Calcul matriciel et systèmes linéaires

I. Matrices

A. Définitions

Une matrice est un tableau de nombres.

On note a_{ij} le terme situé à l'intersection de la i^{ème} ligne et de la j^{ème} colonne d'une matrice A,

On a donc :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

On peut également la noter :

$$\mathbf{A} = (a_{ij}),$$

avec $i = 1, \ldots, m$ (lignes), $j = 1, \ldots, n$ (colonnes).

Si on note m le nombre de lignes et n le nombre de colonnes d'une matrice A, alors on dit que A est de **format (*m ; n*).**

Si A est de format (*1 ; n*), alors c'est une matrice ligne (ou *vecteur* ligne) et si A est de format *(m ; 1)*, alors c'est une matrice colonne (ou *vecteur* colonne).

Quelques exemples :

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{A_5} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

sont cinq matrices, la première de format (3 , 2), la deuxième de format (2 , 3), la troisième de format (3 , 4), la quatrième de format (3 , 1), la cinquième de format (1 , 4).

B. Quelques matrices particulières

En raison de leur forme particulière, certaines matrices sont très utiles. *Même si ce n'est pas nécessairement le cas dans la suite de ce cours,* vous les rencontrerez régulièrement par la suite (S3 et/ou S4). *Pour ce cours, vous devez impérativement connaître celles suivies d'un astérisque*.*

1. Matrices nulles*

Les **matrices nulles** de format $(m\ ,n)$ sont les matrices, notées $\mathbf{0}_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}}$, composées uniquement de 0.

2. Matrices carrées*

Les **matrices carrées** sont des matrices ayant le même nombre de lignes et de colonnes.Elles sont donc de la forme :

$$A = (aij) \text{ où } i = 1, \dots , n\ ; j = 1, \dots , n.$$

Ainsi, les matrices :

$$A = (2),\ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & -2 \\ -3 & -2 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

sont des matrices carrées.

Pour les matrices carrées, on ne parle pas de format, mais d'**ordre**, une matrice carrée d'ordre n étant une matrice comportant n lignes et n colonnes.

- On appelle **diagonale principale** d'une matrice carrée sa diagonale nord-ouest/sud-est. La diagonale principale de la matrice $A = (a_{ij})$ est donc formée des termes a_{ii}.

- On appelle trace d'une matrice carrée A, la somme, notée tr(A), des termes situés sur sa diagonale principale :

$$\mathrm{tr}(A) = \sum a_{ii}\,.$$

La matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & -2 \\ -3 & -2 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$, par exemple, est d'ordre 4 et sa trace est :

$\mathrm{tr}(C) = 1 - 2 + 6 - 1 = 4$

3. Matrices opposées*

Soit une matrice A = (aij), de format (m , n).
On appelle **opposée de A**, la matrice, notée −A, dont les éléments sont les opposées des éléments de A.
Cette matrice est donc de format (m, n) et on a :

$$-A = (-a_{i\,j}).$$

4. Matrices transposées

Soit une matrice A = ($a_{i\,j}$), de format (m , n).
On appelle **transposée de A**, la matrice, notée A' ou ^{T}A, dont les colonnes sont formées par les lignes de A. Cette matrice est donc de format (n, m) et on a :

$$A' = (a'_{ij}), \text{ avec } a'_{ij} = a_{ji}.$$

Par exemple, la transposée de la matrice M : $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ est la matrice M ′ : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Sous-matrices*

Soit une matrice A = ($a_{i\,j}$), de format (m , n).
On appelle **sous-matrice de A**, toute matrice obtenue en ôtant à A une ou plusieurs de ses lignes ou colonnes.

Par exemple la matrice A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ a plusieurs sous-matrices, parmi lesquelles, par exemple, les matrices :

- $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ obtenue en ôtant à A sa première ligne et sa première colonne ;
- $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ obtenue en ôtant à A sa deuxième ligne ;
- $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ obtenue en ôtant à A sa troisième colonne et ses deux dernières lignes.

6. Matrices triangulaires*

Les **matrices triangulaires** sont des matrices carrées ne comportant que des 0 en dessous ou au-dessus de leur diagonale principale.

Plus précisément :

- Une **matrice triangulaire supérieure** est une matrice carrée ne comportant que des 0 endessous de sa diagonale principale. Elle est donc de la forme :

  $$T_{inf} = (a_{ij}), \text{ avec } a_{ij} = 0 \text{ si } i > j \ (i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n).$$

- Une **matrice triangulaire inférieure** est une matrice carrée ne comportant que des 0 au-dessusde sa diagonale principale. Elle est donc de la forme :

  $$T_{sup} = (a_{ij}), \text{ avec } a_{ij} = 0 \text{ si } i < j \ (i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n).$$

Les matrices $T_1 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $T_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ par exemple, sont triangulaires respectivement supérieure et inférieure.

