R.Brualdi《组合数学》(第五版)
习题选解

Alfred Sines*

2020 年 9 月 4 日

目录

*Department of Combinatorics, Cloud Society

1 什么是组合数学

11. 用$Loub\grave{e}re$法构造7阶幻方.

解:

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

12. 用$Loub\grave{e}re$法构造9阶幻方.

解:

47	58	69	80	1	12	23	34	45
57	68	79	9	11	22	33	44	46
67	78	8	10	21	32	43	54	56
77	7	18	20	31	42	53	55	66
6	17	19	30	41	52	63	65	76
16	27	29	40	51	62	64	75	5
26	28	39	50	61	72	74	4	15
36	38	49	60	71	73	3	14	25
37	48	59	70	81	2	13	24	35

18. 证明不存在2阶幻方体.

证明: 假设存在2阶幻方体, 其幻和为9, 1相邻的三个位置均应为8, 矛盾.

19. 证明不存在4阶幻方体.

证明: 假设存在4阶幻方体, 其幻和为130. 考虑任一$4*4$ 的平面截面(含过面对角线的截面), 其两条对角线之和及第二行、第三行之和为520, 减去第一、第四两列之和260, 得中间四个数之和的两倍为260, 中间四个数之和为130. 考虑中心$2*2*2$ 的子立方体, 其每个$2*2$ 平面截面(含过面对角线的截面)和为130, 从而其中每相邻两个数和都相等, 为65; 任一个数相邻的三个数相等, 矛盾.

24. 求构造n阶拉丁方的一般方法.

解:

1	2	3	$\cdots$	n-1	n
n	1	2	$\cdots$	n-2	n-1
n-1	n	1	$\cdots$	n-3	n-2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
3	4	5	$\cdots$	1	2
2	3	4	$\cdots$	n	1

37. n 阶拉丁方是幂等的, 如果对角线位置$(1,1)(2,2)\cdots(n,n)$ 依次为$1,2,3,\cdots,n$; 它是对称的, 如果位置$(i,j)(j,i)$的整数总相等$(1\leq i,j\leq n, i\neq j)$. (1)构造一个3阶对称幂等拉丁方. (2) 证明偶数阶对称幂等拉丁方不存在.

解:(1)

1	3	2
3	2	1
2	1	3

(2) 考虑1出现的次数, 其在对角线上出现1次, 对角线之外出现偶数次, 总共出现奇数次, 矛盾.

2 排列与组合

40. 设$S=\{1,2,3,\cdots,n\}$, 现取出其一个k元子集A, 要求A中任两个元素之差至少为$l+1$, 这样的子集有多少个?

解: 记A中元素从小到大依次为$a_1,a_2,\cdots,a_k$, 令$b_1=a_1,b_2=a_2-a_1,b_3=a_3-a_2,\cdots,b_k=a_k-a_{k-1},b_{k+1}=n-a_k$, 则$b_1+b_2+\cdots+b_k+b_{k+1}=n$, 其中$b_1\geq 1,b_i\geq l+1(2\leq i\leq k),b_{k+1}\geq 0$. 用变量替换法可知, 解的数目为$\binom{n-lk+l}{k}$.

49. 证明最多m个A和最多n 个B的排列数为$\binom{m+n+2}{m+1}-1$.

证明: k个A和l个B的排列数为$\binom{k+l}{k}$, 对l从0到n求和, 得k 个A和最多n个B的排列数为$\binom{k+n+1}{n}$. 对k从0到m求和, 得$\binom{m+n+2}{n+1}-1$(包含了空排列).

3 鸽巢原理

9. 集合S中有10个正整数, 它们均不超过60. 证明存在S的两个不交非空子集, 它们的元素之和相同.

证明: S有1023个非空子集, 它们的元素和在1到600之间, 由鸽巢原理, 必有两个子集A, B 的元素和相同. 则$A\setminus B, B\setminus A$ 即为所求.

