מבוא להסתברות וסטטיסטיקה 80430 - סיכום הגדרות וטענות

9 במרץ 2021

לי תמיד נוח שיש סיכום של כל ההגדרות, הטענות והמשפטים במקום אחד. הוספתי בסוף גם ריכוז של דברים שימושיים (אי שוויונות, טבלת התפלגויות-תוחלות-שונויות וכו').
תהנו!
אם אתם מוצאים טעויות, שלחו לי במייל nitzan.barzilay@mail.huji.ac.il.
הסיכום ממש עזר לכם? אם ורק אם בא לכם לפרגן לי בקפה, תוכלו לעשות את זה ב-ko-fi.com/sikumim ☺

הסתברות בדידה

- **מרחב מדגם sample space** - מרחב מדגם Ω הוא קבוצה לא ריקה.
- **פונקצית הסתברות נקודתית probability mass function** - פונקציה $p : \Omega \to [0,1]$ המקיימת $\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1$.
- **תומך support** - הקבוצה $Supp(p) = \{\omega \in \Omega \mid p(\omega) > 0\}$ (קבוצת כל היחידונים שההסתברות שלהם חיובית) מכונה התומך של p.
- **מאורע event** - תת קבוצה של מרחב המדגם. אוסף כל המאורעות יסומן ב-$\mathcal{F}$.
- **מאורע משלים** - עבור מאורע A נגדיר את $A^c = \Omega \backslash A$ להיות המאורע המשלים של A.
- **פונקצית הסתברות probability function** - פונקציית ההסתברות היא פונקציה $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$ המקיימת:
  - $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
  - **סכימות בת מניה / σ-אדיטיביות:** אם $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ מאורעות זרים אז $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$ (אם יש סדרה של מאורעות זרים - כלומר כל זוג של מאורעות הם זרים - אז הסכום של ההסתברויות שלהם שווה להסתברות של האיחוד שלהם).
- **תומך של פונקצית הסתברות** - נאמר ש-$\mathbb{P}$ נתמכת ע"י A אם $P(A) = 1$.
- **מרחב הסתברות probability space** - השלישיה $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מכונה מרחב הסתברות.
- **טענה 1.5 - תכונות של פונקצית הסתברות** - יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות, אזי התכונות הבאות מתקיימות:
  - $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
  - **אדיטיביות:** אם $A_1, ..., A_n$ מאורעות זרים (מספר סופי של קבוצות זרות), אז $P(\bigcup_{i\in[n]} A_i) = \sum_{i\in[n]} \mathbb{P}(A_i)$
  - **מונוטוניות:** אם $A \subset B$ אז $\mathbb{P}(A) \le \mathbb{P}(B)$.
  - לכל מאורע, $\mathbb{P}(A) \le 1$.
  - **הסתברות המשלים:** לכל מאורע A מתקיים $\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

- **טענה 1.6 - פונקצית הסתברות נקודתית מגדירה פונקצית הסתברות** - תהי $p:\Omega\to\mathbb{R}_+$ פונקצית הסתברות נקודתית על מרחב מדגם Ω. אזי הפונקציה $\mathbb{P}_p:\mathcal{F}\to\mathbb{R}_+$ הנתונה ע"י $\mathbb{P}_p(A)=\sum_{\omega\in A}p(\omega)$ לכל מאורע A, היא פונקצית הסתברות.

- **פונקצית הסתברות בדידה** - יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות. אם קיימת פונקצית הסתברות נקודתית p כך ש־$\mathbb{P}_p=\mathbb{P}$, אז $\mathbb{P}$ נקראת פונקצית הסתברות בדידה.

- **מרחב הסתברות בדידה** - מרחב הסתברות $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ עם $\mathbb{P}$ פונקצית הסתברות בדידה, נקרא מרחב הסתברות בדידה.

- **מרחב הסתברות אחיד uniform probability space** - מרחב הסתברות בדידה $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}_p)$ נקרא אחיד אם לכל $\omega_1,\omega_2\in\Omega$ מתקיים $p(\omega_1)=p(\omega_2)$. כיוון ש־$\mathbb{P}_p(A)=\sum_{\omega\in A}p(\omega)$, במרחב סופי אחיד לכל $\omega\in\Omega$ מתקיים $p(\omega)=\frac{1}{|\Omega|}$, ולכן לכל מאורע A במרחב הסתברות סופי מתקיים $\mathbb{P}(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$.

- **מכפלת פונקציות הסתברות נקודתיות** - יהיו $p_1:\Omega_1\to\mathbb{R}_+$ו־$p_2:\Omega_2\to\mathbb{R}_+$ פונקציות הסתברות נקודתיות. $p_1\times p_2$ מוגדרת ע"י $\underbrace{((\omega_1,\omega_2))}_{\substack{\text{cartesian couples}\\ \text{of } \omega_1,\omega_2}}=p_1(\omega_1)p_2(\omega_2)$ $p_1\times p_2$.

- **מכפלת פונקציות הסתברות נקודתיות מגדירה פונקצית הסתברות נקודתית:** יהיו $p_1:\Omega_1\to\mathbb{R}_+$ו־$p_2:\Omega_2\to\mathbb{R}_+$ פונקציות הסתברות, אז $p_1\times p_2$ היא פונקצית הסתברות נקודתית על $\Omega_1\times\Omega_2$.

- **מרחב מכפלה product space** - יהיו $(\Omega_1,\mathcal{F},\mathbb{P}_{p_1})$ ו־$(\Omega_2,\mathcal{F},\mathbb{P}_{p_2})$ מרחבי הסתברות בדידה, עבור פונקציות הסתברות נקודתיות p_1 ו־p_2 בהתאמה. המרחב $(\Omega_1\times\Omega_2,\mathcal{F},\mathbb{P}_{p_1\times p_2})$ יכונה מרחב המכפלה שלהם.

- **מכפלת פונקציות הסתברות נקודתיות** - יהיו $\{\Omega_n,\mathcal{F},\mathbb{P}_{p_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ מרחבי הסתברות בדידה המתאימים להפוקציות הסתברות נקותיות $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. נסמן את מכפלת מרחבי המדגם ב־$\Omega=\times_{n=1}^{N}\Omega_n$. מכפלת פונקציות ההסתברות הנדוקתיות היא הפונקציה $p:\Omega\to\mathbb{R}_+$ המוגדרת ע"י $p((\omega_1\dots,\omega_n))=\prod_{n=1}^{N}p_n(\omega_n)$.

- **מרחב מכפלה של מספר מרחבים בדידים** - המרחב $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}_p)$ עם $\Omega=\times_{n=1}^{N}\Omega_n$ ו־p היא מכפלת פונקצית הסתברות נקודתיות.

- **תזכורת על נוסחאות קומבינטוריקה:**

	עם חזרה	ללא חזרה
סדר משנה	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
סדר לא משנה	$\binom{k+n-1}{n-1}$	$\binom{n}{k}$

- **ניסוי דו שלבי two-stage experiment** - יהיו Ω_1,Ω_2 מרחבי מדגם. ניסוי דו שלבי מתואר ע"י פונקצית ההסתברות נקודתית p_1 על Ω_1, וכן לכל $\omega_1\in\Omega_1$ פונקצית הסתברות נקודתית p_{ω_1} על Ω_2 המגדירה את ההסתברות של כל תוצאה בשלב השני לאחר שהתקבלה בשלב הראשון התוצאה ω_1. לניסוי דו שלבי מתאים מרחב הסתברות $\Omega=\Omega_1\times\Omega_2$.

- **פונקצית הסתברות נקודתית המתאימה לתוצאת ניסוי דו שלבי** - הפונקציה $q:\Omega\to\mathbb{R}_+$ (עם $\Omega=\Omega_1\times\Omega_2$) המוגדרת באמצעות $q\underbrace{((\omega_1,\omega_2))}_{\substack{\text{cartesian couples}\\ \text{of } \omega_1,\omega_2}}=p(\omega_1)p_{\omega_1}(\omega_2)$.

- **ניסוי רב שלבי multi-stage experiment** - יהיו $\{\Omega_k\}_{k\in[n]}$ מרחבי מדגם. ניסוי רב שלבי על Ω מתואר ע"י אוסף פונקציות הסתברות נקודתיות: p_1 על Ω_1 המתארת את ההסתברות לכל תוצאה בשלב הראשון של הניסוי, ועבור כל $k\in[n-1]$ וכל $\omega_1\in\Omega_1,\dots,\omega_k\in\Omega_k$, פונקצית הסתברות נקודתית $p_{\omega_1,\dots,\omega_k}$ המתארת את ההסתברות לכל תוצאה בשלב ה־$k+1$ לאחר שהתקבלו ב־k השלבים הראשונים התוצאות $\omega_1,\dots,\omega_k$. לניסוי רב שלבי מתאים מרחב הסתברות $\Omega=\Omega_1\times\dots\times\Omega_k$.

- **פונקצית הסתברות נקודתית המתאימה לתוצאת ניסוי רב שלבי** - הפונקציה $q:\Omega\to\mathbb{R}_+$ (עם $\Omega=\Omega_1\times\dots\times\Omega_k$) המוגדרת באמצעות $q\underbrace{((\omega_1,\dots,\omega_n))}_{\substack{\text{cartesian couples}\\ \text{of } \omega_1,\omega_2}}=p(w_1)\prod_{k=1}^{n-1}p_{\omega_1,\dots,\omega_k}(\omega_{k+1})$.

