לינארית כל המשפטים וההוכחות תש"פ | ניצן ברזילי

13 בפברואר 2020

.

מערכות משוואות

- **הגדרה** - 2 מערכות משוואות נקראות **מערכות משוואות שקולות** אם כל משוואה באחת המערכות היא צירוף לינארי של המשוואות של המערכת השניה, וההפך.
- **טענה** - כל פתרון של מערכת משוואות פותר גם כל צ"ל שלה. באותו אופן, למערכות משוואות שקולות יש את אותה קבוצת פתרונות.

מטריצות

הגדרות על מטריצות

- **פעולות אלמנטריות על שורות:**
  - הכפלת שורה i בקבוע $c \neq 0$, נסמן $R^i \to cR^i$
  - הוספת לשורה כפולה של שורה אחרת, נסמן $R^i \to R^i + cR^j$
  - החלפת שתי שורות, נסמן $R^i \leftrightarrow R^j$
- **מטריצות שקולות שורות:** שתי מטריצות יקראו **מטריצות שקולות שורות** אם אחת מתקבלת מהשניה ע"י מספר סופי של פעולות אלמנטריות.
- **מטריצה מדורגת מצומצמת:** נאמר שמטריצה A מסדר $m \times n$ היא מדורגת מצומצמת (לפי שורות) אם $A = 0$ (המטריצה כולה מורכבת מאפסים) או שמתקיימים התנאים הבאים:
  - קיים $1 \leq r \leq m$ כך ש־r השורות הראשונות לא מתאפסות ושאר השורות כן ("שורות אפסים בסוף").
  - קיימת סדרת מספרים $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_r \leq n$ כך שלכל $1 \leq l \leq r$ המקדם המוביל ל השורה ה־lית (האיבר הראשון משמאל ששונה מאפס):
    * הוא 1.
    * הוא נמצא בעמודה ה־k_l וכל שאר האיברים בעמודה הם אפס.
- **תכונות אלגברה של מטריצות:**
  - $A + B = B + A$
  - $(A + B) + C = A + (B + C)$
  - $A + 0 = A$
  - $k(A + b) = kA + kB$
  - $(r + s)A = rA + sA$
  - $r(sA) = (rs)A$

- **מכפלת מטריצות:** עבור מטריצות כלליות $A \in M_{m\times n}$, $B \in M_{n\times p}$ נגדיר את המכפלה AB להיות מטריצה $m \times p$ שאיבריה נתונים ע"י $(AB)^i_j = a^i b_j = \sum\limits_{k=1}^{n} a^i_k b^k_j$.
  - כפל של מטריצות הוא לא קומוטטיבי (כמו הדוגמא האגדית של צור - "להסתפר ואז להצטלם זה לא אותו דבר כמו להצטלם ואז להסתפר!")
  - תוצאת המכפלה של 2 מטריצות: העמודות הן צ"ל של עמודות A, השורות הן צ"ל של שורות B.
  - תכונות של כפל מטריצות:
    * $k(AD) = (kA)D$ אפשר קודם לכפול את המטריצות ואז לכפול את התוצאה בסקלר, או קודם לכפול מטריצה בסקלר ואז במטריצה אחרת
    * $(A + B)C = AC + BC$ אפשר קודם לחבר מטריצות ואז לכפול במטריצה אחרת, או קודם לכפול במטריצה אחרת ואז לסכום
    * $A(C + D) = AC + AD$
    * $I_m A = AI_n = A$ כפל במטריצת הזהות משום כיוון לא משפיע
    * $0A = A0 = 0$ כפל באפס מכל כיוון מאפס את המטריצה
  - כפל וקטור שורה במטריצה: התוצאה היא וקטור שורה שהוא צ"ל של השורות של המטריצה עם מקדמים מוקטור השורה.
- **מטריצות הפיכות:** אם A הפיכה אז $X = A^{-1}b$. $A_{n\times n}$ (מטריצה ריבועית) נקראת:
  - **הפיכה משמאל** אם קיימת $L_{n\times n}$ כך ש־$LA = I_n$ (המכפלה בניהן היא מטריצת הזהות). L תקרא ההופכית משמאל.
  - **הפיכה מימין** אם קיימת $R_{n\times n}$ כך ש־$RA = I_n$, R תקרא ההופכית מימין.
  - **הפיכה** אם קיימת $B_{n\times n}$ שהיא ההופכית משמאל ומימין של A ואז B נקראת ההופכית של A.

טענות ומשפטים על מטריצות

- **טענה** - לכל פעולה אלמנטרית e יש פעולה אלמנטרית e' כך ש: $e'(e(A) = A$ (לכל פעולה אלמנטרית יש פעולה הופכית)
- **משפט** - אם יש שתי מערכות משוואות המתוארות ע"י מטריצות שקולות שורה, אז המערכות שקולות ופרט יש להן את אותה קבוצת פתרונות:
- **משפט** - אסוציאטיביות של כפל מטריצות. $(AB)C = A(BC)$:
- **למה:** אם $A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$, אז מתקיים $AB = A[b_i] \ldots [b_p] = [Ab_i] \ldots [Ab_p]$

$B=B\cdot I_n=B(AC)=(BA)C=I_nC=C$

- **למה:** אם A מטריצה ריבועית עם הפכי משמאל B והופכי מימין C אז $B = C$

$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I_n$

- **למה:** עבור $A_{n\times n}$, $B_{n\times n}$: אם A הפיכה אז A^{-1} הפיכה ו־$(A^{-1})^{-1}=A$

$(B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}(A^{-1}(AB))=B^{-1}((A^{-1}A)B)=B^{-1}(I_nB)=B^{-1}B=I_n$
$(AB)(B^{-1}A^{-1})=((AB)B^{-1})A^{-1}=(A(B\cdot B^{-1}))A^{-1}=(A\cdot I_n)A^{-1}=A\cdot A^{-1}=I_n$

- **למה:** עבור $A_{n\times n}$, $B_{n\times n}$: אם A ו־B^{-1} הפיכות אז AB הפיכה ו־$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- **מסקנה מהלמה** - אם $A_1, A_2, \ldots , A_k \in M_n$ מטריצות הפיכות אז $A_1A_2 \cdots A_k$ הפיכה עם הפכי $(A_k^{-1} \cdots A_2^{-1}, A_1^{-1})$ כלומר בסדר הפוך.
- **טענה:** כל מטריצה אלמנטרית היא הפיכה, וההופכית שלה גם אלמנטרית.

רצינו שכל פעולה אלמנטרית E קיימת פעולה אלמנטרית הפוכה E'.
$I=e'(e(I))=e'(E)=E'E$
$I=e(e'(I))=e(E')=EE'$

- **משפט:** תהי $A_{n\times n}$, אזי התמאים הבאים שקולים:

יהי $b\in \mathbb{F}^n_{col}$, כך ש- $Ax=b$:
$A^{-1}(Ax)=(A^{-1}A)x=I_nx=x=A^{-1}b$
$Ax=A(A^{-1}b)=AA^{-1}b=I_nb=b$

  - A הפיכה
  - למערכת המשוואות $AX = b$ יש פתרון יחיד לכל $b \in F^n_{col}$

עבור $b=0$, למערכת $Ax=0$ יש פתרון יחיד (טריוויאלי).

  - למערכת ההומוגנית $AX = 0$ יש פתרון יחיד $X = 0$

נדרג את A, נקרא למדורגת R. קב' הפתרונות של $Ax=0$ ו-$Rx=0$ זהות, (פתרון יחיד)
זה אפשרי רק אם אין ב-R משתנים חופשיים, וזה קורה רק אם $R=I_n$.

  - A שקולת שורות ל־I_n

אם A שקולת שורות ל-I_n, יש סדרה $e_1,\ldots,e_k$ של פעולות אלמנטריות כך ש- $e_k(e_{k-1}(\cdots(e_1(I_n))=A$, נסמן ב-$E_i$ את המטריצה האלמנטרית שמתאימה לפעולה e_i
נקבל: $E_k(E_{k-1}(\cdots(E_1(I_n))=E_k\cdots E_1=A$.

  - A מכפלה של מספר סופי של מטריצות אלמנטריות.

אם $A=E_1\cdots E_k$ היא מכפלה של מטריצות אלמנטריות,
אז היא בפרט מכפלה של מטריצות הפיכות, ולכן הפיכה.

מההגדרה קיימת $L\in M_n$ כך ש-$LA=I_n$, אם $Ax=0$ (נכפול את שני האגפים ב-L: $L(Ax)=(LA)x=I_nx=x=L0=0$
ולכן הפתרון היחיד למערכת המשוואות $Ax=0$ הוא $x=0$, ולכן A הפיכה (עם הופכי L)

מההגדרה קיימת $R\in M_n$ כך ש-$AR=I_n$, נראה כי R הפיכה משמאל, ומהמשפט הקודם הפיכה. נכפול את שני האגפים ב-R^{-1}:
$(AR)R^{-1}=A(RR^{-1})=AI_n=A=R^{-1}$, ולכן $A^{-1}=(R^{-1})^{-1}=R$.

A ו-B שקולות שורה אם"ם קיימות מטריצות אלמנטריות $E_1,\dots,E_k$ כך ש-$(E_1,\dots,E_k)A=B$
ומאחר שמכפלה של מטריצות אלמנטריות היא הפיכה, וגם הסיכה היא מכפלה של אלמנטריות, סיימנו.

- **מסקנה:** אם A הפיכה משמאל /מימין אז היא הפיכה.
- **טענה:** $A,R\in M_{m\times n}$ הן שקולות שורה אם"ם קיימת מטריצה ריבועית הפיכה $P_{m\times m}$ כך ש-$PA=R$.
- **מסקנה:** כל המטריצות ההפיכות מסדר n הן שקולות זו לזו (כי כולן שקולות ל-I_n).
- **טענה:** המטריצה $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ הפיכה אם"ם מתקיים $ad-bc\neq 0$.

ישרים ומישורים

הגדרות על ישרים ומישורים

- **ישר:** הקבוצה L תקרא ישר אם היא מהצורה $L=\{p+tv|t\in\mathbb{F}\}$ (כלומר נקודה + וקטור כפול בסקלר).
- **מישור:** M יקרא מישור אם הוא מהצורה $M=\{p+tu+sv|t,s\in\mathbb{F}\}$ כך ש-u,v שאינם כפולה בסקלר אחד של השני (כלומר נקודה + וקטור כפול בסקלר + וקטור אחר כפול בסקלר).

