Examen de maturité
Applications des mathématiques
Années 201σ à 201χ
Lycée Denis-de-Rougemont

Tous les problèmes ont le même poids pour le calcul de la note.

Problème 1

On considère les courbes paramétriques

$$c_1 : \begin{cases} x = \cos(\frac{\pi}{2}t) \\ y = \sin(\frac{\pi}{2}t) \end{cases} \quad \text{et} \quad c_2 : \begin{cases} x = \frac{1}{2}(4-\pi)t^3 + \frac{1}{2}(\pi-6)t^2 + 1 \\ y = \frac{1}{2}(\pi-4)t^3 + (3-\pi)t^2 + \frac{\pi}{2}t \end{cases} \quad \text{avec } t \in [0;1] \text{ pour les 2 courbes.}$$

La courbe c_1 est un quart du cercle unité et la courbe c_2 est proche de la courbe c_1 .

a) Montrer qu'en $t = 0$ et $t = 1$ les deux courbes passent par le même point avec des vecteurs vitesse égaux.

b) En $t = \frac{1}{2}$, la courbe c_1 passe par un point P_1 et la courbe c_2 passe par un point P_2.
Vérifier que pour chacun de ces points l'abscisse est égale à l'ordonnée, puis calculer la distance entre ces deux points.

c) Montrer qu'en $t = \frac{1}{2}$ les vecteurs vitesse des deux courbes sont parallèles.

d) Programmer une représentation graphique de la courbe c_2 composée de 256 segments rectilignes.
On suppose que les fonctions

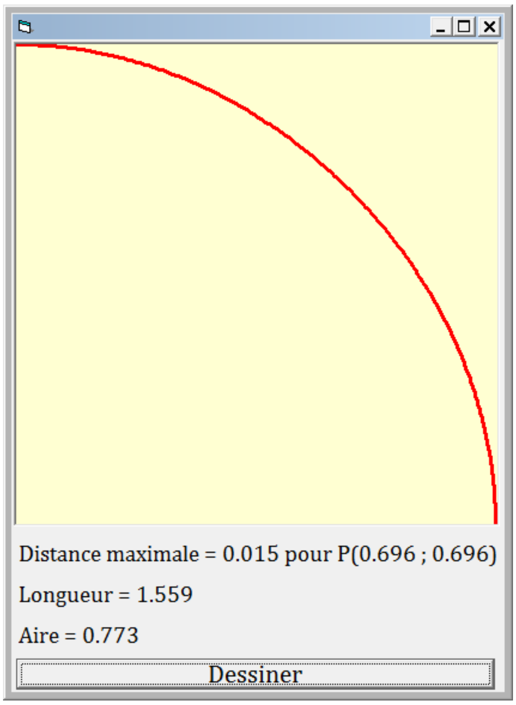
$$f(t) = \frac{1}{2}(4-\pi)t^3 + \frac{1}{2}(\pi-6)t^2 + 1 \quad \text{et}$$
$$g(t) = \frac{1}{2}(\pi-4)t^3 + (3-\pi)t^2 + \frac{\pi}{2}t$$

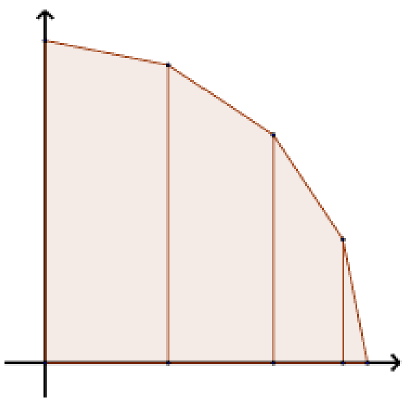
sont déjà programmées.
Le dessin se fera dans *Picture1*, une zone graphique carrée dont les pixels auront des coordonnées comprises entre 0 et 400.
On rappelle que dans une zone graphique l'origine $O(0;0)$ se trouve en haut à gauche.

Le programme devra en plus calculer et afficher avec 3 décimales les informations suivantes :

- le point de la courbe c_2 le plus éloigné de la courbe c_1 ainsi que la distance entre ce point et la courbe ;
- la longueur de la courbe c_2 ;
- l'aire de la surface comprise entre la courbe c_2 et l'axe des abscisses.

Pour le calcul de la longueur et de l'aire, s'inspirer de l'illustration ci-contre dans laquelle on a approché la courbe par 4 segments rectilignes.





Problème 2

On se propose d'approcher le graphe une solution d'une équation différentielle par des arcs de cubique.

On s'intéresse à la solution s de l'équation différentielle $y' = 8x^2 - 4y^2 - 1$ avec la condition initiale $s(0) = \frac{1}{2}$.

a) Estimer, par la méthode d'Euler avec un pas $h = \frac{1}{2}$, la valeur de $s(1)$ et de $s'(1)$.

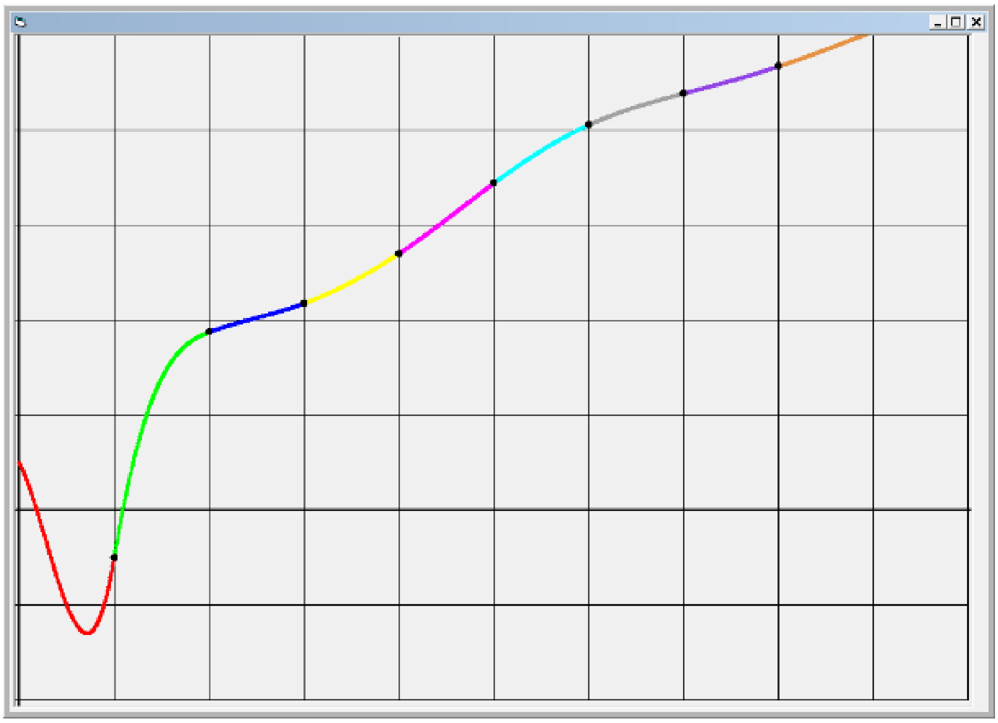
b) Déterminer les coefficients a, b, c et d de la fonction $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ de sorte que $p(0) = s(0) = \frac{1}{2}$, $p'(0) = s'(0) = -2$, $p(1) = -\frac{1}{2}$ et $p'(1) = 6$.
Déterminer le minimum du graphe de p.
Calculer une estimation du zéro de p compris dans l'intervalle $[0; 1]$ en utilisant un pas de la méthode de Newton avec la valeur initiale $x = 0$.
Dessiner finalement le graphe de p pour $x \in [0; 1]$.

c) Écrire un programme qui calcule et affiche une estimation de $s(1)$ et une estimation de $s'(1)$ en utilisant la méthode de Runge avec un pas $h = \frac{1}{256}$.

d) On suppose maintenant que l'on dispose d'une procédure $Cubique(x0, y0, p0, x1, y1, p1)$ qui trace, pour des x variant entre $x0$ et $x1$, le graphe de la cubique c telle que $c(x0) = y0$, $c'(x0) = p0$, $c(x1) = y1$ et $c'(x1) = p1$.

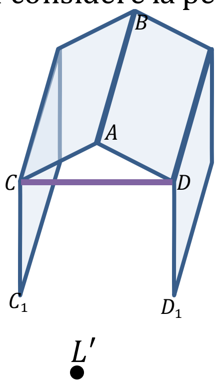
L'instruction *Call* $Cubique(0,1,-1,1,0,2)$ tracera par exemple le graphe de la cubique d'extrémités $(0; 1)$ et $(1; 0)$ ayant une pente égale à -1 en $x = 0$ et à 2 en $x = 1$. Si cette instruction est suivie, par exemple, par l'instruction *Call* $Cubique(1,0,2,2,3,-2)$, le dessin sera complété par le graphe de la cubique d'extrémités $(1; 0)$ et $(2; 3)$ ayant une pente égale à 2 en $x = 1$ et à -2 en $x = 2$.

Écrire un programme qui utilise cette procédure *Cubique* pour dessiner une approximation de la solution s, pour x compris entre 0 et 10, par 10 arcs de cubique. Chaque arc de cubique relie deux points, d'abscisses entières et consécutives, du graphe de l'estimation de s obtenue par la méthode de Runge avec un pas de $\frac{1}{256}$.



Problème 3

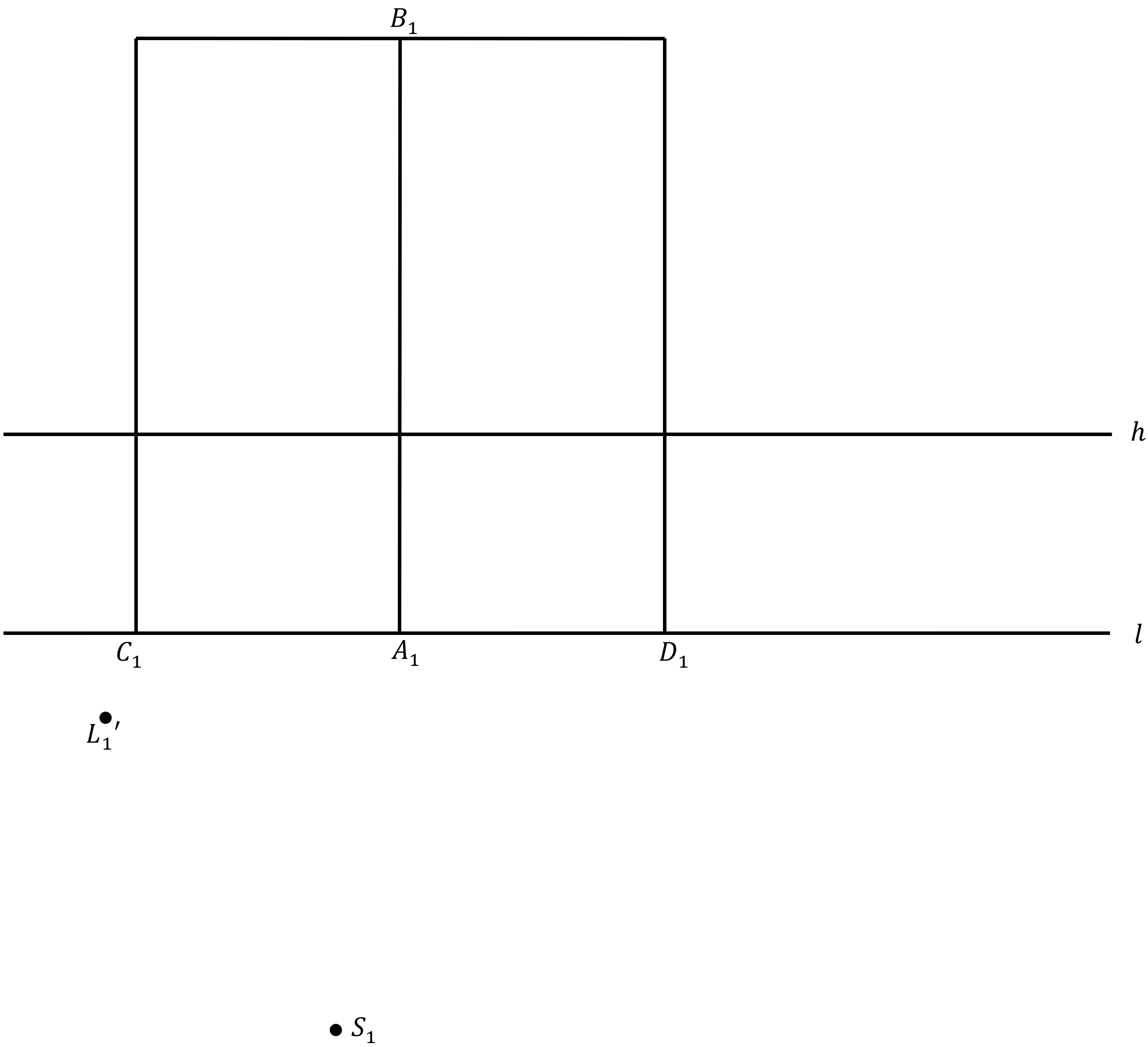
On considère la perspective de centre S sur l'écran donné par la droite l et de ligne d'horizon h.



a) Construire la perspective de la maquette d’un abri constitué de 2 façades verticales et d’un toit à 2 pans donné par sa projection dans le sol. La hauteur du faîte du toit (AB) est égale à 8 cm, celle des façades latérales est égale à 6 cm. Une poutre relie les points C et D.

b) L’abri est éclairé par une source lumineuse ponctuelle L donnée par $L_1{}'$ et L'. Construire la perspective de l'ombre de l’abri sur le sol.

c) Construire la perspective de la partie éclairée de l'intérieur de l’abri sans oublier l’ombre de la poutre.