שיטות בסיסיות

- **טענה 2.3- חסם האיחוד לשני מאורעות** - יהיו A, B מאורעות במרחב ההסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, אזי מתקיים $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
- **משפט 2.4- חסם האיחוד לסדרת מאורעות - אי שוויון בול** - תהי $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת מאורעות במרחב ההסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, אזי מתקיים $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$.
- **מסקנה 2.5- חסם האיחוד לאוסף סופי של מאורעות** - יהיו $A_1, \dots A_n$ מאורעות במרחב ההסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, אזי מתקיים $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{k\in[n]} A_k) \leq \sum\limits_{k\in[n]} \mathbb{P}(A_k)$.
- **סדרת מאורעות מונוטונית** - סדרה של מאורעות $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ במרחב הסתברות נקראת מונוטונית עולה אם לכל $i < j$ מתקיים $A_i \subset A_j$, ומונוטונית יורדת אם $A_j \subset A_i$.
- **משפט 2.7- רציפות פונקצית ההסתברות על סדרה עולה של מאורעות** - יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ותהי $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה מונוטונית עולה של מאורעות. אזי מתקיים $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$.
- **טענה 2.9- הכלה והדרה לשניים או שלושה מאורעות** - יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות.
  - יהיו A, B מאורעות, אזי מתקיים $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
  - יהיו A, B, C מאורעות, אזי מתקיים $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap B)$.
- **טענה 2.10- הכלה והדרה הכללי** - יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות. נסמן $A_1, \dots, A_n$ מאורעות ונסמן $A_I = \cap_{i\in I} A_i$. אזי מתקיים $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in[n]} A_i\right) = \sum_{1\leq i\leq n} \mathbb{P}\left(A_{ii\}}\right) - \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbb{P}\left(A_{\{i,j\}}\right) + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} \mathbb{P}\left(A_{\{i,j,k\}}\right) - \dots + (-1)^{n+1}\mathbb{P}\left(A_{(1,\dots,n\}}\right)$.
שתי דרכים מפורשות יותר לרשום סכום זה הן:
  - $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in[n]} A_i\right) = \sum_{l\in[n]} (-1)^{\ell+1} \sum_{\substack{I\in[n] \\ |l|=\ell}} \mathbb{P}\left(A_I\right)$
  - $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in[n]} A_i\right) = \sum_{I\subset[n]} (-1)^{|l|+1} \mathbb{P}\left(A_I\right)$
- **הערה - אי שוויון בונפרוני** - חסם האיחוד הוא רק אחד משורה של אי־שוויונים הקשורים לעקרון ההכלה וההדרה. להלן ההכללה - בהנתן מאורעות $A_1, \dots, A_n$ לכל $I \subset [n]$ נסמן כמקודם $A_I = \cap_{i\in I} A_i$. אזי:
  - לכל $k \in [n]$ אי זוגי מתקיים $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in[n]} A_i\right) \leq \sum_{\ell=1}^{k} (-1)^{\ell+1} \sum_{\substack{I\subset[n] \\ |I|=\ell}} \mathbb{P}\left(A_I\right)$
  - לכל $k \in [n]$ זוגי מתקיים $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in[n]} A_i\right) \geq \sum_{\ell=1}^{k} (-1)^{\ell+1} \sum_{\substack{I\in[n] \\ |I|=\ell}} \mathbb{P}\left(A_I\right)$

הסתברות מותנית ואי תלות

- **הסתברות מותנית conditional probabiluty** - יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות, יהי B מאורע בעל הסתברות חיובית ויהי A מאורע כלשהו. נגדיר את ההסתברות המותנינת של A בהנתן B ע"י $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.
- **טענה 3.2 - הסתברות מותנית היא פונקצית הסתברות** - יהיה $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהי B מאורע בעל הסתברות חיובית. אזי, הפונקציה $\mathbb{P}_B : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ המוגדרת ע"י $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B)$ לכל מאורע A, היא פונקצית הסתברות.
- **אבחנה 3.4 כלל השרשרת chain law** - יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהיו A, B מאורעות כך שמתקיים $\mathbb{P}(B) > 0$. אזי מתקיים $\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)$.
- **אבחנה - הכללה של כלל השרשרת למספר מאורעות**- לכל מאורעות $A_1, \dots, A_n$ אז $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_2\cap A_1)\dots\mathbb{P}(A_{k+1}|\bigcap\limits_{j=1}^{k} A_k)$.

- **טענה 3.8 -כלל בייס Base formula** - יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהיו A,B שני מאורעות עם הסתברות חיובית. אזי מתקיים $\mathbb{P}(A|B)=\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)$, או בניסוח אחר $\mathbb{P}(A|B)=\mathbb{P}(B|A)\frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$.

- **טענה 3.5 - התניה חוזרת שקולה להתניה בחיתוך** - יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהיו A,B שני מאורעות המקיימים $\mathbb{P}(A\cap B)>0$. נסמן ב-$\mathbb{P}'=\mathbb{P}_A$ את פונקצית ההסתברות המתקבלת מ-$\mathbb{P}$ לאחר התניה ב-A, ונסמן ב-$\mathbb{P}''=\mathbb{P}'_B$, אזי לכל מאורע D מתקיים $\mathbb{P}''(D)=\mathbb{P}(D|A\cap B)$.

- **טענה 3.6 - ניסוי דו שלבי במונחי הסתברות מותנית** - יהיו Ω_1,Ω_2 מרחבי מדגם, תהי p פונקצית הסתברות נקודתית על Ω_1 ותהיינה p_ω פונקציות הסתברות נקודתיות על Ω_2. אזי, $\mathbb{P}$ פונקציית ההסתברות על $\Omega_1\times\Omega_2$ המתאימה לניסוי הדו שלבי שמתואר ע"י הפונקציות האלה, היא היחידה המקיימת לכל $b\in\Omega_2$, $a\in\Omega_1$ כי $\mathbb{P}(\{(a,\cdot)\}=p(a)$, $\mathbb{P}\{(\cdot,b)\mid(a,\cdot)\}=p_a(b)$.

- **חלוקה בת מניה של מרחב הסתברות** - יהי Ω מרחב הסתברות, ויהי $\mathcal{A}=\{A_1,A_2,...\}$ אוסף בן מניה של מאורעות כך ש-$\Omega=A_1\cup A_2\cup...$ וכך שהמאורעות $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ זרים בזוגות, אזי $\mathcal{A}$ נקראת חלוקה בת מניה של Ω.

- **חוק ההסתברות השלמה** - יהי Ω מרחב הסתברות, ותהי $\mathcal{A}=\{A_1,A_2,...\}$ חלוקה בת מניה של Ω כך שמתקיים $P(A_j)>0$ לכן j. אז לכל מאורע B מתקיים $P(B)=\sum\limits_{A_j\in A}P(B\cap A_j)$.

- **טענה 3.7 -נוסחת ההסתברות השלמה במונחי הסתברות מותנית** - תהי $\mathcal{A}$ חלוקה בת מניה של מרחב ההסתברות $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. אזי לכל מאורע B מתקיים $\mathbb{P}(B)=\sum\limits_{\substack{A\in\mathcal{A}\\P(A)>0}}\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)$.

- **אי תלות independancy** - יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהיו A,B שני מאורעות בו. נאמר כי A ו-B הנם בלתי תלויים אם $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. אחרת, הם יקראו תלויים.

- **טענה 3.10 - תכונות בסיסיות של אי תלות** -
  - יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהיו $A,B\in\mathcal{F}$ מאורעות בלתי תלויים. אזי:
    * A בלתי תלוי ב-Ω וב-$\emptyset$.
    * אם $\mathbb{P}(B)>0$ אז $\mathbb{P}(A|B)=\mathbb{P}(A)$.
    * A^C ו-B בלתי תלויים.

- **אי תלות מאורע באוסף מאורעות** - יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהיו $A,B_1,\dots,B_k$ מאורעות בו. נאמר כי A בלתי תלוי באוסף $\{B_1,\dots,B_k\}$ אם לכל $I\subset[k]$ מתקיים כי A בלתי תלוי ב-$\bigcap_{i\in I}B_i$.

- **טענה 3.11 - תנאי שקול לאי תלות מאורע באוסף מאורעות** - יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהיו $A,B_1,\dots,B_k$ מאורעות בו. נאמר כי A בלתי תלוי באוסף $\{B_1,\dots,B_k\}$ אם ורק אם A בלתי תלוי באוסף $\{B_1,\dots,B_k,B_1^c,\dots,B_k^c\}$.

- **אי תלות של אוסף סופי של מאורעות** - יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות. מאורעות $A_1,\dots,A_n$יקראו בלתי תלויים אם לכל $I\subset[n]$ מתקיים $\prod\limits_{i\in I}\mathbb{P}(A_i)=\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i\in I}A_i\right)$.

- **טענה 3.14 - תנאי שקול לאי תלות של אוסף מאורעות** - יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות. מאורעות $A_1,\dots,A_n$יקראו בלתי תלויים אם לכל $j\subset[n]$ המאורע A_j בלתי תלוי ב-$\{A_i\mid i\in[n]\backslash\{j\}\}$.

- **אי תלות של אוסף מאורעות אינסופי** - אוסף מאורעות $\mathcal{A}$ נקרא בלתי תלוי אם המאורעות בכל תת-אוסף סופי שלו הם בלתי תלוים.

- **טענה 3.17 -נוסחת מכפלה לסדרה אינסופית של מאורעות בלתי תלויים** - תהי$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה של מאורעות בלתי תלויים. אזי מתקיים $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(A_n\right)$.

משתנים מקריים בדידים

- **משתנה מקרי random variable** - יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות. משתנה מקרי הוא פונקציה מ־Ω ל־$\mathbb{R}$, המתאים לכל $S\in\mathcal{F}$ את המאורע $\{A\in S\}=\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)\in S\}$.

