דיסקרטית כל ההגדרות והמשפטים תש"פ | ניצן ברזילי

17 בפברואר 2020

משפטים או טענות שמסומנים "★" הם משפטים שהוכחו בכיתה, אין להם יותר חשיבות ממשפטים שלא מסומנים בכוכב.

מבוא

1. **תכונות של חיתוך ואיחוד:**
   (א) סימטריה - $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cup A$
   (ב) אסוציאטיביות - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
   (ג) דיסטריבוטיביות - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. **שקילויות לוגיות:**
   (א) $\neg(\neg P) = P$
   (ב) $P \to Q \Leftrightarrow (\neg P) \vee Q$
   (ג) **שקילויות דה מורגן:**
      i. $\neg(P \vee Q) \iff (\neg P) \wedge (\neg Q)$
      ii. $\neg(P \wedge Q) \iff (\neg P) \vee (\neg Q)$
      iii. $\neg(P \to Q) \iff (P) \wedge (\neg Q)$
   (ד) $\neg(\forall x \in S \ \ P(x)) \iff \exists x \in S \quad (\neg P(x))$

פונקציות

1. **טענות על פונקציות:**
   (א) אם $f : A \to B$ וגם $C \subseteq A$ קבוצה סופית, אז $|C| \geq |f(C)|$ - הגודל של תת קבוצה של התחום גדול או שווה לגודל של התמונה שלה.
   (ב) אם $f : A \to B$ וגם $D_1, D_2 \subseteq B$, אז $f^{-1}(D_1 \cap D_2) = f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2)$ - ההופכית של איחוד שווה לאיחוד של ההופכיות.
   (ג) אם $f : A \to B$ וגם $C_1, C_2 \subseteq A$, אז $f(C_1 \cap C_2) \neq f(C_1) \cap f(C_2)$ - התמונה של החיתוך **לא בהכרח שווה** לחיתוך של התמונות.
2. **הגדרות על פונקציות:**
   (א) **פונקציה חחע:** אין שני איברים בתחום שהתמונה שלהם זהה.
      i. **טענה:** אם $f : A \to B$ **חחע** וגם $C_1, C_2 \subseteq A$, אז $f(C_1 \cap C_2) = f(C_1) \cap f(C_2)$ - התמונה של החיתוך **שווה** לחיתוך של התמונות..
   (ב) **פונקציה על:** התמונה היא כל הטווח / לכל איבר בטווח יש מקור בתחום.

(ג) **הרכבה:** ההרכבה של g ו־f מסומנת $g\circ f(x)=g\left(f\left(x\right)\right)$

(ד) **פונקציה הופכית:** f ו־g נקראות הופכיות אם מתקיים $g\circ f=id_A\wedge f\circ g=id_B$

(ה) **פונקציה הפיכה:** אם קיימת לה פונקציה הופכית. פונקציה היא הפיכה אם"ם היא חח"ע ועל. ★

3. **תמורות:**

(א) **תמורה:** תמורה $f:[n]\to[n]$ היא הפיכה. ניתן להציג אותה בתור:

i. דיאגרמת חצים (שמראה כל איבר לאן הוא עובר)

ii. שתי שורות, לדוגמא: $\begin{matrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{matrix}$ $\quad f\left[3\right]\to\left[3\right]$

iii. פירוק למחזורים זרים, לדוגמא: $\left(1,2\right)\left(3\right)$ $\quad f\left[3\right]\to\left[3\right]$

(ב) **תמורת הזהות:** תמורה שבה כל איבר מגיע לעצמו.

(ג) **סדר של תמורה:** המספר n הקטן ביותר שאם נרכיב את התמורה על עצמה n פעמים נקבל את תמורת הזהות. לכל תמורה קיים סדר.

i. כדי לחשב את התמורה מוצאים את המספר המינימלי שמתחלק באורך של כל אחד מהמחזורים של התמורה.

