אינפי 1 ־ הגדרות ומשפטים סמסטר א' תש"פ | ניצן ברזילי

1 בפברואר 2020

הקובץ מכיל את כל ההגדרות והמשפטים שהוכחנו בהרצאות, תרגולים ותרגילים (מהתרגילים לקחתי רק הוכחות שנראו לי שימושיות ומשמעותיות). הוא מאוגד לא לפי סדר כרונולוגי אלא לפי נושאים, אבל כולל מספרי עמודים / תרגול / תרגיל כדי שתוכלו להגיע להוכחה בקלות. אעלה כל יום גרסה עדכנית ובתקווה תהיה גרסה סופית של הכל בערך שבוע לפני המבחן.

אשמח לשמוע תיקונים, אבל(!) אני רוצה ללמוד למבחן ולא להתעסק בזה כל היום, אז אם יש לכם תיקונים בבקשה <u>אל</u> תשלחו לי בפרטי, פשוט תוסיפו אותם (אם הם לא מופיעים) לקובץ התיקונים המשותף שנמצא באותה תיקיה ☺.

באהבה ובהצלחה, **קטן עליכם!!!** מניצן ♡

<u>מה הקובץ מכיל נכון לעכשיו</u>

- **מה הקובץ מכיל בינתיים:**
  - **קובץ ההרצאות:** הכל (עד עמ' 84 בסיכום הישן, לא כולל רציפות במידה שווה ונגזרת שלא בחומר למבחן).
  - **תרגולים:** הכל (עד 14 כולל).
  - **תרגילי בית:** בינתיים כלום.
- **מקרא לסימוני העמודים:**
  - (עמ' 6) = עמוד בסיכום כל ההרצאות של איב תשע"ט 2018־19 (**הישן**. הדפסתי אותו בתחילת השנה והוא זה ששימש אותי).
  - (חדש עמ' 6) = עמוד בסיכום "כל ההרצאות" תש"פ 2019־20 (**החדש**. השלמתי מתוכו דברים שלא היו בסיכום הישן).
  - (תרגול 3) = סיכום התרגול שהועלה למודל.
  - (תרגיל 3) = הוכחנו בתרגיל הבית.

<u>תכונות מספרים</u>

המספרים הטבעיים $\mathbb{N}$

1. **עקרון הסדר הטוב:** לכל קבוצה לא ריקה $A\subseteq\mathbb{N}$ מתקיים $\exists x\in A\ \ \forall y\in A\ \ x\leq y$. (עמ' 3)
   (א) כלומר, בכל קבוצה לא ריקה של מספרים <u>טבעיים</u> (לא נכון עבור שלמים) יש איבר מינימלי.
2. **משפט:** לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ (עמ' 3)
3. **עקרון האינדוקציה ב־$\mathbb{N}$:** (עמ' 4)
   (א) תהי $A\subseteq\mathbb{N}$ ונניח שמתקיימים שני התנאים הבאים:
   i. $1\in A$

ii. לכל $n \in \mathbb{N}$, אם $n \in A$ אז $(n+1) \in A$

(ב) אזי $A = \mathbb{N}$.

4. **ארכימדיות:** (עמ' 18):

(א) **משפט:** $\mathbb{N}$ אינה חסומה מלעיל ב־$\mathbb{R}$.

(ב) (המשמעות - ב־$\mathbb{R}$ יש רציונליים חיוביים קטנים כרצוננו).

i. **מסקנה:** לכל $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$ יש $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$0 < \frac{1}{n} < \epsilon$

ii. **מסקנה:** יהיו $0 < a \in \mathbb{R}$ ו־$b \in \mathbb{R}$. אזי קיים$n \in \mathbb{N}$ כך ש־$b < na$.

iii. חשוב לשים לב שיש שדות סדורים (לא שלמים) שבהם תכונת הארכימדיות לא מתקיימת.

המספרים השלמים $\mathbb{Z}$

1. **תכונות של השלמים:** (עמ' 13)

(א) **סגירות לחיבור** $m + n \in \mathbb{Z}$

(ב) **סגירות לחיסור** $m - n \in \mathbb{Z}$

(ג) **סגירות לכפל** $m \cdot n \in \mathbb{Z}$

(ד) **דיסקרטיות** $n > m \Longrightarrow n - m \geq 1$

i. לכן בין n ל־$(n+1)$ אין מספרים שלמים נוספים.

המספרים הרציונליים $\mathbb{Q}$

1. **תכונות המספרים הרציונליים:** (עמ' 6)

(א) אסוציאטיביות (קיבוץ).

(ב) קומטטיביות (חילוף).

(ג) איבר אגיש לחיבור ואיבר אדיש לכפל.

(ד) קיום נגדי.

(ה) קיום הופכי.

(ו) דיסטריבוטיביות (פילוג).

(ז) אי הפיכות 0 (מתקיים $x \cdot y = 0$ רק אם $x = 0$ או $y = 0$).

(ח) כללי סימן:

- $-(-x) = x$
- $-(x+y) = (-x) + (-y)$
- $-(xy) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$
- $-x = (-1) \cdot x$

(ט) כללי הופכי:

- $(x^{-1})^{-1} = x$
- $(-x)^{-1} = -(x^{-1})$
- $(xy)^{-1} = (x^{-1})(y^{-1})$

(י) קיום ויחידות פתרון משוואות לינאריות: לכל a, b, c כך ש־$a \neq 0$ יש למשוואה $ax + b = c$ פתרון יחיד.

2. **תכונות יחס סדר במספרים רציונליים:** (עמ' 7)

(א) **טריכוטומיה** - לכל $x, y \in \mathbb{Q}$ מתקיימת בדיוק אחת מהאפשרויות הבאות: $x = y$, $x > y$, $x < y$.

(ב) **טרנזיטיביות** - לכל $x, y, z \in \mathbb{Q}$ אם מתקיים $x < y$ וגם $y < z$ אז מתקיים $x < z$.

(ג) **תאימות עם החיבור** - לכל $x,y,z\in\mathbb{Q}$ אם מתקיים $x<y$ אז מתקיים $x+z<y+z$.

(ד) **תאימות עם הכפל בחיובי** - לכל $x,y,z\in\mathbb{Q}$ אם מתקיים $x<y$ ו־z חיובי, אז מתקיים $xz<yz$.

(ה) **כפל בשלילי** - לכל $x,y,z\in\mathbb{Q}$ אם מתקיים $x<y$ ו־z שלילי, אז מתקיים $xz>yz$.

(ו) **כללי סימן והופכי** - לכל $x,y\in\mathbb{Z}$ מתקיים:

i. אם $x<y$ אז $-y<-x$.

ii. אם x חיובי אז ההופכי שלו חיובי, אם x שלילי אז ההופכי שלו שלילי.

(ז) **העלאה בריבוע** - לכל $x\in\mathbb{Q}$ מסמנים $x\cdot x=x^2$, ואז אם $x\neq 0$ מתקיים $0<x^2$. בפרט, מתקיים $0<1$.

i. עבור $1<x\in\mathbb{Q}$ מתקיים $x<x^2$ (תרגול 1).

(ח) **חיבור אי שוויונים אגף־אגף:** אם $x,y,z,w\in\mathbb{Q}$ ואם $x<y$ וגם $z<w$ אז $x+z<y+w$ (חדש עמ' 6, תרגול 2):

i. אם $a<b$ ו־$c<d$ מתקיים $a+c<b+d$ (חיבור אי שוויונים חזקים הוא אי שוויון חזק).

ii. אם $a\le b$ ו־$c\le d$ מתקיים $a+c\le b+d$ (חיבור אי שוויונים חלשים הוא אי שוויון חלש).

iii. אם $a\le b$ ו־$c<d$ מתקיים $a+c<b+d$ (חיבור אי שוויונים שאחד חלש ואחד חזק הוא אי שוויון חזק).

(ט) **מכפלה אגף־אגף של אי־שוויונים עם איברים חיוביים:** $x,y,z,w\in\mathbb{Q}$ ואם $0<x<y$ ו־$0<z<w$ אז $xz<yw$ (חדש עמ' 6)

3. **יחס סדר חלש במספרים רציונליים:** (תרגול 2)

(א) **הגדרה:** יהיו $a,b\in\mathbb{Q}$. נאמר כי $a\le b$ אם"ם מתקיים $a<b$ או $a=b$.

(ב) **תכונות:**

i. **אנטי סימטריה:** אם $a\le b$ וגם $b\le a$ אז מתקיים $a=b$.

ii. **טרנזיטיביות:** אם $a\le b$ וגם $b\le c$ אז מתקיים $a\le c$.

iii. **תאימות עם החיבור:** אם $a\le b$ אז מתקיים $a+c\le b+c$.

iv. **תאימות עם הכפל בחיובי:** אם $a\le b$ וגם c חיובי, אז מתקיים $a\cdot c\le b\cdot c$.

4. **תכונות נוספות של הרציונליים:**

(א) אם $x,y\in\mathbb{Q}^+$ ו־$x<y$ אז $y^{-1}<x^{-1}$.

(ב) סימון החיוביים: $\mathbb{Q}^+$, סימון השליליים $\mathbb{Q}^-$ (עמ' 8)

i. נסמן חיובי אם $x>0$ ושלילי אם $x<0$.

ii. אם מתקיים $x,y\in\mathbb{Q}^+$ וגם $x<y$ אז מתקיים $y^{-1}<x^{-1}$ (עמ' 9).

iii. לקבוצה $\mathbb{Q}^+$אין מינימום (עמ' 10).

(ג) לכל שני מספרים רציונליים $s<t$, יש מספר רציונלי x ביניהם. (עמ' 11).

(ד) $inf\mathbb{Q}^+=0$ (עמ' 10-11)

המספרים הממשיים $\mathbb{R}$

1. **למה:** לכל $n\in\mathbb{Z}$ אם n מתחלק ב־2 אז n^2 מתחלק ב־4, ואם n לא מתחלק ב־2 אז n^2 לא מתחלק ב־2 (עמ' 10)

2. **משפט:** למשוואה $x^2-2=0$ אין פתרון ב־$\mathbb{Q}$. (עמ' 11)

(א) **מסקנה:** $\sqrt{2}$ הוא אי רציונלי.

3. **טענה:** לכל $x\in\mathbb{Q}$ ולכל $0\neq y\in\mathbb{Q}$ מתקיים $x+y\sqrt{2}$ לא רציונלי. (תרגול 4)

(א) **מסקנה:** יהיו $x,y\in\mathbb{Q}$ כך שמתקיים $x+y\sqrt{2}=0$, אזי $x=y=0$.

(ב) **הערה:** מסמנים כך את הקבוצה $\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{x+y\sqrt{2}|x,y\in\mathbb{Q}\}$, ניתן להוכיח שזהו שדה סדור שיש בו גם מספרים רציונליים וגם מספרים אי רציונליים, הוא <u>לא</u> מכיל את $\mathbb{Q}$ ו<u>לא</u> מוכל ב־$\mathbb{R}$.

(ג) **טענה:** יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ המקיימים $a<b$, אז קיים $x\in\mathbb{Q}$ וקיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש$a<x<b$ וכך ש־$a+\frac{\sqrt{2}}{n}<b$.

4. **צפיפות הרציונליים בממשיים:**

(א) **הגדרת צפיפות ב־$\mathbb{R}$:** נאמר שהקבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ היא צפופה ב־$\mathbb{R}$ אם בין כל שני ממשיים שונים קיים איבר של A. (עמ' 19)

i. כלומר: $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x < y \Rightarrow (\exists a \in A | x < a < y)$

(ב) **משפט:** $\mathbb{Q}$ צפופה ב־$\mathbb{R}$ (תרגול 4).

