

## Exercices Calcul Matriciel

### Exercice 1 : Se repérer dans une matrice

Les deux questions sont indépendantes.

1. On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

- Quelles sont les tailles (formats) des trois matrices ?
- Donner les valeurs de  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $b_{31}$ ,  $b_{13}$ ,  $c_{12}$ ,  $c_{21}$  ?
- Remplacer les points des relations ci-dessous par les indices convenables :

$$b_{\dots, \dots} = 1 \quad a_{1 \dots} = 1 \quad c_{1, \dots} + c_{\dots, 1} = 4$$

2. Ecrire la matrice à 2 lignes et 3 colonnes définie par la formule  $m_{ij} = i^2 + j^2$ .

### Exercice 2 :

Calculer les matrices suivantes :

$$A = 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

### Exercice 3 :

On pose  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

Calculer  $A + B$  ;  $2A - 3B$  ;  $3A - 2B$ .

**Exercice 4 :**

1.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

2.  $(1 \quad -1 \quad 2) \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

3.  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

4.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

**Exercice 5 :**

Soit les matrices :

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix},$

$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$

$\mathbf{D} = (2 \quad 1 \quad -1)$

Calculer, si cela est possible, les produits :  $\mathbf{AB}, \mathbf{BA}, \mathbf{AC}, \mathbf{CA}, \mathbf{AD}, \mathbf{DA}, \mathbf{BC}, \mathbf{CB}, \mathbf{BD}, \mathbf{DB}, \mathbf{CD}, \mathbf{DC}, \mathbf{B}^2, \mathbf{B}^3$ .

**Exercice 6 :**

On pose  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Calculer  $A^2$ ;  $B^2$ ;  $A \times B$ ;  $B \times A$ ;  $A + B$ .

Calculer ensuite  $A^2 + 2 \cdot A \times B + B^2$ ;  $A^2 + A \times B + B \times A + B^2$ ;  $(A + B)^2$ . Une remarque ?

**Exercice 7 :**

On pose  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A \times B$  et  $B \times A$ .

**Exercice 8 :**

Calculer  $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

Qu'observe-t-on ?

**Exercice 9 :**

Les équations suivantes, où les réels  $x, y, z$  et  $t$  sont les inconnues, sont-elles linéaires ?

- [1]  $x + \ln(y) = 4$
- [2]  $x - y + 3z + 5t = 3$
- [3]  $2x + xy - z = 0$
- [4]  $x + \frac{3}{y} + z = 3$
- [5]  $3x + y^2 = 1$
- [6]  $5x - 4y + 3 = 0.$

**Exercice 10 :**

Résoudre le système  $S_1$  :

$$S_1 : \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

1. Trouver la solution  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  en utilisant la méthode du pivot de Gauss.
2. Interpréter géométriquement ce résultat.

**Exercice 11 :**

On considère le système  $S_3$ , où les réels  $x, y$  et  $z$  sont les inconnues :

$$S_3 : \begin{cases} x - y - z = 0 & L_1 \\ x + 2y - 5z = 2 & L_2 \\ 2x - 3y - z = -1 & L_3 \end{cases}$$

1. En général, quelle est l'intersection de trois plans quelconques ?
2. Résoudre le système  $S_3$  sous forme matricielle en prenant soin d'explicitier à chaque étape l'équation choisie comme pivot et les combinaisons linéaires d'équations utilisées pour résoudre le système.
3. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

**Exercice 12 :**

On considère le système  $S_4$ , où  $x, y$  et  $z$  sont les inconnues:

$$S_4 : \begin{cases} x - y + z = 0 & L_1 \\ x + y - z = 2 & L_2 \\ 5x + ay - z = 5 & L_3 \end{cases}$$

1. Résoudre le système  $S_4$  sous forme matricielle selon les valeurs du paramètre  $a$  en prenant soin d'explicitier à chaque étape l'équation choisie comme pivot et les combinaisons linéaires d'équations utilisées pour résoudre le système.
2. En déduire les valeurs du paramètre  $a$  pour lesquelles l'intersection des trois plans est un point et les valeurs pour lesquelles il n'existe aucune intersection.

**Exercice 13 :**

On considère les trois systèmes suivants, où  $x, y$  et  $z$  sont les inconnues:

$$S_6 : \begin{cases} 2x - y + 3z = 3 & L_1 \\ -2x + 2y + z = -4 & L_2 \\ x - y + 4z = 2 & L_3 \end{cases}$$

$$S_7 : \begin{cases} 2x - y + 3z = 3 & L_1 \\ -2x + 2y + z = -4 & L_2 \\ -2x + 3y + 5z = -5 & L_3 \end{cases}$$

$$S_8 : \begin{cases} 2x - y + 3z = 3 & L_1 \\ -2x + 2y + z = -4 & L_2 \\ -2x + 3y + 5z = 2 & L_3 \end{cases}$$

1. Ecrire chacun de ces systèmes sous forme matricielle et le résoudre, par la méthode du pivot, avec représentation matricielle, en prenant soin d'explicitier à chaque étape les combinaisons linéaires des lignes de la matrice élargie utilisées pour résoudre le système.
2. Interpréter géométriquement les résultats.

**Exercice 14 :**

Par la méthode du pivot, inverser la matrice :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 15 :**

On considère le système

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

1. Écrire ce système sous forme matricielle  $AX = b$
2. Déterminer  $A^{-1}$  par la méthode du pivot sur la matrice élargie  $(A \mid I)$ .
3. En déduire la solution  $X$ .