(ד) **תמורה הופכית:** תהי תמורה s, אז s^{-1} היא התמורה שמקיימת $s^{-1}\circ s^{1}=s\circ s^{-1}=Id$

(ה) **נקודות שבת:** נקודה בה מתקיים $f(i)=i$

i. הסיכוי שתמורה אקראית של n איברים תהיה <u>ללא</u> נקודת שבת היא $\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots(-1)^n\frac{1}{n!}$.

יחסים בין קבוצות

1. **יחס:** יחס R על קבוצה A הוא תת קבוצה של המכפלה הקרטזית של הקבוצה עם עצמה: $R\subseteq A\times A$

2. **תכונות אפשריות של יחסים:**

(א) **רפלקסיביות:** $\forall x\in A\quad (x,x)\in R$

(ב) **סימטריות:** $\forall x,y\in A\quad (x,y)\in R\Rightarrow(y,x)\in R$

(ג) **אנטי סימטריות:** $\forall x,y\in A\quad (x,y)\in R\wedge(y,x)\in R\Rightarrow x=y$

(ד) **טרנזיטיביות:** $\forall x,y,x\in A\quad (x,y)\in R\wedge(y,z)\in R\Rightarrow(x,z)\in R$

3. **יחסי שקילות:** יחס שקילות הוא יחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

(א) **מחלקת שקילות:** יהי R יחס שקילות על A, מחלקת השקילות של $x\in A$ היא הקבוצה: $[x]_R=\{y\in A\mid(x,y)\in R\}$ (כל ה־yים שהצמדה שלהם ל־x ביחס).

(ב) **טענה:** עבור כל יחס שקילות מתקיים:

i. $x\in[x]_R$★

ii. אם $y\in[x]_R$ אז $[x]_R=[y]_R$★

iii. אם החיתוך $[x]_R\cap[y]_R$ הוא לא קבוצה ריקה, אז $[x]_R=[y]_R$★

(ג) **חלוקה:** ההגדרה $\Pi\subseteq P(A)$ נקראת חלוקה של A אם:

i. Π לא ריקה

ii. לכל $x\in A$ קיים $S\in\Pi$ כך שמתקיים $x\in S$

iii. לכל $S,T\in\Pi$ מתקיים $(S\cap T)=\emptyset$ או $S=T$

א'. תרגום ־ חלוקה של A היא קבוצה של קבוצות, אין איברים משותפים בין הקבוצות, והאיחוד בין הקבוצות הוא A עצמה.

ב'. **טענה:** הקבוצה $A_{/R}=\{[x]_R\mid x\in A\}$ היא חלוקה של A. (קבוצת כל מחלקות השקילות של A היא חלוקה של A)

(ד) **קבוצת נציגים:** הקבוצה $D\subseteq A$ נקראת קבוצת נציגים של $A_{/R}$ אם לכל $x\in A$ מתקיים $|D\cap[x]_R|=1$ (כלומר שבחיתוך של D ומחלקת השקילות של x יש רק איבר אחד).

(ה) **סוגי יחסים:**

i. **יחס סדר חלקי:** R הוא יחס סדר חלקי אם הוא רפלקסיבי, אנטי סימטרי וטרנזיטיבי.

ii. **יחס סדר מלא/לינארי:** R נקרא יחס סדר מלא/לינארי אם R יחס סדר חלקי (רפלקסיבי, אנטי סימטרי וטרנזיטיבי).

iii. **איבר מקסימלי:** $m\in A$ נקרא איבר מקסימלי של A אם לכל $y\in A$, אם $(m,y)\in R$ אז $y=m$.

iv. **איבר מינימלי:** $m\in A$ נקרא איבר מינימלי של A אם לכל $y\in A$ אם $(y,m)\in R$ אז $y=m$.

v. **טענה:** יהי R יחס סדר מלא, אזי קיים לכל היותר איבר מקסימלי אחד. ★

(ו) **דיאגרמות הסה:**

i. **זוג מיותר:** זוג (a,b) נקרא מיותר אם $a=b$ או קיים $c\in A$ שעבורו $(a,c)\in R\wedge c,d)\in R$.

ii. **דיאגרמת הסה ליחס סדר:** היא דיאגרמה בה לכל איבר ב־A נתאים קודקוד, ואז עבור כל $a,b\in A$ נצייר חץ מ־a ל־b אם $(a,b)\in R$ וגם (a,b) אינו מיותר.

