

# R.Brualdi 《组合数学》(第五版)

## 习题选解

Alfred Sines\*

2021 年 1 月 9 日

### 目录

1 什么是组合数学	1
2 排列与组合	2
3 鸽巢原理	3
4 生成排列和组合	4
5 二项式系数	5
6 容斥原理及应用	10
7 递推关系和生成函数	12
8 特殊计数序列	12
9 相异代表系	12
10 组合设计	12

---

\*Department of Combinatorics, Cloud Society

11 图论导引	12
12 再论图论	12
13 有向图与网络	12
14 <i>Pólya</i> 计数	12

# 1 什么是组合数学

11. 用Loubère法构造7阶幻方.

解:

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

12. 用Loubère法构造9阶幻方.

解:

47	58	69	80	1	12	23	34	45
57	68	79	9	11	22	33	44	46
67	78	8	10	21	32	43	54	56
77	7	18	20	31	42	53	55	66
6	17	19	30	41	52	63	65	76
16	27	29	40	51	62	64	75	5
26	28	39	50	61	72	74	4	15
36	38	49	60	71	73	3	14	25
37	48	59	70	81	2	13	24	35

18. 证明不存在2阶幻方体.

证明: 假设存在2阶幻方体, 其幻和为9, 1相邻的三个位置均应为8, 矛盾.

19. 证明不存在4阶幻方体.

证明: 假设存在4阶幻方体, 其幻和为130. 考虑任一 $4 \times 4$ 的平面截面(含过面对角线的截面), 其两条对角线之和及第二行、第三行之和为520, 减去第一、第四两列之和260, 得中间四个数之和的两倍为260, 中间四个数之和为130. 考虑中心 $2 \times 2 \times 2$ 的子立方体, 其每个 $2 \times 2$ 平面截面(含过面对角线的截面)和为130, 从而其中每相邻两个数和都相等, 为65; 任一个数相邻的三个数相等, 矛盾.

24. 求构造 $n$ 阶拉丁方的一般方法.

解:

1	2	3	$\cdots$	$n-1$	$n$
$n$	1	2	$\cdots$	$n-2$	$n-1$
$n-1$	$n$	1	$\cdots$	$n-3$	$n-2$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
3	4	5	$\cdots$	1	2
2	3	4	$\cdots$	$n$	1

37.  $n$  阶拉丁方是幂等的, 如果对角线位置 $(1, 1)(2, 2) \cdots (n, n)$  依次为 $1, 2, 3, \cdots, n$ ; 它是对称的, 如果位置 $(i, j)(j, i)$ 的整数总相等( $1 \leq i, j \leq n, i \neq j$ ). (1)构造一个3阶对称幂等拉丁方. (2) 证明偶数阶对称幂等拉丁方不存在.

解:(1)

1	3	2
3	2	1
2	1	3

(2) 考虑1出现的次数, 其在对角线上出现1次, 对角线之外出现偶数次, 总共出现奇数次, 矛盾.

## 2 排列与组合

40. 设 $S = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ , 现取出其一个 $k$ 元子集 $A$ , 要求 $A$ 中任两个元素之差至少为 $l + 1$ , 这样的子集有多少个?

解: 记 $A$ 中元素从小到大依次为 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ , 令 $b_1 = a_1, b_2 = a_2 - a_1, b_3 = a_3 - a_2, \cdots, b_k = a_k - a_{k-1}, b_{k+1} = n - a_k$ , 则 $b_1 + b_2 + \cdots + b_k + b_{k+1} = n$ , 其中 $b_1 \geq 1, b_i \geq l + 1 (2 \leq i \leq k), b_{k+1} \geq 0$ . 用变量替换法可知, 解的数目为 $\binom{n-lk+l}{k}$ .

49. 证明最多 $m$ 个 $A$ 和最多 $n$ 个 $B$ 的排列数为 $\binom{m+n+2}{m+1} - 1$ .

证明:  $k$ 个 $A$ 和 $l$ 个 $B$ 的排列数为 $\binom{k+l}{k}$ , 对 $l$ 从0到 $n$ 求和, 得 $k$ 个 $A$ 和最多 $n$ 个 $B$ 的排列数为 $\binom{k+n+1}{n}$ . 对 $k$ 从0到 $m$ 求和, 得 $\binom{m+n+2}{n+1} - 1$  (包含了空排列).

### 3 鸽巢原理

9. 集合 $S$ 中有10个正整数, 它们均不超过60. 证明存在 $S$ 的两个不交非空子集, 它们的元素之和相同.