שדות

הגדרות על שדות

1. **שדה:** קבוצה $\mathbb{F}$ שמוגדרות עליה שתי פעולות (חיבור וכפל), ויש בה שני איברים (0,1) ומתקיימות בה אקסיומות השדה. (עמ' 7)

2. **שדה סדור:** שדה $\mathbb{F}$ עם יחס סדר $>$ המקיים את 4 התכונות הראשונות של יחס סדר (טריכוטומיה, טרנזיטיביות, תאימות עם החיבור, תאימות עם כפל בחיובי). (עמ' 7)

3. **שדה סדור שלם:** שדה סדור יקרא שלם אם לכל שתי קבוצות לא ריקות $L, U \in \mathbb{F}$ כך ש־$L \leq U$, יש $c \in \mathbb{F}$ כך שמתקיים $L \leq c \leq U$. (עמ' 12).

- במילים ־ שדה הוא שלם אם לכל שתי קבוצות מתוכו שאחת גדולה מהשניה, מתקיים שקיים איבר כלשהו ביניהן עם אי שוויון חלש.

4. **אקסיומות השדה:** (עמ' 8)

- M_1: כפל הוא אסוציאטיבי
- M_2: קיום איבר אדיש לכפל f, מסומן $1_{\mathbb{F}}$
- M_3: קיום איבר הופכי (כפל בהופכי שווה ל־$1_{\mathbb{F}}$)
- M_4: כפל הוא קומוטטיבי
- A_1: חיבור הוא אסוציאטיבי
- A_2: קיום איבר אדיש לחיבור e, מסומן $0_{\mathbb{F}}$
- A_3: קיום איבר נגדי (חיבור עם הנגדי שווה ל־$0_{\mathbb{F}}$)
- A_4: חיבור הוא קומוטטיבי
- D: דיסטריבוטיביות (פילוג)
- NT: האדיש לחיבור שונה מהאדיש לכפל

5. **תכונות שדות:** (עמ' 8)

(א) בשדה יש רק איבר אחד האדיש לחיבור.

(ב) בשדה יש רק איבר אחד האדיש לכפל.

(ג) כפל ב־$0_{\mathbb{F}}$ בשדה שווה ל־$0_{\mathbb{F}}$.

(ד) לכל איבר בשדה קיים נגדי <u>יחיד</u>, המסומן $-x$.

(ה) לכל איבר בשדה השונה מ־$0_{\mathbb{F}}$ קיים הופכי יחיד, המסומן x^{-1}.

6. **אילו מקבוצות המספרים הם שדות** (מתוך הסברים בע"פ בהרצאות של איב):

(א) $\mathbb{N}$ **אינו** שדה, כי הוא לא מקיים A_3(קיום נגדי) ־M_3(קיום הופכי).

(ב) $\mathbb{Z}$ **אינו** שדה, כי הוא לא מקיים M_3(קיום הופכי).

(ג) $\mathbb{Q}$ **הוא שדה <u>סדור</u>**.

- מתקיים $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, כלומר הרציונליים הוא תת שדה של הממשיים.

(ד) $\mathbb{R}$ הוא **שדה <u>סדור שלם</u>**, והוא <u>השדה הסדור השלם היחיד</u> עד כדי איזומורפיזם. (עמ' 13).

(ה) $\mathbb{C}$ הוא **שדה <u>לא סדור</u>**, כי הוא לא מקיים תאימות לחיבור ותאימות לכפל בחיובי (כי אין בו יחס סדר).

7. **אי שוויון ברנולי**

(א) יהי $\mathbb{F}$שדה סדור. אזי מתקיים: $-1_{\mathbb{F}} < x \Rightarrow (1_{\mathbb{F}} + x)^n \geq 1_{\mathbb{F}} + nx \quad \forall x \in \mathbb{F} \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\mathbb{F}}$ (עמ' 21)

קבוצות

הגדרות של חסימות וחסמים

1. **קבוצה חסומה** היא קבוצה החסומה מלעיל ומלרע (עמ' 14).
2. **קבוצה חסומה מלרע:** קבוצה $A \in \mathbb{Z}$ אם יש $m \in \mathbb{Z}$ **(חסם מלרע)** כך שלכל $x \in A$ מתקיים $m \leq x$ (עמ' 5).
   (א) חסם מלרע אינו יחיד - מההגדרה נובע אם הקבוצה חסומה מלרע קיימים לה אינסוף חסמי מלרע.
3. **קבוצה חסומה מלעיל:** קבוצה $A \in \mathbb{Z}$ אם יש $m \in \mathbb{Z}$ **(חסם מלעיל)** כך שלכל $x \in A$ מתקיים $m \geq x$ (עמ' 5).
   (א) חסם מלעיל אינו יחיד - מההגדרה נובע אם הקבוצה חסומה מלרע קיימים לה אינסוף חסמי מלעיל.
4. **אינפימום (חסם תחתון):** חסם המלרע המקסימלי, מסומן $inf(A)$. כלומר $a \in \mathbb{Q}$ הוא אינפימום של A אם מתקיימים שני התנאים הבאים (עמ' 10):
   (א) a הוא חסם מלרע של A (יכול אך לא חייב להיות איבר בקבוצה A)
   (ב) אם $m \in \mathbb{Q}$ הוא חסם מלרע של A, אזי $m \leq a$.
5. **מינימום:** מסומן $min(A)$, חסם המלרע השייך לקבוצה, או האיבר הקטן בקבוצה. לא בהכרח קיים מינימום לקבוצה, אך אם הוא קיים - הוא יחיד.
   (א) אם ל-A יש מינימום אז ל-A יש אינפימום ומתקיים $minA = infA$. (תרגיל 3).
   (ב) אם ל-A יש אינפימום s ומתקיים $s \in A$, אז $s = minA$. (תרגיל 3).
6. **סופרימום (חסם עליון):** חסם המלעיל המינימלי, מסומן $sup(A)$. כלומר $a \in \mathbb{Q}$ הוא סופרימום של A אם מתקיימים שני התנאים הבאים (עמ' 10):
   (א) b הוא חסם מלעיל של A (יכול אך לא חייב להיות איבר בקבוצה A).
   (ב) אם $m \in \mathbb{Q}$ הוא חסם מלעיל של A, אזי $m \geq b$. לא בהכרח קיים סופרימום לקבוצה.
7. **מקסימום:** מסומן $max(A)$, חסם המלעיל השייך לקבוצה, או האיבר הגדול בקבוצה. לא בהכרח קיים מקסימום לקבוצה, אך אם הוא קיים - הוא יחיד.
   (א) אם ל-A יש מקסימום אז ל-A יש סופרימום ומתקיים $maxA = supA$. (תרגיל 3).
   (ב) אם ל-A יש סופרימום s ומתקיים $s \in A$, אז $s = maxA$. (תרגיל 3).

משפטים על חסימות וחסמים

1. **משפט:** תהא $A \in \mathbb{Z}$ קבוצה לא ריקה וחסומה מלרע. אזי יש ל-A איבר מינימלי ומקסימלי (עמ' 5).
2. **חסימות קבוצה:** תהי $A \in \mathbb{R}$ לא ריקה, אזי A חסומה אם"ם יש $C > 0$ כך שלכל $a \in A$ מתקיים $|a| \leq C$ (עמ' 18)
3. **משפטים על אינפימום / סופרימום** שנכונים לכל קבוצה:
   (א) אם לקבוצה קיים סופרימום / אינפימום, אז הוא יחיד. (עמ' 15 / תרגיל 3)
4. **משפטים על אינפימום של קבוצות ב-$\mathbb{R}$:**
   (א) **משפט החסם התחתון** - אם $A \in \mathbb{R}$ לא ריקה וחסומה מלרע, אז יש ל-A אינפימום ב-$\mathbb{R}$ (תרגיל 3).
   (ב) תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה לא ריקה וחסומה מלרע, ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$. אזי הטענות הבאות שקולות: (עמ' 16)
      i. $\alpha = inf(A)$
      ii. α חסם מלרע של A ומתקיים שלכל $x \in \mathbb{R}$ עם $\alpha < x$ יש $a \in A$ כך שמתקיים $\alpha \leq a < x$
      iii. α חסם מלרע של A ומתקיים שלכל $\epsilon > 0$ יש $a \in A$ כך ש-$\alpha \leq a \leq \alpha + \epsilon$
5. **משפטים על סופרימום של קבוצות ב-$\mathbb{R}$:**

(א) **משפט החסם העליון** - אם $A \in \mathbb{R}$ לא ריקה וחסומה מלעיל, אז יש ל-A סופרימום ב-$\mathbb{R}$. (עמ' 15)

(ב) תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל, ויהי $\beta \in \mathbb{R}$. אזי הטענות הבאות שקולות: (עמ' 15)

i. $\beta = sup(A)$

ii. β חסם מלעיל של A ומתקיים שלכל $x \in \mathbb{R}$ עם $x < \beta$ יש $a \in A$ כך שמתקיים $x < a \leq \beta$ (לכל מספר ממשי שקטן מ-β יש איבר בקבוצה שנמצא ביניהם).

iii. β חסם מלעיל של A ומתקיים שלכל $\epsilon > 0$ יש $a \in A$ כך ש-$\beta - \epsilon < a \leq \beta$ (אם נחסיר מ-β אפסילון כלשהו, כבר יהיה איבר בקבוצה שנמצא ביניהם).

(ג) **סופרימום של סכום של קבוצות:** יהיו $0 \neq A, B \in \mathbb{R}$ שתי קבוצות חסומות מלמעלה, אזי מתקיים $sup(A+B) = supA + supB$. (תרגול 3)

(ד) **סופרימום של מכפלה של קבוצות:** יהיו $0 \neq A, B \in \mathbb{R}^+$ שתי קבוצות חסומות מלמעלה של **מספרים <u>חיוביים</u>**, אזי $sup(A \cdot B) = supA \cdot supB$. (תרגיל 3).

הגדרות יחס סדר בין קבוצות

1. **הגדרת קיום יחס סדר בין קבוצות:** לכל שתי קבוצות L, U נסמן $L \leq U$ רק אם כל איבר ב-U גדול מכל איבר ב-L. (עמ' 12)

   (א) ההגדרה הזו <u>לא</u> נכונה <u>לכל</u> שתי קבוצות - היא מתארת יחס סדר בין קבוצות, שלא מתקיים תמיד.

   (ב) דרך לזכור מי זה מי - L כמו $lower$, U כמו $upper$.

2. **משפט:** לכל $u \in U$ ולכל $l \in L$ מתקיים $l < u$ (עמ' 11)

3. **למה:** יהיו $L, U \in \mathbb{R}$ לא ריקות כך שמתקיים $L \leq U$. אזי קיימים $sup(L)$ ו-$inf(U)$ ומתקיים $sup(L) \leq inf(U)$ (עמ' 16)

4. **למת החתכים:** יהיו $L, U \in \mathbb{R}$ לא ריקות כך שמתקיים $L \leq U$. אזי הטענות הבאות שקולות:

   (א) קיים c יחיד כך ש-$L \leq c \leq U$.

   (ב) $sup(L) = inf(U)$

   (ג) לכל $\epsilon > 0$ יש $l \in L$ ו-$u \in U$ כך ש- $0 \leq u - l < \epsilon$ (ההפרש בין שני האיברים גדול או שווה ל-0 וקטן מאפסילון - כלומר לא משנה איזה מרחק קטן ניקח, תמיד נוכל למצוא 2 איברים u, l שהמרחק ביניהם קטן יותר).