קומבינטוריקה

1. **בעיות מניה:**

(א)

	בלי חזרות	עם חזרות
יש חשיבות לסדר	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
אין חשיבות לסדר	$\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$	$\binom{k+n-1}{k}=\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$

2. **משולש פסקל:**

(א)

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{4} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

(ב) **תכונות משולש פסקל:**

i. בגלל ש$1=\binom{n}{n}=\binom{n}{0}$, הערכים על הצלעות של המשולש הם כולם 1.

ii. בגלל ש־$\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$ כל שורה של המשולש סימטרית

iii. זהות פסקל - $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$ - כל איבר פנימי (שלא על הצלעות) שווה לסכום של שני האיברים שנמצאים ישירות מעליו.

iv. כל שורה במשולש פסקל היא מונוטונית עולה עד האמצע, ואז מונוטונית יורדת.

(ג) **טענות על משולש פסקל:**

i. אם $k=\frac{n-1}{2}$ (ובפרט אם n אי זוגי) אז $\binom{n}{k+1}=\binom{n}{k}$.

ii. אם $k<\frac{n-1}{2}$ אז $\binom{n}{k+1}<\binom{n}{k}$ ★

iii. סכום האיברים בשורה של משולש פסקל שמתאימה ל־n הוא 2^n: $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$ ★

iv. עבור $n\geq 1$ מתקיים $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$ ★

שלל נושאים

1. נוסחת הבינום של ניוטון

(א) הדגמה לאופן שבו נוסחת הבינום מורכבת ממקדמים ממשולש פסקל:

$$(x+y)^0=1$$
$$(x+y)^1=\mathbf{1}x+\mathbf{1}y$$
$$(x+y)^2=\mathbf{1}x^2+\mathbf{2}xy+\mathbf{1}y^2$$
$$(x+y)^3=\mathbf{1}x^3+\mathbf{3}x^2y+\mathbf{3}xy^2+\mathbf{1}y^3$$

(ב) נוסחא כללית: $(x+y)^n=x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y^1+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\cdots+\binom{n}{n-1}x^1y^{n-1}+\binom{n}{n}y^n$

(ג) נוסחא כללית עם סכימה: $\sum_{i=1}^{n}k=0n\binom{n}{k}\cdot x^{n-k}y^k$ ★

2. נוסחת ההכלה וההדחה

(א) עבור שתי קבוצות: $|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|$

(ב) עבור שלוש קבוצות: $|A_1\cup A_2\cup A_3|=(|A_1|+|A_2|+|A_3|)-(|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|)+(|A_1\cap A_2\cap A_3|)$

א כללית: $|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=\{|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_n|\}-\sum_{i=1}^{n}1\leq i<j\leq nn\,|A_i\cap A_j|+\sum_{i=1}^{n}1\leq i<j<k\leq nn\,|A_i\cap A_k\cap A_j|$ ★

3. מספרי קטלאן

(א) $\binom{2n}{n}$ סה"כ כמות המסלולים מהנקודה $(0,0)$ לנקודה (n,n).

(ב) נוסחא כללית למציאת $C(n)$, כלומר המסלולים מהנקודה $(0,0)$ לנקודה (n,n) שלא חוצים את הישר $y=x$: $C(n)=\frac{\binom{2n}{n}}{n+1}=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n+1}$ (סה"כ המסלולים פחות מסלולים אסורים).

i. $C(0)=1\quad C(1)=1\quad C(2)=2\quad C(3)=5$

(ג) נוסחת נסיגה למספרי קטלאן: $C(n)=\sum_{i=1}^{n}k=1nC(n-k)\cdot C(k-1)$ כאשר (k,k) היא הנקודה הראשונה בה המסלול נוגע ב־$y=x$) ★

4. עקרון שובך היונים

(א) **עקרון שובך היונים:** אם $f:A\to B$ ו־$|A|\geq|B|+1$ אז f **לא** חח"ע / קיים $b\in B$ כך ש־$\left|f^{-1}(B)\right|\geq 2$.