7. Matrices diagonales

Une **matrice diagonale** est une matrice carrée dont tous les termes sont nuls, à l'exception éventuellede ceux situés sur sa diagonale principale (appelés termes diagonaux). C'est donc une matrice de la forme :

$$D = (a_{ij}), \text{ avec } a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \ (i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n).$$

C'est par exemple le cas des deux matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

8. Matrice identité d'ordre *n**

On appelle **matrice identité d'ordre *n***, notée $\mathbf{I}_n$, la matrice diagonale d'ordre n dont tous les termes diagonaux sont égaux à 1. On a donc :

$$I_n = (a_{ij}), \text{ avec } a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \text{ et } a_{ij} = 1 \text{ si } i = j \ (i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n).$$

Ainsi les matrices suivantes sont-elles des matrices identité :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Matrices scalaires

On appelle **matrice scalaire**, une matrice de la forme $S_n = \lambda I_n$, où λ est un réel quelconque. On a donc $S_n = (a_{ij})$, avec $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $a_{ij} = \lambda$ si $i = j$ ($i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$).
C'est par exemple le cas des matrices suivantes :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

10. Matrices symétriques

Une **matrice symétrique** est une matrice égale à sa transposée. C'est donc une matrice A telle que :

$$A = A'.$$

C'est par exemple le cas des matrices suivantes :

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix},\ M_5 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 7 \\ -2 & 7 & 0 \end{pmatrix},$$

11. Matrices antisymétriques

Une **matrice antisymétrique** est une matrice dont la transposée est égale à son opposée. C'est donc une matrice A telle que :

$$A' = -A.$$

C'est par exemple le cas des deux matrices suivantes :

$$M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

II. Calcul matriciel

A. Somme de deux matrices de même format (m , n)

La somme de deux matrices n'est **possible que si celles-ci sont de même format** et s'effectue en additionnant les éléments qui sont à la même place (sur la même ligne et la même colonne), comme :

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 9 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

On peut ainsi définir la somme de deux matrices de format (m , n) de la façon suivante : la somme des deux matrices de format (m , n), $\mathbf{A} = (a_{ij})$ et $\mathbf{B} = (b_{ij})$, est la matrice $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

La somme de deux matrices de format (m , n) a plusieurs **propriétés** :

- **Commutativité :** quelles que soient les matrices A et B de format (m , n), on a :
$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}.$$
- **Associativité :** quelles que soient les matrices A, B et C de format (m , n), on a :
$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}).$$
- **Elément neutre :** il s'agit de la matrice nulle de format (m , n) que l'on note $\mathbf{0}_{m,n}$. Ceci signifie que, quelle que soit la matrice A, on a :
$$\mathbf{A} + \mathbf{0}_{m,n} = \mathbf{0}_{m,n} + \mathbf{A} = \mathbf{A}.$$
- **Existence d'une opposée pour la somme :** pour toute matrice A de format (m , n), il existe la matrice opposée, notée – A. Et on a :
$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = -\mathbf{A} + \mathbf{A} = \mathbf{0}_{m,n}.$$
- La **transposée de la somme de deux matrices est égale à la somme des transposées** de ces deux matrices : quelles que soient les matrices **A** et **B** de format (m , n), on a :
$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'.$$

B. Produit d'une matrice par un réel

Le produit d'une matrice par un nombre λ s'effectue en multipliant chaque élément de cette matrice par λ, comme dans l'exemple suivant :

$$3 \times \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 12 & 0 \\ -9 & 15 \end{pmatrix}$$

On peut ainsi définir le produit d'une matrice de format $(m\,,n)$ par un réel de la façon suivante: le produit d'une matrice A = (a_{ij}) de format (m , n) par un réel λ est la matrice :

$$\lambda A = (\lambda \times a_{ij}).$$

Ce produit a plusieurs propriétés (assez intuitives) :

Quelles que soient les matrices A et B de format $(m\,,n)$ et les réels α et β, on a :

- **α(A + B) = αA + αB**
- **(α + β)A = αA +βA**
- **α(βA) = (αβ)A**
- Existence d'un **élément neutre** : le réel 1. Donc pour toute matrice **A**, on a : **1×A** = **A**.

