# אינפי 2 סיכום אלגוריתמים, טריקים ושטיקים למבחן - ניצן ברזילי

6 במרץ 2021

## טוב לדעת בע"פ

**נגזרות**

- נגזרת של מנה:
  - $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$
  - $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-g'f}{g^2}$
- כלל השרשרת: $(g\circ f)' = g'(f)\cdot f'$
- נגזרת של הופכית: $g'(b) = \frac{1}{f'(g(b))}$
- משפטי נגזרות:

| שם המשפט | אם | אז |
|---|---|---|
| פרמה | $f$ גזירה ב־$a$ (קיצון מקומי) | $f'(a)=0$ |
| רול | $f$ רציפה ב־$[a,b]$ וגזירה ב־$(a,b)$ + $f(a)=f(b)$ | קיים $c$ כך ש־$f'(c)=0$ |
| לגרנז' | $f$ רציפה ב־$[a,b]$ וגזירה ב־$(a,b)$ | קיים $c$ כך ש־$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ |
| קושי | $f,g$ רציפות ב־$[a,b]$ וגזירות ב־$(a,b)$ + $g'(x)\neq 0$ | $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ |

- התנאים של לופיטל:
  - הגבולות של $f,g$ (בנקודה / באינסוף / בגבול ח"צ) שווים, והם 0 או $\pm\infty$
  - $f,g$ גזירות בסביבה מנוקבת של $a$ ש־$g$ ו־$g'$ לא מתאפסות בה
  - הגבול של $\frac{f'}{g'}$ קיים במובן הרחב
- נגזרות שהוכחנו:

| פונקציה | נגזרת באיזו נקודה | הנגזרת |
|---|---|---|
| $\|x\|$ | $x$ חיובי / שלילי | $sgn(x)$ |
| $\sqrt{x}$ | כל נקודה | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $\sqrt[n]{x}$ | כל נקודה וכל $n$ | $\frac{x^{\frac{1-n}{n}}}{n}$ |
| $sin\,(x)$ | כל נקודה | $cos\,(x)$ |
| $cos\,(x)$ | כל נקודה | $-sin\,(x)$ |
| $arcsin\,(x)$ | כל נקודה (כשמצמצמים את הפונקציה למחזור של $sin$) | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $arctan(x)$ | כל נקודה (כשמצמצמים את הפונקציה למחזור של $tan$) | $\frac{1}{1+x^2}$ |
| $arccos(x)$ | כל נקודה (כשמצמצמים את הפונקציה למחזור של $cos$) | -$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $exp_e(x)$ | כל נקודה | $exp_e(x)$ |
| $exp_a(x)$ | עבור $a>1$ | $ln(a)\cdot exp_a(x)$ |
| $x^n$ | כל נקודה | $nx^{n-1}$ |
| $ln(x)$ | $x$ חיובי | $\frac{1}{x}$ |
| $log_a(x)$ | עבור $a>1$ | $\frac{1}{ln(a)\cdot x}$ |

**<u>פולינומי טיילור</u>**

- **פולינום טיילור:** $\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$
- **שארית לגרנז':** $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$
- **פולינומי טיילור שחשוב לזכור:**

| פונקציה | פולינום טיילור של הפונקציה |
|---|---|
| $sin(x)$ | $\sum_{k>0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$ |
| $cos(x)$ | $\sum_{k>0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k}$ |
| $\frac{1}{1-x}$ | $\sum_{k=0}^{\infty}x^k$ כך ש-$\lvert x\rvert<1$. |
| $ln(x)$ | $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$ |

**<u>קירובים</u>**

- קירוב לינארי במשתנה אחד: $l_{a,f}(x)=f(a)+f'(a)\cdot(x-a)$
- קירוב לינארי בשני משתנים: $l_{a,f}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+D_1\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}(x-x_0)+D_2\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}(y-y_0)$
- קירוב ריבועי בשני משתנים: $q_af\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=l_af\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\left[A\left(x-x_0\right)^2+2B\left(x-x_0\right)\left(y-y_0\right)+C\left(y-y_0\right)^2\right]$

# טריקים אלגבריים

- **טריקים אלגבריים כלליים:**
  - במקרה שבו יש לנו שורש $\pm$ קבוע, נעשה כפל בצמוד.
  - אם יש משהו כפול $x$, זה אותו דבר כמו משהו חלקי $\frac{1}{x}$.
- **שברים:**
  - אם יש ביטוי עם חזקה כלשהי שכופל את המונה ואנחנו רוצים להעיף אותו, והמכנה באותה חזקה (נגיד $\frac{x^3(x+1)}{(x+b)^3}$), אפשר לחלק את המכנה בביטוי במונה, ואז להוציא אותו החוצה מהמונה וגם מהמכנה- $\frac{x^3}{x^3}\frac{x^3(x+1)}{\frac{(x+b)^3}{x^3}}$ ואז לנצל את זה שזאת אותה חזקה במכנה $\frac{x^3}{x^3}\frac{x^3(x+1)}{\left(\frac{x+b}{x}\right)^3}$.
  - כשרוצים לבטל משהו במכנה, להוסיף ולחסר את מה שהמונה צריך כדי לבטל אותו.
- **טריקים לאקספוננט:**
  - $exp(ln(x))=x$
  - אם יש לנו מעריך שתלוי ב-$x$, ממירים אותו ל-$x=e^{lnx}$
  - אם יש לנו פונקציה מעריכית והגבול של המעריך קיים, אפשר להוכיח את הגבול של המעריך ואז להסיק מהרציפות של האקספוננט ש-$lim\ e^x=e^{lim\ x}$.
  - תמיד כשיש מעריך שתלוי ב-$x$, ממירים לאקספוננט - $a^x=e^{lna^x}$ (זהירות - לא ניתן לעשות $ln$ למספרים אי חיוביים, צריך להראות שמה שאנחנו עושים עליו $ln$ הוא חיובי - אפשר נגיד לעשות את זה ע"י להציג את $a$ בסביבה חיובית של הגבול שלו, ואז אם $a$ חיובי בסביבה החזקה לא תשנה את החיוביות שלו).
- **גבולות, הגדלת / הקטנת ביטויים:**
  - חסומה כפול אפסה.
  - אפשר להשתמש בזה שקוסינוס וסינוס חסומות בין 1- ל1 כדי להגדיל ולהקטין.
  - ערך תחתון מקטין את הערך וערך עליון מגדיל, אפשר להשתמש בזה בהוכחות שהוכחנו משהו על הטבעיים ורוצים להמיר לממשיים (נגיד אם זה גבול כלשהו, זה עוזר לסנדבצ').