Problème 1

$$c_1 : \begin{cases} x = \cos(\frac{\pi}{2}t) \\ y = \sin(\frac{\pi}{2}t) \end{cases} \text{ et } c_2 : \begin{cases} x = \frac{1}{2}(4-\pi)t^3 + \frac{1}{2}(\pi-6)t^2 + 1 \\ y = \frac{1}{2}(\pi-4)t^3 + (3-\pi)t^2 + \frac{\pi}{2}t \end{cases} \quad t \in [0;1].$$

$$\vec{v}_1 = \frac{\pi}{2}\begin{pmatrix} -\sin(\frac{\pi}{2}t) \\ \cos(\frac{\pi}{2}t) \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}(4-\pi)t^2 + (\pi-6)t \\ \frac{3}{2}(\pi-4)t^2 + (6-2\pi)t + \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}.$$

a) En $t = 0$ on a pour les 2 courbes $P_{t=0}(1;0)$ et $\vec{v}(0) = \frac{\pi}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En $t = 1$ on a pour les 2 courbes $P_{t=1}(0;1)$ et $\vec{v}(1) = \frac{\pi}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $t = \frac{1}{2} \Rightarrow P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ou $P_1(0{,}707;0{,}707)$,et $P_2\left(\frac{\pi+8}{16};\frac{\pi+8}{16}\right)$ ou $P_2(0{,}696;0{,}696)$.

De plus $\|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi+8}{16}\right) \cong 0{,}015$.

c) En $t = \frac{1}{2}$, $\vec{v}_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cong 1{,}111\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{12-\pi}{8}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cong 1{,}107\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

d)
```
Private Sub Command1_Click()
Let x0 = f(0)
Let y0 = g(0)
Let xe = 400
Let ye = 400
Picture1.PSet (xe, ye)
Let pas = 1 / 256
For t = pas To 1 Step pas
   Let x1 = f(t)
   Let y1 = g(t)
   Let xe = Int(400 * X1 + 0.5)
   Let ye = Int(400 - 400 * Y1 + 0.5)
   Picture1.Line -(xe, ye)
   Let dist = Abs(Sqr(X1 ^ 2 + Y1 ^ 2) - 1)
   If dist > dmax Then
      Let dmax = dist
      Let tmax = t
   End If
   Let longueur = longueur + Sqr((x1 - x0) ^ 2 + (y1 - y0) ^ 2)
   Let aire = aire + (y0 + y1) / 2 * (x0 - x1)
   Let x0 = x1
   Let y0 = y1
Next t
Let x = Int(1000 * f(tmax) + 0.5) / 1000
Let y = Int(1000 * g(tmax) + 0.5) / 1000
Let Label1.Caption = "Distance maximale = " & dmax & " pour P(" & x & " ; " & y & ")"
Let Label2.Caption = "Longueur = " & longueur
Let Label3.Caption = "Aire = " & aire
End Sub.
```

Problème 2

a)

x	y	$p = 8x^2 - 4y^2 - 1$
0	$\frac{1}{2}$	-2
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
1	$-\frac{1}{2}$	6

b) $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + \frac{1}{2} \quad p(1) = ax^3 + bx^2 + cx + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \Longrightarrow\ a + b + c = -1$

$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad p'(0) = -2$

$\Longrightarrow c = -2,\ \ p'(1) = 6 \Longrightarrow 3a + 2b - 2 = 6$

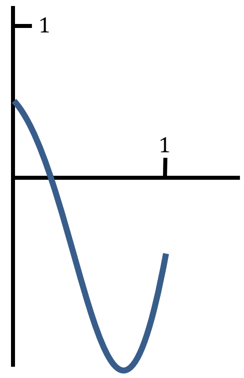
$\begin{cases} a + b = 1 \\ 3a + 2b = 8 \end{cases} \Longrightarrow a = 8 - 2 = 6, b = -5$

$p(x) = 6x^3 - 5x^2 - 2x + \frac{1}{2}$

$p'(x) = 18x^2 - 10x - 2 \quad p'(x) = 0$

$\Longrightarrow x = \frac{5 \mp \sqrt{61}}{18} \cong 0{,}7, y = -1{,}3$

Zéro avec un pas de Newton en partant de $x = 0$: $x_1 = 0 - \frac{\frac{1}{2}}{-2} = \frac{1}{4}$



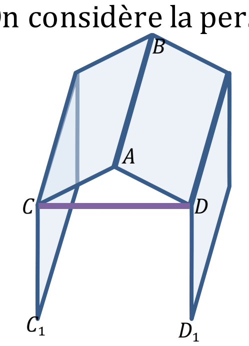
c)
```
Function f(x, y)
  Let f = 8*x ^ 2 – 4*y ^ 2-1
End Function

Private Sub Picture1_Click()
  Let h = 1 / 256
  Let x = 0: Let y = ½
  Do
   Let xm = x + h / 2
   Let ym = y + h / 2 * f(x, y)
   Let x = x + h
   Let y = y + h * f(xm, ym)
 Loop Until x >= 1
 Let Label1.Caption = y
 Let Label2.Caption = f(x, y)
End Sub
```

d)
```
Let h = 1 / 256
Let x = 0
Let y = 1 / 2
Let i = 0
Let x0 = x
Let y0 = y
Do
 Let i = i + 1
 Let xm = x + h / 2
 Let ym = y + h / 2 * f(x, y)
 Let x = x + h
 Let y = y + h * f(xm, ym)
 If i = 256 Then
   Let i = 0
   Call cubique(x0, y0, f(x0, y0), x, y, f(x, y))
  Let x0 = x
  Let y0 = y
 End If
Loop Until x >= 10
```

Problème 3

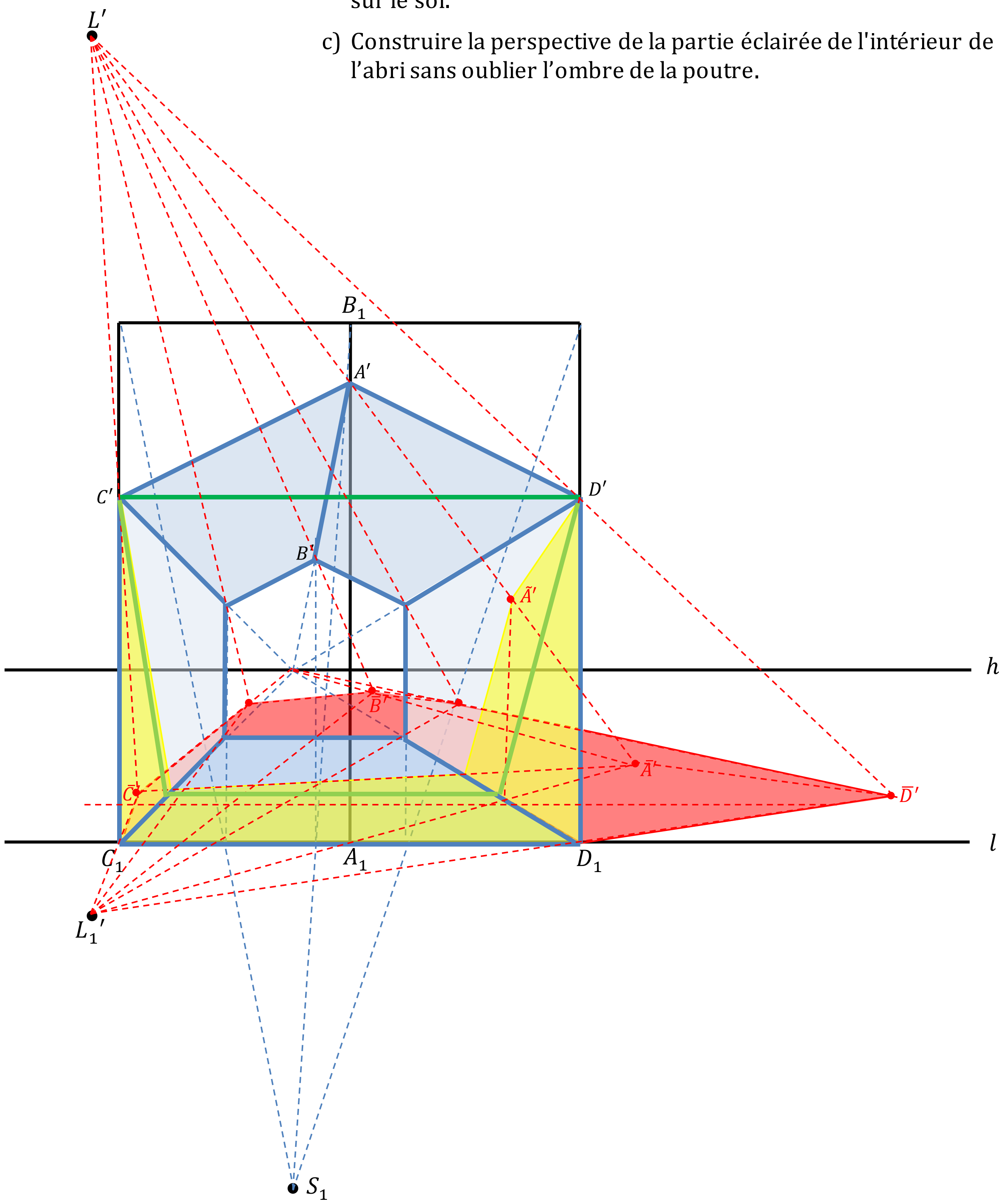
On considère la perspective de centre S sur l'écran donné par la droite l et de ligne d'horizon h.



a) Construire la perspective de la maquette d'un abri constitué de 2 façades verticales et d'un toit à 2 pans donné par sa projection dans le sol. La hauteur du faîte du toit (AB) est égale à 8 cm, celle des façades latérales est égale à 6 cm. Une poutre relie les points C et D.

b) L'abri est éclairé par une source lumineuse ponctuelle L donnée par $L_1{}'$ et L'. Construire la perspective de l'ombre de l'abri sur le sol.

c) Construire la perspective de la partie éclairée de l'intérieur de l'abri sans oublier l'ombre de la poutre.



Tous les problèmes ont le même poids pour le calcul de la note.

Problème 1

Une image en nuances de gris de taille 200x200 est placée sur *Picture1*.
Rappel : les 3 composantes couleur (r, g, b) d'un pixel gris ont la même valeur.

Partie 1

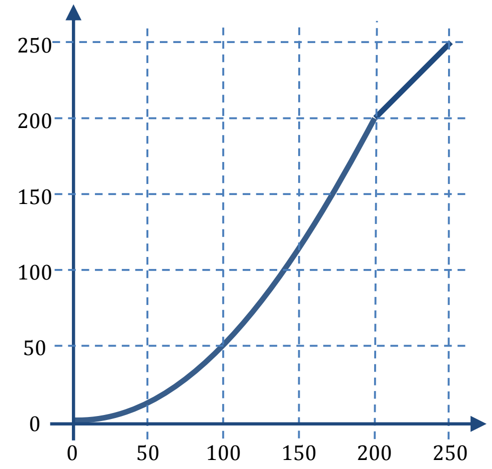
On veut modifier la luminosité de cette image en utilisant la fonction f tracée ci-contre. Son graphe est constitué d'un arc de parabole dont le sommet est à l'origine, puis d'un segment de droite.

Écrire l'expression fonctionnelle de f.

En abscisse on lit la nuance de gris initiale et en ordonnée la nuance de gris après modification.

Cette modification rend-elle l'image plus claire ou plus sombre ?

Écrire le code qui permet de modifier la luminosité de cette image selon cette fonction f. L'image modifiée sera placée sur $Picture2$.

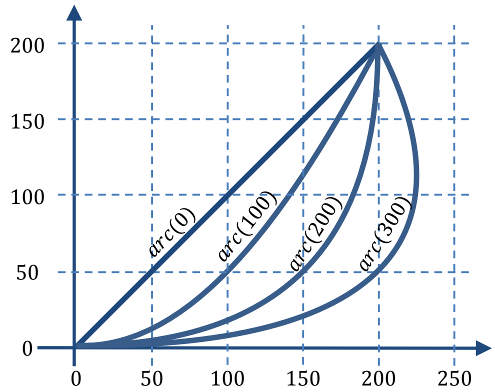


Partie 2

On considère les arcs $arc(k)$, $(k \in \mathbb{N})$ donnés par

$$arc(k): \begin{cases} x = (200 - 2k)t^2 + 2kt \\ y = 200t^2 \end{cases}, t \in [0; 1]$$

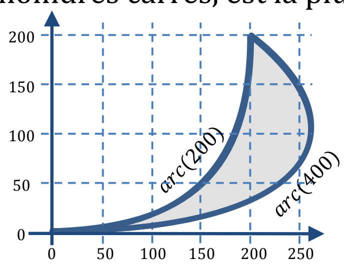
Quatre arcs sont représentés ci-contre : $arc(0)$, $arc(100)$, $arc(200)$ et $arc(300)$.



a) Le point $(180; 100)$ n'appartient à aucun de ces arcs. Il est situé entre deux arcs consécutifs $arc(m)$ et $arc(m + 1)$. Déterminer la valeur de $m \in \mathbb{N}$.

b) Pour $k \geq 200$ l'arc possède un point à tangente verticale. Déterminer la valeur de k telle que ce point corresponde à $t = \frac{3}{4}$ et en donner les coordonnées.

c) Les points $A(0; 0)$, $B(80; 50)$ et $C(200; 200)$ sont sur $arc(60)$.
On cherche la parabole d'équation $y = ax^2$ qui, au sens des moindres carrés, est la plus proche de ces trois points. Trouver a.



d) Écrire un programme qui affiche sur *Label1* une estimation de l'aire de la surface comprise en $arc(200)$ et $arc(400)$.

e) Par des compressions horizontales de l'image initiale (les ordonnées des points ne sont pas modifiées) on obtient l'image suivante, sur $Picture3$ de taille 300x200.
Une image est sur la gauche de $arc(200)$ et l'autre est entre $arc(200)$ et $arc(400)$.
Écrire le code qui permet d'obtenir ce résultat.