证明:  $S$ 有 $1023$ 个非空子集, 它们的元素和在1到600之间, 由鸽巢原理, 必有两个子集 $A, B$ 的元素和相同. 则 $A \setminus B, B \setminus A$ 即为所求.

推广: 设集合 $S$ 中有 $k$ 个正整数, 它们均不超过 $n$ ; 且不存在 $S$ 的两个不交非空子集, 它们的元素之和相同. 求 $k = f(n)$ 之最大值.

评注:  $6 \leq f(60) \leq 8$ . 事实上,  $S = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$ 符合要求. 若 $|S| \geq 10$ , 由本题证法得不符合要求. 若 $|S| = 9$ , 考虑其所有不超过四元的非空子集, 共255个, 而其元素和均不超过240.

13. 对 $K_6$ 的边做红蓝二着色, 证明: 必存在至少两个同色 $K_3$ .

证明: 设 $K_6$ 的6个顶点为 $a, b, c, d, e, f$ .

(1) 若 $a$ 引出的5条边有4条同色, 不妨 $ab, ac, ad, ae$ 全为红色, 则 $b, c, d, e$ 之间的边若有两条为红色, 即得两个红色 $K_3$ ; 若全为蓝色,  $bcd$ 为蓝色 $K_3$ , 包含两个蓝色 $K_3$ ; 若恰有一边红色, 不妨为 $bc$ , 则 $abc$ 为红色 $K_3$ ,  $cde$ 为蓝色 $K_3$ .

(2) 若 $a$ 引出的5条边至多有3条同色, 不妨 $ab, ac, ad$ 为红色,  $ae, af$ 为蓝色. 此时 $abcd$ 中至少有一个同色 $K_3$ , 若 $ef$ 为蓝色, 则已得两个同色 $K_3$ . 下设 $ef$ 为红色.

(2a) 若 $bcd$ 中至少两条红边, 已得两个红色 $K_3$ ;

(2b) 若 $bcd$ 中恰有一条红边, 设 $bc$ 为红色,  $bd, cd$ 为蓝色, 则已有 $abc$ 为红色 $K_3$ . 若 $de$ 为蓝色, 则可设 $df$ 为蓝色(否则 $def$ 为红色 $K_3$ ), 又可设 $bf$ 为红色(否则 $bdf$ 为蓝色 $K_3$ ), 则不论 $cf$ 为什么颜色, 都得到另一个同色 $K_3$  (红色 $bcf$ 或蓝色 $cdf$ ). 若 $de$ 为红色, 则可设 $be$ 为红色(否则 $bde$ 为蓝色 $K_3$ ), 则不论 $ce$ 为什么颜色, 都得到另一个同色 $K_3$  (红色 $bce$ 或蓝色 $cde$ ).

(2c) 若 $bcd$ 中没有红边, 即 $bc, bd, cd$ 全为蓝色, 则已有 $bcd$ 为蓝色 $K_3$ . 若 $de$ 为红色, 则可设 $df$ 为蓝色(否则 $def$ 为红色 $K_3$ ), 又可设 $bf$ 为红色(否则 $bdf$ 为蓝色 $K_3$ ), 又可设 $be$ 为蓝色(否则 $bef$ 为红色 $K_3$ ), 又可设 $ce$ 为红色(否则 $bce$ 为蓝色 $K_3$ ), 则不

论 $cf$ 为什么颜色, 都得到另一个同色 $K_3$  (红色 $cef$ 或蓝色 $cdf$ ). 若 $de$ 为蓝色, 则可设 $be$ 为红色(否则 $bde$ 为蓝色 $K_3$ ), 又可设 $bf$ 为蓝色(否则 $bef$ 为红色 $K_3$ ), 又可设 $cf$ 为红色(否则 $bcf$ 为蓝色 $K_3$ ), 则不论 $ce$ 为什么颜色, 都得到另一个同色 $K_3$  (红色 $cef$ 或蓝色 $cde$ ).

**20.** 证明:  $r(3, 3, 3) \leq 17$ .

证明: 考虑 $K_{17}$ 边的红黄蓝三染色, 任取一个顶点 $a$ , 考虑其引出的16条边, 其中必有6条边同色, 不妨设有6条红边. 考虑这些边连接的6个顶点, 若其中有红边, 则其两端点和 $a$ 构成红色 $K_3$ ; 若不然, 它们构成的 $K_6$ 中只有黄边和蓝边, 其中必有黄色或蓝色 $K_3$  ( $r(3, 3) = 6$ ).