推广: 设集合S中有k个正整数, 它们均不超过n; 且不存在S 的两个不交非空子集, 它们的元素之和相同. 求$k=f(n)$之最大值.

评注: $6\le f(60)\le 8$. 事实上, $S=\{1,2,4,8,16,32\}$ 符合要求. 若$|S|\ge 10$, 由本题证法得不符合要求. 若$|S|=9$, 考虑其所有不超过四元的非空子集, 共255个, 而其元素和均不超过240.

13. 对K_6的边做红蓝二着色, 证明: 必存在至少两个同色K_3.

证明: 设K_6的6个顶点为a, b, c, d, e, f.

(1) 若a引出的5条边有4条同色, 不妨ab, ac, ad, ae全为红色, 则b, c, d, e之间的边若有两条为红色, 即得两个红色K_3; 若全为蓝色, $bcde$为蓝色K_4, 包含两个蓝色K_3; 若恰有一边红色, 不妨为bc, 则abc为红色K_3, cde为蓝色K_3.

(2) 若a引出的5条边至多有3条同色, 不妨ab, ac, ad为红色, ae, af为蓝色. 此时$abcd$中至少有一个同色K_3, 若ef为蓝色, 则已得两个同色K_3. 下设ef为红色.

(2a) 若bcd中至少两条红边, 已得两个红色K_3;

(2b) 若bcd中恰有一条红边, 设bc为红色, bd, cd为蓝色, 则已有abc为红色K_3. 若de为蓝色, 则可设df为蓝色(否则def为红色K_3), 又可设bf为红色(否则bdf为蓝色K_3), 则不论cf为什么颜色, 都得到另一个同色K_3 (红色bcf或蓝色cdf). 若de为蓝色, 则可设be为红色(否则bde为蓝色K_3), 则不论ce为什么颜色, 都得到另一个同色K_3 (红色bce或蓝色cde).

(2c) 若bcd中没有红边, 即bc, bd, cd全为蓝色, 则已有bcd为蓝色K_3. 若de为红色, 则可设df为蓝色(否则def为红色K_3), 又可设bf为红色(否则bdf为蓝色K_3), 又可设be为蓝色(否则bef为红色K_3), 又可设ce为红色(否则bce为蓝色K_3), 则不

论cf为什么颜色, 都得到另一个同色K_3 (红色cef或蓝色cdf). 若de为蓝色, 则可设be为红色(否则bde为蓝色K_3), 又可设bf为蓝色(否则bef为红色K_3), 又可设cf为红色(否则bcf为蓝色K_3), 则不论ce为什么颜色, 都得到另一个同色K_3 (红色cef或蓝色cde).

20. 证明: $r(3,3,3) \leq 17$.

证明: 考虑K_{17}边的红黄蓝三染色, 任取一个顶点a, 考虑其引出的16条边, 其中必有6条边同色, 不妨设有6条红边. 考虑这些边连接的6个顶点, 若其中有红边, 则其两端点和a构成红色K_3; 若不然, 它们构成的K_6中只有黄边和蓝边, 其中必有黄色或蓝色K_3($r(3,3)=6$).

23. 证明: $r(3,4) \leq 10$.

证明: 考虑K_{10}边的红蓝二染色, 往证或者有红色K_3, 或者有蓝色K_4. 假设不存在红色K_3, 任取一个顶点a, 考虑其引出的9条边. 若有4条红边, 则这些边连接的4个顶点构成蓝色K_4. 若不然, 至少有6条蓝边, 其连接的6 个顶点中必有蓝色K_3($r(3,3)=6$, 又由假设没有红色K_3), 加上a 即得蓝色K_4.

4 生成排列和组合

5. 设$i_1i_2\cdots i_n$是$\{1,2,\cdots,n\}$ 的排列, 且它的逆序数为k. 证明不能通过少于k次连续交换相邻两项将其变为$12\cdots n$.