משפטים וטענות על ישרים ומישורים

- **משפט:** אוסף הפתרונות של המשוואה $aX_1+bX_2=c$ בשני נעלמים (שלפחות אחד מהם אינו 0) במרחב האפיני הנו ישר.
- **משפט:** אם $a,b,c,d\in\mathbb{F}$ ו-(a,b,c) לא מתאפסים בו זמנית אזי הפתרונות של $ax+by+cz=d$ הם מישור ב-$A^3(\mathbb{F})$.

שדות

⊕ יחידות הניטרלי לחיבור מהנתון (עבור $x=0$) מתקיים $0+a=0=0+0$, מצמצום חיבורי $a=0$.
⊕ יחידות הנגדי מהנתון מתקיים $x+a=0=x+(-x)$, מצמצום חיבורי $a=-x$.
⊕ יחידות הניטרלי לכפל מהנתון מתקיים $1\cdot a=1=1$
⊕ יחידות הנגדי. מהנתון מתקיים $xa=1=x\cdot x^{-1}$

הגדרות על שדות

- מלבד 10 אקסיומות השדה יש עוד תכונות שנכונות בכל שדה:
  - צמצום חיבורי: $x+a=y+a\Rightarrow x=y$.
    $x=x+0=x+(a+(-a))=(x+a)+(-a)=(y+a)+(-a)=y+(a+(-a))=y+0=y$ (ניטרלי לחיבור, נגדי, אסוציאטיביות, נתון $x+a=y+a$, אסוציאטיביות, נגדי, אדיש לחיבור)
  - צמצום כפלי: $ax=yx\Rightarrow x=y$
    אם $xa=ya$ אז: $x=x\cdot 1=x\cdot(a\cdot a^{-1})=(x\cdot a)a^{-1}=(y\cdot a)a^{-1}=y\cdot(a\cdot a^{-1})=y\cdot 1=y$ (אדיש לכפל, הופכי, אסוציאטיביות, אסוציאטיביות, הופכי, אדיש לכפל)
    אם $ax=ay$: $xa=ax=ay=ya$ (קומוטטיביות, קומוטטיביות)
  - $-(-a)=a$ מתקיים $(-a)+a=0$, מיחידות הנגדי $a=-(-a)$
  - $(-1)a=-a$ $a+(-1)\cdot a=1\cdot a+(-1)\cdot a=(1+(-1))\cdot a=0\cdot a=0$ מיחידות ההופכי $-1(a)=-a$
  - $-(ab)=(-a)b=a(-b)$ $ab+(-a)b=(a+(-a))b=0\cdot b=0$ מיחידות ההופכי $-(ab)=(-a)b$
  - אם $a\neq 0$ אז $a=(a^{-1})^{-1}$. $1=(a^{-1})a$, $a^{-1}\neq 0$ (אחרת המכפלה תצא 0 ו-$0\neq 1$), מיחידות ההופכי $a=(a^{-1})^{-1}$
- **חשבון מודולורי ושדות סופיים:**
  - בהנתן $n\in\mathbb{N}, a\in\mathbb{Z}$ קיימים Q,r יחידים כך ש-$a=Qn+r$ (r הוא השארית של החילוק, נסמן אותו $a\ mod\ n$.
    * לדוגמא - $7=2\cdot 3+1$, $7mod3=1$ (7 לחלק ל-3 נותן שארית 1).
  - תכונות של חשבון מודולרי:
    נחלק את a,b ב-n עם שארית: $a=in+r \leftarrow a\ mod\ n=r$, $b=jn+s\leftarrow b\ mod\ n=s$, נחלק את $r+s$ ב-n עם שארית: $(r+s)=kn+t$ עם i,j,k,l שלמים, $0\leq t,u\leq n$, $rs=ln+u$
    מתקיים $(r+s)mod\ n=t$, $(rs)mod\ n=u$. מתקיים $(a+b)=in+r+jn+s=(i+j)n+(r+s)=(i+j)n+kn+t=(i+j+k)n+t$, ולכן $(a+b)mod\ n=t$
    ולכן $[(a\ mod\ n)+(b\ mod\ n)]mod\ n=[r+s]mod\ n=t$.
    * $(a+b)mod\ n=[(a\ mod\ n)+(b\ mod\ n)]\ mod\ n$
    * $(ab)mod\ n=[(a\ mod\ n)\ (b\ mod\ n)]\ mod\ n$
      · לדוגמא - $(2\cdot 4)mod\ 3=8\ mod\ 3=2=[(2\ mod\ 3)+(4\ mod\ 3)]\ mod\ 3=[2\cdot 1]mod\ 3=2$.
- **שדות מודולו:**
  - נסתכל על הקבוצה $\mathbb{Z}_n$ של אוסף השאריות האפשריות של חלוקה ב-n, אפשר להגדיר עליה שתי פעולות: חיבור - $a\oplus b=(a+b)mod\ n$, כפל - $a\odot b=(ab)mod\ n$.
    * לדוגמא - $\mathbb{Z}_4=\{0,1,2,3\}$.
    * $2\odot 3=(2\cdot 3)mod\ 4=6\ mod\ 4=2$
    * $3\oplus 3=(2\cdot 3)mod\ 4=6\ mod\ 4=2$

* $2\odot 2=(2\cdot 2)mod\ 4=4\ mod\ 4=0$ (זאת לדוגמא סיבה ללמה $\mathbb{Z}_4$ הוא לא שדה - מכפלה של שני איברים שאינם 0 נותנת 0).

- מתי $\mathbb{Z}_n$ עם הפעולות $\oplus,\odot$ היא שדה?
  * באופן כללי, אם n לא ראשוני אז $\mathbb{Z}_n$ לא שדה (כי אפשר לפרק $n=qp$ עם $1\leq p\leq n$, $1\leq q\leq n$ ואז $q\odot p=n\ mod\ n=0$ וקיבלנו שאני איברים שונים מאפס שהמכפלה ביניהם היא 0 - כמו בדוגמא למעלה עם $\mathbb{Z}_4$).
  * אם n ראשוני אז $\mathbb{Z}_n$ הוא שדה ואז הוא מסומן $\mathbb{F}_p$ (שדה עם $\mathbb{F}$ איברים).

טענות ומשפטים על שדות

- **למה:** $a0=0a=0$
- **למה:** אם $ab=0$ אז $a=0\vee b=0$.
- **למה:** למשוואה הלינארית $aX=b$ כאשר $a,b,c\in\mathbb{F}$ ו־$a\neq 0$ יש פתרון יחיד $x=\frac{(c-b)}{a}$.

מרחבים וקטוריים

הגדרות על מרחבים וקטוריים

- **תכונות מ"ו:** מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ הוא קבוצה V ביחד עם איבר $a\in V$ ופעולות חיבור וכפל בסקלר כך שמתקיימות 8 התכונות הבאות:
  - אסוציאטיביות החיבור
  - קומוטטיביות החיבור
  - קיום איבר אדיש לחיבור
  - קיום איבר נגדי
  - $a(v+w)=av+aw$
  - $(a+b)v=av+bv$
  - אסוציאטיביות כפל זוג סקלרים בוקטור
  - קיום אדיש לכפל

<u>למה</u>: יהיו $w,v\in V$ ו-$a\neq 0_{\mathbb{F}}$. אז קיים $x\in V$ יחיד שמקיים $ax+v=w$ והוא נתון ע"י $x=\frac{1}{a}(w-v)$

$a\cdot(\frac{1}{a}(w-v))+v=(a\cdot\frac{1}{a})(w-v)+v=1\cdot(w-v)+v=(w+(-v))+v)=w+((-v)+v)=w+0=w$

- **תכונות מרחב וקטורי:**
  - אם $u+v=u+w$ אז $v=w$ — $v=0+v=((-u)+u)+v=(-u)+(u+v)=(-u)+(u+w)=(-u+u)+w=0+w=w$
  - אם $v+u=w+u$ אז $v=w$ — אז גם $u+v=v+u=w+u=u+w$ ולכן מקבלים את התוצאה מהסעיף הקודם.
  - אם $av=aw$ אז $v=w$ — $u=1\cdot u=(a^{-1}\cdot a)u=a^{-1}\cdot(au)=a^{-1}\cdot(av)=(a^{-1}a)v=1\cdot v=v$

- **מרחבי פונקציות:**
  - **סימון:** אם A,B קבוצות נסמן $B^A=\{f:A\to B\}$ בתור קבוצת כל הפונקציות מ־A ל־B. המוטיבציה לסימון - אם A קבוצה סופית עם a איברים, ו־B קבוצה סופית עם b איברים, יש b^a פונקציות מ־Aל־B.
  - **הגדרת מרחב פונקציות:** תהי x קבוצה, $\mathbb{F}$ שדה. נתבונן ב־ $V=\mathbb{F}^x=\{f:x\to\mathbb{F}\}$.
  - **הגדרת פעולות במרחבי פונקציות:** נגדיר שתי פעולות על $\mathbb{F}^x$:
    * <u>חיבור פונקציות</u>: אם $f,g\in\mathbb{F}^x$, אז הפונקציה $f+g$ מוגדרת ע"י $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$.
    * <u>כפל פונקציה בסקלר</u>: אם $f\in\mathbb{F}^x$, $x\in\mathbb{F}$ אז הפונקציה cf מוגדרת ע"י $(cf)(x)=c\cdot f(x)$.
    * יחד עם שתי הפעולות האלו, $\mathbb{F}^x$ מקיימת את האקסיומות של מ"ו. למשל הפונקציה $\hat{0}=f(x)=0_{\mathbb{F}}$.
  - **דוגמא - מרחב הפולינומים:** פולינום עם משתנה x ומקדמים ב־$\mathbb{F}$ הוא ביטוי מהצורה $p=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$. אוסף הפולינומים מסומן ב־$\mathbb{F}[x]$. חיבור פולינומים וכפל פולינומים מוגדר מקדם־מקדם. עם הפעולות האלו, $\mathbb{F}[x]$ היא מ"ו. יש הבדל בין פולינום כביטוי לבין פונקציה פולינומיאלית (פונקציה המוגדרת ע"י הפולינום).