## טריקים להוכחות

- כדי להוכיח דברים לממשיים, אפשר להוכיח לטבעיים / לרציונליים ולהכליל (האופן בו מכלילים תלוי בשאלה - נגיד להכליל מהרציונלים לטבעיים אפשר ע"י זה שלכל ממשי יש סדרת רציונלים שמתכנסת אליו. אם יש שאלה על הטבעיים נגיד עם גבול, אפשר להוכיח עבור הטבעיים ואז לסנדבץ' עם הערך העליון והתחתון).
- אפשר להשתמש באינדוקציה כדי להוכיח דברים לא טריויאליים כמו גבול (נגיד אם אנחנו מזהים שבלופיטל זה יצא אינסוף חלקי אינסוף, אבל אם נמשיך לגזור מספיק פעמים כן נקבל גבול אמיתי כלשהו)
- **להוכיח שקבוצה פתוחה (תרגול 8):**
  - אם הקבוצה היא כדור / כל המרחב / $\emptyset$.
  - להשתמש בזהות שקבוצה פתוחה אם יש שתי נקודות בכדור שהמרחק ביניהן קטן מהרדיוס שלו - לסמן ב-$\varepsilon$ את המרחק מנקודה מסוימת $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ לשפה, ולהסתכל על הכדור עם רדיוס $\varepsilon$. אז המרחק בין נקודה כללית לנקודה שבחרנו קטן מאפסילון.
  - להראות שהמשלים שלה סגורה.
- **להפריך שקבוצה פתוחה (תרגול 8):**
  - להראות שיש נקודה שהכדור סביבה לא מוכל בקבוצה.
  - להראות שהשפה שלה (או חלק ממנה) מוכלת בה.
- **להוכיח שקבוצה היא סגורה (מרתון):**
  - לקחת וקטור של סדרות, לסמן וקטור גבול של זה $\begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$. להשתמש בתנאי שיש לנו על $x_1, ...x_n$ כדי להסיק מאריתמטיקה שגם הגבולות מקיימים את התנאים, ולכן וקטור הגבול הוא גם בקבוצה, כלומר כל סדרה שבעלת גבול - הגבול בהכרח בתוך הקבוצה, ולכן הקבוצה סגורה.
  - ולהראות שלכל $a$ יש כדור שמוכל כולו ב-$A$, כלומר לבחור בחוכמה רדיוס, לקחת נקודה בכדור ולהראות שהיא ב-$A$.
- **להפריך רציפות:**
  - למצוא שתי סדרות שיש להן גבול שונה אבל הגבול של הפעלה של $f$ עליהן הוא אותו דבר.
- **להוכיח רציפות:**
  - להשתמש בנורמת מקסימום, להגדיל את הביטוי עד שמגיעים לביטוי שצריך להיות קטן מ-$\delta$, ואז אפשר לבחור $\delta$ שתעזור לקיים.
- **להפריך גזירות:**
  - להפריך רציפות.
  - להראות שיש כיוון שאין בו נגזרת כיוונית.
  - להראות שיש נגזרת כיוונית בכל כיוון אבל זה לא מתנהג כמו העתקה לינארית.
- **להוכיח גזירות:**
  - אריתמטיקה (מכפלה והרכבה של דברים גזירים, בלי שיש מכנה שיכול להתאפס, תהיה גזירה).

## הגדרות וטענות

### <u>טופולוגיה</u>

- **נורמה:** פונקציה המייצגת את הגודל של וקטור (המרחק שלו מהאפס), המקיימת את התנאים הבאים:
  - אם הנורמה אפס, זה וקטור האפס
  - נורמה של כפל שקולה לכפל של נורמות
  - אי שוויון המשולש

- נורמות שלמדנו:
  - נורמה אוקלידית: $\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$
  - נורמת מקסימום: $\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| = max(|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|)$
- **פונקצית מרחק / מטריקה:** פונקציה המייצגת את המרחק בין שני וקטורים, מקיימת את התנאים הבאים:
  - אם המרחק הוא 0 זה אותו וקטור
  - סימטריה (המרחק מ־$x$ ל־$y$ זהה למרחק מ־$y$ ל־$x$)
  - המשכיות ־ המרחק מ־$x$ ל־$z$ + המרחק מ־$z$ ל־$y$ = המרחק מ־$x$ ל־$y$
- **כדור ברדיוס $r$ סביב הנקודה $a$:** כל הנקודות שהמרחק שלהם מ־$a$ הוא פחות מ־$r$.
- **קבוצה פתוחה:** קבוצה שאפשר לבנות סביב כל נקודה בה כדור שמוכל בקבוצה.
  - קבוצה היא פתוחה אםם החיתוך שלה עם השפה שלה הוא ריק.
  - עבור $f$ רציפה, אם $A$ פתוחה, אז $f^{-1}(A)$ פתוחה.
- **קבוצה סגורה:** קבוצה שהמשלים שלה פתוחה.
  - קבוצה היא סגורה אםם לכל סדרה בקבוצה שקיים לה גבול, הגבול בתוך הקבוצה.
- **נקודת שפה:** נקודה שלכל רדיוס שנבחר, הכדור שניצור סביבה יכלול גם נקודות ב־$A$ וגם נקודות ב־$M \backslash A$.
  - נקודה נמצאת בשפה אם"ם קיימות 2 סדרות שהגבול של אחת ב־$A$ והגבול של השניה ב־$M \backslash A$.
- **פנים:** הקבוצה ללא נקודות שפה.
  - קבוצה פתוחה אם"ם היא זהה לפנים שלה.
  - פנים של קבוצה הוא קבוצה פתוחה.
- **סגור:** הקבוצה כולל נקודות שפה.
- **קבוצה חסומה:** קיים $M$ כך שהקבוצה מוכלת בכדור ברדיוס $M$ סביב הראשית.
  - קבוצה היא סגורה וחסומה אםם לכל סדרה בה יש תת סדרה שמתכנסת לאיבר בקבוצה.
- **טענות חשובות:**
- **איחודים וחיתוכים:**
  - כל איחוד של פתוחות הוא פתוח.
  - איחוד של סגורות הוא סגור רק אם הוא סופי.
  - חיתוך של פתוחות הוא פתוח רק אם הוא סופי.
  - כל חיתוך של סגורות הוא סגור
- הקבוצות $A^\circ, \partial A, (M \backslash A)^\circ$ זרות והאיחוד שלהם הוא כל $M$.

**<u>פונקציות רב מימדיות</u>**

- **גבול של סדרה:** $a$ הוא גבול של סדרה $a_k$ אםם לכל $\varepsilon$ קיים $N$ כך שלכל $k > N$ מתקיים כי $a_k \in B_\varepsilon(a)$ (כלומר המרחק בין $a_k$ לגבול הוא לכל היותר $\varepsilon$).
- גבול של סדרה הוא גבול קואורדינטה־קואורדינטה.
  - הלמה של היינה: גבול של פונקציה בנקודה <u>הפנימית</u> $a$ הוא $L$ אםם לכל סדרה $a_k$ שמקיימת שהיא תמיד ב־$A \backslash a$ וגם שהגבול שלה הוא $a$, מתקיים שהגבול של $f(a_k)$ הוא $L$.

- גבול הוא יחיד.

- **גבול של פונקציה בנקודה:** $L \in \mathbb{R}^n$ יקרא גבול של $f$ אם לכל $\varepsilon$קיימת $\delta$ כך שעבור שתי מטריקות שונות ($d_1$ ב־$\mathbb{R}^m$ ו־$d_2$ ב־$\mathbb{R}^n$) לכל $x \in A$ המקיים $0 < d_1(x,a) < \delta$, מתקיים כי $d_2(f(x),L) < \varepsilon$.
  - קריטריון היינה ־ הגבול של $f$ בנקודה $a$ קיים אםם קיים $L$ כך שלכל סדרה $x_n$ המתכנסת אליו, גם $f(x_n)$ מתכנסת אליו.

