

Exercices Calcul Matriciel

Exercice 1 : Se repérer dans une matrice

Les deux questions sont indépendantes.

1. On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

- a. Quelles sont les tailles (formats) des trois matrices ?
- b. Donner les valeurs de $a_{12}, a_{21}, b_{31}, b_{13}, c_{12}, C_{21}$?
- c. Remplacer les points des relations ci-dessous par les indices convenables :

$$b_{\dots, \dots} = 1 \quad a_{1 \dots} = 1 \quad c_{1, \dots} + c_{\dots, 1} = 4$$

2. Ecrire la matrice à 2 lignes et 3 colonnes définie par la formule $m_{ij} = i^2 + j^2$.

Exercice 2 :

Calculer les matrices suivantes :

$$\begin{aligned} A &= 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ B &= 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ C &= 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 3 :

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer $A + B ; 2A - 3B ; 3A - 2B$.

Exercice 4 :

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2. (1 \quad -1 \quad 2) \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$4. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 :

Soit les matrices :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = (2 \quad 1 \quad -1)$$

Calculer, si cela est possible, les produits : \mathbf{AB} , \mathbf{BA} , \mathbf{AC} , \mathbf{CA} , \mathbf{AD} , \mathbf{DA} , \mathbf{BC} , \mathbf{CB} , \mathbf{BD} , \mathbf{DB} , \mathbf{CD} , \mathbf{DC} , \mathbf{B}^2 , \mathbf{B}^3 .

Exercice 6 :

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Calculer A^2 ; B^2 ; $A \times B$; $B \times A$; $A + B$.

Calculer ensuite $A^2 + 2 \cdot A \times B + B^2$; $A^2 + A \times B + B \times A + B^2$; $(A + B)^2$. Une remarque ?

Exercice 7 :

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $A \times B$ et $B \times A$.

Exercice 8 :

Calculer $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Qu'observe-t-on ?

Exercice 9 :

Les équations suivantes, où les réels x, y, z et t sont les inconnues, sont-elles linéaires ?

- [1] $x + \ln(y) = 4$
- [2] $x - y + 3z + 5t = 3$
- [3] $2x + xy - z = 0$
- [4] $x + \frac{3}{y} + z = 3$
- [5] $3x + y^2 = 1$
- [6] $5x - 4y + 3 = 0.$

Exercice 10 :

Résoudre le système S_1 :

$$S_1 : \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

1. Trouver la solution $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ en utilisant la méthode du pivot de Gauss.
2. Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 11 :

On considère le système S_3 , où les réels x, y et z sont les inconnues :

$$S_3 : \begin{cases} x - y - z = 0 & L_1 \\ x + 2y - 5z = 2 & L_2 \\ 2x - 3y - z = -1 & L_3 \end{cases}$$

1. En général, quelle est l'intersection de trois plans quelconques ?
2. Résoudre le système S_3 sous forme matricielle en prenant soin d'expliciter à chaque étape l'équation choisie comme pivot et les combinaisons linéaires d'équations utilisées pour résoudre le système.
3. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Exercice 12 :

On considère le système S_4 , où x, y et z sont les inconnues:

$$S_4 : \begin{cases} x - y + z = 0 & L_1 \\ x + y - z = 2 & L_2 \\ 5x + ay - z = 5 & L_3 \end{cases}$$

- Résoudre le système S_4 sous forme matricielle selon les valeurs du paramètre a en prenant soin d'expliciter à chaque étape l'équation choisie comme pivot et les combinaisons linéaires d'équations utilisées pour résoudre le système.
- En déduire les valeurs du paramètre a pour lesquelles l'intersection des trois plans est un point et les valeurs pour lesquelles il n'existe aucune intersection.

Exercice 13 :

On considère les trois systèmes suivants, où x, y et z sont les inconnues:

$$S_6 : \begin{cases} 2x - y + 3z = 3 & L_1 \\ -2x + 2y + z = -4 & L_2 \\ x - y + 4z = 2 & L_3 \end{cases}$$

$$S_7 : \begin{cases} 2x - y + 3z = 3 & L_1 \\ -2x + 2y + z = -4 & L_2 \\ -2x + 3y + 5z = -5 & L_3 \end{cases}$$

$$S_8 : \begin{cases} 2x - y + 3z = 3 & L_1 \\ -2x + 2y + z = -4 & L_2 \\ -2x + 3y + 5z = 2 & L_3 \end{cases}$$

- Ecrire chacun de ces systèmes sous forme matricielle et le résoudre, par la méthode du pivot, avec représentation matricielle, en prenant soin d'expliciter à chaque étape les combinaisons linéaires des lignes de la matrice élargie utilisées pour résoudre le système.
- Interpréter géométriquement les résultats.

Exercice 14 :

Par la méthode du pivot, inverser la matrice :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 15 :

On considère le système

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

- Écrire ce système sous forme matricielle $AX = b$
- Déterminer A^{-1} par la méthode du pivot sur la matrice élargie $(A \mid I)$.
- En déduire la solution X .