- **תתי מרחבים וקטוריים:** יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. תת קבוצה $W \subseteq V$ תקרא תת מרחב וקטורי אם מתקיימות של התכונות הבאות:
  - סגירות לחיבור
  - סגירות לכפל בסקלר
  - קיום כל האקסיומות של מרחב וקטורי
    * שימו לב למשפט ברשימת המשפטים למטה - כדי להראות שקבוצה היא ת"מ צריך רק להראות סגירות לחיבור, סגירות לכפל בסקלר והיותה לא ריקה.

טענות ומשפטים על מרחבים וקטוריים

- **למה:** יהיו $u, v \in \mathbb{F}$, אזי:
  - מיחידות הנגדי אם $u + v = 0_V$ אז $v = -u$
  - לכל $v \in V$ מתקיים $0_{\mathbb{F}} \cdot v = 0_V$
  - לכל a (סקלר) מתקיים $0_V \cdot a = 0_V$
  - אם $a \cdot v = 0_V$ אז $v = 0_V$ או $a = 0_{\mathbb{F}}$.
  - $(-1)v = -v$
  - $-(-v) = v$
- **משפט:** יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, אז $W \subseteq V$ תת מרחב וקטורי אם"ם:
  - $W \neq \emptyset$ ניסוח שקול: $0_W \in W$.
  - W סגורה לחיבור
  - W סגורה לכפל בסקלר

כיוון 1:
אם W תת מרחב, אז היא מקיימת סגירות לכפל וחיבור והיא בפרט מרחב וקטורי. זה אומר ש-0_W נמצא בה והיא לא ריקה.
כיוון 2:
נראה שמתקיימות התכונות של מרחב וקטורי:
• מכיוון שהחיבור ב-W זהה לחיבור ב-V, אסוציאטיביות וקומוטטיביות החיבור מתקיימות.
• איבר ניטרלי לחיבור- כיוון ש-W לא ריקה, קיים $w \in W$. מכיוון שהיא סגורה לכפל בסקלר, $0 \cdot w = 0_V \in W$. כלומר W מכילה את וקטור האפס. מכיוון שהחיבור ב-W זהה לחיבור ב-V, 0_V ניטרלי לחיבור.
• איבר נגדי: כיוון ש-W סגורה לכפל בסקלר, אז $w \in W$ מתקיים $(-1)w = -w \in W$ וכן $w + (-w) = 0_W$.
• כיוון שהכפל והחיבור ב-W זהים לאלו ב-V, אסוציאטיביות וקומוטטיביות הכפל, קיום הופכי וקיום אדיש לכפל מתקיימים.

צירופים לינאריים ו-$Span$

הגדרות על צ"ל ו-$span$

- **צירוף לינארי:** אם V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ סדרה של וקטורים מ-V, ו-$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ סדרת סקלרים ב-$\mathbb{F}$, אזי הוקטור $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$ נקרא צ"ל של הסדרה $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ עם מקדמים $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
- **פרוש:** תהי $X \subseteq V$ קבוצה, נאמר ש-$v \in V$ הוא צ"ל של איברי X אם קיימת סדרה $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ של וקטורים מ-X וסדרה של סקלרים $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ כך ש-$v = \sum_{i=1}^{n} a_iv_i$. אוסף כל הצירופים הלינאריים מסומן $span(x)$ / הפרוש של x.
- **קבוצה פורשת:** אם V מ"ו, $S \subseteq V$ תת קבוצה של V, נאמר ש-S פורשת או יוצרת את את V אם $span(S) = V$.
- **איבר תלוי לינארית:** תהי $S \subseteq V$ תת קבוצה ו-$v \in V$. נאמר ש-V תלוי לינארית ב-S אם $v \in span(S)$ (כלומר אם v הוא צירוף לינארי של איברי S).
- **קבוצה תלויה לינארית:** תהי $D \subseteq V$ תת קבוצה, אזי אם D מקיימת את אחד התנאים השקולים הבאים היא נקראת קבוצה תלויה לינארית:
  - קיים $v \in D$ כך ש-$v \in span(D \backslash \{v\})$ (כלומר יש וקטור מיותר).
  - קיימת סדרה $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ של וקטורים ב-D השונים זה מזה וסדרה של סקלרים $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ שלא כולם שווים לאפס כך ש-$0_V = \sum_{i=1}^{n} a_iv_i$ (כלומר קיים צירוף לינארי לא טריויאלי של איברי הקבוצה).
- **הערות לגבי תלות ואי תלות לינארית:**
  - אם $v \in V$ תלוי לינארית בקבוצה $S \subseteq V$, אז הוא תלוי לינארית גם בכל $S \subseteq S'$ וקיימת קבוצה סופית $S_0 \subseteq S$ ש-v תלוי בה.

- אם $D\subseteq V$ תלויה לינארית אז גם כל $D\subseteq D'$ תלויה לינארית ("ההגדלה לא תפתור את התלות").
- אם $D\subseteq V$ תלויה לינארית, קיימת $D_0\subseteq D$ סופית תלויה לינארית.
- אם $L\subseteq V$ בת"ל אז כל $L'\subseteq L$ גם בת"ל.
- $L\subseteq V$ היא בת"ל אם"ם כל תת קבוצה סופית שלה היא בת"ל.
- הקבוצה הריקה $\emptyset$ היא בת"ל.

- **בסיס:** תת קבוצה $B\subseteq V$ נקראת בסיס אם היא גם בת"ל וגם פורשת, כלומר $span(B)=V$.
- **קבוצה בלתי תלויה מקסימלית:** קבוצה L תקרא בלתי תלויה מקסימלית אם L בלתי תלויה וכל $L'\subseteq V$ שמכילה את L היא תלויה לינארית.
- **קבוצה פורשת מינימלית:** קבוצה $G\subseteq V$ נקראת פורשת מינימלית אם G פורשת את V ואם גם $G'\subseteq G$ פורשת את V אז $G'=G$.
- **מימד:** אם למרחב וקטורי יש בסיס סופי, אז כמות האיברים בו נקראת מימד.

נוכיח באינדוקציה על אורך הצירוף. בסיס הצירוף באורך 0, אז הוא שווה ל-$0_v\in W$. נניח שהראינו כי W מכיל את כל הצ"ל באורך n של איברי W. אם $v=\sum_{i=1}^{n+1}a^iw_i$ צ"ל באורך $n+1$ אז בפרט $(\sum_{i=1}^{n}a^iw_i)+a^{n+1}w_{n+1}$ מהנחת האינדוקציה, $\sum_{i=1}^{n}a^iw_i\in W$. מסגירות לכפל בסקלר, $a^{n+1}w_{n+1}\in W$. כלומר $v\in W$.

טענות ומשפטים על צ"ל ו־$span$

- **משפט:** ה־$span$ הוא תת המרחב הקטן ביותר המכיל קבוצה נתונה.
  - **למה 1:** אם $W\leq V$ אז $span(w)\subseteq W$ ת"מ אז W כלומר W סגור לצירופים לינאריים.
  - **למה 2:** לכל $x\in V$, $span(x)$ הוא תת מרחב שמכיל את x.
  - **למה 3:** אם $S\subseteq S'$ אז $span(S)\subseteq span(S')$.
  - **מסקנה:** $span(x)$ הוא תת מרחב וכל תת מרחב $W\leq V$ שמכיל את x מקיים $span(x)\subseteq W$.

זהו תת המרחב הקטן ביותר שמכיל את x.

הראינו ש-$span(x)$ ת"מ. אם $W\leq V$ ת"מ שמכיל את x, אז $span(x)\subseteq span(w)=w$

$0_v\in span(x)$ מכן הוא לא ריק. יהי $v=\sum_{i=1}^{n}a^iv_i$ צ"ל באורך n של איברי x, ו-$\lambda\in\mathbb{F}$, אז $\lambda v=\lambda\sum_{i=1}^{n}a^iv_i=\sum_{i=1}^{n}(\lambda a^i)v_i$, ולכן גם $\lambda v\in span(x)$. אם $w=\sum_{j=1}^{m}b^jw_j$ הוא צ"ל באורך m של איברי x, אז $v+w=\sum_{i=1}^{n}a^iv_i+\sum_{j=1}^{m}b^jw_j$ הוא צ"ל באורך $n+m$ של איברי x. כלומר $v+w\in span(x)$ ו-$span(x)$ סגורה לחיבור. היא סגורה לכפל בסקלר כי כל $x\in X$ ניתן לכתיבה כ-$1\cdot x$, ולכן הוא צ"ל באורך 1 של איברי x ושייך ל-$span(x)$.

- **משפט:** תהי $L\subseteq V$ בת"ל, ו־$v\in V\backslash L$. אזי הקבוצה $L\cup\{v\}$ היא בת"ל אם"ם $v\notin span(L)$ (היא תלויה לינארית אם"ם $v\in span(L)$).
- **למה:** אם D קבוצה, $v\in D$, $v\in span\left(D\backslash\{v\}\right)$ אז $span\left(D\backslash\{v\}\right)=span(D)$.
- **משפט:** אם L בת"ל מקסימלית אז היא פורשת.

תהי $L\subseteq V$ בת"ל מקסימלית. נניח בשלילה שהיא לא פורשת, וקיים $v\in V$ $v\notin span\,L$. אבל אז $L\cup\{v\}$ בת"ל שמכילה את L, בסתירה למקסימליות L.

- **משפט:** אם G היא פורשת מינימלית אז היא בת"ל.

תהי $G\subseteq V$ פורשת מינימלית. נניח בשלילה ש-G ת"ל. אז קיים $v\in G$ $v\in span\,G\backslash\{v\}$, שזה אומר $span\,G\backslash\{v\}=span\,G$ ולכן $G\backslash\{v\}$ פורשת בסתירה למינימליות G.

- **מסקנה:** אם V מ"ו n־מימדי ו־S היא קבוצה בגודל n אז התנאים הבאים שקולים:
  - S בסיס.
  - S בת"ל.
  - S פורשת.

ישירות מהגדרת בסיס.

יהי $v\in V$. אם $v\notin span\,S$, אז $S\cup\{v\}$ קבוצה בת"ל בגודל $n+1$ במ"ו n מימדי, קיבלנו סתירה. לכן $v\in span\,S$ ו-S פורשת.