<u>ערך מוחלט, סימן וערך שלם</u>

1. **הגדרות ערך מוחלט וסימן** (עמ' 17):

   (א) **ערך מוחלט:** לכל $a \in \mathbb{F}$ מתקיים: $|a| = \begin{cases} a & 0_{\mathbb{F}} < a \\ 0_{\mathbb{F}} & 0_{\mathbb{F}} = a \\ -a & a < 0_{\mathbb{F}} \end{cases}$

   (ב) **סימן:** לכל $a \in \mathbb{F}$ מתקיים: $sgn(a) = \begin{cases} 1_{\mathbb{F}} & 0_{\mathbb{F}} < a \\ 0_{\mathbb{F}} & 0_{\mathbb{F}} = a \\ -1_{\mathbb{F}} & a < 0_{\mathbb{F}} \end{cases}$

2. **תכונות ערך מוחלט וסימן** (עמ' 17):

   (א) $|a| = max\{a, -a\}$

   (ב) $a = |a|sgn(a)$, $|a| = a \cdot sgn(a)$ הערך המוחלט של a זהה ל-a עצמו כפול הסימן שלו.

   (ג) $0_{\mathbb{F}} \leq |a|$ הערך המוחלט של a הוא אי-שלילי

   (ד) $0_{\mathbb{F}} = |a| \Leftrightarrow a = 0_{\mathbb{F}}$

   (ה) $|a| = |-a|$

   (ו) $sgn(ab) = sgn(a)sgn(b)$ אפשר קודם לכפול ואז לעשות סימן, או קודם לעשות סימן ואז לכפול

(ז) $|ab| = |a||b|$ אפשר קודם לכפול ואז לעשות ערך מוחלט, או קודם לעשות ערך מוחלט ואז לכפול

(ח) $-|a| \leq a \leq |a|$

(ט) אם $0_{\mathbb{F}} < b$ אז $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$

(י) אם $0_{\mathbb{F}} \leq b$ אז $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$

(יא) $|a+b| \leq |a| + |b|$ אי שוויון המשולש

(יב) $||a| - |b|| \leq |a-b|$ אי שוויון המשולש "ההפוך"

3. **הגדרת ערך שלם:** יהי $b \in \mathbb{R}$. הערך השלם של b מסומן $[b]$ או $\lfloor b \rfloor$.

(א) **משפט:** יהי $b \in \mathbb{R}$, אזי $\lfloor b \rfloor \in \mathbb{Z}$ ומתקיים $\lfloor b \rfloor \leq b \leq \lfloor b \rfloor + 1$.

חזקות ושורשים

חזקה טבעית

1. **הגדרת חזקה טבעית:** לכל $a \in \mathbb{Q}$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר את a^n באופן רקורסיבי: $a^n := \begin{cases} a^1 = a \\ a^{n+1} = a^n a \end{cases}$ (תרגול 2).

2. **תכונות חזקה טבעית:**

(א) לכל $a \in \mathbb{F}$ ולכל $m,n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

(ב) לכל $a \in \mathbb{F}$ ולכל $m,n \in \mathbb{N}$ מתקיים $(a^m)^n = a^{mn}$

(ג) לכל $a \in \mathbb{F}$ ולכל $m,n \in \mathbb{N}$ מתקיים $(ab)^n = a^n \cdot b^n$

(ד) לכל $a \in \mathbb{F}$ ולכל $0 \neq b \in \mathbb{F}$ מתקיים $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

חזקה שלמה

1. **הגדרת חזקה שלמה:**

(א) **הגדרה ראשונה:** לכל $0 \neq a \in \mathbb{Q}$ ולכל $n \in \mathbb{Z}$ נגדיר את a^n באופן הבא: $a^n := \begin{cases} a^n & 0 < n \\ 1 & n = 0 \\ \frac{1}{a^{-n}} & n < 0 \end{cases}$ (תרגול 2).

(ב) **הגדרה שניה:** יהיה $a \neq 0$ ו־$n \in \mathbb{Z}$. נרשום $n = i - j$ (כאשר $i,j \in \mathbb{N}$), המספר $a^n = \frac{a^i}{a^j}$ (עמ' 47).

i. **מסקנה:** $a^0 = \frac{a^1}{a^1} = 1$ (עמ' 47)

ii. **מסקנה:** הסימן a^{-1} ששימש אותנו לסימון הופכי, מסמל כעת גם a בחזקת -1 ושקול לו, שכן מתקיים $a^{-1} = a^{1-2} = \frac{a^1}{a^2} = \frac{1}{a}$ (עמ' 47).

2. **תכונות חזקה שלמה:** אותן תכונות כמו חזקה טבעית.

חזקה רציונלית

1. **הגדרת חלקה רציונלית:** יהי $0 < a \in \mathbb{R}$ ו־$r \in \mathbb{Q}$. נרשום $r = \frac{p}{q}$ עם p שלם ו־q טבעי. המספר $a^{\frac{p}{q}}$ מוגדר ע"י $a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = (\sqrt[q]{a})^p$.

2. **תכונות חזקה רציונלית:** (עמ' 48, תרגול 7):

(א) לכל $0 < a \in \mathbb{R}$ ולכל $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ מתקיים $a^{r_1+r_2} = a^{r_1} \cdot a^{r_2}$

(ב) לכל $0 < a \in \mathbb{R}$ ולכל $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ מתקיים $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$

(ג) לכל $0 < a \in \mathbb{R}$ ולכל $r \in \mathbb{Q}$ מתקיים $(ab)^r = a^r \cdot b^r$

(ד) לכל $0 < a \in \mathbb{R}$ ולכל $r \in \mathbb{Q}$ מתקיים $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

3. **טענות על חזקה רציונלית:**

(א) **שורש וחזקה מתחלפים:** יהי $0 < a \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{Z}$ ו־$q \in \mathbb{N}$. אזי מתקיים $a^{\frac{p}{q}} = (a^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$. (עמ' 48, תרגול 7).

(ב) **מוגדרות היטב של החזקה הרציונלית:** יהי $0 < a \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{Z}$ ו־$q \in \mathbb{N}$. אזי לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $a^{\frac{pk}{qk}} = a^{\frac{p}{q}}$. (עמ' 48, תרגול 7).

(ג) **טענה:** יהיו $n, m \in \mathbb{N}$ ו־$0 < a \in \mathbb{R}$. אז מתקיים $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}}$ (תרגול 7).

שורש

1. **משפט:** יהי $0 \leq a \in \mathbb{R}$. אז קיים $0 \leq x \in \mathbb{R}$ <u>יחיד</u> המקיים $x^2 = a$. (עמ' 20)

(א) **הגדרת שורש ריבועי:** יהי $0 \leq a \in \mathbb{R}$. למספר היחיד $0 \leq x \in \mathbb{R}$ המקיים $x^2 = a$ נקרא <u>השורש הריבועי</u> של a ונסמנו $x = \sqrt{a}$ (עמ' 21).

<u>קטעים, קרניים ומרווחים</u>

מרחק בין נקודות

1. **מרחק בין נקודות:** (תרגול 4)

(א) **הגדרת מרחק:** יהיו $x, y \in \mathbb{R}$. המרחק בין xו־y מוגדר ע"י $|x-y|$ ומסומן $d(x,y)$.

(ב) **תכונות המרחק:**

i. **אי שליליות:** מתקיים $d(x,y) \geq 0$, ובנוסף אם $d(x,y) = 0$ אז $x = y$.

ii. **סימטריה:** $d(x,y) = d(y,x)$.

iii. **אי שוויון המשולש:** עבור $x, y, z \in \mathbb{R}$ מתקיים $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

הגדרות ומשפטים על קטעים, קרניים ומרווחים

1. **הגדרת קטע:** יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש־$a \leq b$. יש 9 סוגי קטעים - 4 סוגי קטעים סגורים ו־5 סוגי קטעים פתוחים / קרניים (עמ' 21).

(א) **קטעים חסומים:** תת קבוצות חסומות של $\mathbb{R}$. עבור כולם מתקיים שמרכז הקטע הוא $\frac{a+b}{2}$:

i. **קטע סגור:** $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$

א'. לפעמים מסמנים $[a,a] = \{a\}$, כלומר לצרכי הקורס הזה נקודה היא קטע.

ii. **קטע חצי סגור חצי פתוח:** $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$

iii. **קטע חצי פתוח חצי סגור:** $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$

iv. **קטע פתוח:** $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$

(ב) **קטעים לא חסומים (קרניים):**

i. **קרן ימנית סגורה:** $[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\}$

ii. **קרן ימנית פתוחה:** $(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} | a < x\}$

iii. **קרן שמאלית סגורה:** $(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$

iv. **קרן שמאלית פתוחה:** $(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$

v. $\mathbb{R}$ עצמה היא גם קטע ומסומנת $(-\infty,\infty)$

א'. **הערה סופר חשובה** - $-\infty \notin \mathbb{R}$ וכן $\infty \notin \mathbb{R}$!!!

2. **הגדרת מרווח:** $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ תקרא מרווח אם"ם מתקיים $\forall a_1, a_2 \in A \;\; \forall x \in \mathbb{R} \;\; a_1 \leq x \leq a_2 \Rightarrow x \in A$.

(א) **טענה:** כל קטע הוא מרווח וכל מרווח הוא קטע (תרגול 7, תרגיל 7).

3. **קבוצות קמורות ב־$\mathbb{Q}$:** (תרגול 11)

(א) **קבוצה קמורה:** קבוצה לא ריקה $A\subseteq\mathbb{Q}$ תקרא קמורה אם היא מקיימת $\forall a_1, a_2 \in A \ \ \forall x \in \mathbb{Q} \ \ a_1 \leq x \leq a_2 \Rightarrow x \in A$.

i. **הערה:** זוהי ההגדרה המקבילה עבור $\mathbb{Q}$ להגדרה של מרווח ב־$\mathbb{R}$.

ii. **סימון:** יהיו $a < b \in \mathbb{Q}$, נסמן:

א'. $[a,b]_{\mathbb{Q}} = \{x \in \mathbb{Q} | a \leq x \leq b\}$

ב'. $(a,b)_{\mathbb{Q}} = \{x \in \mathbb{Q} | a < x < b\}$

ג'. $(a,b]_{\mathbb{Q}} = \{x \in \mathbb{Q} | a < x \leq b\}$

ד'. $[a,b)_{\mathbb{Q}} = \{x \in \mathbb{Q} | a \leq x < b\}$

(ב) **טענה:** יהי $A\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ כך ש־$A = (a,b)_{\mathbb{Q}} \vee [a,b)_{\mathbb{Q}} \vee (a,b]_{\mathbb{Q}} \vee [a,b]_{\mathbb{Q}}$. אזי מתקיים $supA = b$.

(ג) **טענה:** יהיו $a < b \in \mathbb{Q}$, אזי $(a,b)_{\mathbb{Q}}, [a,b)_{\mathbb{Q}}, (a,b]_{\mathbb{Q}}, [a,b]_{\mathbb{Q}}$ הן קבוצות קמורות.

סוגי תכונות

- **הגדרת תכונה:** $P(n)$ טענה (תכונה) לגבי המספר הטבעי n. נאמר ש: (עמ' 25):
  - "$P(n)$ **מתקיימת תמיד**" אם "$\forall n \in \mathbb{N} \ \ P(n)$" הוא פסוק אמת.
  - "$P(n)$ **מתקיימת כמעט תמיד**" / "$P(n)$ מתקיימת לכל n גדול מספיק" / "$P(n)$ מתקיימת החל ממקום מסוים" אם "$\exists N \ \ \forall n > N \ \ P(n)$" הוא פסוק אמת. כלומר, $P(n)$ מתקיימת תמיד חוץ מבמספר סופי של מקרים.
  - "$P(n)$ **מתקיימת אינסוף פעמים**" / "$P(n)$ היא תכונה שכיחה" אם "$\forall N \in \mathbb{N} \ \ \exists n > N \ \ P(n)$" הוא פסוק אמת. כלומר, אם יש אינסוף n־ים כך ש־$P(n)$ מתקיימת.
    - * **הערות על תכונות:** (עמ' 26)
    - * תמיד ⇐כמעט תמיד⇐שכיח (תכונה המתקיימת החל ממקום מסוים בוודאות מתקיימת אינסוף פעמים).
    - * יהיו $P_1(n)$ ו־$P_2(n)$ שתי תכונות של $n \in \mathbb{N}$ אם P_1מתקיימת כמעט תמיד וגם P_2 מתקיימת כמעט תמיד, אזי התכונה $Q(n) = P_1(n) \wedge P_2(n)$ מתקיימת כמעט תמיד.
    - * מסקנה חשובה מהבוחן - אם תכונה שכיחה, השלילה שלא לא בהכרח שכיחה (יתכן שהתכונה המקורית מתקיימת כמעט תמיד, ואז השלילה שלה מתקיימת מספר סופי של מקרים).

