 2：

```
Yes
```

5.有限群的阶和（本题满分 50 分）

如果在一个集合 G 上定义了某种运算（下面写成乘法形式），即∀a，b ∈ G，有ab ∈ G，且有：

（1）该运算满足结合律，即∀a, b, c ∈ G，有(ab)c=a(bc)

（2）存在单位元 e∈ G，∀a ∈ G，有 ea=ae=a

（3）∀a ∈ G，存在a^{-1} ∈ G，有 a$a^{-1} = a^{-1}a = e$

则称 G 对该运算成一个群。（注意**不一定满足交换律**）

例如，整数对加法成一个群，单位元为 0，逆元为相反数。{1，-1，i，-i}对复数的乘法成一个群，单位元为 1，-1 的逆元为它本身，i 与-i 互逆。

在有限群中（即 G 为有限集），任取元素 a，a、a^2、a^3⋯中必有相同的两项，如a^j=a^i（i< j），则a^{j-i}=e. 这样总存在m 最小的正整数 r，使a^r=e，r 称为 a 的**阶**。例如{1，-1，i，-i}中，1 的阶是 1，-1 的阶是 2，i 和-i 的阶都是 4. 所有元素的阶之和称为群的**阶和**，这个群的阶和是 11。

下面我们抽象地定义含 2n 个元素的群$\{a^ib^j|0 \le i < 2，0 \le j < n$，i，j ∈ N}（∀l ∈ G，$l^0 = e$），满足

（1）a 的阶为 2，b 的阶为 n；

（2）ab=b^ka.（当 k=1，即为交换律成立）

求这个群的阶和。

输入：一行，两个正整数 n,k.

输出：一个正整数，群的阶和。

数据规模：对于 60%的用例，$1 \le \mathrm{n} \le 15$；对于全部的用例，$1 \le \mathrm{n} \le 20000$.

限时：单个用例 5000ms

输入样例 1：

2 1

输出样例 1：

7

输入样例 2：

8 5

输出样例 2：

87

说明：对样例 1，有 e，a，b，ab 四个元素，除 e 的阶为 1 外阶均为 2，其中$(ab)^2 = abab = aabb = ee = e$

对样例 2，演示求$\mathrm{a}b^3$的阶：$(\mathrm{a}b^3)^{2k} = abbb(\mathrm{a}b^3)^{2k-1}$

$$= b^5 a\mathrm{bb}(\mathrm{a}b^3)^{2k-1} = b^{10} a\mathrm{b}(\mathrm{a}b^3)^{2k-1}$$

$$= b^{15} a(\mathrm{a}b^3)^{2k-1} = b^{18}(\mathrm{a}b^3)^{2k-2} = \cdots = b^{18k}$$

$$(\mathrm{a}b^3)^{2k+1} = b^{18k}\mathrm{a}b^3 = b^{18k+15}\mathrm{a}$$

后一种情形显然不等于 e。前一种须 18k|8，k 最小为 4，故阶 2k=8.