证明: 将一个$\{1,2,\cdots,n\}$ 的排列的相邻两项ij 变为ji时, 若$i<j$, 逆序列中只有i对应的项b_i增加1; 若$i>j$, 逆序列中只有j对应的项b_j减少1. 故每次交换相邻两项恰使排列的逆序数改变1, 从而$i_1i_2\cdots i_n$ 至少要k次交换相邻两项才能变为$12\cdots n$.

37. 令R_1,R_2为X上的两个偏序关系, 定义R_1 与R_2的交R, xRy当且仅当xR_1y, xR_2y 同时成立. 证明: R也是X上的偏序关系.

证明: 自反性: $\forall x \in X$, 由xR_1x, xR_2x, 得xRx; 反对称性: $\forall x,y \in X$, 若xRy, yRx, 得xR_1y, yR_1x, 知$x=y$; 传递性: $\forall x,y,z \in X$, 若xRy, yRz, 则xR_1y, yR_1z推出xR_1z, xR_2y, yR_2z 推出xR_2z, 故xRz.

38. 设$(X_i, \le_i), 1 \le i \le n$是$n$个偏序集, 在$X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$上定义关系$T: (x_1, x_2, \cdots, x_n)T(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 当且仅当$x_i \le_i y_i$ 对$\forall 1 \le i \le n$成立. 证明: $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, T)$ 是偏序集, 称为这n个偏序集的直积.

证明:

(1)自反性: $\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X$, 由$x_i \le_i x_i, \forall 1 \le i \le n$, 得

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)T(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

(2)反对称性: $\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n), (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in X$, 若

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)T(y_1, y_2, \cdots, y_n), (y_1, y_2, \cdots, y_n)T(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

得

$$x_i \le_i y_i, y_i \le_i x_i, \forall 1 \le i \le n$$

知$x_i = y_i, \forall 1 \le i \le n$;

(3)传递性: $\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n), (y_1, y_2, \cdots, y_n), (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in X$, 若

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)T(y_1, y_2, \cdots, y_n), (y_1, y_2, \cdots, y_n)T(z_1, z_2, \cdots, z_n)$$

则$x_i \le_i y_i, y_i \le_i z_i$ 推出$x_i \le_i z_i, \forall 1 \le i \le n$. 故$(x_1, x_2, \cdots, x_n)T(z_1, z_2, \cdots, z_n)$.

49. 令R, S为X上的两个等价关系. 证明: $T = R \cap S$ 也是X上的等价关系.

证明: 自反性: $\forall x \in X$, 由xRx, xSx, 得xTx; 对称性: $\forall x, y \in X$, 若xTy, 得xRy, xSy, 知yRx, ySx, 故yTx; 传递性: $\forall x, y, z \in X$, 若xTy, yTz, 则xRy, xSy, yRz, ySz推出xRz, xSz, 故xTz.

5 二项式系数

10. 设n, k是正整数, 用组合推理证明

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

证明: 考虑如下情景: 从n名学生中选k 名组成一个小组, 并从中选出一名组长, 方法数为$k\binom{n}{k}$; 为达到同样的结果, 也可以先从n名学生中选出组长, 再从剩下的$n-1$ 名同学中选出$k-1$名普通组员, 方法数为$n\binom{n-1}{k-1}$.

12. 设n是正整数, 证明

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}^2=\begin{cases}0, & n\text{是奇数}\\ (-1)^m\binom{2m}{m}, & n=2m\end{cases}$$

证明: 当$n=2m+1, m\in\mathbb{N}$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}^2&=\sum_{k=0}^{m}((-1)^k\binom{n}{k}^2+(-1)^{n-k}\binom{n}{n-k}^2)\\&=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k(\binom{n}{k}^2-\binom{n}{n-k}^2)\\&=0.\end{aligned}$$

当$n=2m, m\in\mathbb{N}^*$, 考虑

$$(1-x^2)^n=(1+x)^n(1-x)^n$$

中$x^n=x^{2m}$的系数. 左边为

$$(-1)^m\binom{2m}{m},$$

右边为

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\binom{n}{n-k}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}^2.$$

16. 设n是正整数, 通过对二项展开式积分证明

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

证明: 由二项式定理

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

从0到x积分得

$$\frac{1}{n+1}((1+x)^{n+1}-1)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}x^{k+1}$$

令$x=1$即得待证等式.