סדרות

הגדרות על סדרות

1. **סדרה:** פונקציה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. (עמ' 23)

(א) **סימון:** נהוג לסמן איבר בסדרה f_n במקום $f(n)$, נהוג לסמן את הסדרה כולה $(f_n)_{n=1}^{\infty}$.

2. **גבול של סדרה:** תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה ב־$\mathbb{R}$. מספר ממשי $L \in \mathbb{R}$ יקרא גבול של הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אם"ם $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$. (עמ' 23)

(א) **הערה:** אם נחליף את ε בכפולה של ε בקבוע ואת האי"ש החזקים $n > N$ ו־$|a_n - L| < \varepsilon$ באי"ש חלשים, הגדרת הגבול עדיין תקינה (תרגול 5).

(ב) **סימון:** נסמן את הגבול של הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ באופן הבא: $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L$ או $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. (עמ' 23)

(ג) **סדרה מתכנסת:** סדרה שיש לה גבול תקרא סדרה מתכנסת. (עמ' 24)

(ד) **סדרה מתבדרת:** סדרה שאין לה גבול תקרא סדרה מתבדרת. (עמ' 24)

3. **חסימות של סדרה:** (עמ' 25)

(א) **סדרה חסומה מלעיל** אם"ם קבוצת איבריה חסומה מלעיל. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלעיל אם"ם קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \leq M$.

(ב) **סדרה חסומה מלרע** אם"ם קבוצת איבריה חסומה מלרע. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלרע אם"ם קיים $m \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $m \leq a_n$.

(ג) **סדרה חסומה** אם"ם קבוצת איבריה חסומה. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה אם"ם מתקיים <u>אחד לפחות</u> מהתנאים הבאים:

i. קיימים $m, M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $m \leq a_n \leq M$.

ii. קיים $0 < C \in \mathbb{R}$ כל שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|a_n| < C$.

4. **סדרות ממוצעים:** (עמ' 32)

(א) **סדרת הממוצעים החשבוניים:** תהי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, נגדיר סדרה חדשה ע"י $a_1 = x_1,\ \ a_2 = \frac{x_1+x_2}{2},\ \ a_3 = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, ובאופן כללי $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = \frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n}{n} = a_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ תקרא סדרת הממוצעים החשבוניים ($\underline{a}rithemetic$) של $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

(ב) **סדרת הממוצעים ההנדסיים:** תהי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, אם מתקיים $\forall n \in \mathbb{N}\ \ 0 \leq x_n$, נגדיר סדרה חדשה $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ ע"י $g_1 = x_1,\ \ g_2 = \sqrt{x_1x_2},\ \ g_3 = \sqrt{x_1x_2x_3}$ ובאופן כללי $\forall n \in \mathbb{N}\ \ g_n = \sqrt[n]{x_1x_2x_3\ldots x_n}$. $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ תקרא סדרת הממוצעים ההנדסיים ($\underline{g}eometric$) של $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

(ג) **סדרת הממוצעים ההרמוניים:** תהי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, אם מתקיים $\forall n \in \mathbb{N}\ \ 0 \neq x_n$, נגדיר סדרה חדשה $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ ע"י $h_1 = x_1\ , h_2 = \frac{2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}, h_3 = \frac{3}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}}$ ובאופן כללי $\forall n \in \mathbb{N}\ h_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$. $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ תקרא סדרת הממוצעים ההרמוניים ($\underline{h}armonic$) של $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

5. **מונוטוניות** (עמ' 33):

(א) **סדרה מונוטונית עולה:** סדרה בה לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \leq a_{n+1}$. אם מתקיים $a_n < a_{n+1}$ היא נקראת **סדרה מונוטונית עולה ממש.**

(ב) **סדרה מונוטונית יורדת:** סדרה בה לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \geq a_{n+1}$. אם מתקיים $a_n > a_{n+1}$ היא נקראת **סדרה מונוטונית יורדת ממש.**

6. **תתי סדרות** (עמ' 39):

(א) **תת סדרה:** תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה נתונה. סדרה $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ תקרא תת סדרה של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אם"ם קיימת סדרה מונוטונית עולה ממש של מספרים טבעיים $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ כך ש־ $b_k = a_{n_k}$ עבור כל $k \in \mathbb{N}$. כלומר מתקיים $(b_k)_{k=1}^{\infty} = (a_{n_k})_{k=1}^{\infty} =$ $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}$.

i. **הערה:** אפילו אם לא הגדרנו את הסדרה $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ מפורשות, משתמע מהסימון $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ ש־ $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ היא סדרת אינדקסים מונוטונית עולה ממש של טבעיים (תרגול 8).

(ב) **גבול חלקי:** נתונה סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. מספר ממשי λ יקרא גבול חלקי של הסדרה אם"ם קיימת תת סדרה של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ שמתכנסת ל־λ. (עמ' 40)

i. **סימון:** נסמן S_a את קבוצת כל הגבולות החלקיים של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

א'. הערה ־ ממשפט בולצנו ווירשטראס, אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה S_a לא ריקה.

7. **איבר פסגה:** איבר a_m של הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ יקרא איבר פסגה של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אם"ם מתקיים $a_m \geq a_n$ עבור כל n המקיים $m \leq n$ (כלומר ־ איבר פסגה הוא איבר שהחל ממנו הסדרה מונוטונית יורדת).

8. **סדרת קושי:** סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ תקרא סדרת קושי אם היא מקיימת את תנאי קושי: $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N}\ \ \forall n, m \in \mathbb{N}\ \ M < n, m \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$. (עמ' 42)

(א) ניסוח אחר: $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N}\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ \ \forall p \in \mathbb{N}\ \ |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$.

9. **גבולות במובן הרחב** (עמ' 43):

(א) **סדרה שואפת לאינסוף:** $\forall \mathbf{M} \in \mathbb{R}\ \ \exists N \in \mathbb{N}\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ \ n > N \Rightarrow a_n > M$

(ב) **סדרה שואפת למינוס אינסוף:** $\forall \mathbf{M} \in \mathbb{R}\ \ \exists N \in \mathbb{N}\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ \ n > N \Rightarrow a_n < M$

משפטים על סדרות

1. **יחידות הגבול:** תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה, ויהיו $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$ וגם $\lim_{n\to\infty} a_n = L_2$ אזי $L_1 = L_2$.

2. כל סדרה מתכנסת היא סדרה חסומה. (עמ' 25).

3. **אי שוויון חריף בין גבולות של סדרות:** יהיו $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו־$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות מתכנסות, כך ש־$\lim_{n\to\infty} a_n = A$ ו־$\lim_{n\to\infty} b_n = B$. אם $A < B$, אז קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n < b_n$. (עמ' 26)

   (א) הערה ־ אם ידוע רק כי $A \le B$, <u>לא</u> ניתן להסיק ש־$a_n \le b_n$ החל ממקום מסוים.

4. **אי שוויון שכיח בין גבולות של סדרות:** יהיו $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו־$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות מתכנסות, כך ש־$\lim_{n\to\infty} a_n = A$ ו־$\lim_{n\to\infty} b_n = B$. אם עבור אינסוף n־ים מתקיים $a_n \le b_n$, אז $A \le B$. (עמ' 26).

   (א) הערה ־ אם ידוע כי $a_n < b_n$, <u>לא</u> ניתן להסיק ש־$A < B$ אלא רק ש־$A \le B$.

5. **סדרה כמעט קבועה מתכנסת לאותו קבוע:** תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה קבועה החל ממקום מסוים (כמעט קבועה), כלומר קיימים $N_0 \in \mathbb{N}$ ו־$\lambda \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n > N_0$ מתקיים $a_n = \lambda$. אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = \lambda$. (עמ' 26).

   (א) **מסקנה:** תהי $(b_n)_{n=1}^{\infty}$סדרה מתכנסת כך ש־$\lim_{n\to\infty} b_n = B > 0$. אזי קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש־$0 > b_n \quad \forall n > n$. (עמ' 27)

   (ב) **מסקנה:** תהי $(b_n)_{n=1}^{\infty}$סדרה מתכנסת כך ש־$\lim_{n\to\infty} b_n = B < 0$. אזי קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש־$0 < b_n \quad \forall n > n$. (עמ' 27)

   (ג) **מסקנה:** תהי $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת ונניח שקיים מספר ממשי λ כך שעבור אינסוף n־ים מתקיים $\lambda \le b_n$, אזי $\lambda \le \lim_{n\to\infty} b_n$ (עמ' 27).

   (ד) **מסקנה:** תהי $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת ונניח שקיים מספר ממשי λ כך שעבור אינסוף n־ים מתקיים $\lambda \ge b_n$, אזי $\lambda \ge \lim_{n\to\infty} b_n$ (עמ' 27).

6. **משפט הכריך:**

   (א) יהיו $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ ו־$(c_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות המקיימות את שלושת התנאים הבאים: (עמ' 27)

      i. $\exists N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_0 \quad a_n \le b_n \le c_n$

      ii. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו־$(c_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסות.

      iii. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$

   (ב) אזי הסדרה $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ומתקיים $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n$.

      i. **מסקנה ממשפט הכריך:** עבור $0 \le q < 1$ הסדרה $(q^n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ומתקיים $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

7. **משפטי אריתמטיקה של גבולות של סדרות:**

   (א) **משפט:** יהיו $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו־$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות מתכנסות, כך ש־$\lim_{n\to\infty} a_n = A$ ו־$\lim_{n\to\infty} b_n = B$. אזי:

      i. **סדרת הסכום** $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$ מתכנסת ל־$A + B$, כלומר $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$. (הסכום של הגבול שווה לסכום הגבולות). (עמ' 28)

      ii. **סדרת המכפלה** $(a_n b_n)_{n=1}^{\infty} = (a_1 b_1, a_2 b_2, \cdots, a_n b_n)$ מתכנסת ל־AB, כלומר $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$. (המכפלה של הגבול שווה למכפלת הגבולות). (עמ' 28)

      א'. **מסקנה** ־ תהי $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת ו־$\lambda \in \mathbb{R}$ אזי הסדרה $(\lambda b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ומתקיים $\lim_{n\to\infty} (\lambda b_n) = \lambda \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$ (עמ' 29).

      iii. **סדרת ההפרש** $(a_n - b_n)_{n=1}^{\infty} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \cdots, a_n - b_n)$ מתכנסת ל־$A - B$, כלומר $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$. (ההפרש של הגבול שווה להפרש הגבולות).

      iv. אם $b \ne 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ואם $\lim_{n\to\infty} b_n = B \ne 0$, אזי הסדרה (**סדרת המנה**) $\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \cdots, \frac{1}{b_n}\right)$ מתכנסת ל־$\frac{1}{B}$, כלומר $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{b_n}\right) = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} (b_n)}$. (עמ' 29).

v. אם $b \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ואם $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B \neq 0$, אזי הסדרה (סדרת המנה) $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \cdots, \frac{a_n}{b_n}\right)$ מתכנסת ל-$\frac{A}{B}$, כלומר $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)}$ (עמ' 29).

(ב) **משפט (חסומה כפול אפסה):** תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת כך ש-$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, ותהי $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה. אזי הסדרה $(a_n b_n)_{n=1}^{\infty} = (a_1b_1, a_2b_2, ...a_nb_n)$ מתכנסת ל-0. (עמ' 29).