- **הסתברות מקרי מציין indicator random variable** - יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהי מאורע A. המשתנה המציין של A הוא $\mathbb{1}(\omega)=\begin{cases}1 & \omega\in A\\ 0 & \omega\notin A\end{cases}$.

- **התפלגות משתנה מקרי distribution** - יהי X משתנה מקרי על מרחב הסתברות $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. ההתפלגות של X היא הפונקציה $\mathbb{P}_X:\mathcal{F}\to\mathbb{R}_+$ הנתונה ע"י $\mathbb{P}_X(S)=\mathbb{P}\left(X^{-1}(S)\right)=\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega:X(\omega)\in S\})$. אם $\mathbb{P}_X$ נתמכת על S אז נאמר כי X נתמך על S.

- **טענה 4.4 - התפלגות של משתנה מקרי היא פונקצית הסתברות** - יהי X משתנה מקרי על מרחב הסתברות $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. אזי $(\mathbb{R},\mathcal{F}_{\mathbb{R}},\mathbb{P}_X)$ הוא מרחב הסתברות.

- **משתנה מקרי בדיד** - משתנה מקרי X יקרא בדידת והתפלגותו תקרא בדידהת אם $\mathbb{P}_X$ היא פונקצית הסתברות בדידה.

- **פונקצית התפלגות נקודתית** - כאשר X מ"מ בדיד, פונקצית ההסתברות הנקודתית p_X המתאימה ל־$\mathbb{P}_X$ תכונה פונקציית התפלגות נקודתית של X.

- **התפלגויות נפוצות** -

	אינטואיציה	התפלגות
אחידה	זריקת מטבע הוגן	אם $X\sim Unif(S)$ $p_X(i)=\frac{1}{\lvert S\rvert}$ לכל $i\in S$
ברנולי	ניסוי יחיד שההסתברות להצליח היא p ו־X הוא אינדיקטור שמקבל 1 אם היתה הצלחה ו־0 אחרת	אם $X\sim Ber(p)$ $p_X(1)=p$ ו־$p_X(0)=1-p$
גאומטרית	סדרת ניסויים ב"ת שבכל אחד יש הסתברות p להצלחה, ו־X סופר כמה נסיונות היו עד להצלחה הראשונה	אם $X\sim Geo(p)$ עם $p\in(0,1]$ לכל $n\in\mathbb{N}$ $p_X(n)=(1-p)^{n-1}p$
בינומית	n ניסויים ב"ת שלכל אחד מהם יש הסתברות p להצלחה, ו־X סופר כמה הצלחות היו	אם $X\sim Bin(n,p)$ לכל $k\in\{0,..,n\}$ $p_X(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$
פואסונית	אין	אם $X\sim Pois(\lambda)$ (עם שכיחות λ) לכל $n\in\mathbb{N}_0$ $p_X(n)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$

- **שוויון התפלגויות** - אם לשני משתנים מקריים שונים X,Y (שעשויים להיות מוגדרים על מרחבי הסתברות שונים) יש את אותה התפלגות (כלומר מתקיים $\mathbb{P}_X=\mathbb{P}_Y$) נאמר כי הם שווי התפלגות ונכתוב $X\overset{d}{=}Y$. בפרט, משתנים מקריים בדידים הנם שווי הפתלגות אם"ם יש להם אותה פונקצית התפלגות נקודתית (כלומר מתקיים $p_X=p_Y$).

- **שוויון כמעט תמיד almost surely** - יהיו X,Y שני משתנים מקריים בדידים על מרחב הסתברות $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. נאמר כי X ו־Y שווים כמעט תמיד, ונסמן $X\overset{a.s.}{=}Y$ אם מתקיים $\mathbb{P}(X=Y)=\mathbb{P}\left(\{\omega\mid X(\omega)=Y(\omega)\}\right)=1$.

- **שוויון כמעט תמיד לעומת שוויון התפלגויות** - כאשר שני מ"מ מקבלים את אותו הערך בהסתברות 1, נאמר כי הם שווים כמעט תמיד. כאשר לכל ערך ההסתברות של מ"מ אחד לקבלו שווה להסתברות שמשתנה מקרי אחר יקבלו, נאמר כי הם שווי התפלגות. אם שני מ"מ שווים כמעט תמיד אז הם גם שווי התפלגות.

- **תכונות של שוויון כמעט תמיד** -
  - טרנזיטיביות - אם $X\overset{a.s.}{=}Y$ ו $Y\overset{a.s.}{=}Z$ אז $X\overset{a.s.}{=}Z$
  - אם $X\overset{a.s.}{=}Y$ אז $f(X)\overset{a.s.}{=}f(Y)$ עם f פונקציה כלשהי
  - אם $X\overset{a.s.}{=}Y$ אז $f(X)\overset{d}{=}f(Y)$

- **משתנה מקרי קבוע** - נאמר שמ"מ הנו משתנה מקראי קבוע אם קיים $c\in\mathbb{R}$ כך ש-$p_X(c)=1$, כלומר אם המאורע $\{X=c\}$ מתקיים כמעט תמיד.

- **וקטור מקרי random vector** - אוסף סופי של משתנים מקריים $X=(X_1,\ldots,X_n)$ המוגדרים על אותו מרחב הסתברות $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ יכונה וקטור מקרי.

- **התפלגות משותפת** - יהי $X=(X_1,\ldots,X_n)$ וקטור מקרי על מרחב ההסתברות $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. הפונקציה : $\mathbb{P}_X=\mathbb{P}_{X_1,\ldots,X_n}$ $\mathcal{F}\to\mathbb{R}_+$ הנתונה ע"י $\mathbb{P}_X(A)=\mathbb{P}(X^{-1}(A))=\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)\in A\})$ מכונה ההתפלגות המשותפת של X. ההתפלגות של כל אחד מהמשתנים המקריים $X_1,\ldots,X_n$ מכונה התפלגות שולית. אם $\mathbb{P}_X$ נתמכת על A, נאמר כי X נתמך על A.

- **אבחנה 4.17 - התפלגות משותפת היא פונקצית הסתברות** - יהי $(X_1,\ldots,X_n)$ וקטור מקרי, אז $\mathbb{P}_{X_1,\ldots,X_n}$ היא פונקצית הסתברות על $\mathbb{R}^n$.

- **וקטור מקרי בדיד discrete random vector** - וקטור $X=(X_1,\ldots,X_n)$ יקרא בדיד, והתפלגותו תקרא בדידה, אם $\mathbb{P}_X$ היא פונקצית הסתברות בדידה.

- **פונקצית התפלגות נקודתית של וקטור מקרי בדיד** - יהי $X=(X_1,\ldots,X_n)$ וקטור מקרי בדיד. פונקציית ההתפלגות הנקודתית של X היא פונקציית ההסתברות הנקודתית p_Xהמתאימה ל-$\mathbb{P}_X$.

- **תומך של וקטור מקרי בדיד** - יהי $X=(X_1,\ldots,X_n)$ וקטטור מקרי בדיד, התומך של X הוא הקבוצה $Supp(X)=\{x\in\mathbb{R}^n\mid p_X(x)>0\}$.

- **התפלגות בהנתן מאורע** - יהי X וקטור מקרי בדיד ממימד d על מרחב הסתברות $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ ויהי $A\in\mathcal{F}$ מאורע המקיים $\mathbb{P}(A)>0$. לכל $S\in\mathcal{F}_{\mathbb{R}^d}$ נרשום: $\mathbb{P}_{X|A}(S)=\mathbb{P}(X\in S|A)=\mathbb{P}_A(X\in S)$, כאשר $\mathbb{P}_A$ היא פונקצית ההסתברות $\mathbb{P}$ מותנית ב-A (ראו טענה 3.2). ההתפלגות $\mathbb{P}_{X|A}$ מכונה "ההתפלגות של X בהנתן A", והיא למעשה התפלגותו של X על מרחב ההסתברות $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}_A)$. כמו כן, נשתמש בכיתוב $(X|A)\sim\mathcal{D}$ כדי לציין כי, בהנתן A, המשתנה X מתפלג לפי $\mathcal{D}$.

- **אי תלות של שני משתנים מקריים** - נאמר שמשתנים מקריים X,Y המוגדרים על אותו מרחב הסתברות הם **בלתי תלויים** אם לכל שתי קבוצות $S,T\in\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ מתקיים שהמאורעות $\{Y\in T\}$ ו-$\{X\in S\}$ בלתי תלויים, כלומר $\mathbb{P}(X\in S,Y\in T)=\mathbb{P}(X\in S)\cdot\mathbb{P}(Y\in T)$. בניסוח אחר, X,Y בלתי תלויים אם לכל $S\in\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$עבורה $P(X\in S)>0$ מתקיים $\mathbb{P}_{Y|X\in S}=\mathbb{P}_Y$.

- **טענה 4.27 - אי תלות של אוסף משתנים מקריים** - יהיו $X_1,\ldots,X_n$ משתנים מקריים המוגדרים על אותו מרחב הסתברות. נאמר שזהו אוסף של משתנים מקריים בלתי תלויים אם לכל n קבוצות $S_1,\ldots,S_n\in\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$, המאורעות $\{X_1\in S_1\},\ldots,\{X_n\in S_n\}$ בלתי תלויים.

- **טענה 4.32 - תנאי שקול לאי תלות** - יהיו $X_1,\ldots,X_n$ מ"מ המוגדרים על אותו מרחב הסתברות. הם יקראו בלתי תלויים אם"ם לכל $S_1,\ldots,S_n\in\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ מתקיים $\mathbb{P}(X_1\in S_1,\ldots,X_n\in S_n)=\prod\limits_{i\in n}\mathbb{P}(X_i\in S_i)$.

