Axler《线性代数应该这样学》(第三版)
习题选解

Alfred Sines*

2020.9.4

目录

*Department of Algebra, Cloud Society

1 向量空间

1.1 $\mathbb{R}^n$与$\mathbb{C}^n$

说明: 在本书中$\mathbb{F}$表示$\mathbb{R}$或$\mathbb{C}$.

1.2 向量空间的定义

2. 设V是$\mathbb{F}$上的线性空间, $a \in \mathbb{F}$, $v \in V$, $av = 0$. 证明: $a = 0$ 或$v = 0$.

证明: 设$a \neq 0$, 则$v = 1v = (a^{-1}a)v = a^{-1}(av) = 0$.

6. 在$\mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$上定义加法和标量乘法如下: 实数加法和乘法按通常法则定义; 对于$t \in \mathbb{R}$,

$$t\infty = \begin{cases} -\infty & \text{if } t < 0, \\ 0 & \text{if } t = 0, \\ \infty & \text{if } t > 0, \end{cases} \quad t(-\infty) = \begin{cases} \infty & \text{if } t < 0 \\ 0 & \text{if } t = 0 \\ -\infty & \text{if } t > 0 \end{cases}$$

$$t + \infty = \infty + t = \infty, \quad t + (-\infty) = (-\infty) + t = -\infty$$

$$\infty + \infty = \infty, \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty, \quad \infty + (-\infty) = 0$$

如此定义的$\mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$是否为$\mathbb{R}$上的线性空间?

解: $\infty + \infty + (-\infty) = \infty + (-\infty) = 0$; 另一方面$(1 + 1 - 1)\infty = 1 * \infty = \infty$. 不满足分配性质, 故不是线性空间.

1.3 子空间

12. 设V是$\mathbb{F}$上的线性空间, 证明V的两个子空间的并是V的子空间当且仅当其中一个子空间包含另一个子空间.

证明: 充分性显然, 下证必要性. 设$U_1, U_2, U_1 \cup U_2$均为V的子空间, 若$U_1 \setminus U_2$与$U_2 \setminus U_1$均非空, 取$\alpha \in U_1 \setminus U_2$, $\beta \in U_2 \setminus U_1$, 由$U_1 \cup U_2$ 是子空间, $\alpha + \beta \in U_1 \cup U_2$. 若$\alpha + \beta \in U_1$, 推出$\beta \in U_1$; 若$\alpha + \beta \in U_2$, 推出$\alpha \in U_2$, 两者均矛盾. 故$U_1 \setminus U_2$与$U_2 \setminus U_1$必有一为空集. 命题得证.

19. 设V是$\mathbb{F}$上的线性空间, U_1, U_2, W为V的子空间, 证明或否定: 若$U_1 + W = U_2 + W$, 则$U_1 = U_2$.

解: 反例如下: 取$V = \mathbb{R}^3$, $U_1 = \{(x,0,0)|x \in \mathbb{R}\}$, $U_2 = \{(x,y,0)|x,y \in \mathbb{R}\}$, $W = \{(0,y,z)|y,z \in \mathbb{R}\}$.

23. 设V是$\mathbb{F}$上的线性空间, U_1, U_2, W为V的子空间, 证明或否定: 若$V = U_1 \oplus W = U_2 \oplus W$, 则$U_1 = U_2$.

解: 反例如下: 取$V = \mathbb{R}^2$, $U_1 = \{(0,y)|y \in \mathbb{R}\}$, $U_2 = \{(z,z)|z \in \mathbb{R}\}$, $W = \{(x,0)|x \in \mathbb{R}\}$.

2 有限维向量空间

2.1 张成空间与线性无关

10. 设V是$\mathbb{F}$上的线性空间, $v_1, v_2, \cdots, v_m$在V中线性无关, $w \in V$. 证明: 若$v_1 + w, v_2 + w, \cdots, v_m + w$线性相关, 则$w \in \operatorname{span}(v_1, v_2, \cdots, v_m)$.

证明: 存在不全为0的$\lambda_i (1 \le i \le m)$,

$$0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (v_i + w) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i + (\sum_{i=1}^{m} \lambda_i) w.$$

令$\mu = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$, 若$\mu = 0$, 与$v_1, v_2, \cdots, v_m$线性无关矛盾. 故$\mu \neq 0$, $w = -\frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$. 命题得证.

11. 设V是$\mathbb{F}$上的线性空间, $v_1, v_2, \cdots, v_m$在V中线性无关, $w \in V$. 证明: $v_1, v_2, \cdots, v_m, w$线性无关当且仅当$w \notin \operatorname{span}(v_1, v_2, \cdots, v_m)$.

证明: 必要性: 若$w \in \operatorname{span}(v_1, v_2, \cdots, v_m)$, 设$w = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$, $\lambda_i \in \mathbb{F}$. 这说明

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m - w = 0.$$

与$v_1, v_2, \cdots, v_m, w$线性无关矛盾. 故$w \notin \operatorname{span}(v_1, v_2, \cdots, v_m)$.

充分性: 设$w \notin \operatorname{span}(v_1, v_2, \cdots, v_m)$, 对于

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m + \mu w = 0.$$

若$\mu \neq 0$, 得$w \in \operatorname{span}(v_1, v_2, \cdots, v_m)$,矛盾. 故$\mu = 0$, 进而由$v_1, v_2, \cdots, v_m$线性无关, 每个$\lambda_i$均为0. 故$v_1, v_2, \cdots, v_m, w$ 线性无关.

2.2 基

2.3 维数

3 线性映射