(ב) **עקרון שובך היונים המורחב:** אם $f:A\to B$ ו־$|A|\geq|B|+1$ אז קיים $b\in B$ כך ש־$|A|\geq K\cdot|B|+1$ / מתקיים $\left|f^{-1}\{b\}\right|\geq K+1$ ★

i. לדוגמא ־ אם יש 23 יונים ו־10 שבכים, אז יש לפחות 2 יונים בתא, נוכל אפילו לטעון שיש תאים שיש בהן 3 יונים.

5. משפט ארדש־סקרש

(א) יהיו m,n מספרים טבעיים ו־$a_1,a_2,\ldots,a_{m+n+1}$ סדרה של איברים השונים זה מזה. מתקיים לפחות אחד מהתנאים הבאים: ★

i. יש תת סדרה עולה באורך $m+1$

ii. יש תת סדרה יורדת באורך $n+1$

6. **אינדוקציה**

(א) **עקרון האינדוקציה:** אם P_1, P_2, P_3 פסוקים (טענות) כאשר:

i. טענה P_1 נכונה

ii. הנכונות של P_n טענות נכונות גוררת נכונות של P_{n+1} טענות לכל $n \in \mathbb{N}$

א'. אז כל הטענות נכונות.

(ב) **עקרון האינדוקציה השלמה:** אם P_1, P_2, P_3 פסוקים (טענות) כאשר:

i. טענה P_1 נכונה

ii. מתקיים $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n)$ נכונות לכל $n \in \mathbb{N}$ גורר נכונות של P_n

א'. אז כל הטענות נכונות.

7. **נוסחאות נסיגה**

(א) **מקרים פרטיים:**

i. נוסחת נסיגה מסדר 1: $a_n = f(a_{n-1})$ עבור $n \geq 2$, דרוש a_1 (תנאי התחלה).

ii. נוסחת נסיגה מסדר k: $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k})k$ (כאשר יש k נעלמים, עבור k מספר טבעי נתון), עבור $n > K+1$, כאשר תנאי ההתחלה הוא $a_1, \ldots, a_k$.

(ב) **מגדלי האנוי:**

i. נוסחת הנסיגה היא $a_n = 2^n - 1$ ★

(ג) **סדרת פיבונאצ'י:**

i. **דוגמא:** $\begin{bmatrix} \text{♂} & \text{♀} & \\ 1 & 0 & F_0 \\ 0 & 1 & F_1 \\ 1 & 1 & F_2 \\ 1 & 2 & F_3 \\ 2 & 3 & F_4 \end{bmatrix}$ לזכר יש רק אבא, לנקבה יש רק אמא. כלומר הנוסחא היא $F_n = \begin{pmatrix} no.\ of\ \text{♂} \\ in\ F_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} no.\ of\ \text{♀} \\ in\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} no.\ of\ \text{♀} \\ in\ F_{n-1} \end{pmatrix} + F_{n-1} = F_{n-2} + F_{n-1}$, זוהי נוסחת נסיגה מסדר 2, תנאי ההתחלה הוא $F_0 = 1, F_1 = 1$.

ii. אם אנחנו יוצרים סדרת נסיגה עם תנאי זהה $(a_n = a_{n-2} + a_{n-1})$, היא תהיה זהה לסדרת פיבונאצ'י אם תנאי ההתחלה זהה $(F_0 = 1, F_1 = 1)$, אחרת - היא תהיה שונה.

iii. **נוסחא מפורשת:** ★

א'. תנאי ההתחלה: $F_0 = 1 = C_1 + C_2 \Rightarrow C_2 = 1 - C_1$, $F_1 = 1 = C_1 \cdot r_+ + C_2 \cdot r_-$ עבור $r_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2} | r_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

ב'. נוסחת הנסיגה (מסדר שני): $F_n = \frac{r_+}{\sqrt{5}} \cdot r_+^n - \frac{r_-}{\sqrt{5}} \cdot r_-^n = \frac{r_+^{n+1} - r_-^{n+1}}{\sqrt{5}}$

8. **שילוש**

(א) שילוש של מצולע הוא העברת אלכסונים במצולע ללא נקודות חיתוך ביניהם.