17. 设n是正整数, 用组合恒等式证明

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

证明: 由

$$k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$$

可得

$$\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}=\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$$

故

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}&=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}\\&=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}\\&=\frac{1}{n+1}(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}-1)\\&=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.\end{aligned}$$

22. 设$r\in\mathbb{R},k,m\in\mathbb{Z}$, 证明

$$\binom{r}{m}\binom{m}{k}=\binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}.$$

证明: 当$k<0$, $\binom{m}{k}=\binom{r}{k}=0$; 当$k=0$, 上式为$\binom{r}{m}=\binom{r}{m}$; 下设$k>0$. 当$m<k$, $\binom{m}{k}=\binom{r-k}{m-k}=0$; 当$m=k$, 上式为$\binom{r}{m}=\binom{r}{k}$; 下设$m>k$. 此时有

$$\begin{aligned}\binom{r}{m}\binom{m}{k}&=\frac{r(r-1)\cdots(r-m+1)}{m!}\frac{m!}{k!(m-k)!}\\&=\frac{r(r-1)\cdots(r-m+1)}{k!(m-k)!}\\&=\frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}\frac{(r-k)(r-k-1)\cdots(r-m+1)}{(m-k)!}\\&=\binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}.\end{aligned}$$

27. 设n,k是正整数, 用组合推理证明

$$n(n+1)2^{n-2}=\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}$$

证明: 考虑如下情景: 从n名学生中选出一个小组, 并从中选出一名组长和一名支部书记(可由一人兼任). 对小组人数分类, 当小组有k 人时, 方法数为$k^2\binom{n}{k}$, 得右边的结果; 为达到同样的结果, 也可以分组长和支部书记是否为同一人讨论: 若为同一人, 先从n名学生中选出组长, 再确定剩下的$n-1$名同学是否加入小组, 方法数为$n2^{n-1}$; 若不为同一人, 先从n名学生中选出组长和支部书记, 再确定剩下的$n-2$名同学是否加入小组, 方法数为$n(n-1)2^{n-2}$, 二者之和为$n(n+1)2^{n-2}$, 得右边的结果.

28. 设n,k是正整数, 用组合推理证明

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}^2=n\binom{2n-1}{n-1}$$

证明: 考虑如下情景: 有$2n$名爱好舞蹈的学生, 男女各n 人, 从中选出n人成立舞蹈队, 并从女生中选出一名队长. 按队中女生人数分类($1\le k\le n$), 当女生有k人时, 方法数为$k\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$, 得左边的结果; 为达到同样的结果, 也可以先选出队长, 再从剩下的$2n-1$名同学中选出$n-1$人进队, 方法数为$n\binom{2n-1}{n-1}$, 得左边的结果.

30. 设$S=\{1,2,3,4\}$, 其幂集在包含关系下成一偏序集. 证明其大小为6的唯一反链是所有2子集的集合.

证明: 考虑S的对称链划分

$$\begin{aligned}
&\varnothing\subset\{1\}\subset\{1,2\}\subset\{1,2,3\}\subset\{1,2,3,4\}\\
&\{4\}\subset\{1,4\}\subset\{1,2,4\}\\
&\{2\}\subset\{2,3\}\subset\{2,3,4\}\\
&\{3\}\subset\{1,3\}\subset\{1,3,4\}\\
&\{2,4\}\\
&\{3,4\}.
\end{aligned}$$

知其反链最大大小为6, 且必须从6个链中各取1 个. 现$\{2,4\}\{3,4\}$ 已取, 以上第二、三、四个链也只能取2子集, 最后知第一个链中也只能取2子集.