- **אבחנה 4.34 - אי תלות של מאורעות שקולה לאי תלות של המשתנים המציינים אותם** - מאורעות $A_1,\ldots,A_n$ הם בלתי תלווים אם"ם $\mathbb{1}_{A_1},\ldots,\mathbb{1}_{A_n}$ הם משתנים בלתי תלויים.

- **טענה 4.36 -אי תלות נשמרת תחת הפעלת פונקציות** - יהיו $X_1,\ldots,X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים, ותהיינה $f_i\in\mathcal{F}_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$ פונקציות. אזי $f_1(X_1),\ldots,f_n(X_n)$ בלתי תלויים.

- **טענה** - אם $X=(X_1,\ldots,X_n)$, $Y=(Y_1,\ldots,Y_n)$ וקטורים מתקריים בלתי תלויים, ו-$f\in\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^l}$, $g\in\mathcal{F}_{\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k}$, אז $f(X)$ ו-$g(Y)$ הם וקטורים מקריים בלתי תלויים.

- **טענה 4.35** - יהיו $X_1,\ldots,X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים, יהיו מספרים שלמים $\{b_i\}_{i\in\{0,\ldots,n\}}$ המקיימים $0=b_0<b_1<\cdots<b_{k-1}<b_k=n$, ונגדרים k וקטורים מקריים $Y_i=\left(X_{b_{i-1}+1},\ldots,X_{b_i}\right)$, אז $Y_1,\ldots,Y_n$ בלתי תלויים.

- **מסקנה** - אם X_1,X_2,X_3,X_4משתנים מקריים בלתי תלויים, אז X_1+X_2ו-X_3+X_4 וגם $\frac{X_1}{X_4}$ ו-$sin\left(X_2X_3\right)$ הם בלתי תלויים.

- **סדרה אינסופית של משתנים מקריים בלתי תלויים** - סדרה של משתנים מקריים $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ נקראת סדרת משתנים בלתי תלויים אם לכל $n\in\mathbb{N}$ המשתנים המקריים $X_1,\ldots,X_n$ הם בלתי תלויים.

- **אבחנה 4.39 - נוסחת מכפלה לסדרה אינסופית של משתנים מקריים** - תהי X_n סדרה של משתנים מקריים בלתי תלויים, ותהיינה $S_n \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$, אזי $\mathbb{P}\left(\forall n \in \mathbb{N}\ X_n \in S_n\right) = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(X_n \in S_n\right)$.

- **טענה 4.40 - אין סדרות משתנים מקריים שווי התפלגות על מרחבי הסתברות בדידה** - תהי X_n סדרה של משתנים מקריים בלתי תלויים שווי התפלגות ולא קבועים על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. אזי $\mathbb{P}$ אינה פונקצית הסתברות בדידה.

- **טענה 4.41 - קיום סדרה אינסופית של משתנים מקריים בלתי תלויים** - יהיו $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ משתנים מקריים על מרחבי הסתברות כלשהם. אז קיים מרחב הסתברות שעליו מוגדרת סדרת משתנים מקריים $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$בלתי תלויים המקיימת $Y_n \overset{d}{=} X_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

- **טענה 4.43 - הצלחה ראשונה בסדרת ניסויי ברנולי בלתי תלויים מתפלגת גאומטרית** - תהי $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ סדרה אינסופית של משתנים מקריים בלתי תלויים כאשר $X_k \sim Ber(p)$ לכל $k\in\mathbb{N}$, ונסמן $X = min\left(\{k \mid X_k = 1\}\right)$.

- **תכונת חוסר הזכרון** - אם $X \sim Geo(p)$ אז לכל $k\in\mathbb{N}$ המקיים $k < X$, מתקיים $X \sim X - k \sim Geo(p)$.

- **טענה 4.44 - תיאור משתנה גאומטרי במונחים של התפלגות שיורית** - משתנה מקרי שנתמך על השלמים מתפלג $Geo(p)$ אם"ם לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n$.

- **טענה 4.47 - סכום משתני ברנולי בלתי תלויים מתפלג בינומית** - יהי $X = \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ וקטור של משתני ברנולי עם הסתברות הצלחה p בלתי תלויים. אזי $\sum\limits_{i\in[n]} X_i \sim Bin(n,p)$.

- **טענה 4.48- תחיבור משתנים מקריים בינומיים בלתי תלויים** - אם $X \sim Bim(m,p)$, $Y \sim Bin\left(n,p\right)$ בלתי תלויים, אז $X + Y \sim Bin\left(m+n, p\right)$.

- **טענה** - יהי $\lambda > 0$ ויהיו $X_n \sim Bin\left(n, \frac{n}{x}\right)$ משתנים מקריים עבור $n > \lambda$. אז לכל $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_n = k\right) = \mathbb{P}\left(X = k\right)$.

- **טענה 4.50 - תכונות התפלגות פואסונית** - יהי $X \sim Pois\left(\lambda\right)$ בלתי תלוי ב-X, אז $X + y \sim Pois\left(\lambda + \eta\right)$.

תוחלת

- **תוחלת משתנה מקרי בדיד** - יהי X משתנה מקרי בדיד. התוחלת expectation של X מוגדרת ע"י $\mathbb{E}\left(X\right) = \sum\limits_{s\in\mathbb{R}} s\mathbb{P}\left(X = s\right)$.
אם טור זה מתכנס בהחלט, נאמר כי X בעל תוחלת סופית. אחרת נאמר כי X חסר תוחלת סופית.

- **תוחלת של משתנה מקרי על מרחב הסתברות בדידה** - יהי X משתנה מקרי על מרחב הסתברות בדידה $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. התוחלת של X מקיימת $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{\omega\in\Omega} X(\omega)\cdot\mathbb{P}\left(\{\omega\}\right)$, והיא קיימת אם"ם טור זה מתכנס בהחלט.

- **תוחלת של משתנים מקריים מוכרים** -

התפלגות	$\mathbb{E}$
אחידה	$X \sim Unif([n])$ $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$
ברנולי	p
גאומטרית	$\frac{1}{p}$
בינומית	np
פואסונית	λ

- **טענה 5.3 - תוחלת של פונקציה של וקטור מקרי** - יהי $X = (X_1, \ldots, X_n)$ וקטור מקרי בדיד ותהי $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ פונקציה. אזי למשתנה המקרי $Y = f(X)$ מתקיים $\mathbb{E}\left(Y\right) = \sum\limits_{x\in\mathbb{R}^d} f(x)\mathbb{P}(X = x)$ ותוחלת Y סופית אם"ם טור זה מתכנס בהחלט.

- **טענה 5.4 - תכונות התוחלת** - יהיו X, Y משתנים מקריים בדידים על אותו מרחב הסתברות, המקיימים $\mathbb{E}\left(X\right), \mathbb{E}\left(Y\right) \in \mathbb{R}$. אזי:

- **חיוביות:** אם $X \overset{a.s.}{\geq} 0$ אז $\mathbb{E}(X) \geq 0$, ואם $\mathbb{P}(X>0)>0$ אז $\mathbb{E}(X)>0$.
- **לינאריות:** לכל $a,b\in\mathbb{R}$ מתקיים $\mathbb{E}(aX+bY) = a\mathbb{E}(X)+b\mathbb{E}(Y)$.
- **מונוטוניות:** אם $X \overset{a.s.}{\geq} Y$ אז $\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)$.

- **טענה 5.5 - כפליות התוחלת** - יהיו X,Y משתנים מקריים בדידים, בלתי תלויים ובעלי תוחלת סופית. אזי התוחלת של XY קיימת, ומתקיים $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
- **תוחלת תחת התניה** - יהי X משתנה מקרי בדיד, A מאורע המקיים $\mathbb{P}(A)>0$. נגדיר את התוחלת של X בהנתן A להיות $\mathbb{E}(X|A) = \sum\limits_{s\in\mathbb{R}} s\mathbb{P}(X=s|A)$.
- **טענה 5.10 -נוסחת התוחלת השלמה** - תהי $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$חלוקה של מרחב ההסתברות $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. משתנה מקרי X בעל תוחלת סופית על מרחב זה מקיים $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{A_i}) = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}(X|A_i)\mathbb{P}(A_i)$.
- **טענה 5.11 - אי שוויון מרקוב** - יהי X משתנה מקרי אי שלילי. אזי לכל $a>0$ מתקיים $\mathbb{P}(X\geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$.