**23.** 证明:  $r(3, 4) \leq 10$ .

证明: 考虑 $K_{10}$ 边的红蓝二染色, 往证或者有红色 $K_3$ , 或者有蓝色 $K_4$ . 假设不存在红色 $K_3$ , 任取一个顶点 $a$ , 考虑其引出的9条边. 若有4条红边, 则这些边连接的4个顶点构成蓝色 $K_4$ . 若不然, 至少有6条蓝边, 其连接的6个顶点中必有蓝色 $K_3$  ( $r(3, 3) = 6$ , 又由假设没有红色 $K_3$ ), 加上 $a$  即得蓝色 $K_4$ .

## 4 生成排列和组合

**5.** 设 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是 $\{1, 2, \cdots, n\}$  的排列, 且它的逆序数为 $k$ . 证明不能通过少于 $k$ 次连续交换相邻两项将其变为 $12 \cdots n$ .

证明: 将一个 $\{1, 2, \cdots, n\}$  的排列的相邻两项 $ij$  变为 $ji$ 时, 若 $i < j$ , 逆序列中只有 $i$ 对应的项 $b_i$ 增加1; 若 $i > j$ , 逆序列中只有 $j$ 对应的项 $b_j$ 减少1. 故每次交换相邻两项恰使排列的逆序数改变1, 从而 $i_1 i_2 \cdots i_n$  至少要 $k$ 次交换相邻两项才能变为 $12 \cdots n$ .

**37.** 令 $R_1, R_2$ 为 $X$ 上的两个偏序关系, 定义 $R_1$  与 $R_2$ 的交 $R$ ,  $xRy$ 当且仅当 $xR_1y$ ,  $xR_2y$  同时成立. 证明:  $R$ 也是 $X$ 上的偏序关系.

证明: 自反性:  $\forall x \in X$ , 由 $xR_1x, xR_2x$ , 得 $xRx$ ; 反对称性:  $\forall x, y \in X$ , 若 $xRy, yRx$ , 得 $xR_1y, yR_1x$ , 知 $x = y$ ; 传递性:  $\forall x, y, z \in X$ , 若 $xRy, yRz$ , 则 $xR_1y, yR_1z$ 推出 $xR_1z$ ,  $xR_2y, yR_2z$  推出 $xR_2z$ , 故 $xRz$ .

38. 设 $(X_i, \leq_i), 1 \leq i \leq n$ 是 $n$ 个偏序集, 在 $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 上定义关系 $T: (x_1, x_2, \cdots, x_n)T(y_1, y_2, \cdots, y_n)$  当且仅当 $x_i \leq_i y_i$  对 $\forall 1 \leq i \leq n$ 成立. 证明:  $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, T)$  是偏序集, 称为这 $n$ 个偏序集的直积.

证明:

(1)自反性:  $\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X$ , 由 $x_i \leq_i x_i, \forall 1 \leq i \leq n$ , 得

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)T(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

(2)反对称性:  $\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n), (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in X$ , 若

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)T(y_1, y_2, \cdots, y_n), (y_1, y_2, \cdots, y_n)T(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

得

$$x_i \leq_i y_i, y_i \leq_i x_i, \forall 1 \leq i \leq n$$

知 $x_i = y_i, \forall 1 \leq i \leq n$ ;

(3)传递性:  $\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n), (y_1, y_2, \cdots, y_n), (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in X$ , 若

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)T(y_1, y_2, \cdots, y_n), (y_1, y_2, \cdots, y_n)T(z_1, z_2, \cdots, z_n)$$

则 $x_i \leq_i y_i, y_i \leq_i z_i$  推出 $x_i \leq_i z_i, \forall 1 \leq i \leq n$ . 故 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)T(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ .

49. 令 $R, S$ 为 $X$ 上的两个等价关系. 证明:  $T = R \cap S$  也是 $X$ 上的等价关系.

证明: 自反性:  $\forall x \in X$ , 由 $xRx, xSx$ , 得 $xTx$ ; 对称性:  $\forall x, y \in X$ , 若 $xTy$ , 得 $xRy, xSy$ , 知 $yRx, ySx$ , 故 $yTx$ ; 传递性:  $\forall x, y, z \in X$ , 若 $xTy, yTz$ , 则 $xRy, xSy, yRz, ySz$ 推出 $xRz, xSz$ , 故 $xTz$ .

## 5 二项式系数

10. 设 $n, k$ 是正整数, 用组合推理证明

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

证明: 考虑如下情景: 从 $n$ 名学生中选 $k$ 名组成一个小组, 并从中选出一名组长, 方法数为 $k \binom{n}{k}$ ; 为达到同样的结果, 也可以先从 $n$ 名学生中选出组长, 再从剩下的 $n-1$ 名同学中选出 $k-1$ 名普通组员, 方法数为 $n \binom{n-1}{k-1}$ .

