

NUMBER THEORY AND ALGEBRA

$$\begin{aligned}
 & \textcircled{1} \quad 7^{9004} \pmod{361} & (7^1) &= 7 & (7^3) &= 343 \\
 &= 7^{9000} \cdot 7^4 \pmod{361} & (7^2) &= 49 & (7^4) &= 2401 \\
 &= (7^3)^{3000} \cdot 7^4 \pmod{361} \\
 &= (-18)^{3000} \cdot 7^3 \cdot 7^3 \cdot 7 \pmod{361} & (324)^4 &= 104976 \\
 &= (-18)^{3000} (-18)(-18) \cdot 7 \pmod{361} \\
 &= (324)^{1500} \cdot 324 \cdot 7 \pmod{361} \\
 &= (104976)^{750} \cdot 102 \pmod{361} \\
 &= (286)^{750} \pmod{361} & (286)^2 &= \\
 &= (-75)^{750} \pmod{361} \\
 &= (5625)^{375} \pmod{361} \\
 &= (-210)^{375} \pmod{361} \\
 &= (55)^{187} \cdot 210 \cdot 55 \pmod{361} \\
 &= (137)^{93} \cdot 210 \cdot 55 \pmod{361} \\
 &= (137)^{93} \cdot 359 \pmod{361} \\
 &= (358)^{46} \cdot (137) \cdot (359) \pmod{361} \\
 &= (-3)^{46} \cdot (-2) \cdot (-225) \pmod{361} \\
 &= (9)^{23} \cdot 87 \pmod{361} \\
 &= (81)^{11} \cdot 9 \cdot 87 \pmod{361} \\
 &= (6561)^5 \cdot 81 \cdot 9 \cdot 87 \pmod{361} \\
 &= (63)^5 \cdot 9 \cdot 81 \cdot 87 \pmod{361} \\
 &= (3969) \cdot (-129) \cdot 87 \cdot 63 \pmod{361} \\
 &= 359 \cdot 7 \cdot 66 \pmod{361} \\
 &= 359 \cdot (-101) \pmod{361} \\
 &= (-2) \cdot (-260) = 520 = 159 //
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 13^{327} \pmod{561} & 13^1 &= 13 \\
 & 13^{1320} & 13^2 &= 169 \\
 & 13^{10} & 13^3 &= 2197 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^4 &= 28561 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^5 &= 371293 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^6 &= 4826809 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^7 &= 62748517 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^8 &= 815730721 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^9 &= 10604509373 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{10} &= 138218621849 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{11} &= 1796842084037 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{12} &= 23358947092481 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{13} &= 303666312192253 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{14} &= 3947662058599291 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{15} &= 51319606761790783 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{16} &= 667154887903370181 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{17} &= 8673013542743812353 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{18} &= 11274917605566956059 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{19} &= 146573928872370428767 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{20} &= 1905461075340815574171 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{21} &= 24770993979430602464223 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{22} &= 322022921732597832034901 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{23} &= 4186297982523771816453713 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{24} &= 54621873772809233613908271 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{25} &= 718084359246519036980807523 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{26} &= 9315296669204747480950497801 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{27} &= 121198856709661717252356471413 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{28} &= 1581605137225602324280634128371 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{29} &= 20580866783932830215648243668823 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{30} &= 271551268191116792803427167704701 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{31} &= 3550166486484518306444553182161113 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{32} &= 46152164324298738083779191368194471 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{33} &= 601978136215883595089329487786528323 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{34} &= 7825915770806486736161283343324868199 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{35} &= 10193690502048432757010668346322328659 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{36} &= 132718076526629625841138688502190272567 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{37} &= 173533519484618513593478295052847354357 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{38} &= 2266935753300040676715217835687015606641 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{39} &= 29670164792900528817307831864031202886333 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{40} &= 389712142307706874625001814232405637522329 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{41} &= 5126257850002189370125023585021273287790271 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{42} &= 67041352050028461811625306605276552743273513 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{43} &= 877537576650370003551128985868615185662555671 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{44} &= 11508088496454810046164676816302097413613223813 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{45} &= 150705150453912530590140808611927266377971909571 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{46} &= 197126695590086289767183051195505446291363481441 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{47} &= 258264704267112176717337966554157080178772525873 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{48} &= 3395421155472458317325393565204042042324242836351 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{49} &= 44740475021141958125230116347652546550215156872563 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{50} &= 590426175274845455628091512519483105152797039343329 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{51} &= 7717540278573090923165189662553280366986361511463277 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{52} &= 10152802362145018190114746561319264477082270964902261 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{53} &= 13324643070788523647149170530715043820206952254372939 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{54} &= 17522036092025080741293921690929557166269037930684821 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{55} &= 23028646919632604963682098208208424316150749319890267 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{56} &= 30137241095522386452786727670670951611095974115857347 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{57} &= 39478413424179102388622746171872237104424766350614551 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{58} &= 51762937451432833105209569023433908235752196255808916 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{59} &= 68092818686862683036772440730464080706477855132551590 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{60} &= 89720664292921487947824172949603306918421211672317067 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{61} &= 117997463580797934332171424834484309093947575174012187 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{62} &= 155636702655037314631822852284829601822131847726215843 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{63} &= 203967713451548509021369707970278482368771402044080597 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{64} &= 268158127486913061727780620361364027079422822657304776 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{65} &= 353805565733086980246314806470773235203250669454496217 