שונות

- **שונות variance** - יהי X משתנה מקרי בעל תוחלת סופית. השונות של X מוגדרת כ־ $Var(X) = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2$ (אם ל־X^2 אין תוחלת, נאמר של־X אין שונות או ששונותו סופית).
- **טענה 6.2 - תכונות השונות** - יהי X משתנה מקרי בעל שונות סופיתת ויהי $a\in\mathbb{R}$, אזי:
  - $Var(X)\geq 0$ ושוויון מתקיים רק אם X קבוע.
  - $Var(X+a) = Var(X)$.
  - $Var(aX) = a^2Var(X)$ ולכן $\sigma(aX) = |a|\cdot\sigma(X)$.
  - אם Y משתנה מקרי בעל שונות סופית שהנו בלתי תלוי ב־X אז $Var(X+Y) = Var(X)+Var(Y)$.
- **שונויות של משתנים מקריים מוכרים** -

התפלגות	Var
אחידה	$\frac{n^2-1}{12}$
ברנולי	$p(1-p)$
גאומטרית	$\frac{1-p}{p^2}$
בינומית	$np(1-p)$
פואסונית	λ

- **משפט 6.3 - אי שוויון צ'בישב** - יהי X משתנה מקרי בעל שונות סופית. אזי לכל $a>0$ מתקיים $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)|\geq a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}$.
- **משפט 6.5 - החוק החלש של המספרים הגדולים למשתנים בעלי שונות** - יהי X משתנה מקרי בעל שונות סופית ויהי $\varepsilon>0$. לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k-\mathbb{E}(X)\right|<\varepsilon\right)=1$ כאשר $\{X_k\}_{k\in[n]}$ משתנים בלתי תלויים שוי התפלגות ל־X.
- **שונות משותפת covariance** - יהיו X,Y משתנים מקריים על אותו מרחב הסתברות, בעלי תוחלת סופית. השונות המשותפת של X ו־Y מוגדרת ע"י $Cov(X,Y) = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\right) = \mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ כאשר תוחלת זו מוגדרת היטב.
- **משתנים מקריים בלתי מתואמים uncorrelated** - משתנים מקריים X,Y יקראו בלתי מתואמים אם $Cov(X,Y)=0$.
- **מסקנה 6.10 - אי תלות גוררת חוסר מתואמות** - אם X,Y בלתי תלויים, אז הם בלתי מתואמים. נשים לב שהכיוון ההפוך אינו נכון, כלומר חוסר מתואמות אינו גורר אי תלות.

- **אבחנה 6.9 - שונות של סכום משתנים מקריים** - יהיו X,Y משתנים מקריים. אזי $Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)$.

- **טענה 6.11 - תכונות השונות המשותפת** - יהיו X,Y,Z משתנים מקריים בעלי שונות סופית, ויהיו $a,b\in\mathbb{R}$. אזי בכל מקרה בו אגף שמאל מוגדר היטב, מתקיים:
  - **סימטריות:** $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$.
  - **בי לינאריות:** $Cov(aX+bZ,Y)=aCov(X,Y)+bCov(Z,Y)$.
  - $Cov(X,X)=Var(X)$.

- **טענה 6.12 - נוסחת שונות לסכום** - לכל אוסף $(X_k)_{k\in[n]}$ של משתנים מקריים מתקיים $Var\left(\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\right)=\sum\limits_{l,k\leq n}Cov(X_k,X_l)=\sum\limits_{k\leq n}Var(X_k)+2\sum\limits_{k<l\leq N}Cov\left(X_k,X_l\right)$ בכל מקרה בו אגף ימין של המשוואה מוגר היטב.

- **טענה 6.13 - אי שוויון קושי-שוורץ הסתברותי** - יהיו X,Y משתנים מקריים בעלי שונויות סופיות. אזי $\mathbb{E}(XY)$ קיימת ומקיימת $\mathbb{E}(XY)\leq\sqrt{\mathbb{E}\left(X^2\right)\mathbb{E}\left(Y^2\right)}$ ושוויון מתקבל רק כאשר X שווה ל-Ya עם $a\in\mathbb{R}$ כלשהו בהסתברות 1.

- **מקדם המתאם coefficient correlation** - יהיו X,Y משתנים מקריים בעלי שונות סופית. מתאם המתאם של X,Y מוגדר כך: $Corr(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}}$. הביטוי $\sqrt{Var(X)}$ מסומן לעתים בתור $\sigma(X)$.

- **טענה 6.17 - תכונות מקדם המתאם** - יהיו X,Y,Z משתנים מקריים בעלי שונות סופית, ויהיו $a,b\in\mathbb{R}$. אזי מתקיים:
  - **סימטריות:** $Corr(X,Y)=Corr(Y,X)$
  - $Corr(aX,bZ)=sgn(a)sgn(b)Corr(X,Z)$
  - $Corr(X,X)=1$.

- **טענה** - מתקיים $-1\leq Corr(X,Y)\leq 1$. יתקיים שוויון ל-(-1) כאשר $Y=aX+b$ עם $a<0$, ויתקיים שוויון ל-1 כאשר $Y=aX+b$ עם $a>0$.

פונקציה יוצרת מומנטים

- **מומנטים פולינומיאלים** - יהי X משתנה מקרי. המומנט מסדר k של X מוגדר בתור $m_k(X)=\mathbb{E}(X^k)$ כאשר תוחלת זו מוגדרת היטב.

- **מומנט מרכזי** - יהי X משתנה מקרי. המומנט המרכזי מסדר k של X הוא $N_k(X)=\mathbb{E}\left(X-\mathbb{E}\left(X\right)^k\right)$

- **טענה** - מתקיים כי $m_1(X)=\mathbb{E}\left(X\right)$ וכן $m_2(X)=Var(X)$.

- **טענה** - לכל k זוגי ולכל $a>0$, מתקיים $\mathbb{P}\left(\left|X-\mathbb{E}\left(X\right)\right|\geq a\right)\leq\frac{m_k(X)}{a^k}$.

- **טענה** - מתקיים $N_2(X)=m_2(X)-\left(m_1(X)\right)^2$, וכן $N_3(X)=\mathbb{E}\left(\left(X-\mathbb{E}\left(X\right)\right)^3\right)=m_3-3m_2m_1+2m_1^3$.

- **פונקציה יוצרת מומנטים** - יהי X משתנה מקרי. הפונקציה היוצרת מומנטים של X היא הפונקציה הממשית $M_X(t)$ הנתונה ע"י $M_X(t)=\mathbb{E}\left(e^{tX}\right)$.

- **תכונות פונקציה יוצרת מומנטים** - מתקיים:
  - $M_X(t)\geq 0$ לכל t עבורו M_X מוגדרת.
  - **כפליות:** אם X,Y בלתי תלויים, אז $M_{X+Y}=M_X(t)M_Y(t)$.

- **פונקציות יוצרות מומנטים של משתנים מקריים מוכרים** -

התפלגות	$M_X(t)$
אחידה	$\frac{e^t(1-e^{nt})}{n(1-e^t)}$
ברנולי	pe^t+1-p
גאומטרית	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$
בינומית	$(pe^t+1-p)^n$
פואסונית	$e^{\lambda(e^t-1)}$

  - תחום ההגדרה (מעניין אותנו רק תחום ההגדרה שסביב הראשית) של כולם הוא $\mathbb{R}$, חוץ מגאומטרי שתחום ההגדרה שלו היא $t<ln\left(\frac{1}{1-p}\right)$

- **משפט 7.5 - אי שוויון צ'רנוף** - יהי X משתנה מקרי בעל מומנט מעריכי. אזי לכל $t>0$ עבורו $M_X(t)$ מוגדרת ולכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $\mathbb{P}(X\geq a)\leq M_X(t)e^{-ta}$.

- **טענה 7.6 - הלמה של הופדינג** - יהי X משתנה מקרי המקיים $|X|\overset{a.s.}{\leq}1$ וכן $\mathbb{E}(X)=0$. אזי לכל $t\in\mathbb{R}$ מתקיים $\mathbb{E}\left(e^{tX}\right)\leq exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.

- **משפט 7.7 - אי שוויון הופדינג** - יהיו $\{X_k\}_{k\in[n]}$ משתנים מקריים בלתי תלויים ובעלי תוחלת אפס, אשר מקיימים $|X|\overset{a.s.}{\leq}1$ לכל $k\in[n]$. אזי לכל $a>0$ מתקיים $\mathbb{P}\left(\sum_{k\in[n]}X_k\geq a\right)\leq exp\left(-\frac{a^2}{2n}\right)$.

פונקציות התפלגות מצטברות

- **פונקצית התפלגות מצטברת** - יהי X מ"מ, פונקצית התפלגות מצטברת של X היא הפונקציה $F_X(t)=\mathbb{P}(X\leq t)$.

- **טענה** - יהי X מ"מ, $a\in\mathbb{R}$. אז $\mathbb{P}(X=a)=F_X(a)-\lim_{b\to a^-}F_X(b)=F_X(a)-\lim_{n\to\infty}F_X(a-\frac{1}{a})$.

- **טענה** - יהיו X,Y מ"מ, אז $F_X=F_Y$ אם"ם X ו־Y שווי התפלגות.

- **תכונות פונקצית התפלגות מצטברת** -
  - $\lim_{t\to-\infty}F_X(t)=0$.
  - $\lim_{t\to\infty}F_X(t)=1$.
  - לכל $a\leq b$ מתקיים $F_X(a)\leq F_X(b)$.
  - לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $\lim_{b\to a^+}F_X(b)=\lim_{n\to\infty}F_X(a+\frac{1}{n})=F_X(a)$.

- **טענה** - אם פונקציה F מקיימת את ארבע התכונות מהטענה הקודמת אז קיים מרחב הסתברות ומ"מ X כך ש־$F_X=F$.

משתנים מקריים רציפים בהחלט

- **משתנה מקרי רציף בהחלט** - יהי X מ"מ על מרחב הסתברות. נאמר ש־X רציף בהחלט אם קיימת פונקציה אינטגרבילית $f_X:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ כך שלכל $t\in\mathbb{R}$ מתקיים $F_X(t)=\mathbb{P}(X\leq t)=\int_{-\infty}^{t}f_X(x)dx$.

- **צפיפות** - יהי X מ"מ, אז הפונקציה f_X מההגדרה הקודמת נקראת הצפיפות של X.

- **טענה** - אם X רציף בהחלט עם צפיפות f_x ו־$a<b$ אז $\mathbb{P}(a<X<b)=\mathbb{P}(a\leq X<b)=\mathbb{P}(a<X\leq b)=\mathbb{P}(a\leq X\leq b)=\int_a^b f_X(X)dx$.