- **רציפות של פונקציה בנקודה:** $f$ נקראת רציפה ב־$a$ (נקודה פנימית) כאשר מתקיים אחד התנאים השקולים הבאים:
  - $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$(כלומר לכל $x \in A$ שמקיים $0 < d_1(x,a) < \delta$, מתקיים כי $d_2(f(x), f(A)) < \varepsilon$)
  - לכל $\varepsilon$ קיימת $\delta$ כך ש־$f(A \cap B_\delta(a))$ מוכל ב־$B_\varepsilon(f(a))$.
  - לכל סדרה ב־$A$ שהגבול שלה הוא $a$, מתקיים שהגבול הוא $f(a)$.

- **טענות על רציפות:**
  - חיבור, כפל בסקלר והרכבה של רציפות בנקודה, הן רציפות בנקודה
  - כפל או העלאה בריבוע של רציפות בנקודה, הן רציפות ב־$A$ כולה
  - רציפות מתקיימת קואורדינטה־קואורדינטה.
  - קריטריון היינה לרציפות ־ פונקציה היא רציפה ב־$a$ אםם לכל סדרה $x_n \in A$ המתכנסת ל־$a$ גם $f(x_n)$ מתכנסת ל־$a$.
  - ויירשטראס השני ברב מימד: תהא $A$ סגורה וחסומה, $f$ רציפה. אז $f$ מקבלת ערך מינימום ומקסימום ב־$A$.

- **מסילה:** פונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ ־ ממימד 1 למימד גדול יותר.

- **עקומה:** תמונה של מסילה גזירה ברציפות.

- **פרמטריזציה של עקומה:** מסילה שהתמונה שלה היא העקומה.

- **גרף:** קבוצת האיברים מהצורה $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$.

- **ספירה:** קבוצה של וקטורים מנורמלים.

- **גזירות בכמה מימדים:**
  - <u>מסילה (ממימד 1 לרב מימד)</u> **גזירה בנקודה:** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ גזירה ב־$a$ אםם $\lim\limits_{x\to a} \Delta_{f,a}(x)$ (כרגיל, אותו דבר כמו במימד אחד) קיים.
    - פונקציה גזירה היא גזירה קואורדינטה־קואורדינטה.
    - אם פונקציה גזירה היא גם רציפה.
    - אריתמטיקה של נגזרות ־ כרגיל (חיבור, כפל בסקלר, כלל השרשרת, כפל)
  - <u>פונקציה (מרב מימד לרב מימד)</u> **גזירה / דיפרנציאבילית בנקודה:** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ גזירה ב־$a$ אםם קיים לה **דיפרנציאל**, שהוא העתקה לינארית יחידה $df^{(a)}$ המקיימת $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-df^{(a)}(x-a)}{|x-a|}$.
    - **טענות שהוכחנו על אריתמטיקה של דיפרנציאביליות:** כלל השרשרת, כפל פונקציות, כפל בסקלר, חיבור (הכל כרגיל רק שבכל מקום שיש נגזרת שמים דיפרנציאל)
    - **פונקציה גזירה בכיוון:** פונקציה היא גזירה בכיוון של $v$ אם $f \circ l_{a,v}$ גזירה באפס.
    - **נגזרת כיוונית:** $D_v f(a) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(ax+v)-f(a)}{x}$ (המשמעות הגאומטרית היא לצמצם את כל המישור ש־$f$ יוצאת לישר שעובר דרך $a$ בכיוון של $v$, הישר הזה נקרא **ישר פרמטרי**).
      - אם $v$ הוא וקטור מנורמל (באורך 1), הנגזרת בכיוון $v$ מייצגת את קצב השינוי של $f$ בכיוון $v$.
      - אם $f$ דיפרנציאבילית ב־$a$ אז היא גזירה בכיוון של כל $v$, והנגזרת הכיוונית היא כפל של $v$ במטריצה של הדיפרנציאל.
      - אם $f$ גזירה בכל כיוון מ־$a$, זה <u>לא</u> גורר שהיא גזירה ב־$a$.
      - אם $f$ גזירה ב־$a$ אז $f$ רציפה ב־$a$.
    - **נגזרת חלקית:** נגזרת בכיוון $e_i$, מסומנת $D_i$.
      - העמודה ה־$i$ במטריצה של הדיפרנציאל היא $D_i$.

· אם יש ל־$f$ נגזרת חלקית ב־$a$לכל $i$, זה לא בהכרח גורר ש־$f$ רציפה ב־$a$.

∗ **קירוב לינארי של פונקציה רב מימדית:** עבור $f$ גזירה ב־$a$ הקירוב הלינארי הוא $l(x) = f(a) + df^{(a)}(x-a)$.

∗ **גרדיאנט:** גרדיאנט של $f$ המסומן $\nabla f$ הוא וקטור שהקואורדינטה ה־$i$ שלו מכילה את הנגזרת החלקית $D_i$ (בפועל - כל קואורדינטה בגרדיאנט היא גזירה של $f$ לפי אותה קואורדינטה).

· אם כופלים את הגרדיאנט בוקטור $v$ מקבלים את הנגזרת הכיוונית בכיוון $v$.

· אם מנרמלים את הגרדיאנט (מחלקים אותו בנורמה שלו), מקבלים שהנגזרת הכיוונית שלו גדולה יותר (כלומר בעלת שיפוע גדול יותר) משל כל וקטור מנורמל אחר - כלומר הגרדיאנט הוא הכיוון אליו צריך להתקדם כדי להגיע למקסימום של $f$ הכי מהר.

∗ **קו גובה:** קו גובה של $f$ שעובר ב־$a$ הוא הקבוצה של כל ה־$x$ים שמקיימים $f(x) = a$.

∗ **מינימום/מקסימום מקומי (של תת קבוצה של קבוצה פתוחה):** $a$ היא מקסימום (או מינימום) מקומי של $f$ על $S \subseteq A$ אם קיים $r > 0$ כך ש־$B_r(a) \subseteq A$ וגם לכל $x$ בכדור או ב־$S$ מתקיים $f(x) \le f(a)$ (או $f(x) \ge f(a)$).

- **גזירות ברציפות:**

  – **גזירות ברציפות:** עבור $A$ קבוצה פתוחה ו־$f : A \to \mathbb{R}^n$ שבכל נקודה יש לה את כל הנגזרות החלקיות. $f$ גזירה ברציפות אם לכל $i$ הפונקציה $D_i f$ רציפה (כלומר - לכל קואורדינטה שנגזור לפיה, זה יצא רציף).

  – **גזירות ברציפות פעמיים:** עבור $A$ קבוצה פתוחה ו־$f : A \to \mathbb{R}^n$ גזירה ברציפות, $f$ גזירה ברציפות פעמיים אם לכל $i$ הפונקציה $D_i f$ רציפה.

  – **נגזרת כיוונית מסדר 2:** $D_v D_v$ זה פשוט לגזור פעמיים לפי קואורדינטה כלשהי (1,1 או 1,2 או 2,2) ואז לכפול ב־$v$.