C. Produit d'une matrice par une matrice ligne par une matrice colonne

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$ un vecteur ligne à n coordonnées et Y= $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ un vecteur colonne à n coordonnées également. Le produit de X par Y est :

$$XY = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + \cdots + x_n\,y_n$$

Par exemple, le produit de la matrice ligne de format (1, 3) : $L = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ par la matrice colonne de format (3, 1) : $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ est :

$$LC = 1 \times (-1) + (-1) \times 0 + 2 \times 2 = -1 + 0 + 4 = 3$$

On peut aussi écrire le résultat sous la forme d'une matrice d'ordre 1 : LC = (3) ⇒ c'est un nombre !

D. Produit de deux matrices

Le produit des matrices A = (aij), de format (m, n), et B = (bjk), de format (n, p), **n'est possible que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.** Et le **format de la matrice AB,** lorsqu'elle existe **est (*m*, *p*)**, où m est le nombre de lignes de A et p, le nombre de colonnes de B.

Définition : le produit des matrices $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$, de format (m, n) et $B = \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_n \end{pmatrix}$, de format (n, p), est :

$$AB = \begin{pmatrix} L_1C_1 & \dots & L_1C_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_mC_1 & \dots & L_mC_p \end{pmatrix} = (L_iC_j)$$

Où L_i est la i $^{\text{ème}}$ ligne de A, et C_j la j $^{\text{ème}}$ colonne de B.

→ **Le terme situé à l'intersection de la i$^{\text{ème}}$ ligne de et de la j$^{\text{ème}}$ colonne de AB est égale au produit de la i$^{\text{ème}}$ ligne de A avec la j$^{\text{ème}}$ colonne de B.**

Exemple :

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 1 & 16 \\ -1 & -5 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Le produit matriciel a plusieurs **propriétés :**

- Lorsque le produit matriciel est possible, il est **associatif** : l'ordre dans lequel on effectue le produit de trois matrices n'affecte pas le résultat. Autrement dit, pour toutes matrices **A**, de format (m , n), **B**, de format (n , p) et **C**, de format (p , r) :

  (AB)C = A(BC)

- Lorsque le produit matriciel est possible, il est **distributif** par rapport à la somme de deux matrices. Autrement dit, pour toutes matrices **A**, de format (m , n), et **B** et **C** de format (n , p) :

  A(B + C) = AB + AC

- Le **produit d'une matrice quelconque A**, de format (m, n) **par la matrice identité** $\mathbf{I_m}$ à gauche, ou la matrice identité $\mathbf{I_n}$ à droite, est égal à **A** :

  $\mathbf{I}_m \mathbf{A} = \mathbf{A}\, \mathbf{I}_n = \mathbf{A}$

- La **transposée du produit de deux matrices** est égale au produit des transposées, dans l'ordre inverse. Autrement dit, soient deux matrices A et B, on a :

$$(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'.$$

- Le **produit de deux matrices transposées** est une matrice symétrique. *Cette dernière propriété est une conséquence de la propriété précédente. En effet :*

$$(AA')' = (A')'A' = AA'.$$

En revanche, **le produit matriciel** ***n'est pas commutatif !***

En règle générale, lorsque le produit AB est possible, le produit BA ne l'est pas (voir l'exemple de produit matriciel page précédente, où A est une matrice de format (2 , 3) et B, une matrice de format (3 , 4)).

En outre, même lorsque ces deux produits AB et BA sont possibles, ils peuvent être différents, par exemple si on prend les matrices : A $= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et B = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ on a :

$$A \times B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} \; et \; B \times A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$$

E. Matrice inverse

Définition : On dit que la matrice carrée M d'ordre n est l'inverse de la matrice carrée A d'ordre n si et seulement si, on a :

$$\mathbf{A\,M = M\,A = I_n}\,.$$

On note alors cette matrice : $\mathbf{M = A^{-1}}$.

Propriété : lorsqu'elle existe, la matrice A^{-1} est **unique**.

Il existe plusieurs façons de déterminer A^{-1}, que nous aborderons dans la suite de ce cours et au S4.

III. Pivot de Gauss – Résolution de systèmes d'équations linéaires

A. Equations linéaires

Rappelons tout d'abord qu'une **équation** est une égalité de la forme :

membre de gauche = membre de droite (ci-dessous : MG = MD)

ou

1er membre = 2nd membre.

Définition : On appelle **équations linéaires**, les équations de la forme :

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = u$$

c'est à dire :

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_ix_i = u,$$

où les a_i (i = 1, …, n) et u sont les **coefficients** ou **paramètres** (réels) et où les x_i (i = 1, …, n) sont les **inconnues** à déterminer en fonction des paramètres.