Problème 2

On considère la trajectoire d'un point P dans le plan. Cette trajectoire est donnée par deux fonctions $x = x(t)$ et $y = y(t)$ avec $t \in [0; 3]$.

Les fonctions x et y satisfont le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} x'(t) = 2y - t + 2 \\ y'(t) = 2t - 2x \end{cases}$$

et les conditions initiales $x(0) = -1$ et $y(0) = 1$.

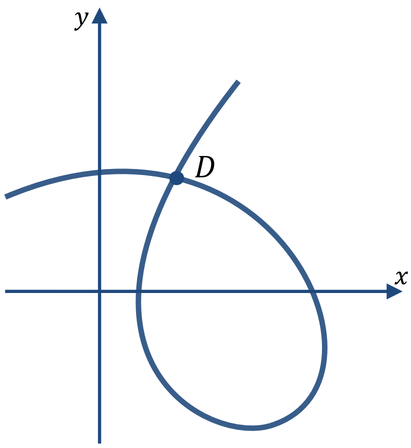
a)
- Vérifier que le vecteur vitesse en $t = 0$ est $\vec{v}(0) = \binom{4}{2}$.
- Estimer la position et le vecteur vitesse en $t = \frac{1}{3}$ avec la méthode d'Euler et un pas $h = \frac{1}{3}$.
- On approche la fonction $y = y(t)$ par le polynôme $p(t) = at^2 + bt + c$ tel que $p(0) = y(0)$ et $p'(0) = y'(0)$.
  Trouver les coefficients b et c, puis utiliser l'estimation du vecteur vitesse en $t = \frac{1}{3}$ pour trouver le coefficient a.
- Calculer une estimation de la valeur de t pour laquelle la fonction y s'annule.

b) L'expression fonctionnelle de la fonction x est

$$x(t) = t - \frac{1}{4} + \frac{3}{2}\sin(2t) - \frac{3}{4}\cos(2t)$$

En effectuant un pas de la méthode de Newton à partir de la graine $t_0 = \frac{\pi}{8}$, trouver une estimation d'un zéro de la fonction x.

Pour $t \in [0; 3]$ la trajectoire est la suivante.



c) On appelle t_1 et t_2 les valeurs de t pour lesquelles la courbe présente un point à tangente verticale.
Écrire un programme qui détermine des estimations de t_1 et t_2 en employant la méthode d'Euler avec un pas $h = \frac{1}{128}$.

d) Écrire le code d'une fonction $y = g(t)$ qui estime la fonction $y = y(t)$ en employant la méthode d'Euler avec un pas $h = \frac{1}{128}$.

e) La courbe présente un point double D.
En supposant que les coordonnées des points de la courbe sont données par deux fonctions $x = f(t)$ et $y = g(t)$ déjà programmées, écrire un programme qui estime les coordonnées du point double.

Problème 3

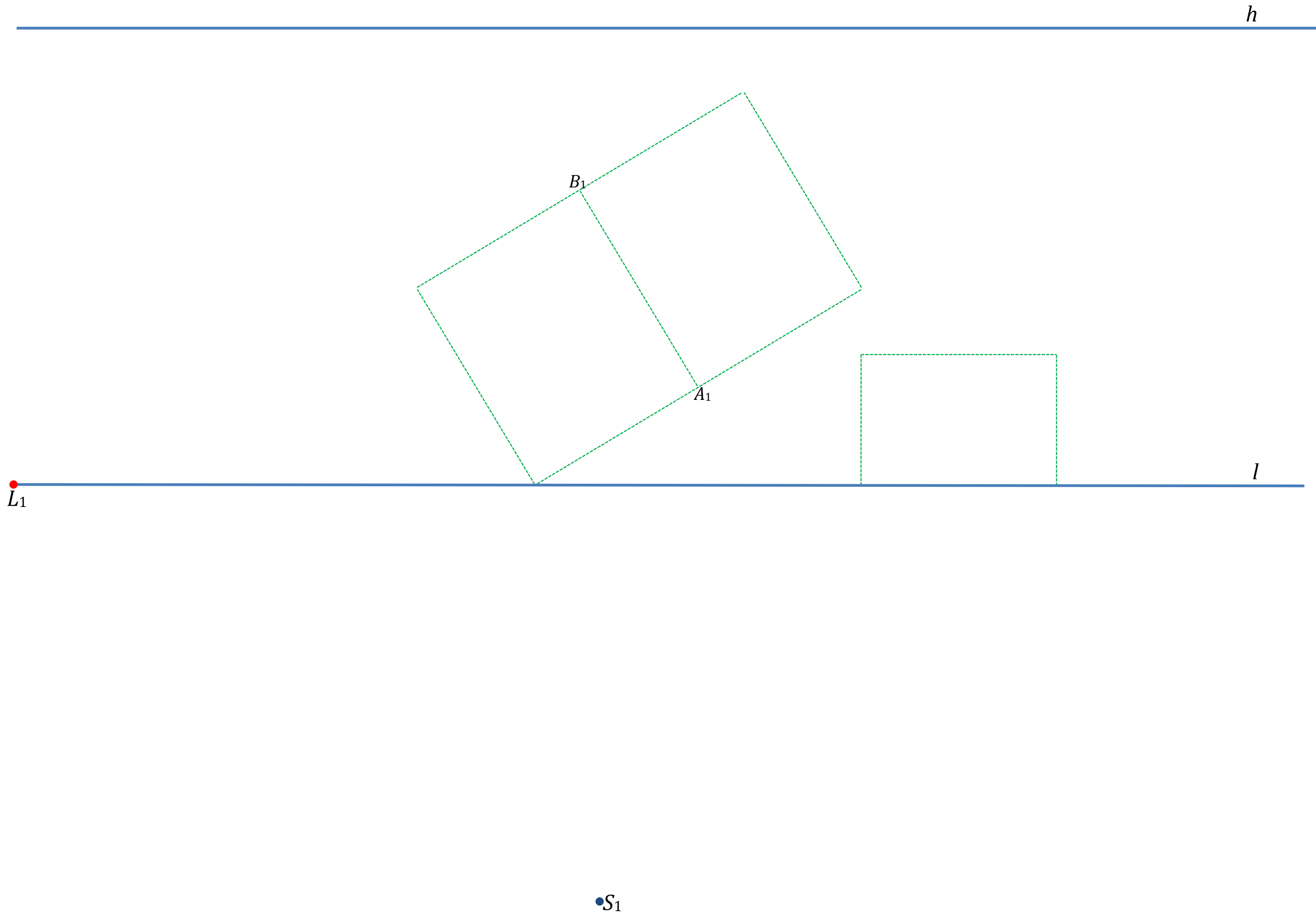
Construire la perspective de centre S sur l'écran donné par la droite l de la maquette d'une maison à toit à 2 pans donnée par sa projection dans le sol ci-dessous. La hauteur du faîte du toit (AB) est de 4 cm, celle des façades latérales est de 2 cm. La droite h est la ligne d'horizon.

Construire encore la perspective de la maquette d'un garage de forme parallélépipédique rectangle donnée par sa projection dans le sol ci-dessous. La hauteur du garage est de 1 cm.

La scène est éclairée par une source lumineuse ponctuelle située à 11cm de haut et donnée par L_1.

Construire la perspective de l'ombre de la maison et du garage sur le sol.

Construire la perspective de l'ombre de la maison sur le garage en précisant la démarche.



Problème 1

1re partie

Rend l'image plus sombre

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{200}x^2 & \text{si } x \in]200; 250 \\ x & \text{si } x \in]200; 250] \end{cases}$$

```
For x = 0 To 199
  For y = 0 To 199
    Let C = Picture1.Point(x,y)
    Let gr = Int(C / 256 ^ 2)
    If gr <=200 then Let gr = gr ^ 2 / 200
    Picture2.Pset(x,y), RGB(gr,gr,gr)
  Next y
Next x
```

2me partie

a) $y = 100 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2}, x = 180 \Rightarrow (200 - 2k)\frac{1}{2} + 2k\frac{\sqrt{2}}{2} = 180 \Rightarrow k(\sqrt{2} - 1) = 80 \Rightarrow m = 193.$

b) $x'(t) = (400 - 4k)t + 2k, x'\left(\frac{3}{4}\right) = 300 - k, x'\left(\frac{3}{4}\right) = 0 \Rightarrow k = 300 \Rightarrow \begin{cases} x = -400t^2 + 600t \\ y = 200t^2 \end{cases}$

$t = \frac{3}{4} \Rightarrow x = 225, y = 112{,}5.$

c) $d(a) = (6400a - 50)^2 + (40000a - 200)^2$
$d'(a) = 12800(6400a - 50) + 80000(40000a - 200)$
$d'(a) = 0 \Rightarrow 12800(6400a - 50) + 80000(40000a - 200) = 0 \Rightarrow 328192a = 1664$
$\Rightarrow a \cong 0{,}00507$

d)
```
Let ay = 0: s = 0
For t = 0 To 1 Step 1 / 1024
  Let y = 200 * t ^ 2
  Let X1 = -200 * t ^ 2 + 400 * t
  Let X2 = -600 * t^2 + 800 * t
  Let dx = X2 - X1
  Let dy = y - ay
  Let s = s + dx * dy
  Let ay = y
Next t
Label1.Caption = Format(s, "0.00")
```

Remarque1 : la méthode des « rectangles » est utilisée dans le programme, celle des « trapèzes », guère plus compliquée fournit un bien meilleur résultat.

Remarque2 : on peut « facilement » calculer la valeur exacte et obtenir 13333,33…

e)
```
For y = 0 to 199
  Let t = Sqr((200 – y) / 200)
  Let x1 = -200 * t^2 + 400 * t
  Let x2 = -600 * t^2 + 800 * t
  Let k1 = x1 / 200
  Let k2 = (x2 – x1) / 200
  For x = 0 To 199
    Let C = Picture1.Point(x,y)
    Let nx1 = k1 * x
    Let nx2 = x1 +k2 *x
    Picture3.Pset(nx1,y),C
    Picture3.Pset(nx2,y),C
  Next x
Next y
```

Problème 2

a)
- $x_0' = 2y_0 - t_0 + 2 = 4, y_0' = 2t_0 - 2x_0 = 2.$
-

t	x	y	x'	y'
0	-1	1	4	2
$\frac{1}{3}$	$-1+\frac{4}{3}=\frac{1}{3}$	$1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$	$2\cdot\frac{5}{3}-\frac{1}{3}+2=5$	$2\cdot\frac{1}{3}-2\cdot\frac{1}{3}=0$

- $p(t) = at^2 + bt + c, p(0) = 1 \Rightarrow c = 1, p'(0) = 2 \Rightarrow b = 2, p'\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow a = -3.$
- $p(t) = -3t^2 + 2t + 1, p(t) = 0 \Rightarrow t = 1$ (et $t = -\frac{1}{3}$).

b) $N(t) = t - \frac{t-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\sin(2t)-\frac{3}{4}\cos(2t)}{1+3\cos(2t)+\frac{3}{2}\sin(2t)}, N\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{\frac{\pi-2}{8}+\frac{3\sqrt{2}}{8}}{1+\frac{9\sqrt{2}}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi-2+3\sqrt{2}}{8+18\sqrt{2}} \cong 0{,}232.$

c)
```
Let t = 0 : x = -1 : y = 1 : xp = 4 : yp = 2 : h = 1 / 128 : t1 = 0
Do
  Let t = t + h : x = x + h * xp : y = y + h * yp
  Let axp = xp
  Let xp = 2 * y - t + 2 : yp = 2 * t - 2 * x
  If sgn(axp) <> sgn(xp) then
    If t1 = 0 Then Let t1 = t - h / 2 else Let t2 = t - h / 2
  End if
Loop until t >= 3
```

d)
```
Function g(tf)
  Let t = 0 : x = -1 : y = 1 : xp = 4 : yp = 2 : h = 1 / 128
  Do
    Let t = t + h : x = x + h * xp : y = y + h * yp
    Let xp = 2 * y - t + 2 : yp = 2 * t - 2 * x
  Loop Until t >= tf
  Let g = y
End Function
```

e) `t1` et `t2` ont été calculé au point c)
```
Let distmin = (f(0) - f(3)) ^ 2 + (g(0) - g(3)) ^ 2
For tt1 = 0 To t1 Step 1 / 128
  For tt2 = t2 To 3 Step 1 / 128
    Let d = (f(tt1) - f(tt2)) ^ 2 + (g(tt1) - g(tt2)) ^ 2
    If d < dmin Then
      dmin = d
      xd = f(tt1): yd = g(tt2)
    End If
  Next tt2
Next tt1
```