נניח בשלילה ש-S ת"ל, אז קיים $v\in S$ כך ש-$span\,S=span\,S\backslash\{v\}$, ואז $S\backslash\{v\}$ פורשת עם $n-1$ איברים במרחב n מימדי וקיבלנו סתירה.

- **משפט:** אם V מ"ו n־מימדי ו־W ת"מ של V אז:
  - כל קבוצה בת"ל ב־W היא בגודל n או פחות.
  - גם W הוא סוף מימדי ומתקיים $dimW\leq dimV$. מתקיים $dimW=dimV$ אם"ם $W=V$.
  - **מסקנה:** כל קבוצה בת"ל $V\subseteq W$ ניתנת להרחבה לבסיס של W.

כל קבוצה בת"ל של W היא תת קבוצה בת"ל של V. מכאן $n\geq|L|$.

נסמן $dimV=n$. מהמשפט קיים ל-W בסיס B שהוא בת"ל, לכן $dimW=|B|\leq n$. אם $W\neq V$ אז קיים $v\in V$ $v\notin W$. B היא בת"ל גם ב-V, ו-$v\notin span\,B=W$ ולכן $B\cup\{v\}$ בת"ל ב-V, ולכן $n\geq|B\cup\{v\}|$ כלומר $n-1\geq|B|$ ומכאן $dim\,W<dimV$.

ניקח $W=V$ במשפט הקודם.

- **משפט:** יהי V מ"ו, ונניח כי נתונה קבוצה סופית $G\subseteq V$ שפורשת את V, וקבוצה $L\subseteq G$ בת"ל ומוכלת ב-G. אזי קיים ל-V בסיס B כך ש-$L\subseteq B\subseteq G$.

נתבונן ב-L, היא בת"ל. אם היא גם פורשת, נבחר $B=L$ וסיימנו. אם לא, בהכרח קיים $v\in G$ $v\notin span\,L$ (אחרת, $G\subseteq span\,L$ ולכן גם $V=span\,G\subseteq span\,L$). כיוון ש-$L$ בת"ל ו-$v\notin span\,L$, נקבל כי $L\cup\{v\}\subseteq G$ בת"ל. אם היא פורשת, סיימנו. אם לא, נמשיך בתהליך - אחרי לכל היותר $|G|-|L|$ שלבים נסיים עם קבוצה בת"ל ופורשת $L\subseteq B\subseteq G$.

- **משפט:** יהי V מ"ו שנפרש ע"י n וקטורים. אזי כל קבוצה בת"ל L ב-V היא סופית ו- $n\geq|L|$.
- **משפט:** אם V מ"ו שנפרש ע"י קבוצה סופית G אז קיים ל-V בסיס סופי $B\subseteq G$. בפרט $dimV\leq|G|$.

ניקח $L=\emptyset$ ולפי המשפט, קיים ל-V בסיס סופי $B\subseteq G$.

משפט: תהי $L\subseteq W$ תת קבוצה בת"ל. אזי קיים ל-W בסיס B כך ש-$L\subseteq B$.

אם L פורשת את W, ניקח $B=L$ וסיימנו. אחרת, יש $w\in W$ $w\notin span\,L$. מכאן כי גם $L\cup\{v\}$ קבוצה בת"ל של וקטורים מ-W. אם היא פורשת את W, סיימנו. אחרת, נמשיך - מכיוון שכל קבוצה בת"ל של איברי W מגודל לכל היותר n איברים, אחרי לכל היותר $n-1$ צעדים נסיים עם קב' B בת"ל שפורשת את W ומכילה את L.

קואורדינטות ובסיסים סדורים

הגדרות על קואורדינטות ובסיסים סדורים

- **בסיס סדור:** תהי $L=(v_1,v_2,\dots,v_n)$ סדרה סופית, אזי L היא בסיס סדור אם"ם לכל וקטור $v\in V$ יש הצגה יחידה כ־$v=\sum\limits_{i=1}^{n}a_iv_i$ עבור $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{F}$.

- **וקטור קואורדינטות:** אם $\mathcal{B}=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ בסיס סדור ו־$v=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iv_i$ אז וקטור העמודה $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$ נקרא וקטור הקואורדינטות של V בבסיס $\mathcal{B}$ ומסומן $[v]_{\mathcal{B}}$.

טענות ומשפטים על קואורדינטות ובסיסים סדורים

- **משפט:** יהיו $\mathcal{B},\mathcal{C}$ שני בסיסים שונים. קיימת מטריצה יחידה $P_{n\times n}$ כך שמתקיים $\mathcal{B}P=\mathcal{C}$ וגם $P\,[v]_{\mathcal{C}}=[v]_{\mathcal{B}}$. לכל $v\in V$ המטריצה נתונה ע"י $P=\begin{bmatrix}| & | & & |\\ [c_1]_{\mathcal{B}} & [c_2]_{\mathcal{B}} & \dots & [c_n]_{\mathcal{B}}\\ | & | & & |\end{bmatrix}$.

השוויון $BP=C$ מתקיים אמ"מ $c_j=\sum_{i=1}^{n}b_ip_j^i=Bp_j$ כלומר רק אם העמודה ה-j-ית של P שווה לוקטור $[c_j]_B$ ולכן קיימת יחידות המטריצה P כך ש- $BC=P$. כלומר, $B[v]_B=v=C[v]_C=BP[v]_C=B(P[v]_C)$, לכן מיחידות ההצגה לפי בסיס נקבל $[v]_B=P[v]_C$ לכל $v\in V$.

- **מסקנה (מטריצות מעבר בסיס):** מהמשפט הקודם, P הפיכה ומתקיים $\mathcal{B}=\mathcal{C}P^{-1}\Rightarrow\mathcal{B}P=\mathcal{C}$, וכן $P\,[v]_{\mathcal{C}}=[v]_{\mathcal{B}}\Rightarrow P^{-1}\,[v]_{\mathcal{B}}=[v]_{\mathcal{C}}$. המטריצות P,P^{-1} נקראות מטריצות מעבר בסיס.

הוכחנו את המשפט הקודם עבור זוג בסיסים. נפעיל אותו על (C,B) ונקבל שקיימת מטריצה יחידה $CQ=B$. נכפול את שני הצדדים ב-P ונקבל $C(QP)=(CQ)P=BP=C$. המשפט הזה נכון עבור (C,C) ולכן קיימת מטריצה יחידה $CA=C$. מצד שני, זה מתקיים ע"י $A=I_n$. מכאן כי $PQ=I_n$. מכאן P הפיכה $Q=P^{-1}$ ולכן $P^{-1}[v]_B=[v]_C$.

העתקות לינאריות

הגדרות על העתקות לינאריות

- **העתקה לינארית:** יהיו W,V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. העתקה $T:W\to V$ נקראת העתקה לינארית אם היא מקיימת את שתי התכונות הבאות:
  - **אדטיביות:** לכל $v,w\in V$ מתקיים $T(v+w)=T(v)+T(w)$
  - **הומוגניות:** לכל $v\in V$ ולכל $a\in\mathbb{F}$ מתקיים $T(av)=aT(v)$.

- **איזומורפיזם:** העתקה שהיא לינארית, חח"ע ועל.
  - באופן שקול, אם T לינארית כך שקיימת $S:W\to V$ לינארית כך ש־$T\circ S=Id_W$ וגם $S\circ T=Id_V$, אז T איזומורפיזם.
  - איזומורפיזם מאפשר "לתרגם" טענות על וקטורים/קבוצות/תתי מרחבים ב־V לטעות מקבילות ב־W.
  - <u>הערה טרמינולוגית:</u> נאמר ש־V איזומורפי ל־W אם קיים איזומורפיזם $T:V\to W$.
    - * מ"ו תמיד איזומורפי לעצמו.
    - * אם V איזומורפי ל־W אז W איזומורפי ל־V.
    - * אם V איזומורפי ל־W ו־W איזומורפי ל־U אז V איזומורפי ל־U.
  - איזומורפיזם זה בתכלס יחס שקילות - מזה שכל שני מרחבים סוף ממדיים מאותו המימד הם איזומורפיים: אם W,V שניהם ממימד n אז הם איזומורפיים זה לזה, כי V איזומורפי ל־$\mathbb{F}^n_{col}$ וגם W איזומורפי ל־$\mathbb{F}^n_{col}$.

- **פונקציה הופכית:** אם x,y קבוצות, פונקציה $f:x\to y$ נקראת הפיכה אם קיימת $g:y\to x$ כך ש־$g\circ f=f\circ g=Id$, כלומר $g(f(x))=x$ וגם $f(g(y))=y$.
  - g נקבעת ביחידות, מסומנת $f^{-1}=y\to x$ ונקראת הפונקציה ההופכית.
  - מתקיים $\left(f^{-1}\right)^{-1}=f$.

- אם $\left\{ \begin{array}{c} f:x\to y \\ h:y\to z \end{array} \right\}$ פונקציות הפיכות אז גם ההרכבה שלהן $h\circ f$ הפיכה ומתקיים $(h\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ h^{-1}$.
- פונקציה היא הפיכה אם"ם היא חח"ע ועל.

- **תכונות של העתקות לינאריות:**
  - $T(0_V)=0_W$ מתקיים $T(0_v)+T(0_v)=T(0_v+0_v)=T(0_v)$, וחסר $T(0_v)$ ונקבל $T(0_v)=0_W$
  - $T(-v)=-T(v)$ מתקיים $T(-v)=T((-1)\cdot v)=-1\cdot T(v)=-T(v)$

- **גרעין של ה"ל:** תהי $T:V\to W$ ה"ל. הגרעין של T זו הקבוצה $ker(T)=\{v\in V|T(v)=0_W\}\subseteq V$.
  - הגרעין מספק אינפורמציה לגבי האם ההעתקה היא חח"ע. (אם"ם $kerT=0_v$)
  - מוצאים את הגרעין ע"י פתרון של מערכת משוואות הומוגנית.

- **תמונה של ה"ל:** תהי $T:V\to W$ ה"ל. התמונה של T זו הקבוצה $im(T)=\{T(v)|v\in V\}=\{w\in W|\exists v\in V \quad T(v)=w\}\subseteq W$
  - התמונה מספקת אינפורמציה לגבי האם ההעתקה היא על. (אם"ם $ImT=W$)
  - קבוצה פורשת לתמונה של ה"ל הנתונה ע"י מטריצה נתונה ע"י העמודות של המטריצה. הן לא בהכרח בסיס כי יתכן שהן ת"ל.