Voici quelques exemples :

- ***Exemple 1*** *– équation E_1 : 5x = – 3*

L'équation $5x = -3$ (appelée $E1$) est linéaire.
Les réels 5 et – 3 sont les paramètres de cette équation, x en est l'inconnue ou la variable.
Cette équation a donc une seule inconnue et est de la forme :

un réel × l'inconnue = un réel

ou

$ax = u.$

On la *résout* en déterminant la (ou les) valeur(s) de x qui la vérifie(nt). Ici, comme :

$$5x = -3 \Rightarrow x = -3/5\,,$$

l'équation E_1a pour unique *solution* : $x = -3/5$
Géométriquement, il s'agit d'un **point** sur la droite des réels.

- ***Exemple 2*** *– équation E_2 : x + 2y = 10*

L'équation E_2 est également linéaire. Les réels 1, 2 et 10 en sont les coefficients (ou paramètres) ; x et y en sont les inconnues. Le point ou couple (x, y) est l'inconnue de E_2.
Cette équation est donc plus généralement de la forme : $ax + by = u$. On aura reconnu *l'équation d'une droite*. Et, comme :

$$x + 2y = 10 \Rightarrow y = -0{,}5x + 5,$$

l'équation E_2 a une infinité de solutions : ce sont tous les couples de la forme $(x\,;\,-0{,}5x+5)$.
Géométriquement, ce sont tous les points de la **droite** d'équation : $x + 2y = 10$ ou $y = -0{,}5x+5$.

- ***Exemple 3*** *– équation E_3 : $2x - 3y + z = 1$*

L'équation E_3 est linéaire. Les réels 2, – 3, 1 et 1 en sont les coefficients (ou paramètres) ; x, y et z en sont les inconnues. Le point ou triplet $(x\,;y\,;z)$ est l'inconnue de E_3.
Cette équation est donc plus généralement de la forme : $ax + by + cz = u$. C'est l'*équation d'un plan*. Et comme :

$$2x - 3y + z = 1 \Rightarrow z=1-2x+3y,$$

l'équation E_3 a une infinité de solutions : ce sont tous les triplets de la forme $(x\,;y\,;1-2x+3y)$. Géométriquement, ce sont tous les points du **plan** d'équation $2x - 3y + z = 1$.

B. Systèmes d'équations linéaires

On appelle **système de m équations linéaires à n inconnues**, un système du type :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = b_1 & & L_1 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots & & \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = b_m & & L_m \end{cases}$$

Ou L_i désigne la $i^{ème}$ équation. Les inconnues de ce système sont les n nombres $x_1 \dots x_n$, les coefficients a_{ij} et b_i étant donnés.

Remarque : un système qui comporte autant d'équations que d'inconnues est dit carré. Sinon, il est dit rectangulaire (large ou haut).

- Première méthode de résolution : résolution par substitution. Non utilisée dans ce cours.
- Seconde méthode de résolution : méthode du **pivot de Gauss** : on garde une équation inchangée (le pivot), et on remplace chacune des autres équations par une combinaison linéaire d'elle-même (avec un coefficient non nul) et du pivot, dans le but d'y faire disparaître d'une des inconnues. On procède de même pour faire disparaître les autres inconnues (sans toucher au pivot), jusqu'à obtenir un système triangulaire.
  <u>Remarque :</u> le choix du pivot est libre, de même que l'inconnue à supprimer.

Définition : on appelle **combinaison linéaire** de deux équations L_i et L_k l'équation $\alpha L_i + \beta L_k$, où α et β sont deux réels quelconques.

Remarque : Un système dont le second membre est 0 est appelé **système homogène.** Un tel système **a toujours au moins $X = \vec{0}$ pour solution.**

1. Cas des systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues

Soit le système S_1 :

$$S_1 : \begin{cases} x + 2y = 10 & L_1 \\ 2x - \ \ y = \ \ 5 & L_2 \end{cases}.$$

Dans le système S_1, si on garde L_1 comme pivot, on peut par exemple faire disparaître x dans L_2 en remplaçant cette équation par $L'_2 = 1 \times L2 - 2 \times L1$, puisque $1 \times 2x - 2 \times x = 0$[1]. Le système S_1 devient alors :

$$S'_1 \quad \begin{cases} x + 2y = \ \ 10 & L_1 \\ \quad - 5y = -15 & L'_2 = L_2 - 2 \times L_1 \end{cases}$$

