

# Problem Set

# Eldrazi

For 10<sup>th</sup> Dreamincode Programming Contest

By Nithouson

2019.1

**注意事项:**

- 1.本组题目由单人完成，**限时 150min**，满分 150 分。
- 2.所有题目均为问答题，只需提交所求的结果，时间截止后由 judge 进行评判。
- 3.本组题目不一定按从易到难编排，建议先选做自己有把握较快完成的题目。
- 4.如发现题目中的错误，请及时指出。从本组比赛结束时起到所有选手完成比赛时止，请对题目及答案保密。谢谢配合。

## 1.可贪心币制（本题满分 30 分）

一种币制可以用币值面额的递增数组来表示，如现行人民币币制为 $\{1,5,10,20,50,100\}$ 。给定一种币制，一个基本的问题是，如何用最少的纸币张数表示特定钱数。比如 60 元人民币可以是 3 张 20 元，但 1 张 50 元、1 张 10 元具有最少的纸币张数。

给定币制和钱数  $n$ ，求最少纸币张数的一种方法是贪心法，即总是尽可能取最大面额的纸币。但这一方法不总是正确的。例如在币制  $\{1,7,11,15\}$  下，表示 14 元时，贪心法的结果是  $11+1+1+1$  为 4 张纸币，但  $7+7$  只需要 2 张纸币。

(a) 给定币制  $\{1,7,11,15\}$ ，对 1-1000 元这 1000 个钱数求最少纸币张数。问如果采用贪心法求解，这 1000 个结果中有多少个结果是错的？

(18 分)

(b) 为使 1-1000 元的最少纸币张数均可用贪心法正确求解，至少需要增发多少种新面额的纸币？(6 分) 并请给出一种增发方案。(6 分)

注：赛后，如果你有兴趣进一步探索币制可贪心（对任意钱数，贪心法的结果总正确）的充分条件和必要条件，欢迎与我讨论！

## 2. 一个最值（本题满分 30 分）

定义正整数的子集  $A$ ,  $B$ :

$A=\{2,3,4,5,7,8,9,11,\dots\}$  为前 100 个只含有一个素因子的正整数的集合;

$B=\{6,10,12,14,15,18,20,\dots\}$  为前 100 个恰含有两个不同素因子的正整数的集合。

(a) 分别求  $A$ 、 $B$  的元素之和。(12 分)

(b) 对  $1 \leq k \leq 100$ , 取  $A$  的  $k$  元子集  $S_k=\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_k\}$  和  $B$  的  $k$  元子集  $T_k=\{b_1, b_2, b_3, \dots, b_k\}$ 。对一切  $1 \leq k \leq 100$  及  $S_k$ 、 $T_k$  的所有取法和元素排列顺序, 求

$$\sum_{i=1}^k (a_i - b_i)$$

的最大值。(18 分)

### 3.最近距离序列（本题满分 20 分）

在平面直角坐标系中，除原点外的格点（即横纵坐标均为整数的点）到原点的欧氏距离可以从小到大排成一系列：

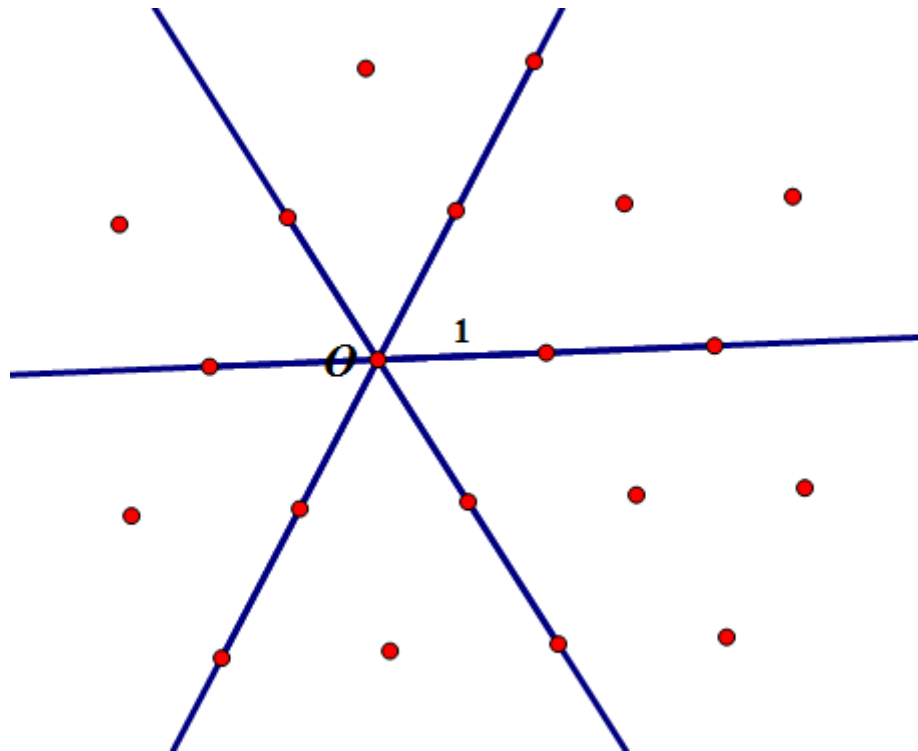
$$1, \sqrt{2}, 2, \sqrt{5}, 2\sqrt{2}, 3, \sqrt{10}, \sqrt{13}, 4, \sqrt{17}...$$