12. 设 $n$ 是正整数, 证明

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^2 = \begin{cases} 0, & n \text{ 是奇数} \\ (-1)^m \binom{2m}{m}, & n = 2m \end{cases}$$

证明: 当 $n = 2m + 1, m \in \mathbb{N}$ , 有

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^2 &= \sum_{k=0}^m ((-1)^k \binom{n}{k}^2 + (-1)^{n-k} \binom{n}{n-k}^2) \\ &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \left( \binom{n}{k}^2 - \binom{n}{n-k}^2 \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

当 $n = 2m, m \in \mathbb{N}^*$ , 考虑

$$(1 - x^2)^n = (1 + x)^n (1 - x)^n$$

中 $x^n = x^{2m}$ 的系数. 左边为

$$(-1)^m \binom{2m}{m},$$

右边为

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{n-k}^2.$$

16. 设 $n$ 是正整数, 通过对二项展开式积分证明

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

证明: 由二项式定理

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

从0到 $x$ 积分得

$$\frac{1}{n+1} ((1+x)^{n+1} - 1) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} x^{k+1}$$

令 $x = 1$ 即得待证等式.



17. 设 $n$ 是正整数, 用组合恒等式证明

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

证明: 由

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

可得

$$\frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$$

故

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \\ &= \frac{1}{n+1} \left( \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} - 1 \right) \\ &= \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}. \end{aligned}$$

22. 设 $r \in \mathbb{R}, k, m \in \mathbb{Z}$ , 证明

$$\binom{r}{m} \binom{m}{k} = \binom{r}{k} \binom{r-k}{m-k}.$$

证明: 当 $k < 0$ ,  $\binom{m}{k} = \binom{r}{k} = 0$ ; 当 $k = 0$ , 上式为 $\binom{r}{m} = \binom{r}{m}$ ; 下设 $k > 0$ .  
当 $m < k$ ,  $\binom{m}{k} = \binom{r-k}{m-k} = 0$ ; 当 $m = k$ , 上式为 $\binom{r}{m} = \binom{r}{k}$ ; 下设 $m > k$ . 此时有

$$\begin{aligned} \binom{r}{m} \binom{m}{k} &= \frac{r(r-1) \cdots (r-m+1)}{m!} \frac{m!}{k!(m-k)!} \\ &= \frac{r(r-1) \cdots (r-m+1)}{k!(m-k)!} \\ &= \frac{r(r-1) \cdots (r-k+1)}{k!} \frac{(r-k)(r-k-1) \cdots (r-m+1)}{(m-k)!} \\ &= \binom{r}{k} \binom{r-k}{m-k}. \end{aligned}$$

27. 设 $n, k$ 是正整数, 用组合推理证明

$$n(n+1)2^{n-2} = \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}$$

证明: 考虑如下情景: 从 $n$ 名学生中选出一个小组, 并从中选出一名组长和一名支部书记(可由一人兼任). 对小组人数分类, 当小组有 $k$ 人时, 方法数为 $k^2 \binom{n}{k}$ , 得右边的结果; 为达到同样的结果, 也可以分组长和支部书记是否为同一人讨论: 若为同一人, 先从 $n$ 名学生中选出组长, 再确定剩下的 $n-1$ 名同学是否加入小组, 方法数为 $n2^{n-1}$ ; 若不为同一人, 先从 $n$ 名学生中选出组长和支部书记, 再确定剩下的 $n-2$ 名同学是否加入小组, 方法数为 $n(n-1)2^{n-2}$ , 二者之和为 $n(n+1)2^{n-2}$ , 得右边的结果.

28. 设 $n, k$ 是正整数, 用组合推理证明

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}^2 = n \binom{2n-1}{n-1}$$

证明: 考虑如下情景: 有 $2n$ 名爱好舞蹈的学生, 男女各 $n$ 人, 从中选出 $n$ 人成立舞蹈队, 并从女生中选出一名队长. 按队中女生人数分类( $1 \leq k \leq n$ ), 当女生有 $k$ 人时, 方法数为 $k \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$ , 得左边的结果; 为达到同样的结果, 也可以先选出队长, 再从剩下的 $2n-1$ 名同学中选出 $n-1$ 人进队, 方法数为 $n \binom{2n-1}{n-1}$ , 得右边的结果.

30. 设 $S = \{1, 2, 3, 4\}$ , 其幂集在包含关系下成一偏序集. 证明其大小为6的唯一反链是所有2子集的集合.