L'intérêt de cette méthode est que les systèmes S_1 et S'_1 ont *le même ensemble de solutions*[2] : on dit qu'ils sont ***équivalents***. Il s'ensuit que, pour déterminer l'ensemble des solutions du système S_1, il suffit de résoudre le système S'_1, ce qui se fait, très facilement, en commençant par la seconde équation, qui n'a plus qu'une inconnue, y, qu'il est dès lors facile de déterminer. En effet, de L'_2, on déduit aisément que :

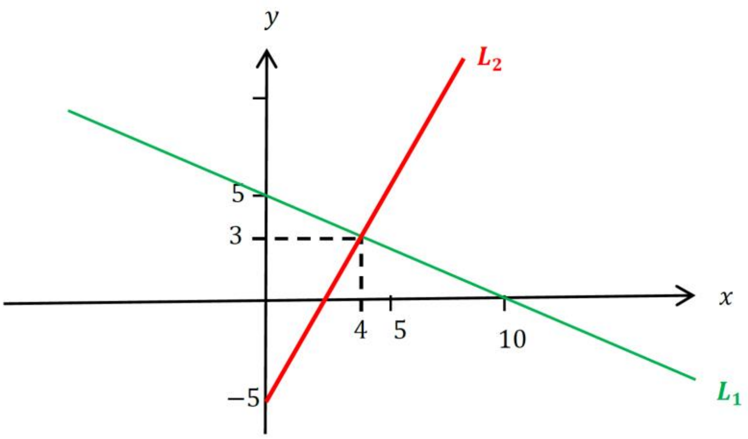
$$y = \frac{-15}{-5} \Rightarrow y = 3.$$

On peut alors déduire la valeur de x, en remplaçant y par sa valeur dans L_1 :

$$x = 10 - 2 \times y = 10 - 2 \times 3 = 4.$$

Le système S_1 a ainsi pour unique solution : $x = 4$ et $y = 3$, ce que l'on peut écrire : $\binom{4}{3}$.

Géométriquement, $\binom{4}{3}$ est l'intersection des deux droites d'équations L_1 et L_2 (voir graphique).



Remarque : toute égalité de la forme $ax + by = u$ peut s'interpréter comme l'équation d'une droite dans le plan. La solution d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues est donc donnée par l'intersection de deux droites. Or, en règle générale, deux droites se coupent en un seul point (comme dans le cas de S_1, le système a alors *une unique solution*). Il n'en est cependant pas ainsi dans les cas particuliers où

- les droites sont confondues. C'est le cas lorsque les deux équations sont *proportionnelles*, autrement dit lorsque $L_2 = \alpha L_1$. Le système a alors *une infinité de solutions*, qui sont tous les points de l'unique droite dont L_1 et L_2 sont l'équation.
- les droites sont parallèles sans être confondues (elles ont le même coefficient directeur, mais pas la même ordonnée à l'origine lorsque $MG_2 = \alpha MG_1$ et $MD_2 \neq \alpha MD_1$). Le système n'a alors *aucune solution* puisqu'aucun point n'est commun aux deux droites.

2. Cas des systèmes de trois équations linéaires à trois inconnues

Soit le système S_2 :

$$S_2 \begin{cases} x - y + z = -1 & L_1 \\ -x + 2y + 2z = 0 & L_2 \\ 2x + y - 2z = -5 & L_3 \end{cases}$$

Conseil : pour simplifier, on choisira toujours de garder, dans un premier temps, la première équation comme pivot (ici L_1) et de faire disparaître la première inconnue (ici x).
Dans le système S_1, si l'on garde L_1 comme pivot, on peut faire disparaître x dans le reste du système en remplaçant L_2 par $L'_2 = L_2 + L_1$, et L_3 par $L'_3 = L_3 - 2\times L_1$ par exemple.
Le système S_2 devient alors :

$$S'_2 \begin{cases} x - y + z = -1 & L_1 \\ y + 3z = -1 & L'_2 = L_2 + L_1 \\ 3y - 4z = -3 & L'_3 = L_3 - 2 \times L_1 \end{cases}$$

Attention :

- ✓ Chacune des deux équations L_2 et L_3 est remplacée par une combinaison linéaire d'elle-même (avec un coefficient non nul) et du pivot (ici L_1).
- ✓ Il est impératif de faire disparaître la même inconnue (ici x) des équations autres que le pivot.