  – **דיפרנציאל שני:** עבור $f$ ונקודה $a$, הפונקציה שלוקחת וקטור $v$ ומחזירה את $D_v D_v$ נקראת הדיפרנציאל השני ומסומנת $d^2 f^{(a)}$.

  – **קירוב ריבועי:** $A$ קבוצה פתוחה, $f$ גזירה ברציפות פעמיים. הקירוב הריבועי של $f$ ב־$a$ הוא קירוב טוב יותר מהקירוב הלינארי (נוסחא בחלק של האלגוריתמים). יש לו תכונות דומות לקירוב הלינארי (חותך את $f$ ב־$a$, הנגזרת החלקית שלו ב־$a$ זהה לנגזרת החלקית של $f$ ב־$a$, וכנ"ל לגבי הדיפרנציאל השני).

## אינטגרלים כפולים

- **אינטגרל כפול:** עבור $\varphi$ פונקציה קבועה למקוטעין, האינטגרל הכפול שלה הוא $I\varphi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$.

- **אינטגרל חוזר:** תהי $f : D \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית. לכל $x \in [a,b]$ לגדיר את $f_x(y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ עם $y \in [c,d]$. האינטגרל החוזר של $f$ לפי המשתנה השני ואז לפי המשתנה הראשון הוא $\int_a^b \left(\int_c^d f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dy\right) dx$.

  – משפט פוביני - $\iint_D f = \int_a^b \left(\int_c^d f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dy\right) dx$. הוא נכון גם אם מחליפים את הסדר שמטנגרלים בו.

- **פונקציה אינטגרבילית:** יש שתי הגדרות:

  – פונקציה חסומה $f$ שאפשר להגדיר קבוצות $L$ (כל הערכים $l$ כך שקיימת פונקצית מדרגות $\varphi$ שקטנה מ־$f$ שהאינטגרל הכפול שלה הוא $l$) ו־$U$ (כל הערכים $u$ כך שקיימת פונקצית מדרגות $\psi$ שגדולה מ־$f$ שהאינטגרל הכפול שלה הוא $u$), ככה ש־$supL = infU$ (הערך הזה הוא האינטגרל הכפול של $f$).

  – $S$ קבוצה חסומה ב־$\mathbb{R}^2$ שמוכלת ב־$[a,b] \times [c,d]$, ו־$f$ היא פונקציה מ־$S$ ל־$\mathbb{R}$. אז $f$ אינטגרבילית אם הפונקציה $\widetilde{f} = \begin{cases} f(x) & x \in S \\ 0 & x \in \mathbb{R} \backslash S \end{cases}$ אינטגרבילית.

- **טענות בנושא:**

  – אם $g, h$ פונקציות מ־$[a,b]$ ל־$\mathbb{R}$ רציפות כך ש־$g$ קטנה או שווה ל־$h$, ו־$S$ היא קבוצת ה־$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ כך ש־$x \in [a,b], y \in [g(x), h(x)]$, אז לכל $f$ אינטגרבילית מתקיים $\iint_S f = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dxdy$

## שיטות וטריקים ־ נגזרות

- זה שפונקציה רציפה זה לא מספיק כדי להראות שהיא גזירה (אבל כן מספיק כדי להפריך ־ אם היא לא רציפה היא גם לא גזירה).
- **מציאת כל הנקודות בהן פונקציה גזירה (תרגול 0):**
  - יוצרים פונקציה חדשה עבור כל אחד מהתחומים של הפונקציה, ובודקים אם היא רציפה שם.
  - בודקים את נקודות החיבור בין התחומים (אם אין ברירה, ישירות מההגדרה ע"י חישוב גבולות חד צדדיים).
- **מציאת תחום גזירות של פונקציה (תרגול 0):** גוזרים את הפונקציה ומוצאים את תחום ההגדרה.
- **להראות שפונקציה <u>לא</u> רציפה בנקודה (תרגול 0):** להראות שלא קיים גבול בנקודה, יש שתי דרכים:
  - <u>דרך א:</u> למצוא סדרה $x_n$ שמתכנסת אבל אם מציבים אותה בתוך $f'$ מקבלים סדרה שלא מתכנסת.
  - <u>דרך ב:</u> אריתמטיקה של גבולות (נגיד אם הפונקציה מורכבת מחיבור של כמה פונקציות שלאחת מהן אין גבול בנקודה).
- **חקירת פונקציות (תרגול 0)**
  - <u>תחום הגדרה</u>
  - <u>נקודת חיתוך עם ציר $x$:</u> מציבים 0 ב־$x$.
  - <u>נקודת חיתוך עם ציר $y$:</u> משווים את כל הפונקציה לאפס.
  - <u>איתור נקודות קיצון:</u> נחפש נקודות קיצון ע"י איתור הנקודות שהנגזרת מתאפסת בהן, ונבדוק אם הן מינימום או מקסימום באחת משתי דרכים:
    * <u>דרך א':</u> לחשב את תחומי החיוביות והשליליות של $f'$, ולהסיק מכך מתי הפונקציה עולה ומתי יורדת ביחס לנקודות שמצאנו.
    * <u>דרך ב':</u> נבחר נקודה שנרצה להוכיח עבורה, נצמצם את $f$ לסביבה שהנקודה במרכזה. נבדוק את ערך הפונקציה בקצוות הסביבה ובנקודה עצמה, ונפסול נקודות תוך שימוש בויירשטראס 2 (חייב להתקבל כל ערך בין הקצוות ובפרמה (הנקודה היחידה שיכולה להיות קיצון היא זאת שזיהינו כחשודה).
  - <u>תחומי עליה וירידה:</u> אם חישבנו את נקודות הקיצון, אפשר להסיק מהן את תחומי העליה והירידה.
- **למצוא קירוב לינארי (תרגול 1):** נציב ב־$l(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$.
- **למצוא נגזרת של פונקציה טריגונומטרית (תרגול 1):** להעזר בזהויות טריגונומטריות.
- **למצוא פונקציה הפוכה לפונקציה טריגונומטרית (תרגול 1):**
  - לצמצם את הפונקציה הטריגונומטרית לתחום בו היא חח"ע (מראים זאת ע"י להראות שהנגזרת חיובית ולכן מונו' עולה), ולהראות שהיא על (רציפה$\leftarrow$התמונה היא קטע סגור, כלומר היא על הקטע שבין ערכי הפונקציה בקצוות). כעת היא הפיכה.
  - להשתמש בנוסחא של נגזרת פונקציה הופכית.
- **טריקים לגזירה:**
  - לזהות אם זו הרכבה
  - לזהות אם זאת הופכית לפונקציה אחרת שאנחנו מכירים
- **לופיטל:** בלופיטל יש מקרים שצריך לזהות שזה לופיטל:
  - אם יש כפל של משהו במשהו עם חזקה שלילית $y \cdot a^{-x}$
  - אם אפשר להפוך את זה למנה בכוח ע"י חילוק בהופכי $xlnx \to \frac{lnx}{\frac{1}{x}}$