证明: 考虑 $S$ 的对称链划分

$$\begin{aligned} \emptyset &\subset \{1\} \subset \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\} \\ \{4\} &\subset \{1, 4\} \subset \{1, 2, 4\} \\ \{2\} &\subset \{2, 3\} \subset \{2, 3, 4\} \\ \{3\} &\subset \{1, 3\} \subset \{1, 3, 4\} \\ \{2, 4\} \\ \{3, 4\}. \end{aligned}$$

知其反链最大大小为6, 且必须从6个链中各取1个. 现 $\{2, 4\}\{3, 4\}$ 已取, 以上第二、三、四个链也只能取2子集, 最后知第一个链中也只能取2子集.

43. 对 $z \in (-1, 1)$ , 假设

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k,$$

用归纳法证明

$$\frac{1}{(1-z)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} z^k,$$

证明: 设上式对 $n$ 成立, 考虑 $n+1$ 的情形:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-z)^{n+1}} &= \frac{1}{(1-z)^n} \frac{1}{1-z} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} z^k \sum_{l=0}^{\infty} z^l \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} z^m \sum_{k=0}^m \binom{n+k-1}{k} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} z^m \binom{n+m}{m} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \binom{n+1+k-1}{k}. \end{aligned}$$

48. 设 $m, n$ 是正整数, 证明 $mn+1$ 元偏序集 $S$ 有一个大小为 $m+1$ 的链或大小为 $n+1$ 的反链.

证明: 设 $S$ 最大链长度为 $k$ , 若 $k \geq m+1$ 结论已成立. 若 $k \leq m$ ,  $S$ 可划分为 $k$ 个反链, 根据抽屉原理至少存在一个反链大小不小于 $n+1$ .

49. 证明 $mn+1$ 个实数的序列或者有长度为 $m+1$ 的递增子序列, 或者有长度为 $n+1$ 的递减子序列.

证明: 在 $\{(i, a_i) | 1 \leq i \leq mn+1\}$ 上定义偏序 $R$ ,  $(j, a_j)R(k, a_k)$ 当且仅当 $j \leq k$ 且 $a_j \leq a_k$ , 则递增子序列与链对应, 递减子序列与反链对应. 由上一题结论即得证.

50. 设 $X = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$ , 其在整除关系下成一偏序集. (1)确定最大链和

将 $X$ 划分成最小数目的反链的划分. (2)确定最大反链和将 $X$ 划分成最小数目的链的划分.

解: (1)考虑 $X$ 的反链划分

$$\{1\}, \{2, 3, 5, 7, 11\}, \{4, 6, 9, 10\}, \{8, 12\}$$

知最大链长度至多为4; 而 $\{1, 2, 4, 8\}$ 是一个长为4的链, 故上述划分为最小数目的反链划分.

(2)考虑 $X$ 的链划分

$$\{1, 2, 4, 8\}, \{3, 6, 12\}, \{5, 10\}, \{7\}, \{9\}, \{11\}$$

知最大反链长度至多为6; 而 $\{4, 5, 6, 7, 9, 11\}$ 是一个长为6的反链, 故上述划分为最小数目的链划分.

## 6 容斥原理及应用

16. 用组合推理证明

$$n! = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} D_{n-i}$$

证明: 考虑 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ 的全部 $n!$ 个排列, 按相对于自然排列 $123 \dots n$ 不动点个数 $i$ 分类( $0 \leq i \leq n$ ), 恰有 $i$ 个不动点时的排列数为 $\binom{n}{i} D_{n-i}$ .

19. 证明

$$D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1})$$

证明:

$$\begin{aligned}
& (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1}) \\
&= (n-1)((n-2)! \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \frac{1}{k!} + (n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{k!}) \\
&= (n-1)(n(n-2)! \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \frac{1}{k!} + (n-1)!(-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!}) \\
&= n! \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \frac{1}{k!} + (-1)^{n-1}(n-1) \\
&= n! \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!} \\
&= D_n.
\end{aligned}$$

**21.** 证明 $D_n$ 是偶数当且仅当 $n$ 是奇数.

证明: 我们有

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$$

以下对 $n$ 归纳证明 $D_{2n-1}$ 是偶数且 $D_{2n}$ 是奇数.  $n = 1$  时由 $D_1 = 0, D_2 = 1$ 成立. 设 $D_{2n-1}$ 是偶数,  $D_{2n}$ 是奇数, 则 $D_{2n+1} = (2n+1)D_{2n} - 1$ 是偶数,  $D_{2n+2} = (2n+2)D_{2n+1} + 1$ 是奇数.

7 递推关系和生成函数

8 特殊计数序列

9 相异代表系

10 组合设计

11 图论导引

12 再论图论

13 有向图与网络

14 *Pólya* 计数