(ב) לשילוש של מצולע בעל n צלעות דרושים בדיוק $(n-3)$ אלכסונים. ★

(ג) **נוסחה מפורשת:** כמות הדרכים שאפשר לשלש מצולע קמור (שכל הזויות הפנימיות שלו קטנות מ־180 מעלות) בעל $n+2$ צלעות: ★

$$t_n = \sum_{i=1}^{n} k = 1n \underbrace{t_{k-1}}_{\substack{ways\ to\ triangulate \\ shape\ with\ k+1\ edges}} \cdot \underbrace{t_{n-k}}_{\substack{ways\ to\ triangulate \\ shape\ with\ 2+(n-k)\ edges}} = t_0 t_{n-1} + t_1 t_{n-2} + \cdots + t_{n-1} t_0$$

עם $t_0 = 1$.

(ד) קיבלנו נוסחת נסיגה למספרי קטלאן עם אותו תנאי התחלה, מסקנה - $t_n = C(n)$.

קצב גידול $Big\ O$

1. **הגדרות:**
   (א) אומרים ש־f הוא $O(g)$ אם קיים $c > 0$ כך ש־$f(n) \leq c \cdot g(n)$. במקרה זה מסמנים $f = O(g)$.
   (ב) אומרים ש־$f = \Theta(g)$ אם $f = O(g)$ וגם $g = O(f)$.

2. **תכונות של O גדול:**
   (א) $f = O(f)$★
   (ב) אם $f_1 = O(g)$ ו־$k > 0$ אז $k \cdot f = O(g)$ ★
   (ג) אם $f_1 = O(g)$ ו־$g = O(h)$ אז $f = O(g)$★

3. **טענות על O גדול:**
   (א) **טענה:** $f = O(g)$ אם"ם קיים $c \in \mathbb{R}$ המקיים $\frac{f(n)}{g(n)} \leq c$, כלומר היחס חסום מלעיל. ★
      i. **מסקנה:** תהי $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ המוגדרת ע"י $g(n) = 1$ לכל $n \in \mathbb{N}$, אזי מתקיים $f = O(g)$ אם"ם f חסומה.
   (ב) **טענה:** יהיו f, g, h פונקציות $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, אזי:
      i. $f = \Theta(f)$
      ii. אם $f = \Theta(g)$ אז $g = \Theta(f)$
      iii. אם $f = \Theta(g)$ וגם $g = \Theta(h)$ אז $f = \Theta(h)$
      א'. **מסקנה:** היחס $f = \Theta(g)$ הוא יחס שקילות. ★
   (ג) **טענה:** יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כאשר $a < b$, נגדיר $f(n) - n^a, g(n) = n^b$, אזי: ★
      i. $f = O(g)$
      ii. $g \neq O(f)$
   (ד) **טענה:** יהי $k \in \mathbb{N}$, $f(n) = n^k$, $g(n) = 2^n$, אז: ★
      i. $f = O(g)$
      ii. $g \neq O(f)$
   (ה) **טענה:** יהיו $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ ו־$f = O(g)$, אזי $g + f = \Theta(g)$ ★
   (ו) **טענה:** יהיו $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, אזי $f = \Theta(g)$אם קיימים $c_1, c_2 > 0$ כך ש־$0 \leq c_1 \leq \frac{f(n)}{g(n)} \leq c_2$ ★
   (ז) **טענה:** יהיו $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, נניח שקיים $c > 0$ ו־$n \in \mathbb{N}$ כך ש־$f(n) \leq c \cdot g(n)$ לכל $n \in \mathbb{N}$, אזי $f = O(g)$ ★
   (ח) **מסקנה מנוסחת סטירלינג:** אם מתקיים $f(n) = n!$, $g(n) = \sqrt{n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$, אז מתקיים $f = \Theta g$