Problème 3

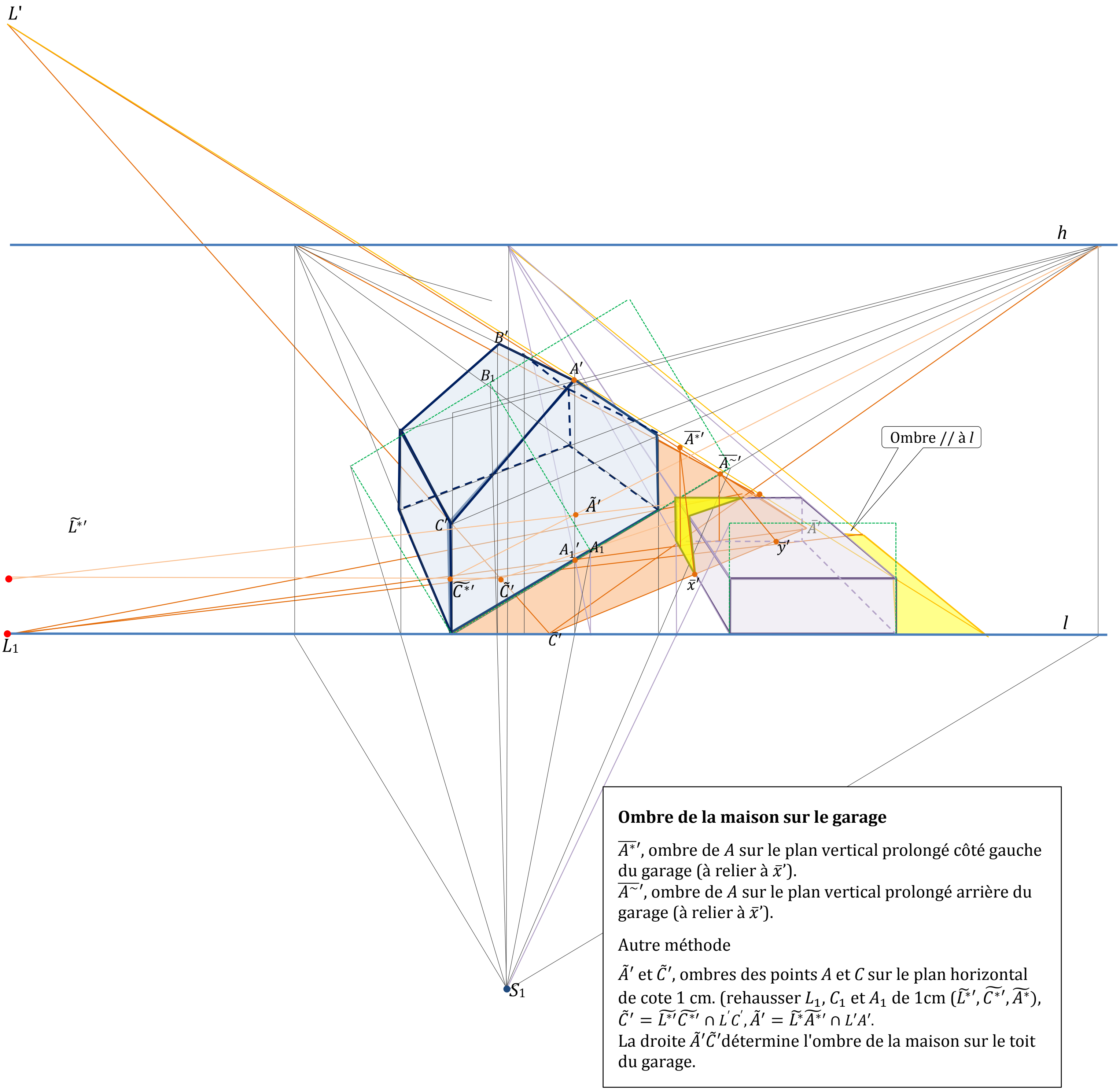
Construire la perspective de centre S sur l'écran donné par la droite l de la maquette d'une maison à toit à 2 pans donnée par sa projection dans le sol ci-dessous. La hauteur du faîte du toit (AB) est de 4 cm, celle des façades latérales est de 2 cm. La droite h est la ligne d'horizon.

Construire encore la perspective de la maquette d'un garage de forme parallélépipédique rectangle donnée par sa projection dans le sol ci-dessous. La hauteur du garage est de 1 cm.

La scène est éclairée par une source lumineuse ponctuelle située à 11cm de haut et donnée par L_1.

Construire la perspective de l'ombre de la maison et du garage sur le sol.

Construire la perspective de l'ombre de la maison sur le garage en précisant la démarche.



Ombre de la maison sur le garage

$\overline{A^*}'$, ombre de A sur le plan vertical prolongé côté gauche du garage (à relier à $\bar{x}'$).
$\overline{A^{\sim}}'$, ombre de A sur le plan vertical prolongé arrière du garage (à relier à $\bar{x}'$).

Autre méthode

$\tilde{A}'$ et $\tilde{C}'$, ombres des points A et C sur le plan horizontal de cote 1 cm. (rehausser L_1, C_1 et A_1 de 1cm ($\widetilde{L^*}'$, $\widetilde{C^*}'$, $\widetilde{A^*}$), $\tilde{C}' = \widetilde{L^*}'\widetilde{C^*}' \cap L'C'$, $\tilde{A}' = \widetilde{L^*}\widetilde{A^*}' \cap L'A'$.
La droite $\tilde{A}'\tilde{C}'$détermine l'ombre de la maison sur le toit du garage.

Nom et prénom : .... Classe : ....

Lycée Denis-de-Rougemont
Neuchâtel et Fleurier

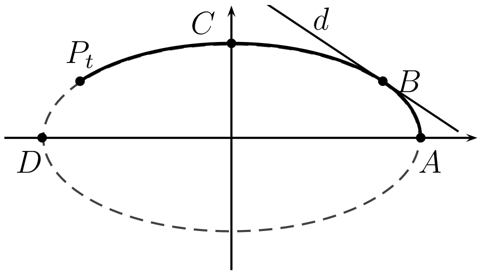
Applications des Mathématiques
Examen de maturité 2015

Pour le calcul de la note, le premier problème a un poids 3
et les deux autres problèmes ont chacun un poids 2

Problème 1

Les équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = 10\cos(t) \\ y(t) = 5\sin(t) \end{cases} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$



décrivent une ellipse $\mathcal{E}$ qui passe par les points $A(10;0)$, $B(8;3)$, $C(0;5)$ et $D(-10;0)$.

a) Trouver le vecteur vitesse au point B et donner l'équation de la tangente à l'ellipse en ce point (notée d sur le schéma).

b) Déterminer les valeurs exactes de t pour lesquelles le vecteur vitesse est parallèle au vecteur $\overrightarrow{AC}$.

c) Déterminer l'équation de la parabole qui est tangente à l'ellipse au point C et qui passe par le point B.

d) On considère une parabole d'équation $y = ax^2 + 5$. Trouver le nombre a de sorte que la somme des carrés des distances verticales de la parabole aux points A et B soit minimale.

e) Montrer que la distance de l'origine à un point P_t sur l'ellipse vaut 8 lorsque l'expression $f(t) = 25(\cos t)^2 - 13$ s'annule. Utiliser la méthode de Newton en une étape à partir de la graine $t_0 = \pi/4$ pour estimer un zéro de f.

On note $l(t)$ la longueur de l'arc d'ellipse qui relie le point $A(10;0)$ à un certain point $P_t(10\cos(t); 5\sin(t))$ situé sur l'ellipse.

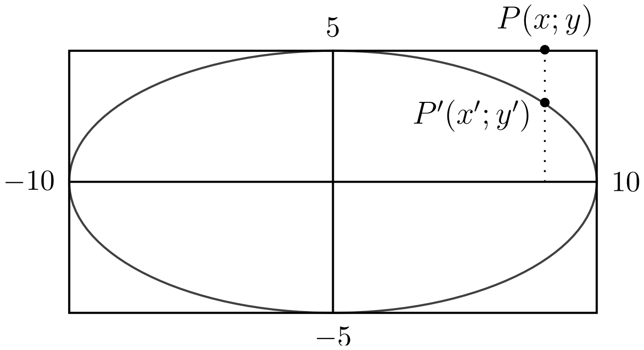
f) Ecrire le code d'une fonction `arc(t)` qui donne une bonne estimation de $l(t)$.

g) Ecrire un programme permettant d'estimer la valeur de $t \in [0;2\pi]$ pour laquelle $l(t)$ vaut le tiers du périmètre de l'ellipse. On utilisera la fonction `arc(t)` précédente et la méthode de la bissection (Bolzano) qu'on arrêtera dès que la longueur de l'intervalle de recherche est inférieure à $1/1024$.

Rappel de la donnée : on considère l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = 10\cos(t) \\ y(t) = 5\sin(t) \end{cases} \qquad \text{avec} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

A chaque point $P(x;y)$ situé sur le rectangle circonscrit à l'ellipse on peut associer à sa verticale un point $P'(x';y')$ sur l'ellipse :



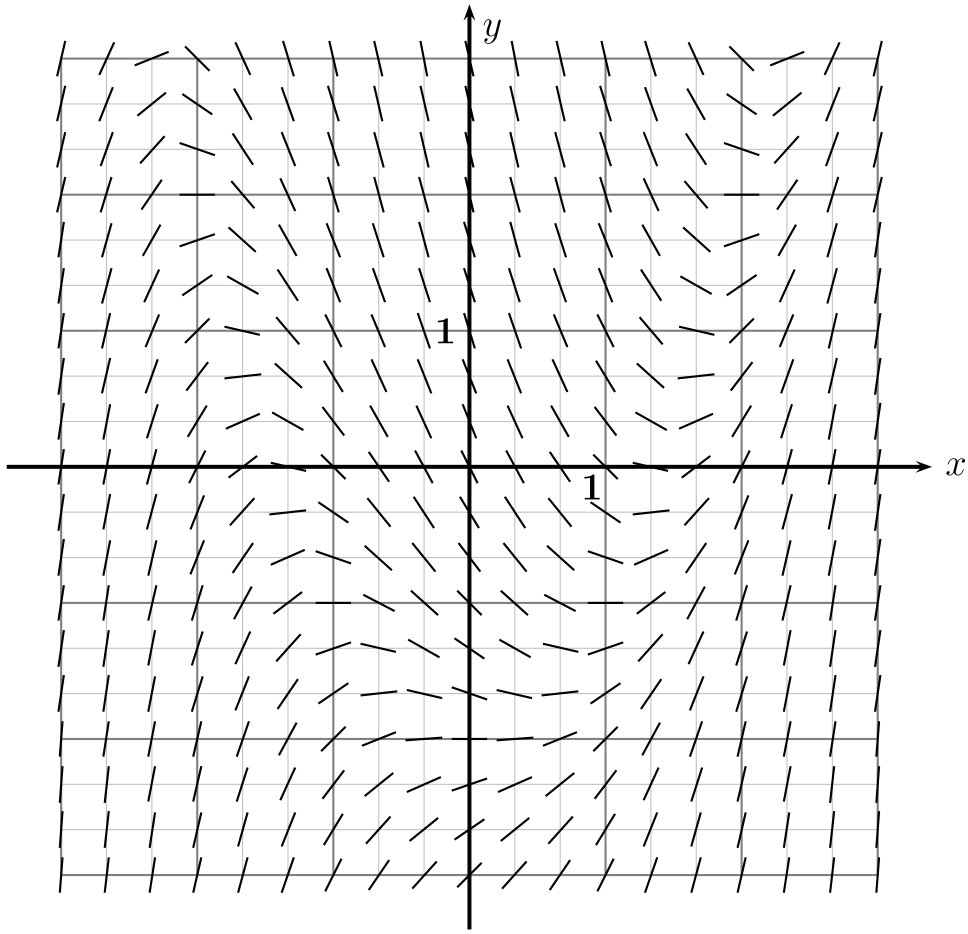
Ceci définit une transformation $\begin{cases} x' = x \\ y' = k \cdot y \end{cases}$ où k dépend uniquement de x.

h) Trouver l'expression de k en fonction de x.

i) Programmer la transformation d'une image rectangulaire de 400×200 pixels en une ellipse en utilisant le facteur d'homothétie verticale k ci-dessus. On supposera que la fonction `k(x)` est déjà programmée et on pourra l'utiliser sans autre.

Problème 2

Le champ des directions de l'équation différentielle $y' = x^2 - y - 2$ est illustré ci-dessous.



On considère la solution $s(x)$ qui vérifie $s(0) = -1$.

a) Esquisser le graphe de s sur l'illustration ci-dessus.

b) Estimer $s(1)$ avec la méthode de Runge et un pas $h = \frac{1}{2}$.

c) Vérifier que $s(x) = x^2 - 2x - e^{-x}$.

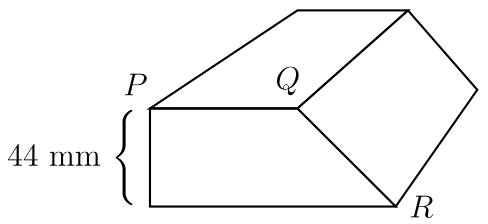
d) Le graphe de s admet un point à tangente horizontale d'abscisse positive. Estimer cette abscisse en utilisant la méthode de Newton en deux étapes à partir d'une graine (valeur initiale) entière.

En dérivant l'équation $y' = x^2 - y - 2$, on obtient l'équation différentielle du deuxième ordre $y'' = 2x - y'$ et on considère la solution $g(x)$ qui vérifie $g(0) = -1$ et $g'(0) = -1$.

e) Estimer $g(1)$ et $g'(1)$ avec la méthode d'Euler et un pas $h = \frac{1}{2}$.
Les fonctions $s(x)$ et $g(x)$ sont-elles égales ? Justifier la réponse.