43. 对$z \in (-1,1)$, 假设

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k,$$

用归纳法证明

$$\frac{1}{(1-z)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} z^k,$$

证明: 设上式对n 成立, 考虑$n+1$的情形:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-z)^{n+1}} &= \frac{1}{(1-z)^n}\frac{1}{1-z} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} z^k \sum_{l=0}^{\infty} z^l \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} z^m \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k-1}{k} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} z^m \binom{n+m}{m} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \binom{n+1+k-1}{k}.
\end{aligned}$$

48. 设m, n是正整数, 证明$mn+1$元偏序集S 有一个大小为$m+1$的链或大小为$n+1$的反链.

证明: 设S最大链长度为k, 若$k \geq m+1$结论已成立. 若$k \leq m$, S可划分为k个反链, 根据抽屉原理至少存在一个反链大小不小于$n+1$.

49. 证明$mn+1$个实数的序列或者有长度为$m+1$ 的递增子序列, 或者有长度为$n+1$的递减子序列.

证明: 在$\{(i,a_i)|1 \leq i \leq mn+1\}$上定义偏序$R$, $(j,a_j)R(k,a_k)$当且仅当$j \leq k$且$a_j \leq a_k$, 则递增子序列与链对应, 递减子序列与反链对应. 由上一题结论即得证.

50. 设$X = \{1,2,3,\cdots,12\}$, 其在整除关系下成一偏序集. (1)确定最大链和

将X划分成最小数目的反链的划分. (2)确定最大反链和将X划分成最小数目的链的划分.

解: (1)考虑X的反链划分

$$\{1\},\{2,3,5,7,11\},\{4,6,9,10\},\{8,12\}$$

知最大链长度至多为4; 而$\{1,2,4,8\}$是一个长为4的链, 故上述划分为最小数目的反链划分.

(2)考虑X的链划分

$$\{1,2,4,8\},\{3,6,12\},\{5,10\},\{7\},\{9\},\{11\}$$

知最大反链长度至多为6; 而$\{4,5,6,7,9,11\}$是一个长为6的反链, 故上述划分为最小数目的链划分.

6 容斥原理及应用

16. 用组合推理证明

$$n! = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} D_{n-i}$$

证明: 考虑$\{1,2,3,\cdots,n\}$的全部$n!$个排列, 按相对于自然排列$123\cdots n$不动点个数i分类($0 \le i \le n$), 恰有i个不动点时的排列数为$\binom{n}{i}D_{n-i}$.

19. 证明

$$D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1})$$

证明:

$$
\begin{aligned}
&(n-1)(D_{n-2}+D_{n-1})\\
=&(n-1)((n-2)!\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\frac{1}{k!}+(n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{1}{k!})\\
=&(n-1)(n(n-2)!\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\frac{1}{k!}+(n-1)!(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!})\\
=&n!\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\frac{1}{k!}+(-1)^{n-1}(n-1)\\
=&n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}\\
=&D_n.
\end{aligned}
$$

21. 证明D_n是偶数当且仅当n是奇数.

证明: 我们有

$$D_n = nD_{n-1}+(-1)^n$$

以下对n归纳证明D_{2n-1}是偶数且D_{2n}是奇数. $n=1$ 时由$D_1=0, D_2=1$成立. 设D_{2n-1}是偶数, D_{2n}是奇数, 则$D_{2n+1}=(2n+1)D_{2n}-1$是偶数, $D_{2n+2}=(2n+2)D_{2n+1}+1$是奇数.

7 递推关系和生成函数

8 特殊计数序列

9 相异代表系

10 组合设计

11 图论导引

12 再论图论

13 有向图与网络

14 $P\acute{o}lya$ 计数