- **ייצוג של ה"ל באמצעות מטריצה:** יהיו W,V מ"ו סוף מימדיים מעל $\mathbb{F}$, יהי $\mathcal{B}=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ בסיס סדור ל-V, $\mathcal{C}=(w_1,w_2,\ldots,w_m)$ בסיס סדור ל-W, $T:V\to W$.
  - ניתן לייצג $w=T(v_1)=a_1^1w_1+\ldots a_n^m w_m$ וכך הלאה עבור כל האיברים ב-$\mathcal{B}$. קיימים a_j^i יחידים כך ש-$T(v_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i^j w_i$.
  - נשים לב ש-$\left[T\left(v_i\right)\right]_{\mathcal{C}}=\begin{bmatrix} a_i^1 \\ a_i^2 \\ \vdots \\ a_i^m \end{bmatrix}$, נקבל מטריצה $A=\left[a_j^i\right]\in M_{m\times n}$ שנראית כך: $A=\begin{bmatrix} | & | & & | \\ [T(v_1)]_{\mathcal{C}} & [T(v_2)]_{\mathcal{C}} & \ldots & [T(v_n)]_{C} \\ | & | & & | \end{bmatrix}$.
  - כדי לדעת מהו $[T(v)]_{\mathcal{C}}$ עבור v כללי נרשום את v בתור $v=\sum_{i=1}^{n}x_iv_i$, ואז $T(v)=T\left(\sum_{i=1}^{n}x_iv_i\right)=\sum_{i=1}^{n}x_iT\left(v_i\right)=$ $\sum_{i=1}^{n}x_i\left(\sum_{j=1}^{m}a_j^iw_j\right)=\sum_{j=1}^{m}\overbrace{\left(\sum_{j=1}^{n}a_j^ix_i\right)}^{[T(v)]_{\mathcal{C}}}w_j$.
  - כלומר, $[T(v)]_{\mathcal{C}}=Ax=A\left[(v)\right]_{\mathcal{B}}$.

- **אלגברה של ה"ל והקשר למטריצות:** יהיו V,W מ"ו, $T,S:V\to W$ ה"ל, $c\in\mathbb{F}$ סקלר.
  - חיבור ה"ל: נגדיר העתקה $(T+S):V\to W$ ע"י $(T+S)(v)=T(v)+S(v)$.
  - כפל ה"ל בסקלר: נגדיר העתקה $cT:V\to W$ ע"י $(cT)(v)=cT(v)$.
  - הרכבת ה"ל: בהנתן מ"ו U,V,U מעל $\mathbb{F}$ וה"ל $U\xrightarrow{S}V\xrightarrow{T}W$, אפשר להסתכל על $(S\circ T):U\to W$ שמוגדרת ע"י $(S\circ T)(v)=S\left(T\left(v\right)\right)$
  - אם T,S,U לינאריות אז גם הסכום שלהן, הכפל שלהן בסקלר וההרכבה שלהן לינאריות.

- **אופרטורים לינאריים:** ה"ל מהמרחב לעצמו. ניתן להרכיב אופרטורים, וכל אופרטור הוא הפיך.

יחידות: (תמונת מפסים הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n_{col}$, אזי יש 2 מטריצות A,B כך ש-$T(x)=Ax$ ו-$T(B)=Bx$ לכל $x\in\mathbb{F}^n_{col}$ אז בפרט עבור $x=e_i$ נקבל כי $b_i = Be_i = T(e_i) = Ae_i = a_i$. כלומר, העמודה ה-i-ית של A (a_i) שווה לעמודה ה-i-ית של B (b_i). זה נכון לכל $1\leq i\leq n$, ולכן $A=B$. מעבר לכך, הטיעון מראה שאם קיימת מטריצה A שמקיימת $T(x)=Ax$ אז בהכרח העמודה ה-i-ית של A היא $T(e_i)$.
קיום: נגדיר מטריצה $A_{m\times n}$ ע"י $A=[T(e_1)|\cdots|T(e_n)]$ ונתבונן בה"ל T_A. מהגדרת A, מתקיים $T_A(e_i)=Ae_i=T(e_i)$ לכל $1\leq i\leq n$.
כלומר, T_A ו-T זהות על איברי הבסיס הסטנדרטי, ולכן $T(x)=T_A(x)=Ax$ לכל $x\in\mathbb{F}^n_{col}$. (וההתאמה $A\to T_A$ היא התאמה חח"ע ועל בין מטריצות $A\in M_{m\times n}$ לבין ה"ל $T:\mathbb{F}^n_{col}\to\mathbb{F}^n_{col}$.

נסמן $v=\sum_{i=1}^{n}x^i b_i$ ונגדיר ה"ל $T(v)=\sum_{i=1}^{n}x^i w_i$, עלינו להראות שהיא מקיימת $T(b_i)=w_i$.
נשים לב שמתקיים: $b_i = 0\cdot b_1+\ldots+1\cdot b_i+\ldots+0\cdot b_n$, ולכן $T(b_i)=0\cdot w_1+\cdots+1\cdot w_i+\cdots+0\cdot w_n$. נותר להראות ש-$T$ לינארית. אם $c\in\mathbb{F}$ אז מתקיים $cv=\sum_{i=1}^{n}(cx_i)b_i$ ולכן $T(cv)=\sum_{i=1}^{n}(cx_i)w_i=c\left(\sum_{i=1}^{n}x^iw_i\right)=cT(v)$. (הומוגניות)
אם $u=\sum_{i=1}^{n}y^ib_i$ אז $v+u=\sum_{i=1}^{n}(x^i+y^i)b_i$ ולכן $T(v+u)=\sum_{i=1}^{n}(x^i+y^i)w_i=\sum_{i=1}^{n}x^iw_i+\sum_{i=1}^{n}y^iw_i=T(v)+T(u)$ (אדיטיביות)

יהי $v\in V$, ונרשום אותו כצ"ל של איברי הבסיס: $v=\sum_{i=1}^{n}x^ib_i$. אזי מתקיים: $T(v)=T\left(\sum_{i=1}^{n}x^ib_i\right)=\sum_{i=1}^{n}x^iTb_i=\sum_{i=1}^{n}x^iSb_i=S\left(\sum_{i=1}^{n}x^ib_i\right)=S(v)$

מאחר ו-$T(0_V)=0_W$, נקבל $0_W\in ImT$. יהיו $w,w'\in ImT$, אזי קיימים $v,v'\in V$ כך ש- $T(v)=w$, $T(v')=w'$. מכיוון ש- $T(v+v')=T(v)+T(v')=w+w'$ נקבל כי גם $(w+w')\in ImT$. אם $c\in\mathbb{F}$ אז $T(cv)=cT(v)=cw$, ולכן גם $cw\in ImT$.

$kerT$
מאחר ו-$T(0_V)=0_W$. אם $v\in kerT$, $c\in\mathbb{F}$ אז $T(cv)=cT(v)=c\cdot0_W=0_W$ ולכן גם $cv\in kerT$. אם $u,v\in kerT$ אז $T(u+v)=T(u)+T(v)=0_W+0_W=0_W$ ולכן גם $u+v\in kerT$.

טענות ומשפטים על העתקות לינאריות

- **משפט - העתקה לינארית נקבעת על בסיס:** אם V מ"ו סוף מימדי ו-$\mathcal{B}=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ בסיס סדור ו-$T,S:V\to W$ העתקות לינאריות כך ש-$T(v_i)=S(v_i)$ לכל $1\leq i\leq n$ אז $T(v)=S(v)$.
- **מסקנה:** אם $S:\mathbb{F}^n_{col}\to\mathbb{F}^n_{col}$ העתקה לינארית אז קיימת מטריצה יחידה $A_{m\times n}$ כך ש-$S(x)=Ax$.
- **משפט:** יהיו V,W מ"ו מעל $\mathbb{F}$, $\mathcal{B}=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ בסיס ל-V, $W\in(w_1,w_2\ldots,w_n)$ וקטורים. אז קיימת העתקה לינארית יחידה $T:V\to W$ כך ש-$T(v_i)=w_i$.

1: אם T חח"ע ו-$x\in kerT$ אז $T(x)=T(0_V)$ ולכן $x=0_V$. לכן $kerT\subseteq\{0_V\}$, אבל $0_V\in kerT$ לכן $kerT=\{0_V\}$. 2: אם $kerT=\{0_V\}$ ו-$T(x)=T(y)$ אז $T(x-y)=T(x)-T(y)=0_W$ ולכן $x-y\in kerT$, כלומר $x-y=0_V$ או $x=y$, משמע T חח"ע.

- **למה:** הגרעין של ה"ל $T:V\to W$ הוא תת מרחב של V.
- **למה:** התמונה של ה"ל $T:V\to W$ היא תת מרחב של W.
- **למה:** T חח"ע אם"ם $ker(T)=\{0_V\}$.

נוכיח באמצעות הכלה דו כיוונית. כיוון 1: $T(v_1),\ldots,T(v_n)\in ImT$ ולכן $span(T(v_1),\ldots,T(v_n))\in ImT$. כיוון 2: אם $w\in ImT$ אז קיים $v\in V$ כך ש-$T(v)=w$. מכיוון ש-$(v_1,\ldots,v_n)$ קבוצה פורשת, קיימים $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{F}$ כך ש- $v=\sum_{i=1}^{n}a^iv_i$, ולכן $T(v)=T\left(\sum_{i=1}^{n}a^iv_i\right)=\sum_{i=1}^{n}a^iT(v_i)\in span\{T(v_1),\ldots,T(v_n)\}$ ולכן $ImT\in span\{T(v_1),\ldots,T(v_n)\}$.