On remarque alors que le système S'_2 est composé du pivot, L_1, et d'un sous-système de deux équations (L'_2 et L'_3) à deux inconnues (y et z), en bleu ci-dessous. En éliminant la même inconnue dans les équations autres que le pivot, on fait ainsi apparaître un sous-système comportant une inconnue de moins (ici x) :

$$S'_2 \begin{cases} x - y + z = -1 & L_1 \\ y + 3z = -1 & L'_2 \\ 3y - 4z = -3 & L'_3 \end{cases}$$

A ce sous-système, de deux équations à deux inconnues, on peut alors appliquer la méthode du pivot. Pour ce faire, on procède exactement comme on l'a fait pour le système S_1 : on choisit L'_2 comme pivot et on remplace L'_3 par une combinaison linéaire d'elle-même (avec un coefficient non nul) et de ce nouveau pivot (L'_2) de façon à y faire disparaître l'inconnue y. On peut par exemple remplacer L'_3 par $L''_3 = L'_3 - 3L'_2$, ce qui donne :

$$S''_2 \begin{cases} x - y + z = -1 & L_1 \\ y + 3z = -1 & L'_2 \\ -13z = 0 & L''_3 = L'_3 - 3L'_2 \end{cases}.$$

En éliminant ainsi les variables, on « triangularise » le membre de gauche du système (voir triangle orange sur le système S''_2). Comme dans le cas précédent, les systèmes S_2 , S'_2 *et* S''_2 sont équivalents. Ils ont le même ensemble de solutions. Or S''_2 est très facile à résoudre, en commençant par la 3e équation, puis en remontant. La 3e équation permet de déterminer z :

$$S''_2 \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = -1 & L_1 \\ y + 3z = -1 & L'_2, \\ z = 0 & L''_3 \end{cases}$$

Après avoir remplacé z par 0 dans les deux autres équations, la 2e équation permet de déterminer y :

$$S''_2 \Rightarrow \begin{cases} x - y = -1 & L_1 \\ y = -1 & L'_2. \\ z = 0 & L''_3 \end{cases}$$

En remplaçant y par -1 dans L_1, on trouve alors x :

$$S''_2 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + y = -2 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Le système S_2 a ainsi le triplet $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour unique solution.

Remarque – Toute égalité de la forme $ax + by + cz = u$ peut s'interpréter comme l'équation d'un plan dans l'espace. La solution d'un système de trois équations linéaires à trois inconnues est donc donnée par l'intersection de trois plans. Or, en règle générale, trois plans se coupent en un seul point : en règle générale deux plans se coupent en une droite et une droite et un plan se coupent en un point. Dans ce cas (qui est celui de S_2), le système a alors *une unique solution*. Il n'en est cependant pas ainsi dans les cas particuliers où l'un des plans est une combinaison linéaire des deux autres ou lorsqu'ils sont confondus (le système a alors *une infinité de solutions*) ou encore lorsque au moins deux des trois plans sont parallèles sans être confondus (le système n'a alors *aucune solution* puisqu'aucun point n'est commun aux deux plans).

Considérons, par exemple, le système S_3 suivant :

$$S_3 \begin{cases} x - y + z = 1 & L_1 \\ -x + y - z = a & L_2 \\ 2x - 2y + 2z = b & L_3 \end{cases}$$

Les membres de gauches de ces trois équations sont proportionnels. En effet, notant MG_i le membre de gauche de l'équation L_i, on a : $MG_2 = -1 \times MG_1$ et $MG_3 = 2 \times MG_1$. Les trois plans sont donc confondus ou parallèles sans être confondus selon les valeurs des paramètres a et b.

- Si $a = -1$ et $b = 2$: le lien entre les membres de droite est le même que celui existant entre les membres de gauches (c'est-à-dire que $MD_2 = -1 \times MD_1$ et $MD_3 = 2 \times MD_1$). Les trois plans sont alors confondus et le système a une infinité de solutions. En effet, dans ce cas :

$$S_3 \begin{cases} x - y + z = 1 & L_1 \\ -x + y - z = -1 & L_2 \\ 2x - 2y + 2z = 2 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 & L_1 \\ 0 = 0 & L_2 + L_1 \\ 0 = 0 & L_3 - 2L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \{z = 1 - x + y$$

L'ensemble des solutions du système S_3 est alors : $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 - x + y \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\}$.