4. **לוגריתמים:**
   (א) $log_2 a$ הוא מספר שמהווה פתרון של המשוואה $2^x = a$.
      i. $log_2(a^t) = t \cdot log_2 a$
      ii. $log_a x = log_a b \cdot log_b x$

5. **שיטות למציאת O גדול:**
   (א) באופן כללי: $C \to log(n) \to \sqrt{n} \to n \to n^k \to a^n$.
   (ב) המטרה היא, בהנתן f, למצוא g "פשוטה" כך שמתקיים $f = \Theta(g)$. דוגמאות לפונקציות פשוטות -
      i. n^k (בפונקציות מהצורה n^k אם יש לנו שתי פונקציות שונות מהצורה הזו וכל אחת מהן היא עם k שונה, אז הן בהכרח **לא** Θ אחת של השניה. לדוג' $n^3 \neq \Theta n^2$)
      ii. a^n (בפונקציות מהצורה a^n אם יש לנו שתי פונקציות שונות מהצורה הזו וכל אחת מהן היא עם n שונה, אז הן בהכרח **לא** Θ אחת של השניה. לדוג' $3^n \neq \Theta 3^{2n}$)
      iii. log_n (ב־logים, הבסיס לא משנה, כל הלוגים גדלים באותו קצב: $log_2 n = \Theta log_3 n$)

(ג) אם נתון $\begin{matrix} f = O(g) \\ g = O(h) \\ h = O(g) \end{matrix}$ אז זה כמו $f \le g \le h \le f$ אז מתקיים $f = \Theta g$.

(ד) אי שוויון ברנולי $(1+x)^n \ge (1+nx)$ יכול להיות שימושי כדי לחסום פונקציה בפורמט דומה.

(ה) השיטה להקטין בפונקציות עם סכימה (סיגמא) - לבחור רק חצי מהאיברים, ולבחור ($\frac{n}{2}$ פעמים אם זוגי / $\frac{n+1}{2}$ פעמים אם אי זוגי) את האיבר הקטן מבין החצי שנבחר.

(ו) קצב גידול של מספרי קטלאן - עבור $f(n) = \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}$ מתקיים שהיא חסומה ע"י $\frac{4^n}{n+1} \le \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} \le 4^n$, וכן עבור $g(n) = \frac{4^n}{\sqrt{2n+1}}$ מתקיים $f = \Theta(g)$.

(ז) קצב גידול של טור הרמוני: עבור $f(n) = a + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ מתקיים שהיא חסומה ע"י $\frac{logn}{2} \le f(n) \le 2logn$

גרפים

1. **הגדרות:**

(א) **גרף:** $G = (V, E)$ כאשר $V : Vertices \neq \emptyset$ קודקודים (נקודות), $E : Edges$ צלעות (זוגות של נקודות המחוברות ביניהן).

(ב) **גרף מלא** K_n**:** גרף בו כל קודקוד מחובר לשאר הקודקודים.

(ג) **גרף מצולע** C_n**:** גרף מהצורה $E = \{(1,2), (2,3), \ldots, (n-1, n)\,(n,1)\}$ כך שנוצר מצולע.

(ד) **קודקודים שכנים:** קודקודים $u, v \in V$ נקראים שכנים אם $\{u, v\} \in E$ (כלומר אם קיימת צלע המחברת ביניהם).

(ה) **דרגה של קודקוד:** מספר השכנים שלו, מסומן $deg(v)$.

(ו) **מסלול:** יהי G גרף, מסלול באורך n ב-G הוא סדרת קודקודים $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ כך ש-$(v_1, v_{i+1}) \in E$ לכל $i = 0, \ldots, n-1$.

(ז) **מסילה:** יהי G גרף, מסלול $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ נקרא מסילה אם הצלעות $(u_0, u_1), (u_1, u_2), \ldots, (u_{n-1}, u_n)$ כולן שונות - כלומר מסלול שעובר בכל צלע פעם אחת.