(ג) **טענה ("כלל השורש" באריתמטיקה של גבולות):** תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מספרים ממשיים אי שליליים המתכנסת ל-L (ואז בהכרח $0 \le L$), אזי הסדרה $\sqrt{(a_n)}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-$\sqrt{L}$. (עמ' 30)

(ד) **טענה:** יהי $a > 0$, אזי הסדרה $(\sqrt[n]{a})_{n=1}^{\infty} = (a, \sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, ... \sqrt[n]{a})$ מתכנסת ל-1. (עמ' 31).

(ה) **משפט:** הסדרה $(\sqrt[n]{n})_{n=1}^{\infty} = (1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, ... \sqrt[n]{n})$ מתכנסת ל-1 (עמ' 31).

(ו) תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המתכנסת ל-A. אזי הסדרה $(|a_n|)_{n=1}^{\infty} = (|a_1|, \ldots, |a_n|)$ מתכנסת ל-$|A|$. (עמ' 30).

i. **מסקנה:** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

8. **משפט קושי:** סדרה מספרים ממשיים $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אם"ם היא סדרת קושי. (תרגול 8).

9. **משפט אי שוויון הממוצעים:** אם $0 \le x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, אזי מתקיים $h_n \le g_n \le a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ממוצע הרמוני $\le$ ממוצע הנדסי $\le$ ממוצע חשבוני.

10. **משפט צ'סארו:** תהי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המתכנסת ל-L, אזי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n}{n} = L$ (אם סדרה מתכנסת ל-L, גם סדרת הממוצעים החשבוניים שלה מתכנסת ל-L). (עמ' 32).

(א) **טענה:** תהי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המתכנסת ל-L כך למתקיים $0 < x_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$. אזי $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1x_2x_3...x_n} = L$ (אם סדרה מתכנסת ל-L, גם סדרת הממוצעים ההנדסיים שלה מתכנסת ל-L). (עמ' 33)

11. **הסדרה המתכנסת ל-e:** הסדרה $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ מתכנסת ל-e. (עמ' 35).

12. **משפטים על מונוטוניות:**

(א) **משפט:** אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל אז $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לסופרימום של קבוצת איבריה. (עמ' 33, תרגול 5).

i. **הערה:** המשפט הזה מאפשר לנו להוכיח קיום גבול של סדרות מונוטוניות גם אם אנחנו לא יודעים לנחש את ערכו.

(ב) **משפט:** אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלרע אז $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לאינפימום של קבוצת איבריה. (עמ' 33).

(ג) **הלמה של קנטור על סדרת קטעים מקוננים** (עמ' 38)

i. יהיו $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו-$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות המקיימות $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$

א'. אזי קיימים $c, d \in \mathbb{R}$ כך ש-$c \le d$ ומתקיים $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{x \in \mathbb{R} | \forall n \in \mathbb{N} \ \ a_n \le x \le b_n\} = [c, d]$.

ב'. אם בנוסף מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$, אזי $E = [c, c] = \{c\}$, כלומר קיים מספר ממשי c יחיד המקיים $\forall n \in \mathbb{N} \ \ a_n \le c \le b_n$.

(ד) **טענה:** תהי $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה ממש של מספרים טבעיים. אז מתקיים $\forall k \in \mathbb{N} \ \ n_k > k$ (עמ' 39).

13. **משפטים על תתי סדרות וגבולות חלקיים:**

(א) **משפט הירושה:** (עמ' 39)

i. כל תת סדרה של סדרה חסומה היא חסומה.

ii. כל תת סדרה של סדרה מונוטונית היא מונוטונית.

iii. כל תת סדרה של סדרה מתכנסת היא מתנסת. בנוסף, הגבול של תת הסדרה זהה לגבול של הסדרה המקורית.

(ב) **משפט:** לכל סדרה יש תת סדרה מונוטונית. (עמ' 40).

(ג) **משפט בולצנו ויירשטראס:** לכל סדרה חסומה יש תת סדרה מתכנסת (עמ' 40).

(ד) **משפט:** גבול חלקי הוא תכונה שכיחה של n, כלומר: $\lambda \in \mathbb{R}$ הוא גבול חלקי של סדרה נתונה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אם"ם לכל $\varepsilon > 0$ הקבוצה $\{n \in \mathbb{N} \| a_n - \lambda| < \varepsilon\}$ אינסופית. (עמ' 40).

(ה) **משפט:** לכל מספר ממשי L קיימת סדרה $(r_n)_{n=1}^{\infty} = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ של מספרים רציונליים המתכנסת ל־L.

(ו) **משפט:** תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה. אזי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אם"ם יש לה גבול חלקי יחיד.

14. **משפטים על גבולות במובן הרחב:**

(א) **משפט:** תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה השואפת לאינסוף, אזי כל תת סדרה שלה שואפת לאינסוף. (עמ' 44).

(ב) **משפט:** אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה ולא חסומה מלעיל, היא שואפת לאינסוף. (עמ' 44).

(ג) **משפט:** אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת ולא חסומה מלרע, היא שואפת למינוס אינסוף. (עמ' 44).

15. **אריתמטיקה של גבולות במובן הרחב:** (עמ' 44)

(א) **כלל הסכום:** אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ ו־$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלרע אז $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$.

i. **מסקנה:** אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ שואפת לאינסוף ו־$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$.

ii. סמא לזכרון ־ $\infty + L = \infty$, אך חשוב לזכור ש־ $\infty \notin \mathbb{R}$ ושאי אפשר לבצע על אינסוף עצמו פעולות אריתמטיות.

iii. סיכום כללי חיבור גבולות במובן הרחב:

חיבור	$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_2$	$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$	$L_1 + L_2$	∞	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$	∞	∞	??
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$	$-\infty$	??	$-\infty$

(ב) **כלל המכפלה:** אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ ו־$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של ממשיים שהחל ממקום מסוים חסומה מלרע באמצעות חסם **חיובי**, אז $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = \infty$.

i. **מסקנה:** אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ שואפת לאינסוף ו־$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול חיובי, אז $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = \infty$.

ii. סמא לזכרון ־ $\infty \cdot \overset{L>0}{L} = \infty$, אך חשוב לזכור ש־ $\infty \notin \mathbb{R}$ ושאי אפשר לבצע על אינסוף עצמו פעולות אריתמטיות.

iii. סיכום כללי כפל גבולות במובן הרחב:

כפל		$\lim\limits_{n\to\infty} b_n =$				
		$L_2 > 0$	$L_1 < 0$	0	∞	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$	$L_1 > 0$	$L_1 \cdot L_2$	$L_1 \cdot L_2$	0	∞	$-\infty$
	$L_1 < 0$	$L_1 \cdot L_2$	$L_1 \cdot L_2$	0	∞	$-\infty$
	0	0	0	0	??	??
	∞	∞	$-\infty$	??	∞	$-\infty$
	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	??	$-\infty$	$-\infty$

iv. **חילוק:** סיכום כללי חילוק גבולות במובן הרחב:

חילוק		$\lim\limits_{n\to\infty} b_n =$				
		$L_2>0$	$L_1<0$	0	∞	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$	$L_1>0$	$\frac{L_1}{L_2}$	$\frac{L_1}{L_2}$	??	0	0
	$L_1<0$	$\frac{L_1}{L_2}$	$\frac{L_1}{L_2}$	??	0	0
	0	0	0	??	0	0
	∞	∞	$-\infty$	??	??	??
	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	??	??	??

(*) יש גבול במובן הרחב רק אם קיים $N\in\mathbb{N}$ כך ש־b_n שומרת על סימן קבוע לכל $n>N$.

(ג) **מקרי אי ודאות באריתמטיקה של גבולות במובן הרחב:** $\frac{0}{0}$ $\qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ $\qquad \infty\cdot 0$ $\qquad \infty+(-\infty)$

(ד) **טענה:** תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של ממשיים השונים מאפס, אזי: (עמ' 46)

i. אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$שואפת לאינסוף, אזי $\frac{1}{a_n}$ שואפת לאפס.

ii. אם כל איברי הסדרה חיוביים וגם $\frac{1}{a_n}$ שואפת לאפס, אז $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ שואפת לאינסוף.

(ה) **משפט הפרוסה:**

i. יהיו $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו־$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות של ממשיים כך ש־ $a_n\le b_n$ לכל $n>N_0$ (עמ' 46)

א'. אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ שואפת לאינסוף, אזי $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ שואפת לאינסוף.

ב'. אם $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ שואפת למינוס אינסוף, אזי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ שואפת למינוס אינסוף.

פונקציות

הגדרות על פונקציות

1. **סביבות של נקודה:**

(א) **סביבה:** סביבה של נקודה $x_0\in\mathbb{R}$ היא קטע פתוח מהצורה $(x_0-h,x_0+h)\subset\mathbb{R}$ עם $h>0$. (עמ' 49)

i. הגדרות שקולות: $\{x\in\mathbb{R}|x_0-h<x<x_0+h\}$ וגם $\{x\in\mathbb{R}|\ |x-x_0|<h\}$.

(ב) **סביבה מנוקבת:** סביבה מנוקבת של נקודה $x_0\in\mathbb{R}$ היא תת קבוצה של $\mathbb{R}$ מהצורה $(x_0-h,x_0+h)\backslash\{x_0\}\subset\mathbb{R}$ עם $h>0$. (עמ' 49)

(ג) **סביבה ימנית:** קטע מהצורה $[x_0,x_0+h)\subset\mathbb{R}$ כאשר $h>0$. (עמ' 54)

(ד) **סביבה שמאלית:** קטע מהצורה $(x_0-h,x_0]\subset\mathbb{R}$ כאשר $h>0$. (עמ' 54)

(ה) **סביבה ימנית מנוקבת:** קטע מהצורה $(x_0+h)\subset\mathbb{R}$ כאשר $h>0$. (עמ' 54)

(ו) **סביבה שמאלית מנוקבת:** קטע מהצורה $(x_0-h,x_0)\subset\mathbb{R}$ כאשר $h>0$. (עמ' 54)

2. **גבול של פונקציה בנקודה (הגדרת קושי):** המספר הממשי L הוא גבול של הפונקציה f בנקודה x_0 אם"ם $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}\ \ (0<|x-x_0|<\delta)\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon$. (עמ' 50)

(א) **סימון:** אם לפונקציה קיים גבול בנקודה, נסמנו $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$.

3. **גבולות חד צדדיים:** תהי $f:D\to\mathbb{R}$ פונקציה מוגדרת בסביבה ימנית/שמאלית (לפי הגבול הרצוי) מנוקבת של x_0: (עמ' 54)

(א) **גבול מימין:** נאמר ש־$L\in\mathbb{R}$ הוא גבול מימין של f ב־x_0 אם מתקיים $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\in D\ \ 0<x-x_0<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon$.

i. **סימון:** גבול ימני מסומן $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$

(ב) **גבול משמאל:** נאמר ש־$L \in \mathbb{R}$ הוא גבול משמאל של f ב־x_0 אם מתקיים $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in D \ \ -\delta < x - x_0 < 0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

i. **סימון:** גבול שמאלי מסומן $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$

4. **חסימות של פונקציות:** (תרגול 10)

(א) **הגדרה:** בהנתן $A \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$ ופונקציה $f : D \to \mathbb{R}$, נאמר ש־f חסומה ב־A אם"ם קיים $M > 0$ כך שלכל $x \in A$ מתקיים $|f(x) \leq M$.