- Si $a \neq -1$ ou $b \neq 2$: l'un des liens entre les membres de droites diffère du lien existant entre les membres de gauche. Par exemple pour $a = -1$ mais $b = 3$, le plan dont L_3 est l'équation est parallèle aux deux autres et le système n'a aucune solution et on peut alors noter que l'ensemble des solutions est $\emptyset$, ce qui est le symbole de « l'ensemble vide ».. En effet, dans ce cas, l'application de la méthode du pivot au système S_3 fait apparaître une équation impossible (ci-dessous L'_3) :

$$S_3 \begin{cases} x - y + z = 1 & L_1 \\ -x + y - z = -1 & L_2 \\ 2x - 2y + 2z = 3 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 & L_1 \\ 0 = 0 & L'_2 = L_2 + L_1 \\ 0 = 1 & L'_3 = L_3 - 2L_1 \end{cases}.$$

3. Cas des systèmes n'ayant pas le même nombre d'équations que d'inconnues

- S'il y a plus d'équations que d'inconnues, le cas le plus fréquent est l'absence de solution.

Par exemple, dans un système de 3 équations à 2 inconnues, chaque ligne est l'équation d'une droite. On cherche donc s'il existe un ou des couples appartenant aux trois droites en même temps.

  - ✓ Or, le plus souvent, 3 droites ne se coupent pas au même point. La situation la plus fréquente est donc l'absence de solution.
  - ✓ Il est rare qu'elles se coupent au même point. Dans ce cas, le système a une solution unique.
  - ✓ Il est également rare que les trois droites soient confondues. Dans ce cas, il y a une infinité de solutions.

- S'il y a moins d'équations que d'inconnues, le cas le plus fréquent est une infinité de solutions.

Par exemple, dans un système de 2 équations à 3 inconnues, chaque ligne est l'équation d'un plan. On cherche donc s'il existe un ou des triplets appartenant aux deux plans en même temps.

  - ✓ Le plus souvent, 2 plans se coupent en une droite. Le système a donc une infinité de solutions (tous les triplets de la droite).
  - ✓ Il est rare que les plans soient confondus. Dans ce cas aussi il y a une infinité de solutions (tous les triplets du plan)
  - ✓ Il est rare que ces plans soient parallèles. Dans ce cas il n'y a aucune solutions (aucun triplet n'appartient simultanément aux deux plans)
  - ✓ Il est impossible que deux plans se coupent en un point ! Le système ne peut donc pas avoir une unique solution.

4. Représentation matricielle

Un système de m équations linéaires à n inconnues peut s'écrire sous la forme d'un produit matriciel AX = B ou, plus simplement, avec sa **matrice élargie (A|B).** La méthode du pivot permet aussi de déterminer l'inverse d'une matrice carrée (voir aussi au S4).

Reprenons le système S_2 résolu dans le chapitre précédent :

$$S_2 \begin{cases} x - \ \ y + \ z \ = -1 & L_1 \\ -x + 2y + 2z = \ \ 0 & L_2. \\ 2x + \ \ y - 2z = -5 & L_3 \end{cases}$$

On peut donc écrire $\begin{pmatrix} x-y+z \\ -x+2y+2z \\ 2x+y-2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y \\ 2y \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Ainsi on a :

$$S_2 \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}}.$$

Les symboles désignant ces variables n'ayant pas grande importance (au sens où l'ensemble des solutions reste inchangé lorsqu'on remplace x, y et z, par x_1, x_2 et x_3, ou par α, β et γ, par exemple), tous les éléments qui caractérisent le système S_2 peuvent être regroupés dans une matrice unique :

$$(\mathbf{A}|\mathbf{U}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

appelée **matrice élargie** du système, dans laquelle une barre verticale sépare les coefficients (à gauche) des éléments du second membre (à droite).

Lorsque le système est ainsi présenté, la méthode du pivot consiste à « triangulariser » la partie gauche de la matrice élargie en y faisant apparaître des zéro. C'est ce qui apparaît ci-dessous où les différentes étapes de la résolution de S_2 sont reprises, à gauche, sous la forme de systèmes (comme dans le chapitre précédent), et à droite, sous la forme de matrices élargies :

$$S_2 \begin{cases} x - y + z = -1 \\ -x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = -5 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \qquad (\mathbf{A}|\mathbf{U}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

$$S_2' \begin{cases} x - y + z = -1 \\ \quad y + 3z = -1 \\ \quad 3y - 4z = -3 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L_1 \\ L_2' = L_2 + L_1 \\ L_3' = L_3 - 2L_1 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & -3 \end{array}\right)$$

$$S_2'' \begin{cases} x - y + z = -1 \\ \quad y + 3z = -1 \\ \quad -13z = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L_1 \\ L_2' \\ L_3'' = L_3 - 3L_2' \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -13 & 0 \end{array}\right)$$

Comme vu précédemment, le système S2 a ainsi le triplet $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour unique solution.