- **תכונות פונקצית הצפיפות** -

- f_X אי שלילית
- לכל קטע $[a,b]$ מתקיים $\mathbb{P}\left(X\in[a,b]\right)=\int_a^b f_X(x)dx$
- לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $\mathbb{P}\left(X=a\right)=0$
- $\int_{-\infty}^{\infty}f_X(X)dx=1$
- F_X רציפה בכל נקודה. בנוסף, בכל מקום ש־f_X רציפה, F_X גזירה ומתקיים כי F_X קדומה של f_X.

- **טענה** ־ אם f מקיימת את שתי התכונות מהטענה הקודמת, אז קיים מ"מ X כך ש־ $f_X=f$.

- **פונקציה של משתנה מקרי רציף בהחלט** ־ יהי X מ"מ רציף בהחלט ופונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. פונקצית הצפיפות של המ"מ $g(X)$ היא

- **תוחלת של משתנה מקרי רציף בהחלט** ־ יהי X משתנה מקרי רציף בהחלט בעל פונקצית צפיפות $f_X(s)$. אזי התוחלת של X מוגדרת ע"י $\mathbb{E}(X)=\int_{-\infty}^{\infty}sf_X(s)ds$ בכל מקרה בו אינטגרל זה מתכנס בהחלט (אחרת ל־X אין תוחלת).

- **טענה 9.9 ־ תוחלת פונקציה של משתנה מקרי** ־ יהי X משתנה מקרי בעל צפיפות f_X, ותהי $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה. אז $Y=g(X)$ הוא משתנה מקרי המקיים $\mathbb{E}\left(Y\right)=\int_{-\infty}^{\infty}g(s)f_X(s)ds$.

- **טענה 9.10 ־ תכונות התוחלת של משתנה מקרי** ־ יהיו X,Y משתנים מקריים רציפים בהחלט על מרחב הסתברות המקיימים $\mathbb{E}\left(X\right),\mathbb{E}\left(Y\right)\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$. אזי מתקיים:
  - **חיוביות:** אם $X\overset{a.s.}{\geq}0$, אז $\mathbb{E}\left(X\right)\geq0$, ואם $X\overset{a.s.}{>}0$ אז $\mathbb{E}\left(X\right)>0$.
  - **לינאריות:** לכל $a,b\in\mathbb{R}$ מתקיים $\mathbb{E}\left(aX+bY\right)=a\mathbb{E}\left(X\right)+b\mathbb{E}\left(Y\right)$.
  - **מונוטוניות:** אם $\mathbb{P}\left(X\geq Y\right)=1$ אז $\mathbb{E}\left(X\right)\geq\mathbb{E}\left(Y\right)$.

- **אי תלות של משתנים מקריים רציפים בהחלט** ־ יהיו X,Y משתנים מקריים רציפים בהחלט, נאמר שהם בלתי תלויים אם לכל s,t מתקיים $F_{X,Y}(s,t)=F_X(s)\cdot F_Y(t)$.
  - <u>הערה:</u> אם הצפיפות מקיימת $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ אז X,Y ב"ת (אבל אם השוויון לא מתקיים, יתכן שהם תלויים, אך זה לא בטוח).

- **שונות של משתנה מקרי רציף בהחלט** ־ יהי X משתנה מקרי רציף בהחלט, אז השונות שלו מוגדרת כרגיל, כלומר $Var(X)=\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right)=\mathbb{E}\left(X^2\right)-\mathbb{E}\left(X\right)^2$.

- **פונקציה יוצרת מומנטים של משתנה מקרי רציף בהחלט** ־ יהי X משתנה מקרי רציף בהחלט, אז הפי"מ שלו מוגדרת כרגיל, כלומר $M_X(t)=\mathbb{E}\left(e^{tX}\right)$.

- **טענה 9.11 ־ תכונות השונות של משתנה מקרי רציף בהחלט** ־ יהי X משתנה מקרי רציף בהחלט בעל שונות סופית ויהי $a\in\mathbb{R}$, אזי לשונות שלו יש את אותן תכונות כמו כל שונות, כלומר:
  - $Var(X)\geq0$ ושוויון מתקיים רק אם X קבוע.
  - $Var\left(X+a\right)=Var(X)$.
  - $Var\left(aX\right)=a^2Var(X)$ ולכן $\sigma(aX)=|a|\cdot\sigma(X)$.
  - אם Y משתנה מקרי בעל שונות סופית שהנו בלתי תלוי ב־X אז $Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)$.

- **הערה** ־ אם X מ"מ רציף בהחלט,ניתן להפעיל עליו את כל המשפטים שהוכחנו (לדוגמא אי"ש מרקוב, אי"ש צ'בישב, אי"ש צ'רנוף, אי"ש הופדינג וכו').

- **התפלגות אחידה** ־ נאמר כי $X\sim Unif(\text{[a,b]})$ אם $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & 0\leq t\leq b\\ 0 & else\end{cases}$.

- **אבחנה 9.13 - תכונות התפלגות אחידה** - יהי $X\sim Unif([a,b])$ מ"מ בעל התפלגות אחידה, אז מתקיים:

$\mathbb{E}$	Var	$F_X(t)$	$M_X(t)$
$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\begin{cases}0 & t<a\\ \frac{t-a}{b-a} & a\le t\le b\\ 1 & t>b\end{cases}$	$\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$

  - **התפלגות פונקציה אפינית:** לכל $\beta\in\mathbb{R}$ ו־$\alpha>0$ מתקיים $\alpha X+\beta\sim Unif\left([\alpha a+\beta,\alpha b+\beta]\right)$.

- **התפלגות מעריכית** - $X\sim Exp\left(\lambda\right)$ עם $\lambda>0$ אם $f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & 0\le t\le b\\ 0 & else\end{cases}$.

- **אבחנה 9.16 - תכונות התפלגות מעריכית** - יהי $X\sim Exp\left(\lambda\right)$ מ"מ בעל התפלגות אחידה, אז מתקיים:

$\mathbb{E}$	Var	$F_X(t)$	$M_X(t)$
$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$max\left(1-e^{-\lambda t},0\right)$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$ עבור $t<\lambda$

  - לכל $\alpha>0$ מתקיים $\alpha X\sim Exp\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)$.

- **התפלגות נורמלית סטנדרטית** - $X\sim N\left(0,1\right)$ אם $f_X(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-s^2}{2}}$.

- **הגדרה** -$\Phi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{s^2}{2}}ds$

- **טענה** - עבור Φ שהגדרנו בשורה למעלה, מתקיים $\lim\limits_{t\to\infty}\Phi(t)=1$.

- **אבחנה - תכונות התפלגות נורמלית סטנדרטית** - יהי $X\sim N(0,1)$, אזי מתקיים:

$\mathbb{E}$	Var	$F_X(t)$	$M_X(t)$
0	1	$\Phi\left(t\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{s^2}{2}}ds$	$e^{\frac{t^2}{2}}$

- **התפלגות נורמלית** - $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ עם תוחלת μ ושונות σ^2 אם $f_X(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\frac{-(s-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. אפשר לחשוב על Y משתנה מקרי המתפלג נורמלית, בתור $Y=\sigma X+\mu$ עם X מ"מ המתפלג באופן נורמלי סטנדרטי, $\sigma>0$ ו־$\mu\in\mathbb{R}$.

- **אבחנה 9.21 - תכונות התפלגות נורמלית** - יהי $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, אזי מתקיים:

$\mathbb{E}$	Var	$F_X(t)$	$M_X(t)$
μ	σ^2	$\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$	$e^{\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2}}$

- **משפט פוביני (אינטגרלים דו ממדיים)** - תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, כדי לחשב את האינטגרל שלה ב־ $A=[a,b]\times[c,d]$, נשתמש בנוסחא $\int\int\limits_A f(x,y)d(x,y)=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)d(y)\right)d(x)=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)d(x)\right)d(y)$.

- **התפלגות משותפת רציפה בהחלט** - יהיו X,Y משתנים מקריים. יש להם צפיפות משותפת f_{XY} אם לכל $a,b\in\mathbb{R}$, מתקיים $\mathbb{P}(X\le a,Y\le b)=\int_{-\infty}^a\int_{-\infty}^b f_{XY}(X,Y)d(Y)d(X)$. אם הצפיפות המשותפת קיימת, לכל מאורע $A\in\mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$ מתקיים $P\left((X,Y)\in A\right)=\int\int\limits_A f_{XY}(X,Y)d(X,Y)$.

- **הערה** - פונקצית צפיפות משותפת f_{XY} צריכה להיות אי שלילית, ומתקיים $\int\int\limits_{\mathbb{R}^2}f_{XY}(X,Y)d(X,Y)=1$.

- **צפיפות שולית** - אם f_{XY} (הצפיפות משותפת של (X,Y)) קיימת, אז הצפיפות השולית $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{XY}(X,Y)d(Y)$ קיימת וגם $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{XY}(X,Y)d(X)$ קיימת.

- **הערה** - מתקיים $\mathbb{P}\left(X=x\right)=\sum\limits_{y\in\mathbb{R}}\mathbb{P}\left(X=x,Y=y\right)$ עבור X,Y בדידים.

- **תוחלת של פונקציה של** (X,Y) - אם ל-(X,Y) צפיפות משותפת f_{XY} ו-$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, אז $\mathbb{E}\left(g\left(X,Y\right)\right)=\int\int_{\mathbb{R}^2} g\left(X,Y\right)f_{XY}(X,Y)d(X,Y)$.