(ח) **מסילה פשוטה:** מסלול $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ נקרא מסילה פשוטה אם כל הקודקודים שלו שונים זה מזה.

(ט) **מסילת המילטון:** מסילה פשוטה כך שלכל $v \in V$ קיים $n \ge i \ge 0$ כך ש-$v = v_i$ (כלומר מסילה פשוטה העוברת בכל הקודקודים בגרף)

(י) **מסילת אוילר:** מסילה $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ כך שלכל $e \in E$ קיים $1 \le i \le n-1$ כך ש-$e = \{v_i, v_{i-1}\}$ (כלומר מסילה העוברת בכל הצלעות בגרף).

(יא) **גרף קשיר:** גרף נקרא קשיר אם לכל $u, v \in V$ קיים מסלול $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ בו $v_0 = u$ ו-$v_n = v$ (כלומר שקיים מסלול המחבר בין כל הקודקודים).

(יב) **רכיבי שקילות:** מחלקות השקילות של R על V נקראות רכיבי שקילות של G (מחלקות של קודקודים שניתן להעביר ביניהן מסלול).

(יג) **מעגל פשוט:** מסלול $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ נקרא מעגל פשוט אם $v_0 = v_n$ ו-$(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ כולם שונים זה מזה.

(יד) **מעגל:** מסלול $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ נקרא מעגל אם הוא מסילה ובנוסף מתקיים $u_0 = u_n$ (כלומר הוא מסתיים איפה שהוא התחיל).

(טו) **מעגל המילטון:** מעגל המילטון בגרף G הוא מעגל פשוט $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ כך שלכל $v \in V$ קיים $1 \le i \le n$ כך ש-$v = v_i$, כלומר מעגל שעובר בכל הנקודות של הגרף.

(טז) **מעגל אוילר:** יהי G גרף, מעגל $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ יקרא מעגל אוילר אם לכל $e \in E$ קיים i כך ש-$e = \{v_i, v_{1+n}\}$ - כלומר מסלול העובר בכל הצלעות של הגרף, עובר בכל צלע בדיוק פעם אחת, ומתחיל ונגמר באותה נקודה.

(יז) **עץ:** גרף קשיר ללא מעגלים פשוטים. קודקוד בעל דרגה 1 נקרא **עלה.**

(יח) **גרף דו צדדי:** G יקרא גרף דו צדדי כאשר ניתן לחלק את הגרף לשתי קבוצות קודקודים זרות, כאשר אין צלע בין שני קודקודים מאותה קבוצה.

(יט) **גרף דו צדדי מלא:** G יקרא גרף דו צדדי מלא כאשר הוא מכיל את כל הצלעות האפשריות תחת הגדרת גרף דו צדדי.

(כ) **גרף הקוביה:** גרף הקוביה Q_n מוגדר $Q_n = G = (V,E)$ עבור
$V = \{0,1\}^n$, $E = \{\{(x_1,x_2,\ldots,x_n),(y_1,y_2,\ldots,y_n)\} \mid different\ in\ exactly\ one\ place\} = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_1 - y_1| = 1$.

(כא) **זיווג:** יהי G גרף דו צדדי עם $|V_1| = |V_2|$, זיווג M ב־G הוא קבוצת צלעות $M \subseteq E$ כך שלצלעות ב־M אין קודקודים משותפים.

(כב) **זיווג מושלם:** זיווג יקרא מושלם אם לכל קודקוד יש זוג.

i. תהי $S \subseteq V_1$, נסמן ב־$\Gamma(s)$ את אוסף כל השכנים של הקודקודים ב־S: $\Gamma_{(s)} = \{u \in V \mid \exists v \in S : \{u,v\} \in M\}$.
נשים לב שתנאי הכרחי לקיום זיווג מושלם הוא $\left|\Gamma_{(s)}\right| \geq |S|$ לכל $S \subseteq V_1$.