C. Détermination de l'inverse d'une matrice carrée par la méthode du pivot

La méthode du pivot permet de savoir si une matrice carrée a une inverse (on dit alors qu'elle est **inversible**) et, le cas échéant, de la déterminer.

METHODE

Si **A** est la matrice que l'on cherche à inverser, on considère le système :

$$[1]\ AX = U$$

où X et U sont des matrices colonnes quelconques. On peut aussi écrire ce système :

$$AX = IU$$

où I est la matrice identité de même ordre que A. On applique alors la méthode du pivot à ce système, en combinant ses lignes, de façon à transformer A en une matrice identité. Comme, ce faisant, on combine également les lignes de I, on arrive finalement à une égalité de la forme :

$$IX = MU$$

ou encore :

$$X = MU$$

La matrice M est en fait l'inverse de A, si elle existe. En effet, en pré-multipliant les deux membres de l'équation [1] par A^{-1}, il vient :

$$A^{-1}AX = A^{-1}U$$

Remarque : pour que le raisonnement précédent soit valable, et donc que A^{-1} existe, il faut pouvoir transformer A en la matrice identité de même ordre, ce qui n'est possible que si, lors de sa « triangularisation », aucun zéro n'apparaît sur sa diagonale (on verra plus loin d'autres méthodes permettant de savoir si une matrice carrée est inversible).

Pour voir concrètement comment on procède, on va reprendre l'exemple de la matrice A (du système S_2) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

On considère alors le système :

$$AX = IU$$

C'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} U$$

Etape 1 – Pour y faire apparaître une matrice I à la place de la matrice A, ***on commence par triangulariser cette matrice.*** Pour ce faire, on garde L_1 comme pivot et l'on remplace L_2 et L_3 respectivement par $L_2 + L_1$ et $L_3 - 2L_1$, et on le fait dans toute l'équation, donc dans les deux matrices, ce qui donne :

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L'_2 = L_2 + L_1 \\ L'_3 = L_3 - 2L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} U$$

On réitère alors l'opération, en prenant L'_2 comme pivot et en remplaçant L'_3 par $L'_3 - 3L'_2$ dans les deux matrices, ce qui donne :

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L'_2 \\ L''_3 = L'_3 - 3L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix} U$$

La matrice du membre de gauche de ce système est alors une matrice triangulaire supérieure.

Etape 2 – *L'étape suivante consiste à* ***la transformer en une matrice diagonale***. Pour ce faire, on applique à nouveau la méthode du pivot, mais en choisissant, cette fois-ci, la dernière ligne L''_3 comme pivot de façon à faire apparaître des 0 dans la dernière colonne de la matrice. On remplace L'_2 par $L''_2 = 13L_2' + 3L_3''$ et L_1 par $L'_1 = 13L_1 + L''_3$. On obtient alors :

$$\begin{array}{c} L'_1 = 13L_1 + L''_3 \\ L''_2 = 13L'_2 + 3L''_3 \\ L''_3 \end{array} \begin{pmatrix} 13 & -13 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix} U$$

En gardant, enfin, L''_2 comme pivot et en remplaçant L'_1 par $L'_1 + L''_2$, il vient :

$$\begin{array}{c} L'_1 = L_1 + L''_2 \\ L''_2 \\ L''_3 \end{array} \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix} U$$

Etape 3 – La dernière étape consiste à **transformer la matrice diagonale du membre de gauche en une matrice identité.** Pour ce faire, il suffit de diviser $L''1$ et $L''3$ par 13 et $L2''$ par – 13, ce qui donne :

$$\begin{array}{c} L'_1/13 \\ L''_2/13 \\ L''_3/(-13) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 6/13 & 1/13 & 4/13 \\ -2/13 & 4/13 & 3/13 \\ 5/13 & 3/13 & -1/13 \end{pmatrix} U$$

Remarques :

- Comme X et U restent inchangées lors de toutes ces opérations, on peut **travailler sur la matrice élargie** :

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

  En procédant comme ci-dessus, on obtient dans ce cas :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6/13 & 1/13 & 4/13 \\ 0 & 1 & 0 & -2/13 & 4/13 & 3/13 \\ 0 & 0 & 1 & 5/13 & 3/13 & -1/13 \end{array}\right)$$

  La matrice située à droite de la barre verticale est alors B^{-1}.

- On vérifie que le système

$$AX = U, \text{ où } U = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

  résolu dans le paragraphe précédent, a pour solution :

$$X = A^{-1}U = \begin{pmatrix} 6/13 & 1/13 & 4/13 \\ -2/13 & 4/13 & 3/13 \\ 5/13 & 3/13 & -1/13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$