Problème 3

Sur la feuille annexée, on considère la perspective de centre S sur l'écran donné par la droite l et de ligne d'horizon h.
Un prisme posé sur le sol est donné par sa projection sur le sol.
Les cotes de P, Q et R sont respectivement de 44 mm, 44 mm et 0 mm.



a) Construire la perspective des arêtes visibles du prisme.

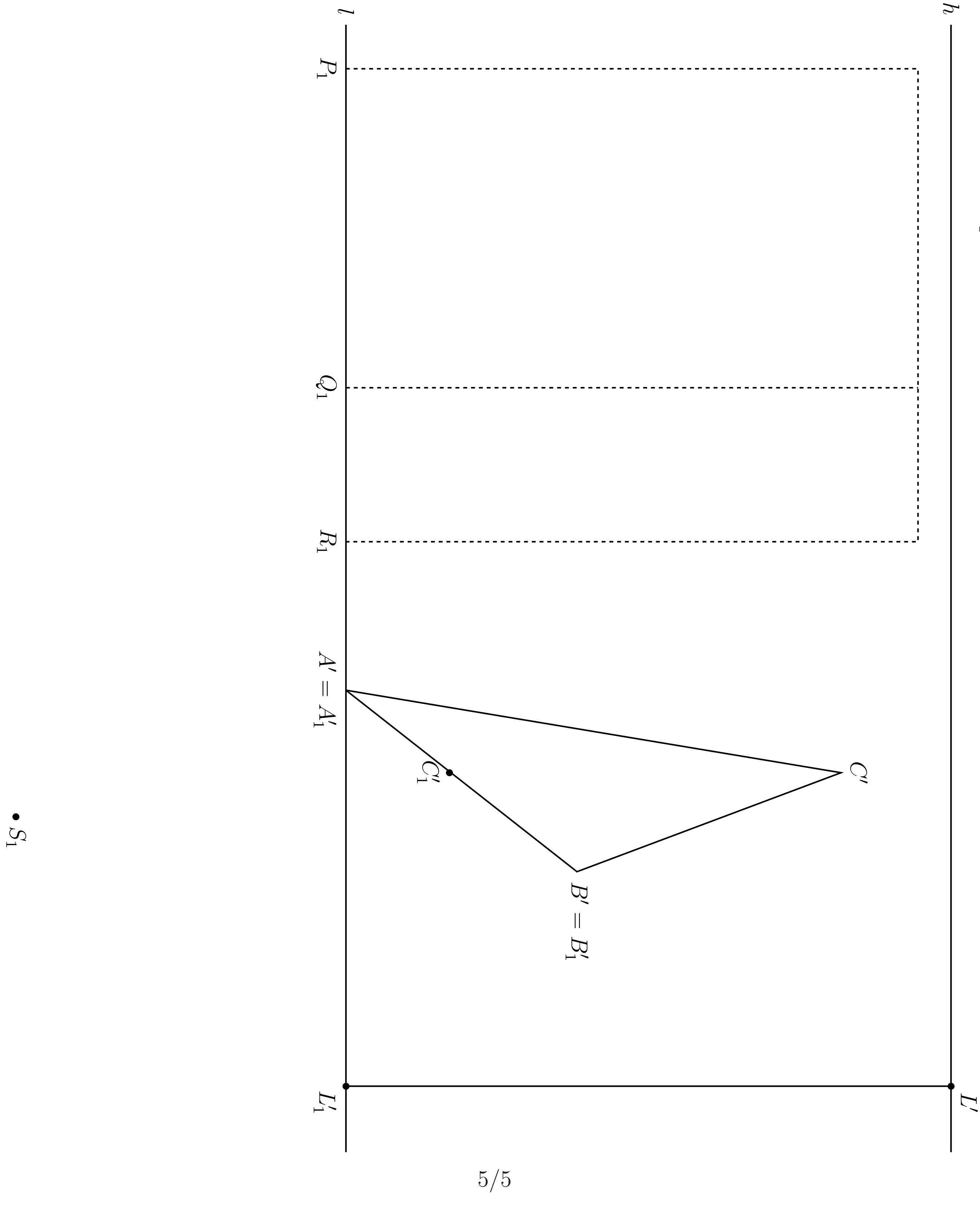
Un triangle vertical ABC est donné par sa perspective. Il est éclairé par des rayons lumineux issus du point L, donné par sa perspective L' et la perspective L'_1 de sa projection sur le sol.

b) Dessiner la perspective de l'ombre du triangle sur le sol.

c) Dessiner la perspective de l'ombre du triangle sur le prisme.

d) Construire la projection $A_1B_1C_1$ du triangle sur le sol.

Nom et prénom : .... Classe : ....



Problème 1

a) Au point B, on a $\cos(t) = 0.8$ et $\sin(t) = 0.6$. Le vecteur vitesse en ce point est donc $\overrightarrow{v} = \binom{-10\sin(t)}{5\cos(t)} = \binom{-6}{4}$. La tangente admet le vecteur normal $\overrightarrow{n} = \binom{2}{3}$ (perpendiculaire à $\overrightarrow{v}$) et l'équation $2x + 3y - 25 = 0$, càd. $y = -\frac{2}{3}x + \frac{25}{3}$

b) Le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}(t) = \binom{-10\sin(t)}{5\cos(t)}$ vaut $k\binom{-10}{5}$ lorsque $\sin(t) = \cos(t) = k$. On en déduit que $t \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

c) On cherche la parabole du type $y = ax^2 + 5$ qui passe par $B(8; 3)$. On doit donc avoir $3 = 64a + 5$, d'où $a = \frac{-1}{32}$. La parabole admet donc l'équation $y = \frac{-1}{32}x^2 + 5$

d) Les points $A(10; 0)$ et $B(8; 3)$ sont estimés par $A'(10; 100a+5)$ et $B'(8; 64a+5)$. La fonction des moindres carrés est $f(a) = (100a + 5)^2 + (64a + 2)^2$. La dérivée est

$$f'(a) = 200(100a + 5) + 128(64a + 2) = 28'192a + 1256$$

Ceci est nul lorsque $a = -\frac{157}{3524} \cong -0.04455$

e) Pour un point $P_t(10\cos(t); 5\sin(t))$, on a

$$\|\overrightarrow{OP_t}\|^2 = 100(\cos t)^2 + 25(\sin t)^2 = 75(\cos t)^2 + 25.$$

Ceci vaut 64 lorsque $75(\cos t)^2 - 39 = 0$, c'est-à-dire $25(\cos t)^2 - 13 = 0$.
Variante : Trouver les quatre valeurs $t \in [0; 2\pi]$ qui annulent f et vérifier qu'elles fournissent toutes un point à distance 8 de l'origine. On peut le vérifier pour une seule valeur et invoquer un argument de symétrie. On peut aussi utiliser la valeur $\cos^2(t) = 13/5$ et la relation de Pythagore.
On a $f'(t) = -50\cos(t)\sin(t)$ et la fonction de Newton est $N(t) = t + \dfrac{25(\cos t)^2 - 13}{50\cos(t)\sin(t)}$.
En particulier, $N(\pi/4) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{25(0.5) - 13}{50(0.5)} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{-0.5}{50(0.5)} = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{50} \cong 0.7653981.$

f)

```
Function arc(t)
    Let pas = 1 / 1024
    Let arc = 0
    For t1 = 0 To t - pas Step pas
        Let X1 = 10 * Cos(t1)
        Let Y1 = 5 * Sin(t1)
        Let t2 = t1 + pas
        Let X2 = 10 * Cos(t2)
        Let Y2 = 5 * Sin(t2)
        Let arc = arc + Sqr((X2 - X1) ^ 2 + (Y2 - Y1) ^ 2)
    Next t1
End Function
```

g)

```
Let a = 0
Let b = 2 * 4 * Atn(1)
Let p = arc(b) / 3
Do
    Let m = (a + b) / 2
    If (arc(m) - p) * (arc(a) - p) > 0 Then
        Let a = m
    Else
        Let b = m
    End If
Loop Until b - a < 1 / 1024
Label1.Caption = (a + b) / 2
```

h) On cherche le point de l'ellipse d'abscisse x et d'ordonnée positive. Comme $x = x' = 10\cos(t')$, on a $t' = \arccos(x/10) \in [0;\pi]$ et donc $y' = 5\sin(t') = 5\sin(\arccos(x/10))$. Ainsi $k = \frac{y'}{5} = \sin(\arccos(x/10))$

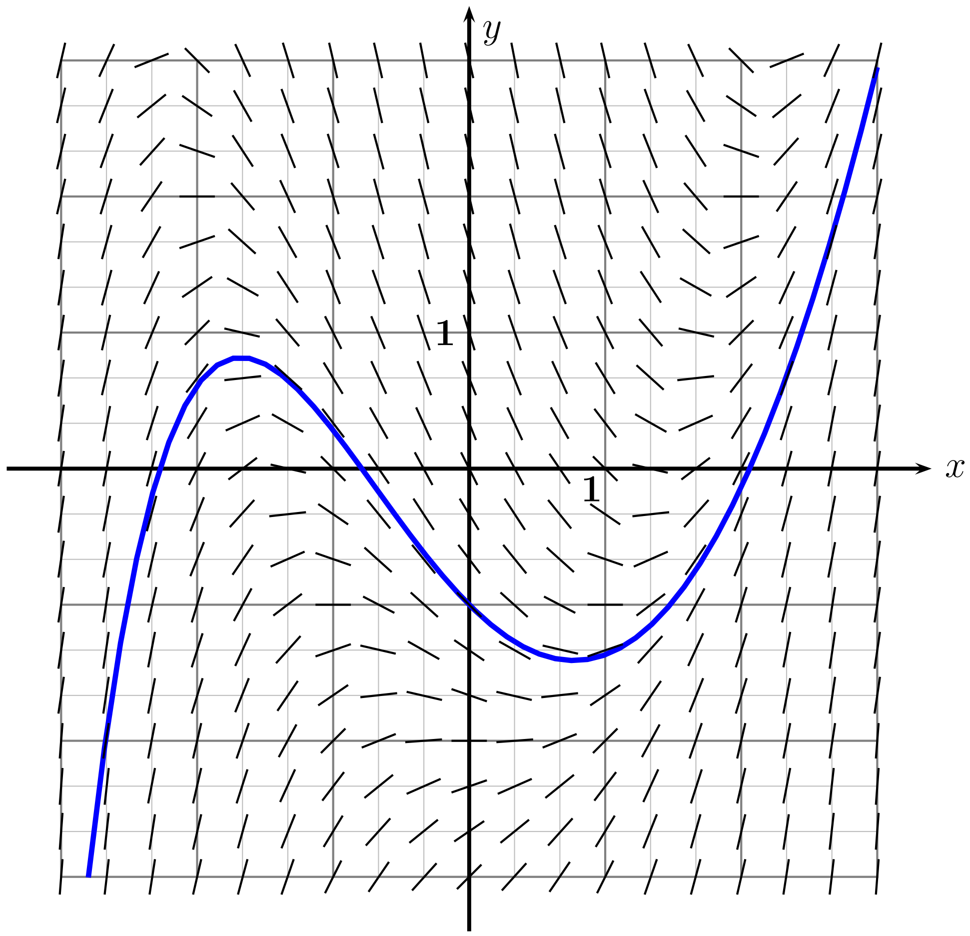
Remarque : $k = \sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\left(\frac{x}{10}\right)\right)} = \sqrt{1-\frac{x^2}{100}} = \sqrt{\frac{100-x^2}{100}} = \frac{\sqrt{100-x^2}}{10}$.

i)

```
For x = 0 To 400
    For y = 0 To 200
    Let couleur = Picture1.Point(x, y)
    Let xp = x / 20 - 10
    Let yp = y / 20 - 5
    Let yp = k(xp) * yp     ' si k(x) est disponible
                            ' Sinon :
                            ' Let k = Sqr(100 - xp ^ 2) / 10
                            ' Let yp = k * yp
    Picture2.PSet (x, 20 * (yp + 5)), couleur
    Next y
Next x
```

Problème 2

a)