## שיטות וטריקים ־ נגזרות מסדר גבוה ואקספוננט

- **להוכיח תכונות אקספוננט (תרגול 1):** לבחור סדרת רציונליים שמתכנסת ל־$x$, להשתמש בחוקי חזקות רציונליות, ואז להשתמש באריתמטיקה של גבולות כדי להמיר חזרה ל־$x$ (זה עובד כי לכל מספר ממשי יש סדרת רציונלים שמתכנסת אליו).
- **אינטואיציה לסדרות שאולי מתכנסות ל־$e$ (תרגול 2):** אם יש לנו סדרה מהצורה $(1+\frac{1}{a_n})^{b_n}$.
  - אם $a_n, b_n$ גדלים באותו קצב (אפילו אם הקצב הזה הוא שואף לאינסוף!) $\leftarrow e$
  - אם $a_n$ גדל מהר יותר $\leftarrow 1$
  - אם $b_n$ גדל מהר יותר $\leftarrow \infty$
- **פיתוח פולינום סביב נקודה (תרגול 3):**
  - מזכיר קצת חלוקת פולינומים עם שארית. כותבים את הפולינום = הגרסה של הפולינום עם ה־$b$ים, כלומר $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} b_i(x-a)^i$ רק באופן מפורש בלי הסיגמות.
  - משווים את המקדמים של החזקה הגבוהה ביותר, כל פעם משווים אחד, מעבירים את כל מה שלא תלוי ב־$b$ לאגף אחד של המשוואה כדי לדעת למה להשוות בשלב הבא.
  - ממשיכים להשוות מקדמים עד שמקבלים את הערך של $b_0$.
- **חישוב שארית של פונקציה ופולינום טיילור (תרגול 3):** אם $f$ גזירה ב־$[a,x]$ $n-1$ פעמים, אז קיים $c \in (a,x)$ שמאפשר לחשב לפי הנוסחא $R_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ (כמו האיבר ה־$n+1$ בפולינום טיילור, שהציבו בו $c$ במונה).
- **חישוב פולינום טיילור כללי עבור פונקציה ספציפית (תרגול 3):** נחשב את הנגזרות עד שנזהה חוקיות, נגדיר את החוקיות ונוכיח באינדוקציה שלמה.
- **חישוב ערך של פונקציה עד רמת דיוק מסוימת בעזרת פולינום טיילור (תרגול 3):**
  - קודם כל צריך לראות שהפונקציה באמת גזירה $n+1$ פעמים בנקודה.
  - מציגים את פולינום הטיילור.
  - כותבים את הביטוי המפורש של השארית $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ ואז יש שתי אפשרויות:
    * מגדילים עד ששחוסמים מלמעלה בביטוי שתלוי רק ב־$n$ ולא ב־$x$ ואפשר "ליצור" ממנו את "רמת הדיוק" הנדרשת ע"י הצבה של $n$ מתאים. בוחרים את ה־$n$ שמקיים את זה, ומחשבים את פולינום הטיילור עבור אותו $n$.
    * אם זה חישוב של פולינום טיילור קונקרטי (עם $n$ ספציפי), אפשר להגדיל את המונה ע"י החלפה בקבוע שגדול ממנו (ניתן להסיק מטווח הערכים של $c$) שיגרום לשבר כולו להיות קטן מהערך הדרוש.
  - כעת כיוון שהשארית היא הפונקציה פחות הפולינום, נקבל ש־$|f(a)-T_{n,a}(a)|$ חסום ע"י "רמת הדיוק".
  - המשמעות היא שחישבנו את הערך של הפונקציה עם סטיה (שארית) קטנה מ"רמת הדיוק" שביקשו מאיתנו.
- **חישוב פולינום טיילור של פונקציה שמוגדרת באמצעות הרכבה (תרגול 3):** נחשב את הפולינומים של שתי הפונקציות בהרכבה, נציב את הפולינום הפנימי בתוך הפולינום החיצוני ונשאיר רק מחוברים עם חזקה קטנה או שווה ל־$n$.
- **חישוב גבולות באמצעות פולינום טיילור (תרגול 3):** מתאים לדוגמא למקרים שלופיטל היה מצריך הרבה גזירות עד להגעה לתשובה.
  - בכל מקום שכתוב $f(x)$ אפשר להציב $T_n f(x) + \alpha(x)$ כאשר $\alpha(x)$ היא השארית.
  - נבחר בחוכמה (נגיד כדי לבטל מחוברים בביטוי / שיהיה קל להעלות בחזקה וכו') איזה $n$ לבחור כדי ליצור את פולינום הטיילור, ונציב (אפשר לעשות את זה יותר מפעם אחת אם הביטוי מכיל את $f(x)$ יותר מפעם אחת).
  - נפתח אלגברית עד שנגיע למצב שקיבלנו ביטוי שמכיל רק קבועים, ושברים מהצורה "חלוקה של השארית ב־$x$ בחזקה כלשהי ששווה או <u>קטנה</u> מהחזקה של פולינום הטיילור שהיא לקוחה ממנו". הרעיון הוא שהגבול של $\frac{\alpha(x)}{x^{n+1}}$ הוא 0, ונוכל להסיק את זה אם החזקה במכנה היא בדיוק אותה חזקה כמו בפולינום טיילור, או קטנה ממנה (כי אז זה שקול ללכפול את השבר המקורי ב־$x^a$ , הגבול עדיין יהיה $lim\ x^a \cdot 0 = 0$).
  - עכשיו עושים אריתמטיקה ומחליפים את כל הביטויים השבריים שתלויים בשאריות ב־0, נשארנו רק עם קבועים וקיבלנו גבול קונקרטי.

## שיטות וטריקים - אינגטרלים

- **להוכיח אינטגרביליות (תרגול 4):** להגדיר חלוקה לקטעים באורך $\frac{1}{n}$, להגדיר שתי פונקציות מדרגות $u_n, l_n$ ע"י בחירת הערך העליון/תחתון בקטע מסוים בחלוקה, ולכל אחת מהן ליצור אינטרגל ע"י כפל של האורך $\frac{t}{n}$ ברוחב (מזהים איך נראה הטווח של חלוקה כללית, ואז ערכי ה־$x$ נמצאים ביניהם, אז זה בעצם הביטוי הכללי בריבוע). מראים שיש לפונקציה העליונה והתחתונה אותו גבול $\leftarrow$ הגבול הזה הוא האינטגרל.

- **להראות שפונקציה אינה רציפה במש (תרגול 5):** להראות את השלילה - קיים אפסילון כך שלכל דלתא קיים $x, y$ כך ש־ $|x-y| < \delta$ וגם $|f(x) - f(y) \geq \varepsilon$. כלומר, בוחרים אפסילון ספציפי ובוחרים $x, y$ ספציפיים (יכולים להיות תלויים ב־$\delta$ כדי להבטיח את התנאי הראשון) שמקיימים. אפשר לחלק למקרים לפי הערכים של $\delta$ אם זה עוזר.

- **לחשב פונקציה צוברת של פונקצית מדרגות (תרגול 5):** מחלקים למקרים לפי המדרגות, בכל אחד מהם מחשבים (מציבים את הערך של הפונקציה, מטנגרלים, מציבים את הערך העליון והתחתון של האינטגרל - אם זה לא המקרה הראשון, צריך לזכור להוסיף את מה שעד לגבול התחתון שחישבנו במקרים הקודמים).