- **למה:** אם $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ קבוצה הפורשת את V, אז $im(T)=span\{T(v_1),T(v_2),\ldots,T(v_n)\}$.
- **משפט המימדים:** יהי V מ"ו סוף מימדי מעל $\mathbb{F}$, W מ"ו כלשהו מעל $\mathbb{F}$, $T:V\to W$ ה"ל. אזי $im(T)$ סוף מימדית ומתקיים $dimV=dim(ker(T))+dim(im(T))$.
- **מסקנות ממשפט המימדים:** יהיו V,W מ"ו סוף מימדיים מעל $\mathbb{F}$, $T:V\to W$ ה"ל:
  - אם $dimV>dimW$ אז $dim\ ker(T)>0$ ו-T לא חח"ע. כלומר, העתקה לינארית ממימד גדול למימד קטן לא יכולה להיות חח"ע. $dim\ kerT=dimV-dimImT\geq dimV-dimW>0$ ולכן $kerT\neq0_V$ ולא חח"ע.
  - אם $dimV<dimW$ אז $dim\ im(T)<dimW$ ו-T לא על. כלומר, העתקה לינארית ממרחב עם מימד קטן למרחב עם מימד גדול לא יכולה להיות על. $dimImT=dimV-dimkerT<dimW$ ולכן $T\neq W$ ו-T לא על.
  - אם $dimV=dimW$ אז T חח"ע אם"ם T על. מתקיים $dimV=dim\ kerT+dimImT$. T חח"ע אם"ם $dim\ KerT=0$ וזה קורה אם"ם $dimImT=dimV$ וזה קורה אם"ם T על.
- **משפט:** יהיו V,W מ"ו סוף מימדיים מעל $\mathbb{F}$, $\mathcal{B}=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ בסיס סדור ל-V, $\mathcal{C}=(w_1,w_2,\ldots,w_m)$ בסיס סדור ל-W, אזי קיימת מטריצה יחידה $A_{m\times n}$המקיימת $[T(v)]_{\mathcal{C}}=A[v]_{\mathcal{B}}$, המטריצה הזו מסומנת ב-$[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ והיא נתונה באופן מפורש ע"י: $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}=\begin{bmatrix} | & | & & | \\ [T(v_1)]_{\mathcal{B}} & [T(v_2)]_{\mathcal{B}} & \ldots & [T(v_n)]_{\mathcal{B}} \\ | & | & & | \end{bmatrix}$.

הוכחנו קיום, נוכיח יחידות: נניח A,D מטריצות כך ש- $[T(v)]_C=A[v]_B=D[v]_B$ לכל $v\in V$. יהי $1\leq i\leq n$. נציב $v=v_i$, ונקבל $[v]_B=e_i$, ולכן $[T(v_i)]_C=Ae_i=a_i=De_i=d_i$
קיבלנו שהעמודה ה-i-ית של A שווה לעמודה ה-i-ית של D לכל i, לכן $A=D$.

- **משפט:** יהיו U,V,W מ"ו סוף מימדיים מעל $\mathbb{F}$. $\mathcal{B}=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ בסיס סדור ל-U, $\mathcal{C}=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ בסיס סדור ל-V, $\mathcal{D}=(w_1,w_2,\ldots,w_m)$ בסיס סדור ל-W, וה"ל $U\xrightarrow{S}V\xrightarrow{T}W$, אזי $[S\circ T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}\cdot[u]_{\mathcal{B}}=[S]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}}[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$.
- **טענה:** $T^{-1}:W\to V$ לינארית. (הפונקציה ההופכית של ה"ל היא גם ה"ל).
- **משפט:** אם $T:V\to W$ איזומורפיזם, $S\subseteq V$ בת"ל / פורשת / בסיס אם"ם $T(S)$ בת"ל / פורשת / בסיס.
- **משפט:** אם $T:V\to W$ איזומורפיזם, V סוף מימדי אם"ם W סוף מימדי ואז $dimV=dimW$.
- **מסקנה:** אם V,W מ"ו אז $Hom(V,W)$ (מרחב ההעתקות מ-V ל-W) הוא סוף מימדי ומתקיים $dim\ Hom(V,W)=dimV\cdot dimW$.

משפט: $Hom(V,W)$ הוא מ"ו מעל $\mathbb{F}$.

- **משפט:** אם W,V סוף ממדיים, $\mathcal{B}=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ בסיס סדור ל-V, $\mathcal{C}=(w_1,w_2,\ldots,w_m)$ בסיס סדור ל-W, $T:V\to W$ ה"ל, אז T חח"ע ועל אם"ם $dimV=dimW$ והמטריצה הריבועית $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ הפיכה, ואף מתקיים $[T^{-1}]^{C}_{B}=([T]^{B}_{C})^{-1}$.

נסמן $[S]^C_D=A_{m\times n}$, $[T]^B_C=B_{n\times l}$, $[S\circ T]^B_D=E_{m\times l}$. המכפלה AB מוגדרת ויוצרת מטריצה בגודל $m\times l$, וגם המטריצה E היא בגודל $m\times l$. נשים לב שלכל $u\in V$ מתקיים $[S\circ T]^B_D[u]_B=[(S\circ T)(u)]_D=[S(T(u))]_D=[S]^C_D[T(u)]_C=[S]^C_D([T]^B_C[u]_B)=([S]^C_D\cdot[T]^B_C)[u]_B$, לכן ראינו שלכל העתקה $R:U\to W$ קיימת מטריצה יחידה A כך ש $[R(u)]_D=A[u]_B$. כיוון 2: השוויון שהראינו הודם מראה שלמור $R=S\circ T$ יש 2 מטריצות המקיימות את התנאי - $[S\circ T]^B_D$, ו-$[S]^C_D\cdot[T]^B_C$, ולכן מיחידות הן מתלכדות.

נבחר B בסיס סדור ל-V ו-C בסיס סדור ל-W. נקבל איזומורפיזם $Hom(V,W)\to M_{m\times n}$, מכאן $Hom(V,W)$ הוא סוף מימדי, ומתקיים:
$dim\ Hom(V,W)=dim\ M_{m\times n}=m\cdot n=dimW\cdot dim\ V$

מרחבים דואליים

הגדרות על מרחבים דואליים

- **המרחב הדואלי:** המרחב $Hom(V,\mathbb{F})=P(\varphi:V\to\mathbb{F})$ (אוסף כל הה"ל מהמרחב לשדה) נקרא המרחב הדואלי ל-V ומסומן $V^\vee$.
  - $V^\vee$ הוא מ"ו. אם V סוף מימדי אז גם $V^\vee$ סוף מימדי. $dimV^\vee=dim\ Hom(V,\mathbb{F})=dimV\cdot dim\mathbb{F}=dimV$.
- **פונקציונל:** האיברים במרחב הדואלי (שהם פונקציות/ה"ל מהמרחב לשדה) נקראים פונקציונלים, ומסומנים בד"כ באותיות יווניות קטנות.
- **בסיס דואלי:** יהי V מ"ו ממימד סופי מעל $\mathbb{F}$ ויהי $\mathcal{B}=(v_1,v_2,\dots,v_n)$ בסיס סדור ל-V. נגדיר n פונקציונלים לינאריים על V $\left(\varphi^1,\varphi^2,\dots,\varphi^n\right)$ כך שנדרוש שלכל $1\le i\le n$ יתקיים $\varphi^i(v_j)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$. אז $\mathcal{B}^\vee=\left(\varphi^1,\varphi^2,\dots,\varphi^n\right)$ נקרא בסיס דואלי ומהווה בסיס ל-$V^\vee$.
- **מאפס:** יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, תהי $S\subseteq V$ קבוצה. המאפס של S זו הקבוצה $S^0=\{\varphi\in V^\vee|\varphi(s)=0\ \ \forall s\in S\}$ (כל הפונקציונלים שמאפסים איברים ב-S - כל המשוואות הלינאריות ש-S מקיימת)

  פונקציונלים שמאפסים כל וקטור

- **קבוצת האפסים:** יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, תהי $L\subseteq V^\vee$ קבוצה. קבוצת האפסים של L זו הקבוצה $L_0=\{v\in V|\varphi(v)=0\ \ \forall\varphi\in L\}$ (כל הוקטורים שהפונקציונלים מאפסים אותם - כל הפתרונות למשוואות ההומוגניות שמוגדרות ע"י איברי L).

  וקטורים שמאפסים כל פונקציונל

- אם $\varphi\in V^\vee$, מתקיים $\varphi_0=\{v\in V|\varphi(v)=0=ker(\varphi)\}$ באחד משני מקרים:
  - אם φ הוא פונקציונל האפס ואז $ker(\varphi)=v$
  - אם φ אינו פונקציונל האפס, ואז אם V סוף מימדי נקבל $dim\ ker(T)=dimV-dim\ im(\varphi)=dim(V)-1$.
- גרעין של $0\neq\varphi\in V^\vee$ נקרא **על מישור** (תת מרחב עם מימד אחד פחות מהמימד המקורי). באופן יותר כללי, אם $L=\{\varphi^1,\varphi^2,\dots,\varphi^n\}$ אז $L_0=\left\{v\in V|\varphi^i(v)=\dots=p^k(v)=0\right\}=\bigcap_{i=1}^{k}ker\left(\varphi^i\right)$.

טענות ומשפטים על מרחבים דואליים

- **למה:** יהיו $\left(\varphi^1,\varphi^2,\dots,\varphi^n\right)$ מוגדרים באופן הבא $\varphi^i(v_j)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$. אזי:

  יהי $v\in V$, נציג אותו ביחס ל-$\mathcal{B}$ כ-$v=\sum_{i=1}^n x^i v_i$.
  נפעיל על שני האגפים את הפונקציונל ונקבל:
  $\varphi^j(v)=\varphi^j\left(\sum_{i=1}^n x^i v_i\right)=\sum_{i=1}^n x^i\varphi^j(v_i)=\sum_{i=1}^n x^i\delta_i^j=x_j$

  - לכל $v\in V$ מתקיים $v=\sum_{i=1}^{n}\varphi^i(v)\cdot v_i$ (כלומר ש-$\varphi^i(v)$ הוא הקואורדינטה ה-i-ית של v ביחס ל-$\mathcal{B}$, כלומר $\varphi^i=[v_i]_\mathcal{B}$)
  - לכל $\varphi\in V^\vee$ מתקיים $\varphi=\sum_{i=1}^{n}\varphi(v_i)\cdot\varphi^i$.