- **טענה** - האינטגרל $\int\int_D 1d(x)d(y)$ שווה בערכו לשטח של D.

- **פונקצית התפלגות מצטברת משותפת** - יהיו X,Y משתנים מקריים על אותו מרחב הסתברות. פונקציית ההתפלגות המצטברת המשותפת שלהם היא $F_{X,Y}(s,t)=\mathbb{P}\left(X\leq s,Y\leq t\right)$.

- **פונקצית צפיפות משותפת** - נאמר שיש ל-(X,Y) פונקצית צפיפות משותפת $f_{X,Y}$ אם קיימת פונקציה אינטגרבילית אי שלילית כך שלכל s,t מתקיים $F_{(X,Y)}=\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{s}f_{X,Y}(X,Y)d(X)d(Y)$.

- **אבחנה 9.25** - X ו-Y מ"מ רציפים בהחלט הם ב"ת אם"ם יש להם צפיפות משותפת f_{XY} המקיימת $f_{XY}(s,t)=f_X(s)f_Y(t)$ לכל $s,t\in\mathbb{R}$.

- **טענה** - עבור $X_1,\ldots,X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים, כאשר לכל $i\in[n]$ מתקיים $X_i\sim Exp(\lambda_i)$, אז $min(X_1,\ldots,X_n)\sim Exp\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\right)$.

- **נוסחת הקונבולוציה** - אם X,Y ב"ת עם צפיפויות f_X,f_Y אז $f_{X+Y}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(s)f_Y(t-s)ds$.

- **צפיפות מותנית של משתנה מקרי רציף בהחלט** - יהיו X,Y משתנים מקריים רציפים בהחלט בעלי התפלגות משותפת. נסמן את הצפיפות של X בהנתן Y ע"י $f_{X|Y}(x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$ עבור כל $y\in\mathbb{R}$ וב-$f_Y(y)$ רציפה אשר מקיים $f_Y(y)\neq 0$.

- **נוסחת ההסתברות השלמה במקרה הרציף** - $f_{Y|X=x}(y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}\Rightarrow f_{X,Y}(x,y)=f_{Y|X=x}\cdot f_X(x)$. אם $f_X(x)=0$ (ואז $f_{Y|X=x}$ לא מוגדר), אז באינטגרל נתייחס לביטוי $f_{Y|X=x}\cdot f_X(x)$ כאל אפס.

- **טענה** - לכל זוג מ"מ X,Y בעלי צפיפות משותפת מתקיים $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{Y|X=x}\cdot f_X(x)dx$, ובנקודות שבהן $f_X(x)=0$ נחשב כאילו הביטוי בתוך האינטגרל הוא 0.

סדרות של התפלגויות

- **התכנסות בהתפלגות למ"מ רציף**- תהי $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת משתנים מקריים (לא בהכרח על אותו מרחב הסתברות), ויהי X משתנה מקרי רציף (כלומר F_X רציפה). נאמר כי $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת בהתפלגות ל-X, ונסמן $X_n\xrightarrow{d}X$ אם לכל $t\in\mathbb{R}$ מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}F_{X_n}(t)=F_X(t)$.

- **התכנסות בהתפלגות** - תהי $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת משתנים מקריים (לא בהכרח על אותו מרחב הסתברות), ויהי X משתנה מקרי רציף. נאמר כי $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת בהתפלגות ל-X, ונסמן $X_n\xrightarrow{d}X$ אם לכל $t\in\mathbb{R}$ שהיא נקודת רציפות של F_X מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}F_{X_n}(t)=F_X(t)$.

- **הערה** - אם $X_n\xrightarrow{d}X$ ו-$Y\xrightarrow{d}Y$, <u>לא מתקיים / זה חסר משמעות להגיד</u> כי $X_n+Y_n\xrightarrow{d}X+Y$.

- **הערה** - אם $X_n\xrightarrow{d}c$ עם $c\in\mathbb{R}$, ו-$Y\xrightarrow{d}Y$ כך ש-X_n,Y_n מוגדרים על אותו מרחב הסתברות, אז מתקיים כי $X_n+Y_n\xrightarrow{d}c+Y$ וגם כי $X_nY_n\xrightarrow{d}cY$.

- **טענה** - יהיו $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת משתנים מקריים ו-$a\in\mathbb{R}$, אז $Y_n\xrightarrow{d}a$ אם"ם לכל $\varepsilon>0$ מתקיים $\mathbb{P}\left((Y_n-a)\geq\varepsilon\right)\underset{n\to\infty}{\to}0$.

- **משפט הגבול המרכזי** - יהיו $X_1,\ldots,X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות עם $\mathbb{E}(X_i)=0$ ו-$Var(X_i)=1$, אז $\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}{\sqrt{n}}\xrightarrow{d}Z$ עם $Z\sim N(0,1)$.
  - <u>אינטואיציה:</u> סכום של מ"מ ב"ת שכל אחד מהם משפיע רק בקצת על הסכוםת מתפלג בקירוב נורמלי (עם תוחלת שהיא סכום התוחלות, ושונות שהיא סכום השונויות).

- **ניסוח שקול 1:** יהיו $X_1,...,X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות עם $\mathbb{E}(X_i)=\mu$ ו-$Var(X_i)=\sigma^2$, אז $\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)}{\sigma}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z$ עם $Z\sim N(0,1)$.
- **ניסוח שקול 2:** יהיו $X_1,...,X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות עם $\mathbb{E}(X_i)=\mu$ ו-$Var(X_i)=\sigma^2$, ומסמנים $S_n=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}{n}$, אז $\sqrt{n}(S_n-\mu)\xrightarrow{d} Z$ עם $Z\sim N(0,\sigma)$.

סטטיסטיקה

- **השערה פשוטה -** יהי X משתנה מקריץ השערה פשוטה היא פונקצית הסתברות הקובעת את ההתפלגות של X (השערה לא פשוטה היא קבוצת פונקציות הסתברותת הקובעת קבוצת התפלגויות אפשריות ל-X).
- **מבחן עבור משתנה מקרי -** דרך להכריע בין H_0 (השערה 0) ל-H_1 (השערה 1). זוהי קבוצה $S\subseteq\mathbb{R}$ ומאורע $\{X\in S\}$ שמשמעו "המבחן קבע כי H_0 שגויה".
- **טעות מסוג ראשון וטעות מסוג שני -**

האמת / תוצאת המבחן	$X\in S$ - כלומר דוחים את H_0	$X\in S^c$ - כלומר מקבלים את H_0
H_0	**טעות מסוג ראשון - מסומנת α**	אין טעות
H_1	אין טעות	**טעות מסוג שני- מסומנת β**

- **מבחן עבור וקטור מקרי -** עבור וקטור מקרי ב-$\mathbb{R}^n$, H_0 ו-H_1 יקבעו התפלגויות ב-$\mathbb{R}^n$ (לרוב באמצעות לקיחת דגימות בלתי תלויות מאותה התפלגות).
- **מבחן טוב לפחות כמו מבחן אחר -** יהיו C,D מבחנים. נאמר ש-C טוב לפחות כמו D אם $\alpha_C\le\alpha_D$ וגם $\beta_C\le\beta_D$.
- **מבחן טוב ממש ממבחן אחר -** יהיו C,D מבחנים. נאמר ש-C טוב ממש מ-D אם ($\alpha_C<\alpha_D$ וגם $\beta_C\le\beta_D$) או ($\alpha_C\le\alpha_D$ וגם $\beta_C<\beta_D$).
- **מבחן מיטבי -** מבחן C יקרא מיטבי אם אין מבחן שטוב ממש ממנו (מבחן מיטבי הוא לא בהכרח יחיד).
- **מבחן יחס נראות עבור התפלגויות בדידות -** יהי $C=\{X\in S\}$ מבחן. C יכונה מבחן יחס נראות עם פרמטר λ_0 אם:
  - לכל s עבורו $\mathbb{P}_{H_0}(X=s)<\lambda_0\mathbb{P}_{H_1}(X=s)$ מתקיים $s\in S$
  - לכל s עבורו $\mathbb{P}_{H_0}(X=s)>\lambda_0\mathbb{P}_{H_1}(X=s)$ מתקיים $s\notin S$
- **יחס נראות עבור התפלגויות בדידות -** היחס $\frac{\mathbb{P}_{H_0}(X=s)}{\mathbb{P}_{H_1}(X=s)}$ נקרא יחס נראות.
- **מבחן יחס נראות עבור התפלגויות רציפות -** יהי $C=\{X\in S\}$ מבחן. C יכונה מבחן יחס נראות עם פרמטר λ_0 אם:
  - לכל s עבורו $f_{X,H_0}(s)<\lambda_0 f_{X,H_1}(s)$ מתקיים $s\in S$
  - לכל s עבורו $f_{X,H_0}(s)>\lambda_0 f_{X,H_1}(s)$ מתקיים $s\notin S$
- **הלמה של ניימן-פירסון** - אם C הוא מבחן יחס נראות עם פרמטר λ_0 כלשהו, אזי C הוא מבחן מיטבי.
- **טענה** - אם C הוא מבחן מיטבי, אז C הוא מבחן יחס נראות עם פרמטר λ_0 כלשהו.
- **טענה** - יהיו מבחנים C,D. נגדיר עבור D כי $f(D)=\alpha_D+\lambda_0\beta_D$. אם D טוב ממש מ-C אז מתקיים $f(C)>f(D)$.
- **מסקנה** - אם לכל מבחן D מתקיים $f(C)\le f(D)$, אזי C הוא מבחן מיטבי.
- **יחס נראות עבור וקטור מקרי -** עבור וקטור מקרי $(X_1,\ldots,X_n)$ היחס $\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\mathbb{P}_{H_0}(X_k=x_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\mathbb{P}_{H_1}(X_k=x_k)}$ נקרא יחס נראות.
- **פרמטר -** פרמטר הוא פונקציה מקבוצת ההתפלגויות ל-$\mathbb{R}$.