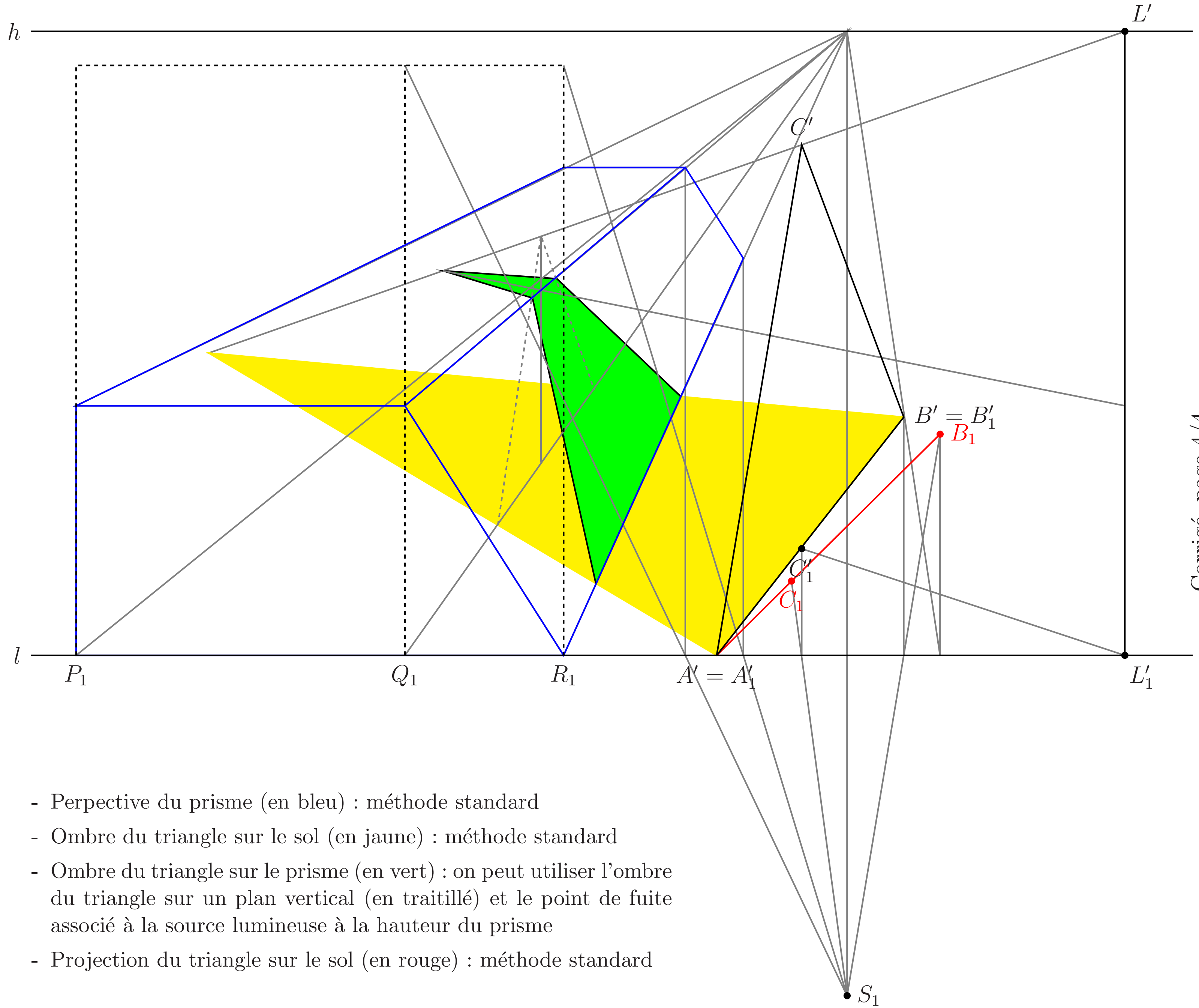
b) On itère la transformation $(x;y) \rightsquigarrow \big(x+0.5; y+0.5(x_*^2-y_*-2)\big)$ avec $x_* = x+0.25$ et $y_* = y+0.25(x^2-y-2)$: $(0;-1)\xrightarrow[\substack{x_*=0.25\\ y_*=-1.25}]{}(0.5;-1.34375)\xrightarrow[\substack{x_*=0.75\\ y_*=-1.4453125}]{}(1;-1.33984375)$ donc $s(1) \cong -\frac{343}{256} = -1.33984375$.

c) La fonction proposée vérifie l'équation différentielle et sa condition initiale.

d) Pour résoudre l'équation $s'(x) = 0$, c-à-d $2x-2+e^{-x} = 0$, on itère la transformation $x \rightsquigarrow x - \dfrac{2x-2+e^{-x}}{2-e^{-x}}$: avec la graine $x = 1$, on trouve $1 \rightsquigarrow 0.7746 \rightsquigarrow 0.768046$

e) On itère la transformation $(x;y;y') \rightsquigarrow (x+0.5; y+0.5y'; y'+0.5(2x-y'))$: on trouve $(0;-1;-1)\longrightarrow(0.5;-1.5;-0.5)\longrightarrow(1;-1.75;0.25)$, donc $g(1) \cong -1.75$ et $g'(1) \cong 0.25$. Les fonctions $s(x)$ et $g(x)$ sont égales car $s'(0) = -1$ donc $s(x)$ vérifie la même équation différentielle que $g(x)$, avec les mêmes conditions initiales.

Problème 3



- Perpective du prisme (en bleu) : méthode standard
- Ombre du triangle sur le sol (en jaune) : méthode standard
- Ombre du triangle sur le prisme (en vert) : on peut utiliser l'ombre du triangle sur un plan vertical (en traitillé) et le point de fuite associé à la source lumineuse à la hauteur du prisme
- Projection du triangle sur le sol (en rouge) : méthode standard

Tous les problèmes ont le même poids pour le calcul de la note.

Problème 1

La courbe c_1 est l'arc de Bézier défini par les points $P_0(0;0), P_1(1;0), P_2(0;6)$ et $P_3(-3;0)$.

On rappelle que l'équation de la courbe est

$$\overrightarrow{OP}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (1-t)^3 \cdot \overrightarrow{OP_0} + 3 \cdot (1-t)^2 \cdot t \cdot \overrightarrow{OP_1} + 3 \cdot (1-t) \cdot t^2 \cdot \overrightarrow{OP_2} + t^3 \cdot \overrightarrow{OP_3}$$

avec $t \in [0;1]$.

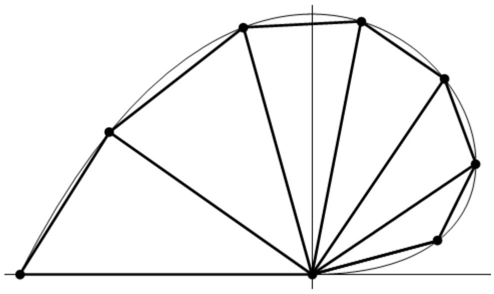
a) Calculer les coordonnées des points à tangente horizontale et du point à tangente verticale de c_1.

b) Esquisser la courbe c_1.

La courbe c_k est l'arc de Bézier défini par les points $P_0(0;0), P_1(k;0), P_2(0;6)$ et $P_3(-3;0)$.

c) Sans calcul supplémentaire, esquisser la courbe c_9.

On souhaite estimer l'aire $A(k)$ de la surface fermée limitée par la courbe c_k et l'axe Ox.
Pour cela, on utilise une triangulation de la surface. La figure ci-dessous illustre une triangulation.



Pour calculer l'aire d'un triangle de sommets $O(0;0), A(a_1;a_2), B(b_1;b_2)$, on peut utiliser la formule : Aire $= \frac{1}{2}|a_1 b_2 - b_1 a_2|$.

d) Écrire un programme qui estime $A(k)$ au moyen de 1024 triangles.

Pour une valeur de k plus grande que 1, la surface fermée limitée par la courbe et l'axe Ox est partagée par l'axe y en deux parties dont les aires sont égales.

e) Compléter le programme afin qu'il estime au 1/1024 près cette valeur de k.

Problème 2

On considère l'équation différentielle du premier ordre $y' = \frac{2y}{x}$ et on appelle s la solution qui satisfait la condition $s(1) = 1$.
On se propose de comparer les résultats obtenus par les méthodes d'Euler et de Runge pour la résolution de cette équation.

a) Vérifier que $s(x) = x^2$.

b) Calculer deux estimations de $s(3)$, la première en employant la méthode d'Euler avec un pas $h = 1$ et la deuxième en employant la méthode de Runge avec un pas $h = 2$.
Avec quelle méthode obtient-on le résultat le plus précis ?

c) Écrire un programme qui calcule une estimation de $s(3)$ en employant la méthode de Runge avec un pas $h = \frac{1}{32}$.

d) Compléter le programme pour qu'il détermine un autre pas avec lequel la méthode d'Euler fournit une meilleure estimation de $s(3)$ que celle obtenue à la question précédente.

Problème 3

Problème de mathématiques financières, pour lequel on rappelle la formule ci-dessous.

Capital acquis par des versements réguliers

$$A_n = a \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

où A_n est le capital acquis à la fin de la $n^{ème}$ année, n le nombre de versements réalisés au début de chaque année et a le montant des versements.
De plus, $r = 1 + t$ où t est le taux d'intérêt annuel.

****

Le premier janvier de chaque année on verse 1'000 francs sur un compte. On s'intéresse au capital acquis à la fin de la $9^{ème}$ année, on note ce capital A_9.

a) Calculer ce capital acquis si le taux d'intérêt annuel est de 1%.
Calculer ce capital acquis si le taux d'intérêt annuel est de 3%.

Dans les questions suivantes, on aimerait déterminer, par diverses méthodes, une estimation du taux d'intérêt annuel afin que le capital acquis soit de 10'000 francs.

b) En employant les résultats de la première question, estimer le taux recherché par une interpolation linéaire.

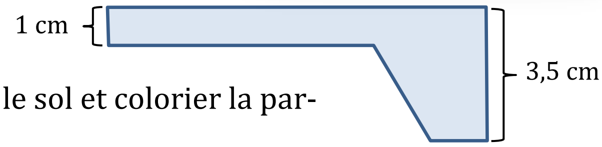
c) Employer la méthode de la bissection pour trouver un intervalle de longueur égale à un quart de pourcent et contenant le taux recherché.
On demande le détail des calculs.

d) Employer la méthode de Newton avec une seule itération et une valeur initiale de 2% pour estimer le taux recherché.
Avant d'appliquer la méthode de Newton à l'équation $A_9 = 10'000$, transformer cette équation en la mettant sous forme d'une équation polynomiale de degré 10 dans laquelle l'inconnue est r.

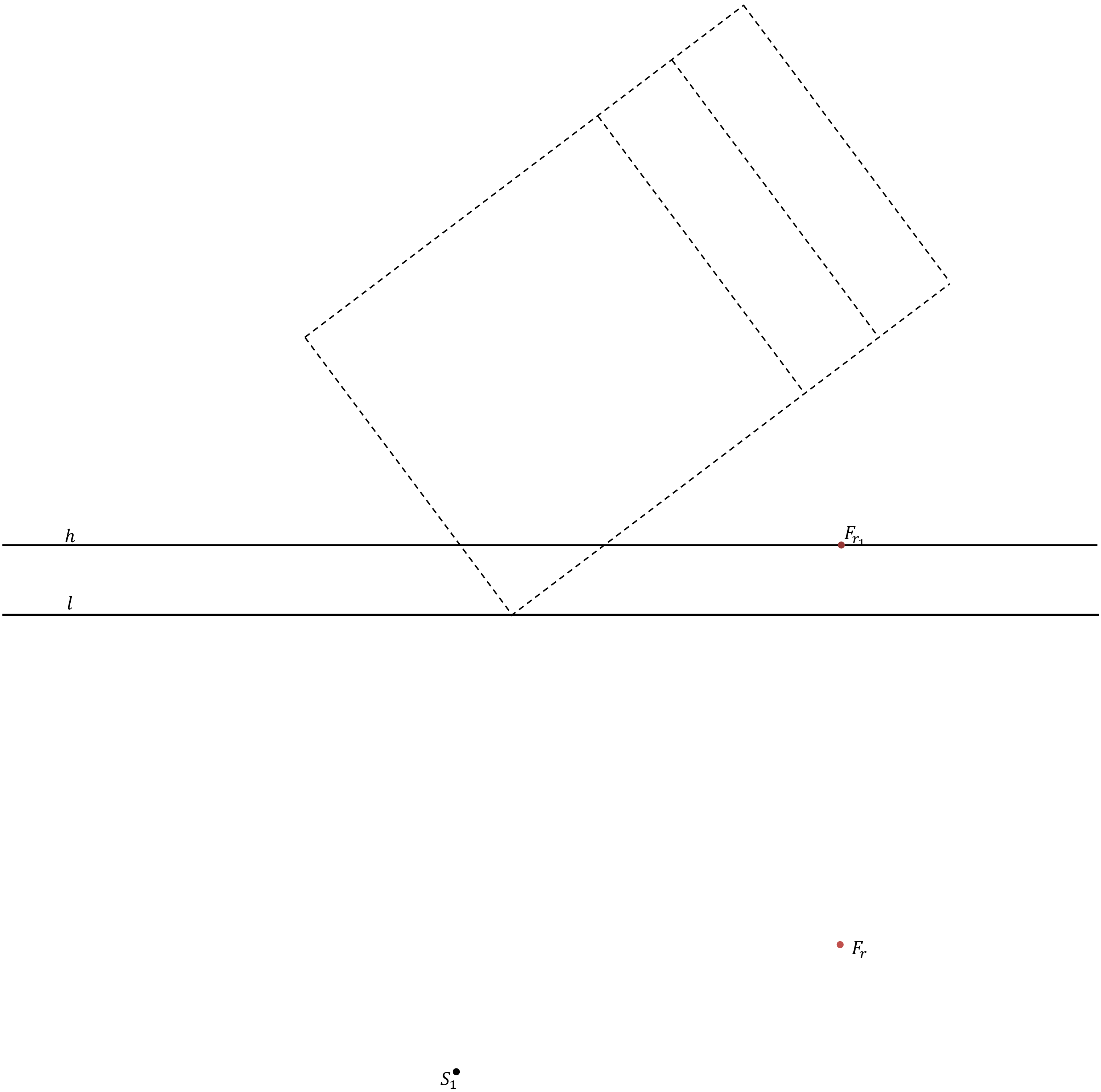
Problème 4

À Marseille, la "Villa Méditerranée", centre international pour le dialogue et les échanges en Méditerranée, possède une architecture étonnante.

Construire la perspective d'une maquette de ce bâtiment donnée par sa projection dans le sol, la hauteur totale étant de 3,5 cm et l'épaisseur du "toit" de 1 cm.



Cette maquette est éclairée par des rayons lumineux dont la direction est donnée par le point de fuite F_r .
Construire la perspective de l'ombre de la maquette sur le sol et colorier la partie éclairée de la maquette.
Tracer en rouge les parties d'arêtes visibles qui portent une ombre sur le sol.