    יהי $\varphi\in V$, ונסמן $\psi=\sum_{i=1}^n\varphi(v_i)\cdot\varphi^i$, עלינו להראות $\varphi=\psi$. מספיק להראות לכל $1\le j\le n$ מתקיים
    $\psi(v_j)=\varphi(v_j)$ כי ה"ל שמתלכדות על בסיס הן שוות. לכן: $\psi(v_j)=\left(\sum_{i=1}^n\varphi(v_i)\cdot\varphi^i\right)(v_j)=\sum_{i=1}^n\varphi(v_i)\varphi^i(v_j)=\sum_{i=1}^n\varphi(v_j)\delta_j^i=\varphi(v_j)$

- **משפט:** $\mathcal{B}^\vee=\left(\varphi^1,\varphi^2,\dots,\varphi^n\right)$ מהווה בסיס ל-$V^\vee$.

  מכיוון שאנחנו יודעים ש-$dimV^\vee=n$ מספיק להוכיח ש-$(\varphi^1,\dots,\varphi^n)$ פורשת את $V^\vee$. יהי $\varphi\in V^\vee$. אזי מהלמה מתקיים כי $\varphi=\sum_{i=1}^n\varphi(v_i)\varphi^i$
  הוא צ"ל של $\varphi^1,\dots,\varphi^n$ ולכן $V^\vee=span(\varphi^1,\dots,\varphi^n)$.

- **למה:** יהי V מ"ו סוף מימדי.
  - $v\in V=0$ אם"ם לכל $\varphi\in V^\vee$ מתקיים $\varphi(v)=0$.

    כיוון 1: אם $v=0_V$ אזי לכל $\varphi\in V^\vee$ מתקיים $\varphi(v)=0$. כיוון 2: ניקח B בסיס סדור של V, $B^\vee$ בסיס דואלי.
    אזי מתקיים $v=\sum_{i=1}^n\varphi^i(v)v_i=\sum_{i=1}^n 0\cdot v_i$ כלומר אם v, $v=0_V$.

  - $\varphi\in V^\vee=0_{V^\vee}$ (פונקציונל האפס) אם"ם $\varphi(v)=0$ לכל $v\in V$. ישירות מהגדרת פונקציונל האפס.
- **משפט:** יהי V מ"ו סוף מימדי, $\mathcal{B}^\vee=\left(\varphi^1,\varphi^2,\dots,\varphi^n\right)$ בסיס ל-$V^\vee$. אזי קיים <u>בסיס יחיד</u> $\mathcal{B}=(v_1,v_2,\dots,v_n)$ ל-V התואם ל-$\mathcal{B}^\vee$.

  נגדיר ה"ל T ע"י $T(v)=\begin{bmatrix}\varphi^1(v)\\ \vdots\\ \varphi^n(v)\end{bmatrix}$. נסמן ב-$(e_1,\dots,e_n)$ את הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n_{col}$. אנחנו מחפשים בסיס ל-V כך ש-
  $\delta_i^j=\varphi^i(v_j)$ לכל $1\le i,j\le n$. נשים לב שזה שקול ל-$T(v_i)=e_i$ לכל $1\le i\le n$. נוכיח כי T חח"ע: יהי $v\in V$ כך ש-$T(v)=0$. אזי
  $\varphi^1(v)=\dots=\varphi^n(v)$ מכיוון ש-$(\varphi^1,\dots,\varphi^n)$ בסיס ל-$V^\vee$, כל $\varphi\in V^\vee$ ניתן להצגה כ-$\varphi=\sum_{i=1}^n a_i\varphi^i$ עבור $a_i\in\mathbb{F}$. אבל אז
  $\varphi(v)=\left(\sum_{i=1}^n a_i\varphi^i\right)(v)=\sum_{i=1}^n a_i\varphi^i(v)=0$, ולכן $\varphi(v)=0$ לכל $\varphi\in V^\vee$, ומהלמה נובע $v=0$. כיוון ש-$dimV=dim\mathbb{F}^n_{col}=n$, ממשפט המימדים
  השני נובע כי T על ולכן הפיכה, כלומר קיימים $v_1,\dots,v_n$ <u>יחידים</u> כך ש-$T(v_i)=e_i$. הוקטורים $(v_1,\dots,v_n)=(T^{-1}(e_1),\dots,T^{-1}(e_n))$ מהווים בסיס ל-V כי הם
  תמונה תחת האיזומורפיזם $T^{-1}:\mathbb{F}^n_{col}\to V$ של הבסיס הסטנדרטי ל-$\mathbb{F}^n_{col}$.

- **למה:** יהיה V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, $S,T\subseteq V$, אזי:
  - 1 - S^0 הוא תת מרחב של $V^\vee$
  - 2 - אם $S\subseteq T$ אז $T^0\subseteq S^0$

(1) פונקציית האפס מתאפסת על כל המרחב ולכן בפרט שייך ל-S^0 (לא ריקה). אם $\psi\in S^0$ ו-$c\in\mathbb{F}$, אז לכל $v\in V$ מתקיים $0=\varphi(v)=\psi(v)$ ולכן גם $(\varphi+\psi)(v)=\varphi(v)+\psi(v)=0$ וגם $(c\varphi)(v)=c\cdot\varphi(v)=c\cdot 0=0$ לכל $v\in V$ ולכן גם $\varphi+\psi\in S^0$ (אדיטיביות) ו-$c\varphi\in S^0$ (הומוגניות).

(2) אם $S\subseteq T$ ו-$\varphi\in T^0$ אז $\varphi(v)=0$ לכל $v\in T$ ולכן גם $\varphi(v)=0$ לכל $v\in S$ ולכן $\varphi\in S^0$.

(3) נראה בהכלה דו כיוונית: כיוון 1: $S\subseteq span S$ ולכן מהסעיף הקודם $(span S)^0\subseteq S^0$. כיוון 2: אם $\varphi\in S^0$ ו-$v\in span S$ אז קיימים וקטורים $v_1,\dots,v_n\in S$ וסקלרים $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{F}$ כך ש-$v=\sum_{i=1}^n a_iv_i$, אז: $\varphi(v)=\varphi\left(\sum_{i=1}^n a_iv_i\right)=\sum_{i=1}^n a_i\varphi(v_i)=\sum_{i=1}^n a_i\cdot 0=0$ ולכן גם $\varphi\in(span S)^0$.

$$(U+W)^0=U^0\cap W^0$$
$$(X+Y)_0=X_0\cap Y_0$$
$$(X\cap Y)_0=X_0+Y_0$$
$$(U\cap W)^0=U^0+W^0$$

- (3) $S^0=(span\,(S))^0$

- **למה:** יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, ויהיו $L,M\subseteq V^\vee$. אז:
  - L_0 הוא תת מרחב של V. — קבוצת הפתרונות של כל המשוואות ב-L היא תת מרחב.
  - אם $L\subseteq M$ אז $M_0\subseteq L_0$. — ככל שיש יותר משוואות, קבוצת הפתרונות קטנה יותר.
  - $L_0\in span(L_0)$ — אוסף הפתרונות של קבוצת משוואות זהה לאוסף הפתרונות של כל הצ"ל שלה.
- **משפט המימדים למאפסים:** יהי V סוף מימדי, $W\leq V$ תת מרחב. אזי מתקיים $dimW+dimW^0=dimV=dimV^\vee$. כלומר, אם קיים $dimV=n$ ו־$dimW=k$, זה אומר שהפתרונות של k משוואות בת"ל הוא תת מרחב ממימדת $n-k$.
- **משפט:** יהי V מ"ו סוף מימדית $X\leq V^\vee$, אזי $dimV=dimX+dimX_0=dimV^\vee$.
- **מסקנה:** יהי V מ"ו סוף מימדי מעל $\mathbb{F}$, אזי:
  - אם $W\leq V$ אז $(W^0)_0=W$ — יהי $w\in W$, אזי לכל $\varphi\in W^0$ מתקיים $\varphi(w)=0$ ולכן $w\in(W^0)_0$, כלומר $W\subseteq(W^0)_0$. לכן מתקיים $dim(W^0)_0=dim\,V-dim(W^0)=dim\,V-(dimV-dimW)=dimW$
  - אם $X\leq V^\vee$ אז $(X_0)^0=X$ — באופן דומה.
- **מסקנה:** עבור $A_{m\times n}$ שעבורה קיימת העתקה $T_A=\mathbb{F}^n_{col}\to\mathbb{F}^m_{col}$ כך שמתקיים $T_A=Ax$, ממשפט המימדים מתקיים $dim\,(R_0\,(A))+dim\,(R\,(A))=n$ וגם $dim\,(R\,(A))=dim\,(C\,(A))$, כלומר המימד של מרחב השורות שווה למימד של מרחב העמודות. המימד נקרא **הדרגה** של המטריצה.

דטרמיננטות

הגדרות על דטרמיננטות

- **פונקצית נפח:** יהי V מ"ו ממימד n מעל $\mathbb{F}$. הפונקציה $W:\underbrace{V\cdot V\cdots V}_{n\ times}\to\mathbb{F}$ נקראת פונקצית נפח ומקיימת את שני התנאים:
  - מולטי לינאריות: לכל $v_i,v_{i+1},\dots,v_n\in V$ מתקיים $W(v_i,v_{i+1},\dots,v_n)$ לינארית.
  - $W(v_i,v_{i+1},\dots,v_n)=0$ אם $v_i=v_j$.
- **דטרמיננטה:** עבור n קבוע, דטרמיננטה היא פונקציה $det:M_n(\mathbb{F})\to\mathbb{F}$ (מקבלת מטריצה ריבועית ופולטת סקלר). נחשוב עליה כפונקציה של n השורות של המטריצה, ונרשום $det(A)=det(a^1,a^2,\dots a^n)$. דטרמיננטה מקיימת את 3 התכונות הבאות:
  - מולטי לינאריות בשורות: לכל $1\leq i\leq n$ ולכל $(a^1,a^2,\dots a^n)\in\mathbb{F}^n_{row}$ הפונקציה $a\to det(a^1,a^2,\dots a^n)$ היא לינארית בשורה ה־iית כאשר מחזיקים את שאר השורות קבועות.
    - כלומר מתקיים $det(a^1,a^2,\dots a^{i-1},\boldsymbol{\lambda a^i},a^{i+1},\dots,a^n)=\lambda det(a^1,a^2,\dots a^n)$
    - ומתקיים $det(a^1,a^2,\dots a^{i-1},\boldsymbol{a^i+b},a^{i+1},\dots,a^n)=det(a^1,a^2,\dots a^{i-1},\boldsymbol{a^i},a^{i+1},\dots,a^n)+det(a^1,a^2,\dots a^{i-1},\boldsymbol{b},a^{i+1},\dots,a^n)$.
  - מתחלפת: לכל $(a^1,a^2,\dots a^n)$ אם מתקיים $a^i=a^j$ עבור $i\neq j$ אז $det(a^1,a^2,\dots a^n)=0$, כלומר אם יש שתי שורות זהות אז $det(A)=0$.
  - נרמול: מתקיים $det(e^1,\dots,e^n)=det(I_n)=1$.
- **הערה ואזהרה:** לא מתקיים $det(A+B)=det(A)+det(B)$.