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{66} &= 465157235452913074310209248412025205764225870290845082 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{67} &= 606764406088787096603271922935632767513493631378198607 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{68} &= 794973727915423225584253500016322617767541720791658187 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{69} &= 1047465846290050193259529550021219403317804237029155643 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{70} &= 1384765600177065251237388415027585224313155508138902337 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{71} &= 182220528023218482660860493953586079160710216058057403 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{72} &= 238546686430184027459118641139661902908923280875474523 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{73} &= 312910702359239235696854233481560473781590267138116883 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{74} &= 408083913066910906405910503526028615916067347279551948 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{75} &= 536509087087084178327683654583837200690887551463417533 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{76} &= 705521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{77} &= 923224357177172261373915396246815070180600002073175633 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{78} &= 120793166433232394078609001512087959123478000269512833 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{79} &= 158909116363202112262191701965714346860521400350366683 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{80} &= 208825951272162745940849212555428650918677820455476693 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{81} &= 274913736653811569723103976322057246194281166592119703 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{82} &= 362801817649955040630035169218674419052565516569755413 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{83} &= 476262362944941552819045679984276744768335171540682013 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{84} &= 623941071828424018664759383979561768208835723002886613 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{85} &= 819113413376951224264187199173430300671486440903752613 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{86} &= 1077421437390036591543443358925459392872932373174878313 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{87} &= 1417407868607047569006476366603097210734812685127341813 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{88} &= 1867426409189161840708419389594026373955236500665544313 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{89} &= 2467426409189161840708419389594026373955236500665544313 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{90} &= 325913413376951224264187199173430300671486440903752613 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{91} &= 429684186823202112262191701965714346860521400350366683 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{92} &= 56793166433239235696854233481560473781590267138116883 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{93} &= 746262362944941552819045679984276744768335171540682013 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{94} &= 981521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{95} &= 1291521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{96} &= 1691521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{97} &= 2211521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{98} &= 2901521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{99} &= 3821521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{100} &= 5031521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{101} &= 6641521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{102} &= 8711521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{103} &= 11411521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{104} &= 15011521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{105} &= 19711521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{106} &= 25911521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{107} &= 34311521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{108} &= 45411521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{109} &= 59811521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{110} &= 79111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{111} &= 104911521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{112} &= 139111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{113} &= 184111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{114} &= 241111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{115} &= 314111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{116} &= 409111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{117} &= 534111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{118} &= 704111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{119} &= 924111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{120} &= 1204111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{121} &= 1564111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{122} &= 2034111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{123} &= 2654111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{124} &= 3484111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{125} &= 4594111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{126} &= 6044111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{127} &= 7994111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{128} &= 10594111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{129} &= 14044111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{130} &= 18544111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{131} &= 24344111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{132} &= 31844111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{133} &= 41644111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{134} &= 54544111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{135} &= 71944111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{136} &= 94944111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{137} &= 12544111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{138} &= 16544111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{139} &= 21844111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{140} &= 28844111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{141} &= 38044111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{142} &= 50144111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{143} &= 66244111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{144} &= 87344111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{145} &= 11444111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{146} &= 15044111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{147} &= 19744111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{148} &= 25944111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{149} &= 34344111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{150} &= 45444111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 & 13^{10} & 13^{151} &= 59844111521813213209431826088750959088360908153816902442793 \pmod{561} \\
 &$$