(a) 序列中的第 2019 项是什么？（10 分）

现考虑六边形格点网（与每个点距离最近的有六个点），如下图。

格点到原点的欧氏距离仍然可以从小到大排成一系列：

$$1, \sqrt{3}, 2, \sqrt{7}, 3, 2\sqrt{3}, \sqrt{13}, 4 ...$$



(b) 序列中的第 2019 项是什么？（10 分）

#### 4.0-1 矩阵的极值（本题满分 24 分）

对于  $n$  阶 0-1 矩阵（元素均为 0 或 1），若对任意的  $a, b, c$ ，当矩阵的  $(a, b)$  元为 1， $(b, c)$  元也为 1 时， $(a, c)$  元必为 0，则称其为 F 矩阵。

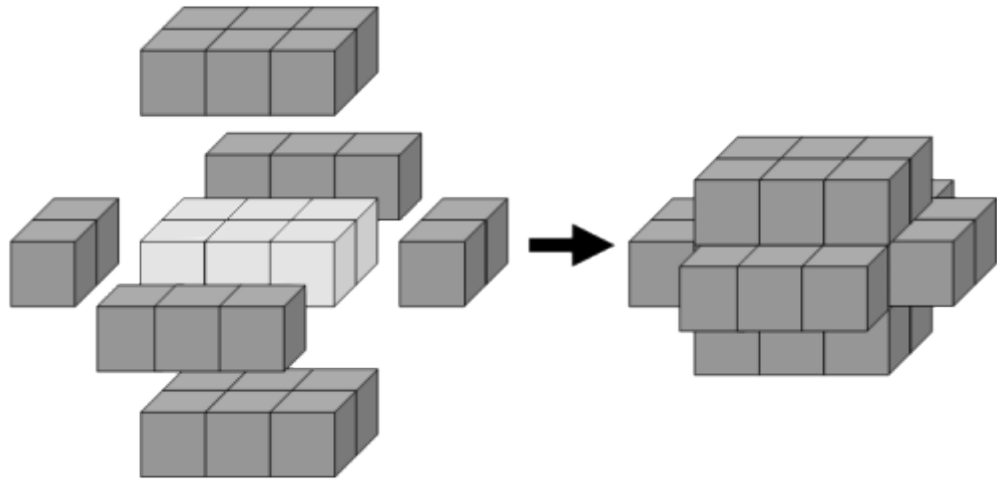
问：5 阶 F 矩阵中至多有多少个 1？（12 分）写出一个 1 最多的 F 矩阵。（6 分）1 最多的 F 矩阵共有多少个？（6 分）

#### 5. 三维灯阵（本题满分 16 分）

三维直角坐标系中有一个  $2 \times 2 \times 2$  的立方体灯阵，8 盏灯的坐标集合为  $\{(a, b, c) | 0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1, 0 \leq c \leq 1\}$ 。为使从  $x$ 、 $y$ 、 $z$  三轴方向看去均能看到 4 盏点亮的灯，点亮 4 盏灯即可（点亮灯的坐标集合为  $\{(0, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ ）

现扩充为  $3 \times 3 \times 3$  的立方体灯阵，27 盏灯的坐标集合为  $\{(a, b, c) | 0 \leq a \leq 2, 0 \leq b \leq 2, 0 \leq c \leq 2\}$ 。为使从  $x$ 、 $y$ 、 $z$  三轴方向看去均能看到 9 盏点亮的灯，至少要点亮多少盏灯？（12 分）并给出一种灯数最少的点亮方法。（4 分）（注：未点亮的灯不能遮挡点亮的灯，但点亮的灯会遮挡未点亮的灯）

## 6. 无尽巨物（本题满分 30 分）



一个  $3 \times 2 \times 1$  的矩体，每 1 秒扩张一次。每次扩张时，用最少数量的立方体覆盖上一时刻空间几何体的所有外表面。例如， $T=0$  时几何体体积  $V(0)=6$ ， $T=1$  时扩张过程如上图，加入 22 个立方体用于扩张这一几何体， $V(1)=28$ 。依次迭代下去，体积序列为 6, 28, 74, 152...

(a) 求  $V(25)$  的值。（16 分）

(b) 当  $T=25$  时，有多少个小立方体只有 1 面露在外面？有多少个立方体恰有 3 面露在外面？（14 分）

2019 年 2 月 2 日