- **חישוב שטח בין פונקציות (תרגול 5):** שווה לצייר את הפונקציות כדי להבין איזו מהן נמצאת למעלה באיזה קטע. נחסר את התחתונה מהעליונה ונטנגרל.

- <u>**שיטות אינטגרציה:**</u>
  - **טיפים כלליים לאינטגרלים:**
    * אם יש $ln$ אז חוקי לוג תקפים עליו, לדוגמא חוק לוג של מנה. וגם, אם בחרנו בשיטת ההצבה $t = lnx$ אז זה אומר $.e^t = x$
    * אם יש $tan$ שווה לנסות להציג אותו בתור $\frac{sin}{cos}$ ואז לנסות להציב $t = sin$ או $.t = cos$
    * טריק אלגברי - אם יש לנו כפל שברים $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x+1}$ זה שקול <u>לחיסור</u> $.\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$
    * לנסות ליצור באמצעות השיטות המוכרות (חלקים, הצבה) מצב שבו כל מה שנשאר זה ביטויים שמחוץ לאינטגרל פחות אינטגרל שזהה לאינטגרל שהתחלנו איתו, ואז להעביר אגפים.
    * אם מנסים לטנגרל משהו שהוא משהו חלקי שורש, שווה להסתכל רק על השורש ולראות מה קורה כשגוזרים אותו - אולי זאת התשובה.
    * אם יש אינטגרל של שבר שבמונה יש חיבור, אפשר לפצל את זה לסכום של שני אינטגרלים (ואולי אותם יהיה יותר קל לפתור). אם אין חיבור, אפשר לנסות ליצור אותו ע"י לחסר ולחבר את אותו איבר אם זה עוזר לפשט.
    * תמיד לנסות להוציא מינוסים וסקלרים החוצה מהאינטגרל.
    * לזכור את הקשר בין $\int \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x}$ (שימושי גם בבחירה של $f, g$ וגם בחישוב האינטגרל עצמו). זה יכול לעבוד גם אם זה לא בדיוק $x^2$ אלא משהו אחר בריבוע (כל עוד הנגזרת של המשהו הזה היא 1)!
    * אם יש אינטגרל לא מסוים, לא לשכוח להוסיף $C$ בסוף.
  - **אינטגרציה בחלקים (תרגול 6):** נסמן ב־$f'$ את הפונקציה שאנחנו יודעים שהיא נגזרת של משהו, וב־$g$ את זו שיותר קל / מועיל לגזור. נחשב $.\int f'g = fg - \int fg'$
    * יש טריק מגניב, אם יש פשוט פונקציה אחת ולא כפל של פונקציות, אפשר להציג את זה בתור 1 כפול הפונקציה ואז לעשות אינטגרציה בחלקים (עם 1 בתפקיד $f'$).
    * פולינום כפול פונקציה, נסמן את הפולינום בתור $g$ ונעשה אינטגרציה בחלקים.
    * כשיש $e^x$ במדויק, הוא כנראה יהיה בתפקיד ה־$f$(אבל לא בטוח - נגיד אם אנחנו רוצים לשנות את הפונקציה השניה לקדומה שלה כדי לבטל משהו בסכום שנוצר, כמו נגיד עם $sin\backslash cos$, ואז הן יהיו $f$), אם זאת וריאציה קצת שונה שלו שהנגזרת היא שונה (נגיד $e^{-x}$) הוא יכול להיות גם בתפקיד ה־$.g$
  - **שיטת ההצבה (תרגול 6):**
    * מקרים שבהם נשתמש:
      · פונקציה שאנחנו מזהים שהיא מהצורה $f \circ g(x) \cdot g'$ (כי אז היא נגזרת של $F \circ g$, אז כל מה שצריך בשביל לחשב את האינטגרל זה לחשב את $F$), לא אכפת לנו מקבועים בגזירה (נגיד אפשר ש־$g$ יהיה $x^2$ ו־$g'$ יהיה $x$ ולא $2x$ כמו שהוא אמור להיות, אבל הנוסחא שנכתוב כן צריכה להיות עם הנגזרת האמיתית, ואז צריך לחלק את $F \circ g$ בקבוע הזה).
      · אם יש ביטוי שמופיע יותר מפעם אחת (או "כמעט" מופיע יותר מפעם אחת, נגיד $x^3$ ו־$x^5$).
      · אם יש הרכבה זה אמור לרמוז על הצבה של מה שיש בתוך ההרכבה.
    * טיפים וטריקים:
      · לפעמים אם יש ביטוי בסגנון $\sqrt{1+x^2}$ שווה לנסות להציב דווקא $t = 1 + x^2$ ולא $.t = x^2$
  - **אינטגרל של פונקציה רציונלית מדרגה 2 (תרגול 7):**

* הדרגה של המונה גדולה מהדרגה של המכנה: נעשה חילוק ארוך (של המונה במכנה) ונציג את המונה בתור התוצאה של החילוק הארוך כפול המכנה ועוד השארית. נפצל לשני שברים (מה שלא הצטמצם מהמכפלה, ועוד השארית). שני האינטגרלים שנוצרו הם עכשיו סתם פולינום (יודעים לטנגרל) ומנה של פולינומים שהדרגה של המונה קטנה מהמכנה (דרכי פתרון בשורות הבאות).
* הדרגה של המונה קטנה מהדרגה של המכנה:
  · למכנה אין שורשים: עושים השלמה לריבוע כדי להגיע למשהו בסגנון מוכר, נגיד משהו שדומה ל- $\frac{1}{1+x^2}$ (הנגזרת של $arctan$), אם צריך נשתמש בשיטת ההצבה בשלב הזה כדי להגיע לצורה המדויקת.
  · למכנה יש שורש אחד : כלומר $Q$ הוא מהצורה $(\alpha x+\beta)^2$. אז מתקיים $\int\frac{1}{Q(x)}=\int\frac{1}{(\alpha x+\beta)^2}=\frac{1}{\alpha x+\beta}\cdot\frac{1}{\alpha}$
  · למכנה יש שני שורשים:
  מציגים את המכנה כמכפלת סוגריים.
  כותבים את המשוואה $a$ כפול הסוגר הראשון במכנה + $b$ כפול הסוגר השני במכנה = המונה
  פותחים, נחלק למקדם של $x$ ולאיברים חופשיים, וניצור מזה שתי משוואות הומוגניות. פותרים את המשוואות ומוצאים ערכי $a, b$.
  נציב את $a, b$ באינטגרל המקורי ($a$ הוא המונה של הסוגר הראשון, $b$ הוא המונה של הסוגר השני), ונפצל לשני אינטרגרלים מלינאריות, נוציא את הסקלרים החוצה, קיבלנו ביטויים שאנחנו יודעים לטנגרל.
  אם המונה הוא סקלר כפול $t$, נתייחס לזה כאילו הוא 1 אבל נכפול את התוצאה במונה חלקי הנגזרת של המכנה.
  אם המונה הוא ביטוי לינארי, אפשר לעשות את זה אפילו יותר פשוט - לחלק לחלק קבוע וחלק לינארי ולטנגרל.
  · כלל אצבע - אם צריך לחשב אינטגרל של פולינום כפול פונקציה, נסמן את הפולינום בתור $g$ ונעשה אינטגרציה בחלקים.