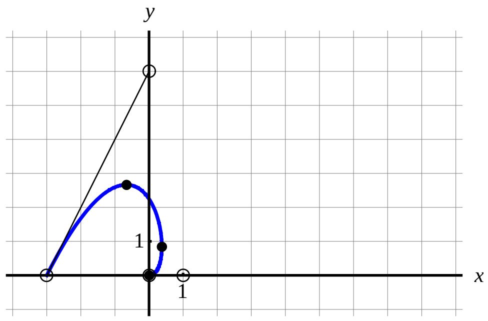


Problème 1

a) Les équations paramétriques de c_1 sont

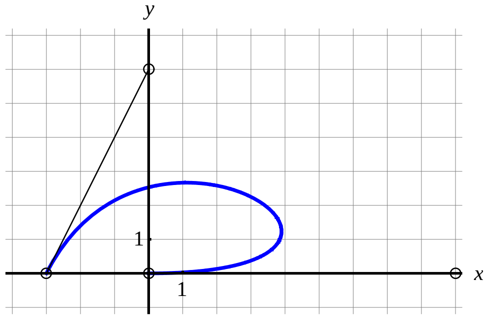
$$\begin{cases} x(t) = 3t - 6t^2 \\ y(t) = 18t^2 - 18t^3 \end{cases}$$

Point à tangente horizontale :
$(0; 0)$ pour $t = 0$ et $(-2/3\,; 8/3)$ pour $t = 2/3$
Point à tangente verticale :
$(3/8\,; 27/32) = (0.375; 0.84375)$ pour $t = 1/4$



b,c) Dessin

d) e) On a c_k: $\begin{cases} x = 3k(1-t)^2 t - 3t^3 \\ y = 18(1-t)t^2 \end{cases}$



Programme de d)

```
Dim k As Double
Function x(t)
x = 3*k*(1 - t)^2*t - 3*t^3
End Function
Function y(t)
y = 18*(1 - t)*t^2
End Function

Private Sub Command1_Click()
A = 0
dt = 1 / 1024
For t = 0 To 1 - 1 / 1024 Step 1 /
    1024
     dA = Abs(0.5*(x(t)*y(t + dt) -
    y(t)*x(t + dt)))
     A = A + dA
Next t
End Sub
```

Programme de f)

```
Dim k As Double
Function x(t)
x = 3*k*(1 - t)^2*t - 3*t^3
End Function

Function y(t)
y = 18*(1 - t)*t^2
End Function

Private Sub Command1_Click()
k = 1 - 1/1024
Do
   k = k + 1/1024
   'Calcul de l'aire totale
   A = 0
   dt = 1 / 1024
   For t = 0 To 1-1/1024 Step
   1/1024
     dA = Abs(0.5*(x(t)*y(t + dt) -
   y(t)*x(t + dt)))
     A = A + dA
   Next t
   'Calcul de l'aire à droite de
   l'axe y
   B = 0
   t = -dt
   Do
      t = t + dt
      dB = Abs(0.5*(x(t)*y(t + dt)
   - y(t)*x(t + dt)))
      B = B + dB
   Loop Until x(t + dt) <= 0
Loop Until B >= A / 2
Label1.Caption = k
End Sub
```

On obtient $k = 5{,}689$

Problème 2

a) $y = x^2 \implies y' = 2x = \frac{2x^2}{x}$ et $1^2 = 1$.

b) Euler avec $h = 1$:
$x_0 = 1, y_0 = 1, y'(x_0, y_0) = 2,$
$x_1 = 2, y_1 = 3, y'(x_1, y_1) = 3,$
$x_2 = 3, y_2 = 6.$

Runge avec $h = 2$:
$x_0 = 1, y_0 = 1, y'(x_0, y_0) = 2, x_m = 2, y_m = 3, , y'(x_m, y_m) =3,$
$x_1 = 3, y_1 = 1 + 6 = 7.$

Runge est plus précis qu'Euler puisque $s(3) = 9$.

c)
```
Private Sub Command3_Click()
Let x0 = 1
Let y0 = 1
Let h = 1/32
Let n = 64
For i = 1 To n
   Let xm = x0 + h/2
  Let ym = y0 + (h/2)*2*y0/x0
   Let x1 = x0 + h
   Let y1 = y0 + h*2*ym/xm
   Let x0 = x1
   Let y0 = y1
Next i
Let Label9.Caption = y1
```

d)
```
Let delta_R = Abs(9 - y1)
Do
 Let x0 = 1
 Let y0 = 1
 Let h = h/2
 Let n = n*2
 For i = 1 To n
     Let x1 = x0 + h
     Let y1 = y0 + h*2*y0/x0
     Let x0 = x1
     Let y0 = y1
  Next i
  Let delta_E = Abs(9 - y1)
Loop Until delta_E <= delta_R
Let Label7.Caption = y1
Let Label5.Caption = "h = 1/" & 1/h
End Sub
```

On obtient h = 1 / 4096

Problème 3

Dans la formule $A_n = a \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r-1}$ on a les valeurs $a = 1000$ et $n = 9$.

a)

Taux	r	Capital acquis
1.00%	1.01	9462.21
3.00%	1.03	10463.88

b) $t = 1 + \frac{2}{10464 - 9462} \cdot (10000 - 9462) \cong 2{,}073\%.$

c)

Taux	r	Capital acquis
1.00%	1.01	9462.21
3.00%	1.03	10463.88
2.00%	1.02	9949.72
2.50%	1.025	10203.38
2.25%	1.0225	10075.71

Le taux cherché est donc compris entre 2% et 2,25%.

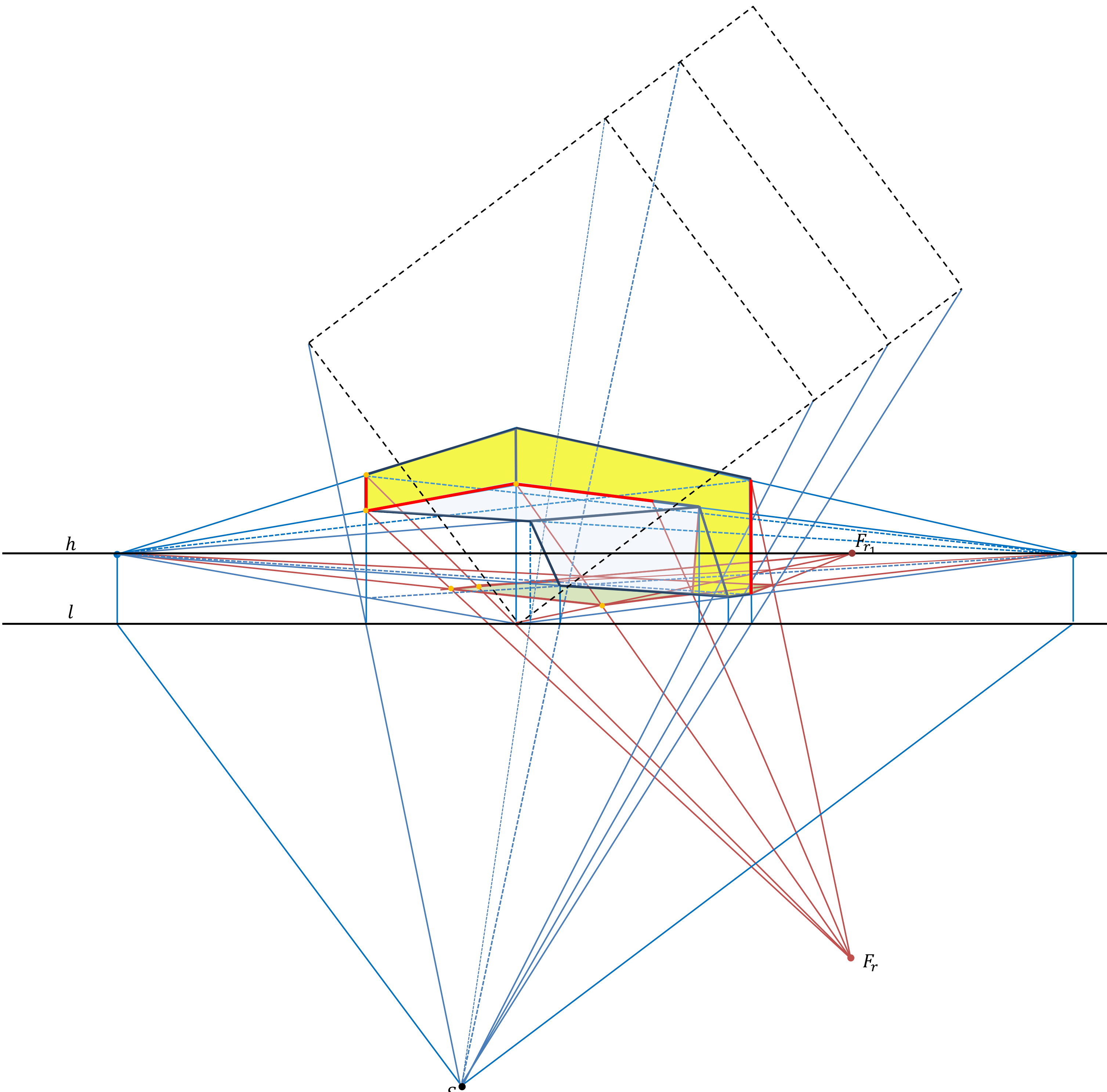
d) $C_9 = 10'000 \Leftrightarrow 1000 \cdot r \cdot \frac{r^9 - 1}{r - 1} = 10'000 \Leftrightarrow r \cdot (r^9 - 1) = 10 \cdot (r - 1)$ ou encore $r^{10} - 11r + 10 = 0$.

On donc $f(r) = r^{10} - 11r + 10$ et $f'(r) = 10r^9 - 11$, d'où on déduit la fonction de Newton

$$N(r) = r - \frac{r^{10} - 11r + 10}{10r^9 - 11} = \frac{9r^{10} - 10}{10r^9 - 11}$$

On obtient $N(1.02) = 1.0211$ ce qui signifie que l'estimation pour le taux annuel est de 2,11%.

Problème 4



Tous les problèmes ont le même poids pour le calcul de la note.

Problème 1

Soit l'origine O et deux points $A(2;10)$ et $B(6;2)$.

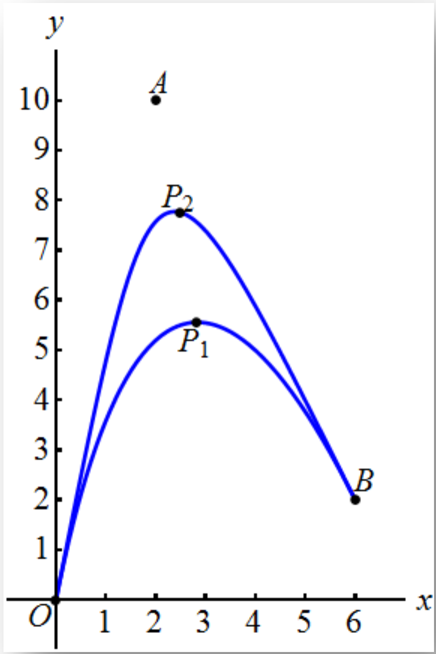
On considère deux courbes données par

$$c_1: \overrightarrow{OP_1}(t) = 2t(1-t)\,\overrightarrow{OA} + t^2\,\overrightarrow{OB}$$

et

$$c_2: \overrightarrow{OP_2}(t) = 3t(1-t)\,\overrightarrow{OA} + t^3\overrightarrow{OB}$$

avec $t \in [0;1]$.



a) Écrire les équations paramétriques qui décrivent les trajectoires de P_1 et de P_2.
$c_1(t): \begin{cases} x_1(t) = \cdots \\ y_1(t) = \cdots \end{cases}$ et $c_2(t): \begin{cases} x_2(t) = \cdots \\ y_2(t) = \cdots \end{cases}$
en fonction du temps t, avec $t \in [0;1]$.

b) Calculer l'ordonnée maximale que peut atteindre le point P_1.

c) Déterminer la distance non nulle qui sépare les points P_1 et P_2 en l'instant unique où ils se trouvent précisément l'un sous l'autre.

d) Déterminer le temps t_1 pour lequel l'abscisse du point P_1 vaut 2.

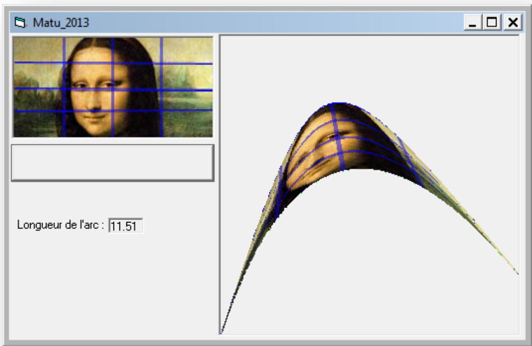
e) Utiliser la méthode de Newton en deux pas à partir de la graine $t_0 = 0$ pour estimer le temps t_2 pour lequel l'abscisse du point P_2 vaut 2.

On suppose que les fonctions $x_1(t)$ et $y_1(t)$, ainsi que $x_2(t)$ et $y_2(t)$, qui donnent les coordonnées de P_1, respectivement P_2, sont connues. Elles peuvent donc être utilisées dans les codes des deux programmes à réaliser.

f) Écrire un programme qui donne une estimation de la longueur de la trajectoire de P_1. Cette longueur sera affichée au centième dans une zone d'étiquette.

g) Écrire le code du programme qui dessine les courbes c_1 et c_2 pour $0 \le x \le 6$ et $0 \le y \le 10$ dans la zone d'image *Picture2* de taille 300x300 pixels.

h) On souhaite transformer une image de dimension 200x100 pixels contenue dans la zone d'image *Picture1* de sorte qu'elle prenne, dans *Picture2*, la forme de la surface fermée délimitée par les courbes c_1 et c_2.
La transformation qui envoie un pixel $(x;y)$ sur son image $(x';y')$ transforme les segments verticaux en segments reliant les points P_1 et P_2 des courbes c_1, respectivement c_2.
Déterminer les coordonnées de $(x';y')$ en fonction de $(x;y)$.