הוכחה באינדוקציה. עבור $n=2$: נתבונן ב-$det(a^1+a^2,a^1+a^2)$, כיוון ש-det מתחלפת נקבל שהוא שווה לאפס. אך ממולטי לינאריות נקבל:
$0=det(a^1+a^2,a^1+a^2)=det(a^1+a^2,a^1)+det(a^1+a^2,a^2)=$
$det(a^1,a^1)+det(a^1,a^2)+det(a^2,a^1)+det(a^2,a^2)$ (מתאפס, מתאפס)
כלומר קיבלנו: $0=det(a^1,a^2)+det(a^2,a^1)$, נעביר אגפים ונקבל $det(a^1,a^2)=-det(a^2,a^1)$. במקרה הכללי נפעל באותו אופן על השורות i,j כששאר השורות לא משתנות.

טענות ומשפטים על דטרמיננטות

- **למה ־ אנטי סימטריות בשורות.** אם $A'\in M_n(\mathbb{F})$ מתקבלת מ־A ע"י החלפת השורה ה־i בשורה ה־j, אז $det(A')=-det(A)$.
- **משפט:** תהי $det:M_n(\mathbb{F})\to\mathbb{F}$ פונקצית דטרמיננטה ותהי $A_{n\times n}$ מטריצה שאינה הפיכה. אזי $det(A)=0$.

הדרגה קטנה מ-n לכן קיימת שורה a^i שהיא צ"ל של שאר השורות: $a_i=\sum_{k\neq i}c_ka^k$. ממולטי לינאריות נקבל:
$det A=det(a_1,\dots,a_n)=det(a_1,\dots,a^{i-1},\sum_{k\neq i}c_ka^k,a^{i+1},\dots a^n)=$
$\sum_{k\neq i}c_k det(a^1,\dots,a^{i-1},a^k,a^{i+1},\dots,a^n)$. בכל מחובר הוקטור a^k מופיע פעמיים (במקומו הטבעי ובמקום ה-k) לכן מתחלפות כל אחד מהמחוברים הוא 0 וגם $det A=0$.

- **משפט ־ דטרמיננטה ופעולות אלמנטריות:** תהי $det:M_n(\mathbb{F})\to\mathbb{F}$ פונקצית דטרמיננטה ותהי $A_{n\times n}$.
  - אם A' מתקבלת מ־A ע"י הוספת כפולה של שורה אחת לשורה אחרת אז $det(A')=det(A)$.

(עבור בה"כ $j<i$: השורות של A' הן $(a^1,\dots,a^{i-1},a^i+ca^j,\dots,a^j,\dots a^n)$), מכך ש-det לינארית בשורה ה-i ומתחלפת, נקבל:
$det A'=det(a^1,\dots,a^i+ca^j,\dots,a^n)=det(a^1,\dots,a^i,\dots,a_n)+c\,det(a^1,\dots,a^j,\dots,a^n)=det(a^1,\dots,a^i,\dots,a^j,\dots,a^n)=det A$

מולטילינאריות של det בשורה ה-i נקבל: $det A' = det(a^1,..,ca^i,..,a^n) = c\,det(a^1,..,a^i,...,a^n) = c\,det A$

עם בחירת $i<j$ מהלמה: $det A' = det(a^1,..,a^j,..,a^i,..a^n) = -det(a^1,...,a^n) = -det A$

– אם A' מתקבלת מ־A ע"י הכפלת שורה בקבוע $c \neq 0$ אז $det(A') = c \cdot det(A)$.
– אם A' מתקבלת מ־A ע"י החלפת שתי שורות אז $det(A') = -det(A)$.

- **מסקנה ־ דטרמיננטה של מטריצות אלמנטריות:** תהי $det : M_n \to \mathbb{F}$ פונקצית דטרמיננטה ותהי $E \in M_n$ מטריצה אלמנטרית. אזי:
  – אם E מתקבלת מ־I_nע"י הוספת כפולה של שורה לשורה אחרת אז $det(E) = 1$.
  – אם E מתקבלת מ־I_n ע"י הכפלת שורה בקבוע $c \neq 0$ אז $det(E) = c$
  – אם E מתקבלת מ־I_n ע"י החלפת שתי שורות אז $det(E) = -1$.

ונציב $A=I_n$ במשפט הקודם

- **משפט ־ מכפלת הדטרמיננטה:** תהי $det : M_n \to \mathbb{F}$ פונקצית דטרמיננטה ותהינה $A, B \in M_n$. אזי $det(AB) = det(A)det(B)$.
- **מסקנה:** תהי $det : M_n \to \mathbb{F}$ פונקצית דטרמיננטה ותהי $A_{n\times n}$. אזי A הפיכה אם"ם $det(A) \neq 0$.
- **למה:** תהיינה $det, \widetilde{det} : M_n \to \mathbb{F}$ שתי פונקציות דטרמיננטה ותהי $E \in M_n$ מטריצה אלמנטרית. אזי $det(E) = \widetilde{det}(E)$.
- **משפט ־ יחידות הדטרמיננטה:** תהיינה $det, \widetilde{det} : M_n \to \mathbb{F}$ שתי פונקציות דטרמיננטה. אזי $det(A) = \widetilde{det}(A)$ לכל $A \in M_n$.
- **משפט ־** תהי $n > 1$ ותהי $det_{n-1} : M_n \to \mathbb{F}$ פונקצית דטרמיננטה. נגדיר פונקציה $det_n : M_n \to \mathbb{F}$ ע"י $det_n A = \sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{1+i}a_1^i det_{n-1}A(i|1)$ אז הפונקציה det_n היא פונקצית דטרמיננטה.
- **משפט ־ מולטי לינאריות של דטרמיננטה:** נסמן $1 \leq i \leq n$ ונסמן $f^i : M_n \to \mathbb{F}$ את הפונקציה $f^i(A) = a_1^i det_{n-1}A(i|1)$, מתקיים $det_n \sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}f^i$.
- **משפט ־ התחלפות של דטרמיננטה:** תהי $A \in M_n$ כך שקיימים $1 \leq j < k \leq n$ שעבורם $a^j = a^k = a$. מתקיים $det_n(A) = 0$.
- **משפט ־ נרמול של דטרמיננטה:** אם $A = I_n$ אז $det_n A = 1$.
- **מסקנה ־ קיום פונקציית דטרמיננטה:** לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת $det_n : M_n \to \mathbb{F}$.
- **דטרמיננטות כפונקציה של עמודות:** תהי $A_{n\times m}$, המטריצה המשוחלפת של A ־ היא המטריצה $A^t \in M_{m\times n}$ המקיימת $(A^t)_j^i = A_i^j$.
- **למה ־ תכונות השחלוף:** תהיינה $A, B \in M_{n\times m}$ ותהי $C_{m\times l}$, ויהיו $c, d \in \mathbb{F}$. אזי:
  – $(cA + dB)^t = cA^t + dB^t$ ־ כלומר העתקת השחלוף היא העתקה לינארית.
  – $(A^t)^t = A$
  – $(BC)^t = C^t B^t$
- **למה ־ השפעת השחלוף על מטריצות אלמנטריות:** תהי E מטריצה אלמנטרית: אם E מתאימה לפעולת הוספת שורה אחרת/כפל שורה בסקלר/החלפת שורות אז E^t גם היא מטריצה המתאימה לאותה פעולה.
- **מסקנה:** אם E מטריצה אלמנטרית, אז $det(E) = det(E^t)$.
- **משפט:** תהי $A \in M_n$, אזי מתקיים $det(A) = det(A^t)$.

A הפיכה רק אם A^t הפיכה (כי הפרגה שלהם לההה). אם A לא הפיכה גם A^t לא הפיכה ולכן $det(A) = 0 = det A^t$. אם A הפיכה אז נרשום $A = E_1, \dots, E_k$ עם מטריצות אלמנטריות. (סדר שחלוף ונקבל באופן דוקציה ולכן $A = E_k^t, \dots, E_1^t$ ולכן $det A = det(E_k^t,..,E_1^t) = det E_k^t \cdots det E_1^t = det E_k \cdots det E_1 = det A$

- **מסקנה** ־ דטרמיננטה היא פונקציה מולטילינארית, מתחלפת ואנטי סימטרית גם בעמודות של A. בפרט, אם במטריצה A יש שתי עמודות זהות אז הדטרמיננטה שלה שווה ל־0, ואם מחליפים עמודות הדטרמיננטה מחליפה סימן.
- **למה ־ פיתוח דטרמיננטה לפי עמודה:** יהי $1 \leq j \leq n$, אזי מתקיים $detA = \sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_j^i detA(i|j)$.
- **למה ־ פיתוח דטרמיננטה לפי שורה:** יהי $1 \leq i \leq n$, אזי מתקיים $detA = \sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_j^i detA(i|j)$.

- **הדטרמיננטה של מטריצה משולשית עליונה** היא מכפלת איברי האלכסון שלה.
- תהי $A_{n\times n}$ מטריצה ריבועית ויהיו $Ax=b$ עם $x,b\in\mathbb{F}^n_{col}$. בהנתן A,b ספציפיים, אנחנו יודעים איך לפתור באמצעות דירוג את מערכת המשוואות הלינארית ולמצוא את x. כלל קרמר הוא נוסחא מפורשת ל־x במונחים של A,b. מתקיים $Ax=\sum\limits_{i=1}^{n}x^ia_i=b$ כאשר a_i הם עמודות המטריצה.
  - **מסקנה ־ כלל קרמר:** תהי $A_{n\times n}$ מטריצה הפיכה ויהי $b\in\mathbb{F}^n_{col}$, אזי הפתרון היחיד למשוואה $Ax=b$ מקיים $x^j=\frac{det(a_1,\ldots,a_{j-1},b,\ldots,a_{j+1},a_n)}{det(A)}$