– **אינטגרל של שבר שהמונה הוא נגזרת של המכנה:** האינטגרל הוא $ln|f(x)|+C$

• <u>**אינטגרלים לא אמיתיים (הגבול של הצוברת אם קיים):**</u>

– **סוגים של אינטגרלים לא אמיתיים:**
  * הסוג $[a,\infty)$: $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f$
  * הסוג $(-\infty,b]$: $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f$
  * הסוג $[a,b)$: $\lim\limits_{r\to b^-}\int_a^r f$
  * הסוג $(a,b]$: $\lim\limits_{r\to a^+}\int_r^b f$

– **פשוט לחשב (תרגול 7):** אם זה משהו שאנחנו יודעים לטנגרל, אפשר לטנגרל מ0 עד $b$, ואז מניוטון לייבניץ להציב $F(b)-F(0)$ ולראות אם יש לזה גבול (אם יש, זה האינטגרל הלא אמיתי, אם אין, האינטגרל הלא אמיתי מתבדר).

– **מבחן ההשוואה (פונקציות אי שליליות) (תרגול 7):** למצוא פונקציה שגדולה מאיתנו (החל ממקום מסוים) והאינטגרל שלה מתכנס. אפשר להשתמש להפרכה, אם מוצאים פונקציה שקטנה מאיתנו והאינטגרל שלה לא מתכנס.
  * אם רוצים להוכיח מתבדר - להגדיל מ$\frac{1}{x}$.
  * אם רוצים להוכיח מתכנס - להקטין מ$\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$.
  * לחלק באחד מהשניים הנ"ל ולפי זה לוודא התכנסות/התבדרות.
  * אם יש תחום ששואף ל$\infty$ לבחור $x$ בתוך הטווח שאחריו מתקיים אחד התנאים הדרושים לנו.

– **מבחן ההשוואה הגבולי (פונקציות אי שליליות) (תרגול 7):** יותר חלש אך יותר שימושי ממבחן ההשוואה. אם יש גבול ל- $\frac{f}{g}$ - אם הגבול באינסוף שונה מאפס, הם מתכנסים או מתבדרים ביחד.

– **מבחן האינטגרל:**
  * חשוב לזכור את הטריק שאם $\alpha>1$ אז $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ מתכנס.

– **אינטגרל לא אמיתי בקטע:** אם זיהינו שמבקשים מאיתנו אינטגרל בקטע שבו הוא לא מוגדר באחד הקצוות, זה בעצם אינטגרל לא אמיתי בקטע, אז לא סתם מחשבים אינטגרל אלא גבול שלו (בוחרים איזה מהקצוות של האינטגרל להשאיף, לפי איזה קצה של הקטע לא מוגדר). ואז מציבים את הקצוות (ניוטון לייבניץ) ואריתמטיקה.

## שיטות וטריקים - פונקציות בכמה משתנים

• **<u>להוכיח</u> קיום גבול של פונקציה במרחב מטרי (תרגול 9):**

- להשתמש בטריק ש־$\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{x^2} = |x|$ (כנ"ל לגבי $y$) ולכן $\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$, להביא את הפונקציה למשהו שמורכב מהצורות האלו של $x,y$, ואז להגדיל ע"י להחליף את הצורה הזו ב־1 ולהשאר רק עם ביטוי שמורכב מ־$x,y$ וסקלרים. בוחרים כדור סביב הגבול. יהי $\varepsilon$, נבחר $r$ כך שאם נציב אותו במקום $x,y$ בביטוי שנשאר לנו זה יהיה קטן מ־$\varepsilon$. כעת עבור $|x|,|y| < r$ (בתוך הכדור) הביטוי שנשאר לנו קטן מאפסילון.

- **להפריך קיום גבול של פונקציה במרחב מטרי (תרגול 9):**
  - לזהות שני "דפוסים" שונים (כלומר שילובים שונים של $x,y$ - כמו $x,x$ / $0,y$ / $y,y^2$ וכו') שכל אחד מהם מביא לגבול שונה של הפונקציה בנקודה הנתונה. לבחור שתי סדרות (לפי שני הדפוסים שבחרנו) שמתכנסות לאותו גבול - כלומר מצאנו שתי סדרות עם אותו גבול כך של־$f$ של הסדרות יש גבול שונה, והגבול לא קיים.
  - למצוא סדרה $x_n$ שעבורה ל־$f(x_n)$ אין גבול.

- **למצוא פרמטריזציה לקבוצה / לגרף הפונקציה (תרגול 10):**
  - לפעמים פשוט אפשר לחשוב על פונקציה שהתמונה שלה זו ההקבוצה שאנחנו רוצים למצוא לה פרמטריזציה.
  - פרמטריזציות שימושיות שחוזרות הרבה:
    * שני משתנים:

| פונקציה מהצורה | פרמטריזציה |
|---|---|
| $x^2+y^2=1$ | $\gamma(t) = \begin{pmatrix} cos(t) \\ sin(t) \end{pmatrix}$ |
| $\frac{x^2}{\sqrt{a}} + \frac{y^2}{\sqrt{b}} = 1$ | $\gamma(t) = \begin{pmatrix} a \cdot cos(t) \\ b \cdot sin(t) \end{pmatrix}$ |
| $y^2 - x = 0$<br>(או כל דבר אחר שהוא "סתם" פונקציה) | נבודד משתנה כדי לגלות מה היחס בינו לבין השני<br>$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$ |
| איחוד של קבוצות שמוגדרות<br>לפי תנאי (מקיימים משוואה מסוימת) | נבודד משתנה במשוואה אחת וניעזר<br>במשוואה השניה כדי לגלות את היחס ביניהם. |

    * שלושה משתנים:

| פונקציה | פרמטריזציה |
|---|---|
| $x^2+y^2+z^2=1$ | $\gamma\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sin(s) \cdot cos(t) \\ sin(s) \cdot sin(t) \\ cos(s) \end{pmatrix}$ |

- **לחשב את המשיק לקבוצה בנקודה $a$ (תרגול 10):**
  - מוצאים פרמטריזציה $\varphi$, מציבים בה את הנקודה $a$ (כלומר מוצאים איזה ערך צריך להציב בה כדי לקבל את $a$), וגוזרים. זה נותן לנו את כל מה שצריך כדי למצוא קירוב לינארי לפי הנוסחא $l\varphi(x) = \varphi(a) + (x-a)\varphi'(a)$.

- **חישוב גרדיאנט (תרגול 11):** כל קוּאורדינטה היא גזירה לפי הקואורדינטה המתאימה (נגיד עבור $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ הקואורדינטה הראשונה בגרדיאנט היא $D_1$ שהיא גזירה של $f$ לפי $x$, והקואורדינטה השניה היא $D_2$ שהיא גזירה של $f$ לפי $y$).

- **חישוב דיפרנציאל (תרגול 11):** כל עמודה היא גזירה של הוקטור לפי קואורדינטה אחרת, כלומר (נגיד עבור $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$) הדיפרנציאל הוא $\begin{bmatrix} D_1(x) & D_2(x) \\ D_1(y) & D_2(y) \end{bmatrix}$.