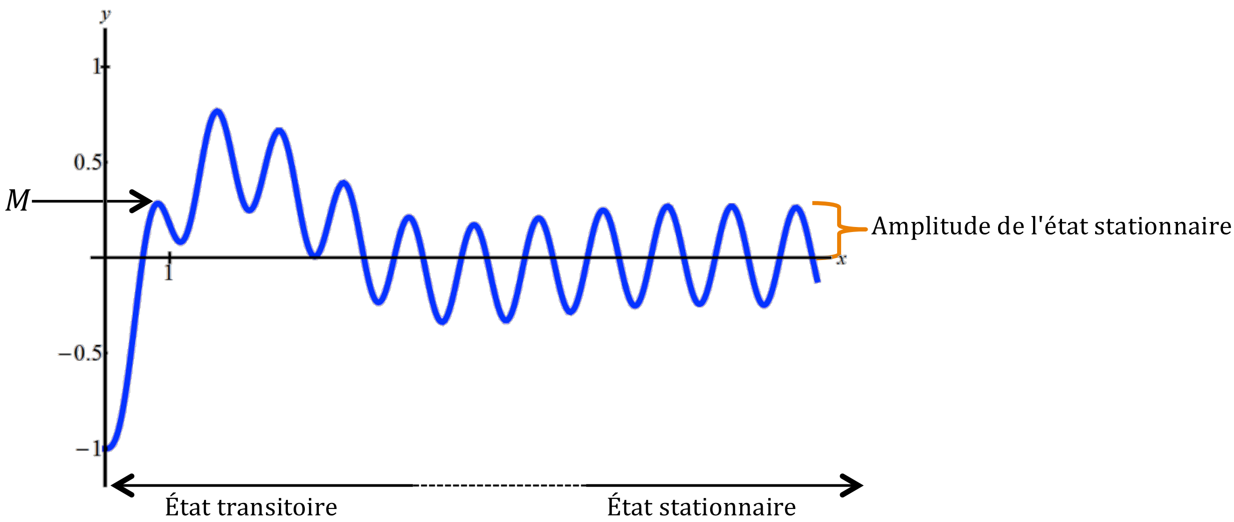
Problème 2

On considère l'équation différentielle

$$y'' = 10\sin(2\pi x) - y - y'$$

On s'intéresse à la solution $s = s(x)$ telle que $s(0) = -1$ et $s'(0) = 0$.

Le graphe de s est le suivant.



À un état transitoire succède un état stationnaire où le graphe de s est une oscillation régulière.

a) Au moyen de la méthode d'Euler avec un pas $h = 0{,}25$ estimer $s''(0{,}5)$.

b) On utilise la méthode d'Euler avec un pas h inconnu.
On note f l'estimation de s'' et après un seul pas on obtient

$$f(h) = 10\sin(2\pi h) + 1 - h$$

Pour une valeur h_0 comprise entre 0,50 et 0,55 on a $f(h_0) = -1$.

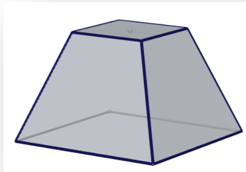
1) Au moyen de la méthode de la bissection, déterminer la valeur de h_0 au centième près.
2) Avec la valeur h_0 trouvée en 1), déterminer l'estimation de $s(2h_0)$.
Cette estimation correspond-elle au graphe de s donné ci-dessus ?
Justifier votre réponse.

c) Écrire un programme qui, au moyen de la méthode d'Euler avec un pas $h = \frac{1}{1024}$, estime l'ordonnée du premier maximum M de s. Voir figure.

d) Compléter le programme pour qu'il détermine l'amplitude de l'état stationnaire.
On admettra que l'état stationnaire est atteint si la valeur absolue de la différence de deux amplitudes consécutives est inférieure à 10^{-3}.

F_r

Problème 3



Une pyramide régulière de 6 cm de hauteur et dont la base carrée est donnée dans le sol est tronquée par un plan horizontal de cote 3 cm.

a) Construire la perspective du tronc de pyramide.

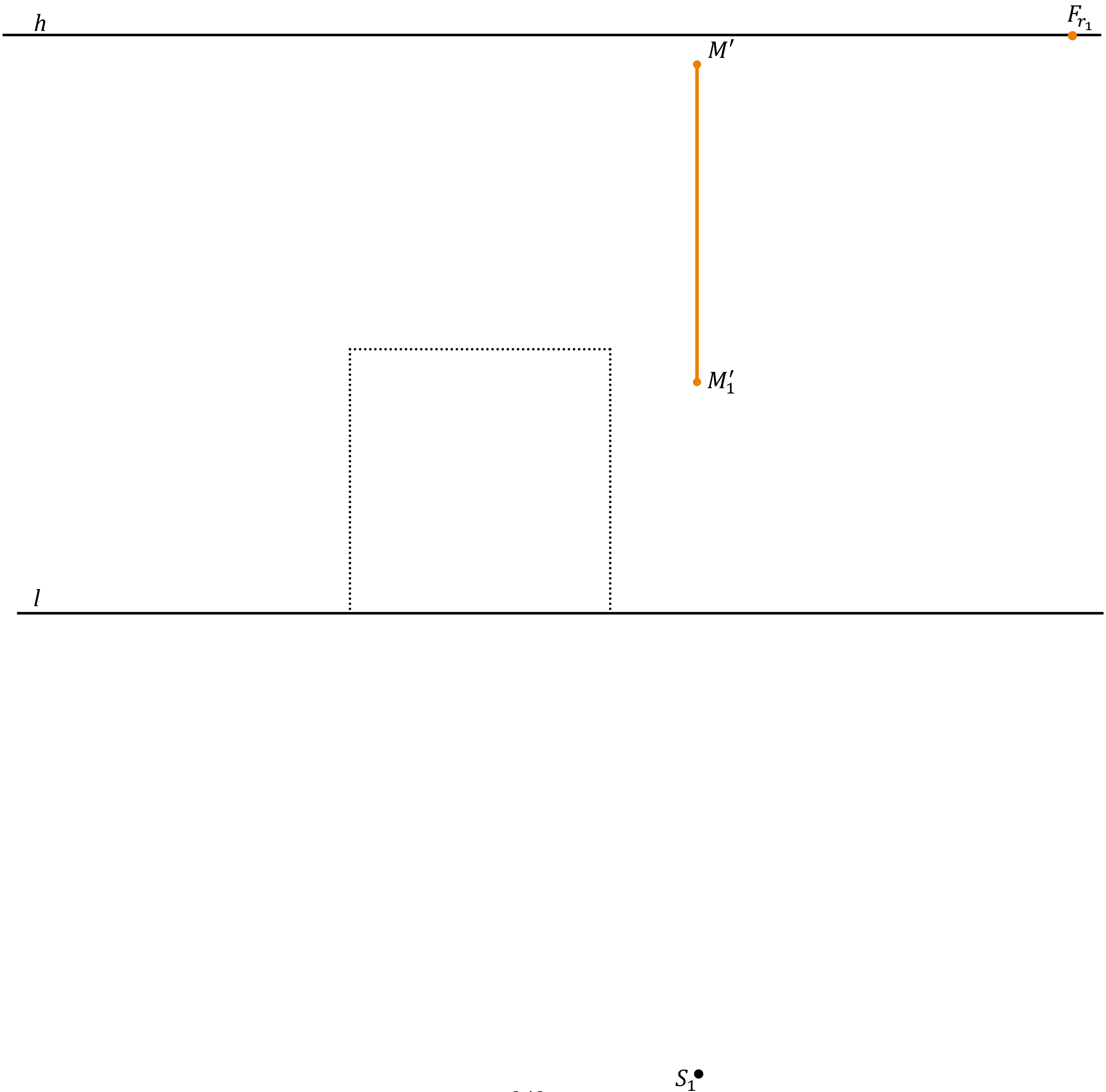
Cette pyramide est éclairée par des rayons lumineux dont la direction est donnée par le point de fuite F_r.

b) Construire la perspective de l'ombre du tronc de pyramide sur le sol.

Un mât est donné par sa perspective $M_1'\ M'$.

c) Construire la perspective de l'ombre du mât.

d) Par une construction, déterminer la hauteur du mât.



Problème 1

a) $c_1(t): \begin{cases} x_1(t) = 2t^2 + 4t \\ y_1(t) = -18t^2 + 20t \end{cases}$, $c_2(t): \begin{cases} x_2(t) = 6\mathrm{t}^3 - 6t^2 + 6t \\ y_2(t) = 2t^3 - 30t^2 + 30t \end{cases}$

b) $y_1'(t) = -36t + 20$, $y_1'(t) = 0 \implies t = \frac{5}{9} \cong 0{,}555$, $y_1\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{50}{9} \cong 5{,}56.$

c) $x_1(t) = x_2(t) \underbrace{\implies}_{t\in]0;1[} 3t^2 - 4t + 1 = 0 \underbrace{\implies}_{t\in]0;1[} t = \frac{1}{3} \implies d = y_2\left(\frac{1}{3}\right) - y_1\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{56}{27} \cong 2{,}074$

d) $x_1(t) = 2 \implies 2t^2 + 4t - 2 = 0 \underbrace{\implies}_{t\in]0;1[} t_1 = \sqrt{2} - 1 \cong 0{,}414$

e) $x_2(t) = 2 \implies 3t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$
Newton : $N(t) = t - \frac{3t^3-3t^2+3t-1}{9t^2-6t+3}$, $N(0) = \frac{1}{3}$, $N\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9} \cong 0{,}444$

f)
```
Let l = 0
Let x = 0: y = 0
For t = 1 / 128 To 1 Step 1 / 128
  Let xx = x1(t) : yy = y1(t)
  Let l = l + Sqr((x – xx) ^ 2 + (y – yy) ^ 2)
  Let x = xx: y = yy
Next t
Let Label2.Caption = Format(l, "0.00")
```

g)
```
Picture2.PSet (0, 300)
 For t = 0 To 1 Step 1 / 128
   Picture2.Line -(50 * x1(t), 300 - 30 * y1(t)), RGB(0, 255, 0)
 Next t
 Picture2.PSet (0, 300)
 For t = 0 To 1 Step 1 / 128
   Picture2.Line – (50 * x2(t), 300 – 30 * y2(t)), RGB(0, 0, 255)
 Next t
```

h) $x' = 50 \cdot (x2\left(\frac{x}{200}\right) + \frac{y}{100} \cdot \left(x1\left(\frac{x}{200}\right) - x2\left(\frac{x}{200}\right)\right)$
$y' = 300 - 30 \cdot (y2\left(\frac{x}{200}\right) + \frac{y}{100} \cdot \left(y1\left(\frac{x}{200}\right) - y2\left(\frac{x}{200}\right)\right)$

Problème 2

a) $y'' = 10 \cdot \sin(2\pi x) - y - y'$

x	y	y'	$y'' = 10 \cdot \sin(2\pi x) - y - y'$
0	-1	0	1
$\frac{1}{4}$	-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{43}{4}$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{15}{16}$	$-\frac{47}{16}$	**-2**

b) $f(h) = -1 \iff 10\sin(2\pi h) + 2 - h = 0$

h	0,50	0,55	0,53	0,52	0,525
$10\sin(2\pi h) + 2 - h$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$

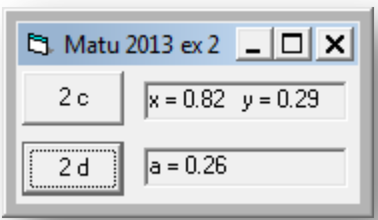
$h \cong 0{,}52$

x	y	y'	$y'' = 10 \cdot \sin(2\pi x) - y - y'$
0	-1	0	1
0,52	-1	0,52	
1,04	-0,73		

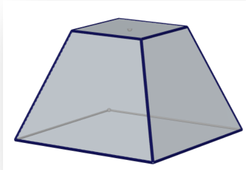
Le pas $h = \frac{1}{2}$ est bien trop grand pour que les résultats soient cohérents.

c)
```
Let x = 0 : y = –1 : yp = 0 : h = 1/ 1024  : Pi = 4 * Atn(1)
Do
 Let ys = 10*sin(2*Pi*x) – y – yp
 Let x = x + h
 Let y = y + h * yp
 Let ayp = yp
 Let yp = yp + h * ys
Loop Until yp * ayp < 0
Let Label1.Caption = Format(y , "0.00")
```

d)
```
Let a = 0
Do
 Programme du point c
 Let aa = a
 Let a = Abs(y)
Loop Until Abs(aa – a) < 0.001
Let Label2.Caption = Format(a , "0.000")
```



Problème 3



Une pyramide régulière de 6 cm de hauteur et dont la base carrée est donnée dans le sol est tronquée par un plan horizontal de cote 3 cm.

a) Construire la perspective du tronc de pyramide.

Cette pyramide est éclairée par des rayons lumineux dont la direction est donnée par le point de fuite F_r.

b) Construire la perspective de l'ombre du tronc de pyramide sur le sol.

Un mât est donné par sa perspective $M_1' \; M'$.

c) Construire la perspective de l'ombre du mât.

d) Par une construction, déterminer la hauteur du mât.