(ב) **הגדרות לסוגי חסימות:** תהי $f : \mathbb{R} \backslash \{x_0\} \to \mathbb{R}$:

i. ***f* חסומה בכל סביבה מנוקבת של** x_0: $\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall \delta > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \ \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

ii. **קיימת סביבה מנוקבת של x_0 שבה f חסומה:** $\exists \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \ \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

iii. **f חסומה בכל סביבה מנוקבת של** x_0: $\forall \delta > 0 \ \ \exists \varepsilon > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \ \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

5. **גבול במובן הרחב של פונקציות:** (עמ' 66)

(א) **פונקציה שואפת לאינסוף בנקודה:** תהי $f : D \to \mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת בסביבה המנוקבת של x_0, נאמר ש־f שואפת לאינסוף בנקודה x_0 אם"ם מתקיים $\forall M \in \mathbb{R} \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in D \ \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$.

i. **סימון:** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

(ב) **פונקציה שואפת למינוס אינסוף בנקודה:** תהי $f : D \to \mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת בסביבה המנוקבת של x_0, נאמר ש־f שואפת למינוס אינסוף בנקודה x_0 אם"ם מתקיים $\forall M \in \mathbb{R} \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in D \ \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < M$.

i. **סימון:** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

(ג) **פונקציה בעלת גבול כאשר x שואף לאינסוף/מינוס אינסוף:** (עמ' 66)

i. **שואפת לאינסוף:** תהי $f : D \to \mathbb{R}$ כך שגבול הגדרתה כולל קרן (a, ∞) כלומר f מוגדרת עבור כל $x > a$. נאמר ש־L הוא גבול של f כאשר x שואף לאינסוף אם"ם מתקיים $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in D \ \ x > N \Rightarrow |f(x) - | < \varepsilon$.

א'. **סימון:** $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$

ii. **שואפת למינוס אינסוף:** תהי $f : D \to \mathbb{R}$ כך שגבול הגדרתה כולל קרן $(-\infty, a)$ כלומר f מוגדרת עבור כל $x < a$. נאמר ש־L הוא גבול של f כאשר x שואף למינוס אינסוף אם"ם מתקיים $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in D \ \ x < N \Rightarrow |f(x) - | < \varepsilon$

א'. **סימון:** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$

(ד) **פונקציה שואפת לאינסוף/מינוס אינסוף כאשר x שואף לאינסוף/מינוס אינסוף:**

i. **שואפת לאינסוף כאשר x שואף לאינסוף:** $\forall M \in \mathbb{R} \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in D \ \ x > N \Rightarrow |f(x) - | > M$.

א'. **סימון:** $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

ii. **שואפת לאינסוף כאשר x שואף למינוס אינסוף:** $\forall M \in \mathbb{R} \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in D \ \ x > N \Rightarrow |f(x) - | < M$.

א'. **סימון:** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$.

iii. **שואפת למינוס אינסוף כאשר x שואף לאינסוף:** $\forall M \in \mathbb{R} \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in D \ \ x < N \Rightarrow |f(x) - | > M$.

א'. **סימון:** $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$.

iv. **שואפת למינוס אינסוף כאשר x שואף למינוס אינסוף:** $\forall M \in \mathbb{R} \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in D \ \ x < N \Rightarrow |f(x) - | < M$.

א'. **סימון:** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

(ה) **טבלה שעוזרת לזכור הגדרות גבול במובן הרחב:**

	$x \to x_0$	$x \to \pm\infty$
$f(x) \to L$	ε, δ	ε, N
$f(x) \to \pm\infty$	M, δ	M, N

6. **רציפות:**

(א) **פונקציה רציפה בנקודה:** תהי $f : D \to \mathbb{R}$ פונקציה ויהי x_0. נאמר ש־f רציפה ב־x_0 אם"ם מתקיימים שלושת התנאים הבאים: (עמ' 61)

i. הפונקציה f מוגדרת בסביבה מלאה של x_0

ii. f בעלת גבול בנקודה x_0.

iii. מתקיים $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

א'. **הערה:** נהוג לסכם את הרציפות של f בנקודה x_0 באמצעות ציטוט של התנאי השלישי בלבד, תחת מוסכמה שהוא כולל בתוכו את הקיום של שני אגפיו.

(ב) **רציפות חד צדדית בנקודה:**

i. **רציפות מימין:** תהי $f : D \to \mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת בסביבה ימנית מלאה של x_0, נאמר ש־f רציפה מימין ב־x_0 אם"ם מתקיים $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ (עמ' 62).

ii. **רציפות משמאל:** תהי $f : D \to \mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת בסביבה שמאלית מלאה של x_0, נאמר ש־f רציפה משמאל ב־x_0 אם"ם מתקיים $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ (עמ' 62).

(ג) **סוגי נקודות אי־רציפות:** תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה מלאה של x_0: (עמ' 63)

i. f **בעלת אי רציפות מסוג שני:** אם לפחות אחד הגבולות החד צדדיים של f ב־x_0 לא קיים במובן הצר.

ii. f **בעלת אי רציפות מסוג ראשון:** אם שני הגבולות החד צדדיים של f ב־x_0 קיימים במובן הצר, אך שונים זה מזה.

iii. f**בעלת אי רציפות סליקה:** אם קיים ל־f גבול במובן הצר ב־x_0, אך מתקיים $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

(ד) **הרחבה/המשכה רציפה:** תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת U של x_0 ולא מוגדרת ב־x_0 עצמה, שגבולה בנקודה x_0 הוא L. (עמ' 63)

i. אזי **ההמשכה הרציפה של f ב־**x_0 היא הפונקציה $g : (x_0-\delta, x_0+\delta) \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in U \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) & x = x_0 \end{cases}$.

ii. g היא פונקציה רציפה, והיא הפונקציה היחידה המוגדרת ב־$(x_0-\delta, x_0+\delta)$ שמתלכדת עם f ב־U וגם רציפה ב־x_0.

א'. **הערה:** באותו האופן, עבור פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת ימנית/שמאלית, אפשר לדבר על הרחבה רציפה ל־$(x_0-\delta, x_0]$ או ל־$[x_0+\delta)$ בהתאמה. (עמ' 64)

(ה) **פונקציה רציפה בקטע סגור:** (עמ' 69)

i. **נקודה פנימית:** תהי $D \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה נתונה. נאמר ש־x_0היא נקודה פנימית של D אם קיים $\delta > 0$ כך ש־$(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq D$ (כלומר יש סביבה מלאה של x_0המוכלת כולה ב־D).

ii. **פונקציה רציפה בקטע סגור:** תהי $f : D \to \mathbb{R}$ פונקציה שתחום הגדרתה כולל את הקטע הסגור $[a, b]$ והיא רציפה בכל נקודה $x_0 \in (a, b)$, רציפה מימין ב־a ורציפה משמאל ב־b.

(ו) **פונקציה רציפה בתחום:** יהי $D \subseteq \mathbb{R}$, נאמר שהפונקציה $f : D \to \mathbb{R}$ רציפה ב־D אם היא רציפה בכל נקודה $x_0 \in D$. (תרגול 13).

(ז) **פונקציות אלמנטריות שרציפות בכל x_0:** (עמ' 70)

i. פונקציה קבועה

ii. $f(x) = x$

iii. $f(x) = x^n$

iv. $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ פולינום

v. $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ מנת פולינומים

vi. $f(x) = sin\, x$

vii. $f(x) = cos\, x$

viii. $f(x) = tan\, x$

ix. $f(x) = |x|$

7. **נקודות קיצון:** יהיו $f:D\to\mathbb{R}$ ו־$A\subseteq D$. (תרגול 14)

(א) **נקודות קיצון בציר ה־x:**

i. **מקסימום גלובלי:** $x_0\in A$ יקרא מקסימום גלובלי של f ב־A אם"ם $f(x)\le f(x_0)$ לכל x_0.

א'. **מקסימום מקומי:** נקודה $x\in D$ תקרא מקסימום מקומי של f אם קיימת סביבה מלאה U של x_0 כך ש־x_0 היא מקסימום גלובלי של f ב־U.

ii. **מינימום גלובלי:** $x_0\in A$ יקרא מינימום גלובלי של f ב־A אם"ם $f(x)\ge f(x_0)$ לכל x_0.

א'. **מינימום מקומי:** נקודה $x\in D$ תקרא מינימום מקומי של f אם קיימת סביבה מלאה U של x_0 כך ש־x_0 היא מינימום גלובלי של f ב־U.

iii. **הערה:** שימו לב שנקודת קיצון מקומית חייבת להיות נקודה פנימית של D. אם x_0 היא נקודת קיצון גלובלי ב־A, אז היא נקודת קיצון מקומית אם היא נקודה פנימית של A.

(ב) **נקודות קיצון בציר ה־y:**

i. **ערך מקסימלי:** $f(d)=max\{f(x)|x\in A\}$**,** כלומר אם d הוא המקסימום הגלובלי, $f(d)$ יהיה הערך המקסימלי.

ii. **ערך מינימלי:** $f(c)=min\{f(x)|x\in A\}$**,** לומר אם c הוא המינימום הגלובלי, $f(c)$ יהיה הערך המינימלי.

8. **מונוטוניות:** (עמ' 79)

(א) **פונקציה מונוטונית עולה:** f מונוטונית עולה ב־D אם"ם מתקיים $\forall x_1,x_2\in D\ \ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$.

i. אם מתקיים $f(x_1)<f(x_2)$ היא נקראת **פונקציה מונוטונית עולה ממש.**

(ב) **פונקציה מונוטונית יורדת:** f מונוטונית עולה ב־D אם"ם מתקיים $\forall x_1,x_2\in D\ \ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$.

i. אם מתקיים $f(x_1)>f(x_2)$ היא נקראת **פונקציה מונוטונית יורדת ממש.**

9. **צמצום של פונקציה:** תהי $f:D\to\mathbb{R}$ ותהי $A\subseteq D$. הפונקציה $F|_A:A\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f|_A(x)=f(x)$ נקראת הצמצום של f ל־A.

10. **פונקציה הופכית:** יהיו $D,E\subseteq\mathbb{R}$ ותהי $f:D\twoheadrightarrow E$ פונקציה חח"ע ועל. כלומר לכל $y\in E$ קיים $x\in D$ יחיד המקיים $f(x)=y$. כלל ההתאמה $g:E\to D$ המוגדר ע"י $g(y)=x\Leftrightarrow y=f(x)$ נקראת הפונקציה ההופכית של f. (עמ' 83).

(א) **סימון:** הפונקציה ההופכית מסומנת f^{-1}.

משפטים על פונקציות

1. **יחידות הגבול בנקודה:** אם יש ל־f גבול בנקודה, אזי הוא יחיד. (עמ' 50)

2. **קטע בממשיים אינו בר מניה:** יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ עם $a<b$. אזי לא קיימת אף סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ כך ש־$[a,b]=\{x_n|n\in\mathbb{N}\}$, כלומר לא ניתן למנות את כל הנקודות של הקטע $[a,b]$ באמצעות המספרים הטבעיים. (עמ' 51).

3. **אפיון היינה לגבולות של פונקציות:** (עמ' 51)

(א) תהי $f:D\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של $x_0\in\mathbb{R}$, ויהי $L\in\mathbb{R}$.

(ב) אזי $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$ אם"ם לכל סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ המקיימת את שלושת התנאים הבאים:

i. $\forall n\in\mathbb{N}\ \ x_n\in D$

ii. $\forall n\in\mathbb{N}\ x_n\ne x_0$

iii. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$

(ג) יתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=L$, כלומר שהסדרה $(f(x_1),f(x_2),\dots,f(x_n),\dots)$ מתכנסת ל־L.

4. **משפט חיזוק לאפיון היינה:** מאפשר להשתמש באפיון היינה גם בלי לדעת מה הגבול, כלומר מספיק לדעת שהוא קיים. (עמ' 60)

(א) תהי $f:D\to\mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של $x_0\in\mathbb{R}$. **אזי יש ל־f גבול ב־x_0** אם"ם מלכל סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ המקיימת את שלושת התנאים הבאים:

i. $\forall n\in\mathbb{N}\ \ x_n\in D$

ii. $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \neq x_0$

iii. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

(ב) יתקיים שהסדרה $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ **מתכנסת**.