- **חישוב נגזרת כיוונית בכיוון וקטור $v$ (תרגול 11):** נחשב את הנגזרות החלקיות $D_1, D_2$ וכו'. כדי למוא נגזרת כיוונית בכיוון של הוקטור $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, נחשב $D_1 \cdot v_1 + D_2 \cdot v_2$.

- **למצוא קו גובה של פונקציה $f$ בנקודה $c$ (תרגול 11):** להגדיר את הקבוצה של הנקודות $x \in \mathbb{R}^n$ כך ש־$f(x) = c$.

- **למצוא משוואת משיק לקו גובה (תרגול 11):**
  - מחשבים את הפונקציה של הקו גובה (רושמים את הפונקציה המקורית $= c$ מעבירים אגפים כדי לבודד את $y$).
  - מוצאים את הגרדיאנט שלה - גוזרים לפי $x$ ולפי $y$.
  - שתי אפשרויות איך להמשיך:

* <u>פרמטריזציה:</u> כותבים פונקציה של גרף (כלומר פונקציה שלוקחת $x$ ומחזירה $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ לפי הפונקציה של הקו גובה שמצאנו בנקודה שביקשו). מחשבים לפי הנוסחא של קירוב לינארי. בסוף מבודדים מה שתלוי ב־$x$ ומה שלא תלוי ב־$x$, ואת מה שתלוי ב־$x$ מחליפים ב־$span$.
  · אם חישבנו את הדיפרנציאל (כלומר לגזור כל עמודה של הפרמטריזציה, כל פעם לפי פרמטר אחר, זה הגרדיאנט. למצוא את הפרמטרים שצריך להציב בפרמטריזציה כדי לקבל את $a$, ולהציב אותם בגרדיאנט). אפשר להציג את הישר המשיק בתור $a + span\left(first - col, second - col\right)$.
* <u>גרדיאנט:</u> מציבים את הנקודה בגרדיאנט שמצאנו. מחשבים את המרחב המאונך לגרדיאנט (מ"פ אפס בין וקטור כללי לוקטור של הגרדיאנט שהצבנו בו את הנקודה). נכתוב $m$ במקום אפס, מציבים את הנקודה $a$ ומוצאים את הערך של $m$. זה המשיק.

- **מציאת מינימום/מקסימום מוחלט של ערך של פונקציה בהנתן אילוץ (קבוצה שהיא קו גובה או חלק ממנו) ע"י כופלי לגרנז' (תרגול 12):**
  - מגדירים $f$ פונקציה שרוצים למקסם/למזער, $g$ אילוץ.
  - מחשבים את הגרדיאנט של $f, g$.
  - יוצרים מאגר של פונקציות חשודות:
    * נקודות בהן הגרדיאנט של $g$ מתאפס
    * נקודות שמקיימות את התנאי של כופלי לגרנז': מחשבים $\nabla f = \lambda \nabla g$. מבודדים בכל אחד את $\lambda$ ופותרים מערכת משוואות כדי למצוא את $x, y$, ואז $\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ נקודה חשודה.
    * אם הקבוצה שאנחנו בודקים אותה היא רק "קטימה" של קו גובה ולא כל קו הגובה, נבדוק גם את הנקודות בקצה.
  - לכל נקודה, נבדוק אם היא נקודת קיצון ־ נחשב את הערכים בכל אחד מהם ונראה אם היא נקודת מקסימום / מינימום ביחס אליהם.

- **חישוב נגזרת מסדר שני (תרגול 13):**
  - מחשבים את $D_1, D_2$ (גזירה באמצעות הקואורדינטה הראשונה / השניה).
  - מחשבים את כל הקומבינציות האפשריות ־ $D_1D_1, D_1D_2, D_2D_2$ (כלומר גוזרים את $D_1, D_2$ לפי הקואורדינטה הראשונה / שניה).

- **חישוב קירוב לינארי לפונקציה בנקודה (תרגול 13):**
  - הנוסחא היא $l_a f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + D_1 f \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} (x - x_0) + D_2 f \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} (y - y_0)$.

- **חישוב קירוב ריבועי לפונקציה בנקודה (תרגול 13):**
  - מחשבים את הקירוב הלינארי.
  - מחשבים את:
$$A = D_1 D_1 f \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$
$$B = D_1 D_2 f \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$
$$C = D_2 D_2 f \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$
  - מחשבים את הקירוב הריבועי לפי הנוסחא: $q_a f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = l_a f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left[A\left(x - x_0\right)^2 + 2B\left(x - x_0\right)\left(y - y_0\right) + C\left(y - y_0\right)^2\right]$.

- **חישוב ומיון נקודות קיצון מקומי של קבוצה פתוחה עם שני משתנים בעזרת הסיאן (תרגול 13):**
  - <u>נזהה את הנקודות החשודות:</u> נחשב את $D_1, D_2$ ונשווה כל אחד מהם לאפס.
  - <u>נמיין את הנקודות החשודות:</u> נסמן $A, B, C$ כמו מקודם, נחשב את ההסיאן $\Delta = AC - B^2$ (הדטרמיננטה של $\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$).
    * אם $\Delta > 0$ ־ נקודת קיצון. נקבע לפי $A$ ־ אם הוא חיובי זה מינימום, אם הוא שלילי זה מקסימום.
    * אם $\Delta < 0$ ־ נקודת אוכף.

# שיטות וטריקים - אינטגרלים כפולים

- **אינטגרל כפול (תרגול 13):**
  - השיטה הכללית היא לזהות ש־$f$ היא מהתחום $\left\{\begin{matrix} a \le x \le b \\ g(x) \le y \le h(x) \end{matrix}\right\}$ עם $g$ פונקציה כלשהי, ואז האינטגרל הכפול של $f$ הוא $\int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dy\right] dx$. כלומר התחום שמוגדר באמצעות פונקציה יהיה בהכרח זה שנטנגרל ראשון. המקרה שבו אפשר להחליף את הסדר שמטנגרלים הוא אם קיבלנו תחום מלבני (או המרנו אותו לכזה).
  - אם מבקשים "לחשב את השטח של התחום" זה שקול ללעשות אינטגרל כפול כרגיל, על הפונקציה 1.

- **דוגמאות לסוגי תחומים באינטגרלים כפולים (תרגול 13):**
  - תחום מלבני - אפילו לא צריך את ההסבר מלמעלה, אפשר פשוט להגדיר בין מה למה $x, y$ חסומות ואז לכתוב את זה בקצוות של האינטגרלים ולטנגרל פעמיים.
  - תחום משולש - נצייר את המשולש ונמצא משוואות שמייצגות את הצלע העליונה שלו ואת הצלע התחתונה שלו. נגדיר את ערכי $x, y$ כחסומים בין הערכים של הקצוות של הפונקציות. נשים את הערכים בקצוות של האינטגרלים ונטגרל פעמיים.
  - תחום חסום בין פונקציות - לשרטט את הפונקציות ולזהות בין מה למה $x, y$ חסומות ולהמשיך כמו במקרה הקודם.
  - תחום עגול / טבעתי: נזהה בין מה למה $r, \Theta$ נמצאים, וזה יתן לנו תחום מלבני $E$. נמיר לקואורדינטות פולריות ע"י הנוסחא - $\int_D\int f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dxdy = \int_E\int f\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \cdot r\ drd\theta$ (לא לשכוח לכפול ב־$r$!)