2. **טענות ומשפטים:**

(א) **טענה:** סכום הדרגות של כל הקודקודים בגרף שווה ל־$2 \cdot |E|$ (פעמיים מספר הצלעות). ★

i. **מסקנה:** יהי G גרף, אזי מספר הקודקודים $u \in V$ שדרגתם אי זוגית ־ הוא מספר זוגי. ★

(ב) **טענה:** נגדיר יחס R מעל V באופן הבא: $(u,v) \in R$ כאשר קיים מסלול מ־u ל־v. היחס R הוא יחס שקילות. ★

(ג) **טענה:** יהי G גרף, אזי מספר רכיבי הקשירות של G הוא לפחות $|V| - |E|$.★

(ד) **משפט:** יהי G גרף עץ עם $|V| > 1$, אזי יש ל־G עלה. ★

(ה) **משפט:** יהי G גרף עץ, אז מתקיים $|E| = |V| - 1$. ★

(ו) **טענה:** יהי G גרף חסר מעגלים שעבורו מתקיים $|E| = |V| - 1$, אזי G קשיר. ★

(ז) **משפט:** יהי G גרף קשיר שעבורו מתקיים $|E| = |V| - 1$, אז G חסר מעגלים פשוטים. ★

(ח) **טענה:** בגרף דו צדדי אין מעגל פשוט באורך אי זוגי. ★

(ט) **טענה:** אם בגרף דו צדדי G המחולק לשני צדדים V_1, V_2 יש מעגל המילטון, אז $|V_1| = |V_2|$. ★

(י) **טענה:** ב־Q_n (גרף הקוביה) עבור $n \geq 2$ יש מעגל המילטון. ★

(יא) **טענה:** בגרף G קשיר קיים מעגל אוילר אם"ם דרגת כל הקודקודים זוגית. ★

3. **תורת רמזי:**

(א) מתארת האם אפשר לצבוע צלעות של גרף K_n (גרף שלם עם n צלעות) בשני צבעים כך שלא יווצר משולש באותו הצבע.

i. K_3־ כן (טריוויאלי), K_4־ כן, K_5־ כן, K_6־ לא.

(ב) **מספרי רמזי** ־ יהיו $a,b \in \mathbb{N}$, כאשר $a,b \geq 2$, אז $n = R(a,b)$ הוא המספר המינימלי בעל התכונה הבאה ־ בכל צביעה של צלעות K_n בשני צבעים (אדום וכחול), ימצא בתוך Kn "Ka אדום" או "K_b כחול".

i. $R(3,3) = 6$

ii. $R(a,1) = 1$

iii. $R(2,n) = n$

iv. $R(a,b) = R(b,a)$

v. **מספרי רמזי על משולש פסקל:**

$$\mathbf{1}\ R(1,1)$$
$$\mathbf{1}\ R(2,1) \qquad \mathbf{1}\ R(1,2)$$
$$\mathbf{1}\ R(3,1) \qquad \mathbf{2}\ R(2,2) \qquad \mathbf{1}\ R(1,3)$$
$$\mathbf{1}\ R(4,1) \qquad \mathbf{3}\ R(3,2) \qquad \mathbf{3}\ R(2,3) \qquad \mathbf{1}\ R(1,4)$$
$$\mathbf{1}\ R(5,1) \qquad \mathbf{4}\ R(4,3) \qquad \mathbf{6}\ R(3,3) \qquad \mathbf{1}\ R(3,4) \qquad \mathbf{1}\ R(1,5)$$

(ג) **משפטים על מספרי רמזי:**

i. **משפט:** לכל $a,b \geq 2$ שלמים מתקיים $R(a,b) \leq R(a-1,b) + R(a,b-1)$.★

א'. המשפט מאפשר לקבל בצורה מפורשת חסם מלעיל על $R(a,b)$ ובתוך כך לראות ש־$R(a,b)$ מוגדר היטב.

ii. **מסקנה:** לכל $a,b \in \mathbb{N}$ מתקיים $R(a,b) \leq \begin{pmatrix} a+b-2 \\ a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b-2 \\ b-1 \end{pmatrix}$★