- **אומד** - בהנתן משפחת התפלגויות ופרמטר Θ, נאמר ש־Y הוא אומד עבור Θ על סמך דגימות $X_1,\dots,X_n$, אם Y הוא משתנה מקרי שהוא פונקציה על $X_1,\dots,X_n$. כלומר, Y הוא אומד אם מתקיים $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ כך ש־$Y=f\left(X_1,\dots,X_n\right)$.

- **אומד חסר הטיה** - נאמר שאומד Y עבור פרמטר Θ הוא חסר הטיה אם $\mathbb{E}(Y)=0$.

- **מקרים פרטיים**

  - אם משפחת ההתפלגויות היא כל ההתפלגויות עם תוחלת 0 ושונות σ^2, אז $Z=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n}$ הוא אומד חסר הטיה עבור σ^2, ומתקיים $\mathbb{E}(Z)=\sigma^2$.
  - אם התוחלת לא ידועה, אפשר להעריך את התוחלת על סמך הדגימות, כלומר מגדירים $Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ (Y הוא אומד לתוחלת) ואז $Z=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-Y\right)^2$ (Z הוא אומד לשונות). מתקיים $\mathbb{E}(Z)<\sigma^2$ והאומד Z מוטה תמיד כלפי מטה.

- **תוחלת ריבוע הטעות** - יהי $Y=f(X_1,\dots,X_n)$ אומד לפרמטר Θ. תוחלת ריבוע הטעות של Y, המסומנת $MSE(Y)$, היא פונקציה המוגדרת $MSE(Y)=\mathbb{E}\left((Y-\Theta)^2\right)$.

- **אומד חסר הטיה (הגדרה נוספת)** - נאמר שאומד Y עבור פרמטר Θ הוא חסר הטיה אם $Bias(Y)=0$ לכל התפלגות במשפחה.

- **טענה** - מתקיים $MSE(Y)=Var(Y)+\left(Bias(Y)\right)^2$. בין האומדים חסרי ההטיה, נעדיף את אלו שהשונות שלהם מינימלית.

- **אומד נראות מקסימלית** - בהנתן דגימות $X_1,\dots,X_n$ מוצאים Θ שממקסם את יחס הנראות.
  - <u>במקרה הבדיד:</u> $g\left(X_1,\dots,X_n\right)=arg_{\Theta}max\left(\mathbb{P}_{\Theta}\left(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n\right)\right)$.
  - <u>במקרה הרציף:</u> $g\left(X_1,\dots,X_n\right)=arg_{\Theta}max\left(f_{\Theta,X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)\right)$.

אמ;לק וריכוז נוסחאות שימושיות

אי שוויונות

- **אי שוויון מרקוב:** יהי X משתנה מקרי אי שלילי. אזי לכל $a>0$ מתקיים $\mathbb{P}\left(X\geq a\right)\leq\frac{\mathbb{E}(X)}{a}$.

- **אי שוויון צ'בישב:** יהי X משתנה מקרי בעל שונות סופית. אזי לכל $a>0$ מתקיים $\mathbb{P}\left(\left|X-\mathbb{E}\left(X\right)\right|\geq a\right)\leq\frac{Var(X)}{a^2}$.
  - גרסא שלמדנו בתרגול (תחת אותם תנאים) - $\mathbb{P}(X\geq a)\leq\frac{Var(X)}{(a-\mathbb{E}(X))^2}$.

- **אי שוויון צ'רנוף:** יהי X משתנה מקרי בעל מומנט מעריכי. אזי לכל $t>0$ עבורו $M_X(t)$ מוגדרת ולכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $\mathbb{P}\left(X\geq a\right)\leq M_X(t)e^{-ta}$.
  - הערה - כשנשתמש באי שוויון צ'רנוף, נחפש את ה־t שנותן מינימום באגף ימין (הפונקציה), כלומר את החסם הכי הדוק שהאי"ש יכול לספק לנו.

- **אי שוויון הופדינג:** יהיו $\{X_k\}_{k\in[n]}$ משתנים מקריים בלתי תלויים ובעלי תוחלת אפס, אשר מקיימים $-1\leq X_k\leq 1$ לכל $k\in[n]$. אזי לכל $a>0$ מתקיים $\mathbb{P}\left(\sum_{k\in[n]}X_k\geq a\right)\leq exp\left(-\frac{a^2}{2n}\right)$.
  - הערה - אם X_i חסום אבל לא בהכרח מקיים שהתוחלת היא אפס או שהוא חסום בין מינוס 1 ל־1, ננרמל: כיוון ש־$X_i-\mathbb{E}(X_i)$ חסום ע"י M כלשהו, נגדיר משתנה חדש $Y_i=\frac{X_i-\mathbb{E}(X_i)}{M}$, וכעת Y_i חסום בין 1- ל־1 ואפשר להפעיל עליו הופדינג (רק לא לשכוח לעשות אותו דבר גם על ה־a - כלומר להחסיר ממנו את <u>הסכום</u> של התוחלות של X_i ולחלק ב־M).
  - <u>הכללה שהוכחנו בתרגיל</u> - אם $X_1,X_2,\dots,X_n$ מ"מ ב"ת, $M_1,M_2,\dots,M_n$ מספרים חיוביים כך שלכל $i\in[1,n]$ מתקיים $|X_i|<M_i$ כמעט תמיד ו־$\mathbb{E}(X_i)=0$, אז מתקיים $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)|\geq a)\leq 2\exp\left(-\frac{a^2}{2\mathcal{M}}\right)$.

נוסחאות להתפלגויות בדידות מוכרות

	אינטואיציה	התפלגות	$\mathbb{E}$	Var	$M_X(t)$
אחידה	זריקת מטבע הוגן	אם $X \sim Unif(S)$ לכל $i \in S$ $p_X(i) = \frac{1}{\|S\|}$	$X \sim Unif([a,b])$ $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$ אם זה $[n]$ אז $\frac{1+n}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\frac{e^t(1-e^{nt})}{n(1-e^t)}$
ברנולי	ניסוי <u>יחיד</u> שההסתברות להצליח היא p ו־X אינדיקטור ־מקבל <u>1 אם היתה הצלחה</u> ו־0 אחרת	אם $X \sim Ber(p)$ $p_X(1) = p$ ו־$p_X(0) = 1-p$	p	$p(1-p)$	$pe^t + 1 - p$
גאומטרית	סדרת ניסויים (ברנולי) ב"ת שבכל אחד יש הסתברות p להצלחה, ו־X סופר כמה נסיונות היו עד <u>להצלחה הראשונה</u>	$X \sim Geo(p)$ עם $p \in (0,1]$ אם לכל $n \in \mathbb{N}$ $p_X(n) = (1-p)^{n-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$
בינומית	n ניסויים (ברנולי) ב"ת שלכל אחד מהם יש הסתברות p להצלחה, ו־X סופר <u>כמה הצלחות היו</u> <u>מתוך</u> n <u>הנסיונות</u>	אם $X \sim Bin(n,p)$ לכל $k \in \{0,..,n\}$ $p_X(k) =$ $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$(pe^t + 1 - p)^n$
בינומי שלילי	מבצעים כמות לא ידועה של ניסויים שלכל אחד מהם הסתברות p להצלחה. ו־X סופר <u>כמה ניסויים יש לבצע עד שנגיע ל־r הצלחות</u> (לאו דוקא רצופות).	$X \sim NB(r,p)$			$\left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^r$ כי למעשה זה סכום של גאומטריים
פואסונית	אין	$X \sim Pois(\lambda)$ (עם שכיחות λ) אם לכל $n \in \mathbb{N}_0$ $p_X(n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$	λ	λ	$e^{\lambda(e^t-1)}$

נוסחאות להתפלגויות רציפות מוכרות

	אינטואיציה / דוג'	התפלגות	$\mathbb{E}$	Var	$F_X(t)$	$M_X(t)$
אחידה	בבחירת אדם מקרי מאוכולוסיה, אחוז האנשים שגבוהים ממנו מתפלג אחיד על $[0,1]$	$X\sim Unif(\text{[a,b]})$ אם $f_X(t)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a\le t\le b\\ 0 & else\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\begin{cases}0 & t<a\\ \frac{t-a}{b-a} & a\le t\le b\\ 1 & t>b\end{cases}$	$\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$
מעריכית	הזמן שחולף עד להתרחשות בתנאי חוסר זכרון (כמו הזמן בין לידות תינוקות)	$X\sim Exp(\lambda)$ עם $\lambda>0$ אם $f_X(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & 0\le t\\ 0 & else\end{cases}$ כאשר $\lambda=1$ נאמר כי המשתנה **מעריכי תקני**.	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$max\left(1-e^{-\lambda t},0\right)$	עבור $t<\lambda$: $\frac{\lambda}{\lambda-t}$
נורמלית סטנדרטית / מתוקננת	דומה להתפלגות בינומית עם מספר רב של ניסויים, מתארת מ"מ שהם סכום של הרבה גורמים שהם ב"ת בקירוב (כמו גובה של אדם רנדומלי)	$X\sim N(0,1)$ אם $.f_X(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-t^2}{2}}$	0	1	$\Phi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$	$e^{\frac{t^2}{2}}$
נורמלית	כנ"ל	$X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ אם $f_X(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2	$\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$	$e^{\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2}}$