5. **משפטים על פונקציה עם גבול בנקודה:** תהי $f: D \to \mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0, שגבולה בנקודה x_0 הוא $L \in \mathbb{R}$.

(א) **משפט:** קיימת סביבה מנוקבת של x_0 בה f חסומה, כלומר מתקיים $f(U) = \{f(x) | x \in U\}$ היא קבוצה חסומה של $\mathbb{R}$. (עמ' 53)

i. דרך אחרת לחשוב על זה היא - ניקח קבוצה U של ערכי x, האם גם ערכי $f(x)$ נמצאים באותה קבוצה? אם כן, הפונקציה חסומה בסביבה הזו.

(ב) **טענה:** אם $L > 0$, אזי קיימת סביבה מנוקבת U של x_0 כך שלכל $x \in U$ מתקיים $\frac{L}{2} < f(x) < \frac{3L}{2}$ (עמ' 53)

(ג) **טענה:** אם $L < 0$, אזי קיימת סביבה מנוקבת U של x_0 כך שלכל $x \in U$ מתקיים $\frac{3L}{2} < f(x) < \frac{L}{2}$ (עמ' 53)

i. **מסקנה:** אם $L \neq 0$, אזי קיימת סביבה מנוקבת U של x_0כך ש-$f(x)$ ו-L בעלי אותו סימן עבור כל $x \in U$. (עמ' 53).

6. **משפטים על גבולות חד צדדיים:**

(א) **משפט:** אם יש גבול במובן הצר בנקודה, הגבולות הצדדיים קיימים וזהים לו: (עמ' 54)

i. תהי $f: D \to \mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0. אזי f בעלת גבול בנקודה x_0 אם"ם מתקיימים בו זמנית שלושת התנאים הבאים:

א'. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ קיים

ב'. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ קיים

ג'. מתקיים $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

(ב) **אפיון היינה לגבול חד צדדי:** (עמ' 55)

i. תהי $f: D \to \mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת בסביבה ימנית (<u>שמאלית</u>) מנוקבת של x_0, ויהי $L \in \mathbb{R}$. אזי קיים גבול ימני (<u>שמאלי</u>) לסדרה אם"ם לכל סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ המקיימת את שלושת התנאים הבאים:

א'. $\forall n \in \mathbb{N}\ \ x_n \in D$

ב'. $\forall n \in \mathbb{N}\ \ x_n > x_0$ ($\underline{\forall n \in \mathbb{N}\ \ x_n < x_0}$)

ג'. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

ii. יתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

(ג) **פונקצית הערך השלם:** תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x) = \lfloor x \rfloor$, עבור $x_0 \in \mathbb{Z}$ קיימים שני גבולות חד צדדיים בנקודה x_0, אך הם שונים זה מזה (תרגול 10, תרגול 11).

i. **מסקנה:** לפונקציה $f(x) = \lfloor x \rfloor$ אין גבול בשום $x_0 \in \mathbb{Z}$.

7. **אריתמטיקה של גבולות במובן הצר של פונקציות:** (עמ' 55)

(א) יהיו f ו-g שתי פונקציות המוגדרות בסביבה מנוקבת של x_0. נניח ש$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L_2$, אזי מתקיים:

i. **חיבור:** ל-$f + g$ יש גבול בנקודה x_0 ומתקיים $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = L_1 + L_2$.

א'. **טענה:** אם ל-f **יש** גבול ב-x_0 ול-g **אין** גבול ב-x_0, אז ל-$(f+g)$ **אין** גבול ב-x_0 (תרגול 11).

ii. **כפל:** ל-$f \cdot g$ יש גבול בנקודה x_0 ומתקיים $\lim\limits_{x\to x_0} (f \cdot g)(x) = L_1 \cdot L_2$

iii. **חילוק:** אם בנוסף מתקיים $L_2 \neq 0$, ל-$\frac{f}{g}$ יש גבול בנקודה x_0 ומתקיים $\lim\limits_{x\to x_0} (\frac{f}{g})(x) = \frac{L_2}{L_2}$

iv. **חיסור:** יהיו f, g שתי פונקציות בעלות גבול בנקודה x_0. אזי מתקיים $\lim\limits_{x\to x_0} (f-g)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ (עמ' 57).

(ב) **משפטים על היחס בין גבול של פונקציה לקבוע:**

i. **פונקציה קבועה מתכנסת לקבוע:** יהי $\lambda \in \mathbb{R}$ ותהי $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ הפונקציה הקבועה המוגדרת עבור כל x ממשי ע"י $g(x) = \lambda$. אזי לכל x_0 מתקיים $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lambda$. (עמ' 56).

ii. **"כפל קבוע בגבול הוא קומוטטיבי":** תהי f פונקציה בעלת גבול ב־x_0, יהי $\lambda \in \mathbb{R}$ מספר נתון, אזי מתקיים $\lim_{x \to x_0} (\lambda f(x)) = \lambda \lim_{x \to x_0} f(x)$ (עמ' 57).

(ג) **חסומה כפול אפסה:** יהיו f, g פונקציות המוגדרות בסביבה מנוקבת U של x_0. נניח ש־f מתכנסת ל־0 ו־g חסומה ב־U. אזי מתקיים $\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = 0$. (עמ' 57).

8. **גבול ויחס סדר:** יהיו f ־g שתי פונקציות המוגדרות בסביבה מנוקבת של x_0. נניח ש $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$:

(א) **אי שוויון שכיח בין גבולות של פונקציות:** אם קיימת סביבה מנוקבת U של x_0 כל שלכל $x \in U$ מתקיים $f(x) \leq g(x)$, אזי $L_1 \leq L_2$ (עמ' 57)

(ב) **אי שוויון חריף בין גבולות של פונקציות:** אם $L_1 < L_2$, אזי קיימת סביבה מנוקבת U של x_0 כך שלכל $x \in U$ מתקיים $fx) < g(x)$. (עמ' 58).

9. **משפט הכריך:**

(א) יהיו f, g, h שלוש פונקציות המוגדרות בסביבה מנוקבת של x_0, ונניח שמתקיימים שלושת התנאים הבאים: (עמ' 58)

i. קיימת סביבה מנוקבת U של x_0בה לכל $x \in U$ מתקיים $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

ii. ל־f ו־h יש גבול בנקודה x_0.

iii. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x)$.

(ב) אזי גם ל־g יש גבול בנקודה x_0 ומתקיים $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x)$.

10. **גבול של הרכבת פונקציות ־ משפט כלל ההצבה בגבולות:** (עמ' 59)

(א) תהי f פונקציה המוגרת בסביבה מנוקבת של x_0 ומקיימת $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$.

(ב) תהי g פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של y_0 ומקיימת $\lim_{x \to y_0} g(x) = L$.

(ג) נניח בנוסף שמתקיימת סביבה מנוקבת U של x_0 כך שמתקיים $f(x) \neq y_0$ עבור כל $x \in U$.

(ד) אזי מתקיים $\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = L$.

11. **קריטריון קושי לקיום גבול של פונקציה:** (עמ' 60)

(א) תהי $f: D \to \mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0. אזי ל־f יש גבול בנקודה x_0 אם"ם מתקיים התנאי הבא:

(ב) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall \hat{x}, \tilde{x} \in D \;\; \hat{x}, \tilde{x} \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \backslash \{x_0\} \Rightarrow |f(\hat{x}) - f(\tilde{x})| < \varepsilon$.

12. **רציפות בנקודה:** תהי $f: D \to \mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת בסביבה מלאה של x_0. אזי f רציפה ב־x_0 אם"ם מתקיים $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D \;\; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f * x) - f(x_0)| < \varepsilon$. (עמ' 61)

13. **אריתמטיקה של פונקציות רציפות:** יהיו fו־g שתי פונקציות רציפות ב־x_0, אזי מתקיים: (עמ' 61):

(א) $f + g$ רציפה ב־x_0.

(ב) $f \cdot g$ רציפה ב־x_0.

(ג) אם בנוסף g לא מתאפסת ב־x_0, אזי $\frac{f}{g}$ רציפה ב־x_0.

14. **הרכבה של פונקציות רציפות:**

(א) **הרכבה של פונקציות רציפות היא רציפה:** תהי $f: D \to \mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת מנוקבת שלx_0 ומקיימת $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$, תהי g פונקציה רציפה ב־y_0. (עמ' 62)

i. אזי $g \circ f$ בעלת גבול ב־x_0 ומתקיים $\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = g(y_0)$

ii. אם בנוסף מתקיים $y_0 = f(x_0)$, כלומר אם f רציפה ב־x_0, אזי $g \circ f$ רציפה ב־x_0.

(ב) **הרכבה כל פונקציות עם רציפות חד צדדית:** (עמ' 62)

i. **הרכבה של פונקציות רציפה מימין עם פונקציה רציפה:** תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה ימנית מנוקבת של x_0 ומקיימת $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = y_0$, תהי g פונקציה רציפה בנקודה y_0.

א'. אזי $g \circ f$ בעלת גבול מימין בנקודה x_0 ומתקיים $\lim\limits_{x\to x_0^+} (g\circ f)(x) = g(y_0)$.

ב'. אם בנוסף $y_0 = f(x_0)$, אזי $g \circ f$ רציפה מימין ב־x_0.

ii. **הרכבה של פונקציות רציפה משמאל עם פונקציה רציפה:** תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה שמאלית מנוקבת של x_0 ומקיימת $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = y_0$, תהי g פונקציה רציפה בנקודה y_0.

א'. אזי $g \circ f$ בעלת גבול משמאל בנקודה x_0 ומתקיים $\lim\limits_{x\to x_0^-} (g\circ f)(x) = g(y_0)$.

ב'. אם בנוסף $y_0 = f(x_0)$, אזי $g \circ f$ רציפה משמאל ב־x_0.

15. **משפטים על פונקציות טריגונומטריות:** (עמ' 64)

(א) **טענה:** $\forall x \in \mathbb{R} \quad |sin(x)| \le |x|$

i. **מסקנה:** $\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim\limits_{x\to x_0} sin(x) = sin(x_0)$

ii. **מסקנה:** $\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim\limits_{x\to x_0} cos(x) = cos(x_0)$

(ב) **טענה:** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$

16. **אריתמטיקה של גבולות של פונקציות במובן הרחב:** (עמ' 68):

(א) **כלל הסכום:** אם $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ ו־g חסומה מלרע בסביבה מנוקבת של x_0, אזי $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = \infty$.

i. טבלת חיבור גבולות של פונקציות:

חיבור	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L_2$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_1$	$L_1 + L_2$	∞	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$	∞	∞	??
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$	$-\infty$	??	$-\infty$

(ב) **כלל המכפלה:** אם $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ ו־g חסומה מלרע **חיובי** בסביבה מנוקבת של x_0, אזי $\lim\limits_{x\to x_0} (f\cdot g)(x) = \infty$.

i. טבלת כפל גבולות של פונקציות:

כפל		$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) =$				
		$L_2 > 0$	$L_1 < 0$	0	∞	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) =$	$L_1 > 0$	$L_1 \cdot L_2$	$L_1 \cdot L_2$	0	∞	$-\infty$
	$L_1 < 0$	$L_1 \cdot L_2$	$L_1 \cdot L_2$	0	∞	$-\infty$
	0	0	0	0	??	??
	∞	∞	$-\infty$	??	∞	$-\infty$
	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	??	$-\infty$	$-\infty$

(ג) **חילוק:** טבלת חילוק גבולות של פונקציות:

חילוק		$\lim_{x\to x_0} g(x) =$				
		$L_2 > 0$	$L_1 < 0$	0	∞	$-\infty$
$\lim_{x\to x_0} f(x) =$	$L_1 > 0$	$\frac{L_1}{L_2}$	$\frac{L_1}{L_2}$	??	0	0
	$L_1 < 0$	$\frac{L_1}{L_2}$	$\frac{L_1}{L_2}$	??	0	0
	0	0	0	??	0	0
	∞	∞	$-\infty$	??	??	??
	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	??	??	??

(ד) **הערה:** אפשר בכל מקום בטבלאות האלו להחליף את $x\to x_0$ ב־$x\to\pm\infty$ או ב־$x\to x_0^{\pm}$ וזה עדיין יהיה תקף.

(ה) **מקרי אי ודאות באריתמטיקה של גבולות במובן הרחב:** $\frac{0}{0}$ $\quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ $\quad \infty\cdot 0$ $\quad \infty+(-\infty)$

17. **משפט הפרוסה:** (עמ' 69):

(א) יהיו $f,g:D\to\mathbb{R}$ שתי פונקציות המוגדרות בסביבה מנוקבת U של x_0. נניח שמתקיים לכל $x\in U$ $f(x)\le g(x)$, אזי:

i. אם f שואפת לאינסוף ב־x_0 גם g שואפת לאינסוף ב־x_0.

ii. אם g שואפת למינוס אינסוף ב־x_0 גם f שואפת למינוס אינסוף ב־x_0.

18. **נקודות פנימיות:**

(א) יהיו a,b כך ש־$a<b$. כל נקודה $x_0\in(a,b)$ היא נקודה פנימית של (a,b). (עמ' 69)

(ב) יהיו a,b כך ש־$a<b$. <u>לא</u> כל נקודה $x_0\in[a,b]$ היא נקודה פנימית של $[a,b]$. (עמ' 70)

19. **לכל פולינום ממעלה אי"ז יש שורש ממשי:** יהי $n\in\mathbb{N}$ אי זוגי (כלומר קיים k כך ש־$n=2k-1$). יהי $P(x)$ פולינום ממעלה n שכל איבריו ממשיים ו־$a_n\neq 0$.

(א) אזי קיים $c\in\mathbb{R}$ אחד לפחות כך שמתקיים $P(c)=0$.

20. **משפטים מרכזיים על פונקציות רציפות:**

(א) יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש־$a<b$, ותהי $f:D\to\mathbb{R}$ פונקציה הרציפה בקטע $[a,b]\subseteq D$. נניח שמתקיים $f(a)\cdot f(b)<0$, אזי קיים $c\in(a,b)$ אחד לפחות כך ש־$f(c)=0$. (עמ' 71)

(ב) **משפט ערך הביניים:** יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש־$a<b$, ותהי $f:D\to\mathbb{R}$ פונקציה הרציפה בקטע $[a,b]\subseteq D$ ומתקיים $f(a)\neq f(b)$. (עמ' 72)

i. אם המספר הממשי λ מתקיים $f(a)<\lambda<f(b)$ (או $f(b)<\lambda<f(a)$) אזי קיים $c\in(a,b)$ אחד לפחות כך ש־$f(c)=\lambda$.

א'. **הערה:** אפשר לנסח את המשפט גם עם אי"ש חלשים, ואז ניתן להשמיט את הדרישה $f(a)\neq f(b)$.

(ג) **המשפט הראשון של ויירשטראס:** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, אזי f חסומה בקטע הסגור $[a,b]$. כלומר, קיים $M\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in[a,b]$ מתקיים $|f(x)|\le M$. (עמ' 73)

i. **הערה:** המשפט לאו דוקא נכון לגבי פונקציה רציפה בקטע פתוח. כמו כן, הוא לאו דוקא נכון לגבי פונקציה המוגדרת בקטע סגור שאינה רציפה בקטע הזה.

(ד) **המשפט השני של ויירשטראס:** תהי f פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$. אזי f משיגה ערך מקסימלי ומינימלי ב־$[a,b]$. כלומר, קיימות נקודות $c,d\in[a,b]$ כך שלכל $x\in[a,b]$ מתקיים $f(c)\le f(x)\le f(d)$. (עמ' 73)

i. **הערה:** המשפט לא דוקא נכון לגבי פונקציה הרציפה בקטע פתוח, אפילו אם היא חסומה בקטע פתוח. כמו כן, הוא לאו דוקא נכון עבור פונקציה המוגדרת בקטע סגור שאינה רציפה בקטע.

21. **תמונה של קטע ע"י פונקציה רציפה:**

(א) **משפט:** יהיו $a<b$, ותהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ב־$[a,b]$. אזי התמונה של f היא קטע סגור.

(ב) **טענה:** יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ קטע (לאו דווקא חסום או סגור) ותהי $f:I\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ב־I. אזי התמונה של f גם היא קטע.

22. **משפטים על מונוטוניות:** תהי $f:D\to\mathbb{R}$ פונקציה.

(א) **משפט:** f מונוטונית עולה ב־D אם"ם מתקיים $\forall x_1,x_2\in D\ \ x_1\neq x_2\Rightarrow\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geq 0$ (כלומר אם"ם השיפוע של מיתר המחבר שתי נקודות שרירותיות על הגרף של x אי שלילי). (עמ' 79)

i. אם מחליפים את האי"ש החלש בחזק, מקבלים ש־f מונוטונית עולה ממש.

(ב) **משפט:** f מונוטונית יורדת ב־D אם"ם מתקיים $\forall x_1,x_2\in D\ \ x_1\neq x_2\Rightarrow\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq 0$ (כלומר אם"ם השיפוע של מיתר המחבר שתי נקודות שרירותיות על הגרף של x אי חיובי). (עמ' 79)

i. אם מחליפים את האי"ש החלש בחזק, מקבלים ש־f מונוטונית יורדת ממש.

(ג) **משפט:** יהיו $a<b$ ותהי f פונקציה מונוטונית עולה בקטע (a,b), יהי $x_0\in(a,b)$. אזי שני הגבולות החד צדדיים של f ב־x_0 (במובן הצר) קיימים ומתקיים $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\leq\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\leq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$. (עמ' 79)

i. **טענה:** תהי f פונקציה מונוטונית עולה בקטע (a,b). עבור כך $x_1,x_2\in(a,b)$ המקיימים $x_1<x_2$ מתקיים: $\lim\limits_{x\to x_1^-}f(x)\leq f(x_1)\leq\lim\limits_{x\to x_1^+}f(x)\leq\lim\limits_{x\to x_2^-}f(x)\leq f(x_2)\leq\lim\limits_{x\to x_2^+}f(x)$ (עמ' 80).

(ד) **משפט:** יהיו $a<b$ ותהי f פונקציה מונוטונית יורדת בקטע (a,b), יהי $x_0\in(a,b)$. אזי שני הגבולות החד צדדיים של f ב־x_0 (במובן הצר) קיימים ומתקיים $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\geq\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\geq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$. (עמ' 79)

i. **טענה:** תהי f פונקציה מונוטונית יורדת בקטע (a,b). עבור כך $x_1,x_2\in(a,b)$ המקיימים $x_1<x_2$ מתקיים: $\lim\limits_{x\to x_1^-}f(x)\geq f(x_1)\geq\lim\limits_{x\to x_1^+}f(x)\geq\lim\limits_{x\to x_2^-}f(x)\geq f(x_2)\geq\lim\limits_{x\to x_2^+}f(x)$ (עמ' 80).

(ה) **משפט:** תהי f פונקציה מונוטונית בקטע (a,b). אזי יש ל־f, אם בכלל, רק נקודות אי־רציפות מסוג ראשון ב־(a,b), ולא נקודות אי רציפות מסוג שני או נקודות אי רציפות סליקות. (עמ' 80).

(ו) **טענה:** תהי f פונקציה מונוטונית עולה ב־(a,b).

i. אם f חסומה מלרע ב־(a,b), אזי קיים לה גבול ימני ב־a במובן הצר $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ (עמ' 80)

ii. אם f חסומה מלעיל ב־(a,b), אזי קיים לה גבול שמאלי ב־b במובן הצר $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ (עמ' 80).

iii. אם f אינה חסומה מלרע ב־(a,b), אזי $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\infty$ (עמ' 80).

iv. אם f אינה חסומה מלעיל ב־(a,b), אזי $\lim\limits_{x\to b^+}f(x)=\infty$ (עמ' 80).

23. **מונוטוניות ממש, חח"ע ורציפות**

(א) **טענה:** תהי $f:D\to\mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית ממש ב־D. אזי f חח"ע ב־D. (עמ' 81)

i. **הערה:** פונקציה יכולה להיות חח"ע בקטע מבלי להיות מונוטונית ממש באותו קטע.

(ב) **משפט עזר:** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה וחח"ע בקטע $[a,b]$ כך ש־$f(a)<f(b)$, אזי אם מתקיים $a<x<b$ אז מתקיים $f(a)<f(x)<f(b)$. (עמ' 81).

i. **הערה:** המשפט עובד גם עם סימני יחס סדר בכיוון ההפוך.

(ג) **משפט:** יהיו $a<b$ ותהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה וחח"ע ב־$[a,b]$, אזי f מונוטונית ממש ב־$[a,b]$. (עמ' 82)

(ד) **משפט:** יהי I קטע כלשהו (לאו דווקא סגור או חסום). אם f רציפה ב־I אזי f מונוטונית ממש ב־I (עמ' 82).

(ה) **משפט:** יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ קטע (לאו דווקא סגור או חסום) ותהי $f:I\to\mathbb{R}$ פוקציה מונוטונית. אם $Im(f)$ קטע אזי f רציפה. (עמ' 82)

i. **מסקנה:** יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ קטע (לאו דווקא סגור או חסום), ותהי $f:I\to\mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית. אזי f רציפה אם"ם $f(I)$ קטע. (עמ' 82)

(ו) **משפט:** יהי I קטע ותהי $f:I\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ומונוטונית עולה (יורדת) ממש ב־I. יהיו $a<b$, אזי מתקיים: (עמ' 82)

i. אם $I=[a,b]$ אז $f(I)=[f(a),f(b)]$.
ii. אם $I=(a,b]$ אז $f(I)=(\lim\limits_{x\to a^+}f(x),f(b)]$.
iii. אם $I=[a,b)$ אז $f(I)=[f(a),\lim\limits_{x\to b^-}f(x))$.
iv. אם $I=(a,b)$ אז $f(I)=(\lim\limits_{x\to a^+}f(x),\lim\limits_{x\to b^-}f(x))$.
v. אם $I=[a,\infty)$ אז $f(I)=[f(a),\lim\limits_{x\to \infty}f(x))$.
vi. אם $I=(a,\infty)$ אז $f(I)=(\lim\limits_{x\to a^+}f(x),\lim\limits_{x\to \infty}f(x))$.
vii. אם $I=(-\infty,b]$ אז $f(I)=(\lim\limits_{x\to -\infty}f(x),f(b)]$.
viii. אם $I=(-\infty,b)$ אז $f(I)=(\lim\limits_{x\to -\infty}f(x),\lim\limits_{x\to b^-}f(x))$.
ix. אם $I=\mathbb{R}$ אז $f(I)=(\lim\limits_{x\to -\infty}f(x),\lim\limits_{x\to \infty}f(x))$.

(ז) **משפט:** תהי $f:D\twoheadrightarrow E$ פונקציה על E, כלומר $f(D)=Im(E)=E$. אם f מונוטונית עולה (<u>יורדת</u>) ממש ב־D אזי f חח"ע והפונקציה ההופכית שלה $f^{-1}:E\to D$ גם היא מונוטונית עולה (<u>יורדת</u>) ממש ב־E. (עמ' 83)

(ח) **משפט:** תהי $I\subseteq\mathbb{R}$ ותהי $f:I\twoheadrightarrow J$ פונקציה רציפה, חח"ע ועל. אזי $f^{-1}:J\to I$ גם היא רציפה ב־J. (עמ' 84)