לינארית 2 - הגדרות, משפטים ואלגוריתמים (ניצן ברזילי וסשה בלאוסוב)

12 באוגוסט 2020

.

מקרא

בכחול הגדרות, בתכלת משפטים, בטורקיז מספר ההרצאה, עבדתי לפי קלואי סמסטר א' תש"פ. הערות שכתובות בסוגריים מסולסלים הן תוספות ומבוססות על ההבנה שלנו בלבד, קחו אותן בערבון מוגבל.

1 משפטים והגדרות

1.1 תזכורות מלינארית 1

- **מרוכבים**
  - **הצמדה** שומרת על חיבור $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$ ועל כפל $\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}$.
  - **הופכי** של מרוכב - $z^{-1}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$
  - מעבר מהצגה קרטזית $x+yi$ ל**פולארית** $re^{\theta i}$:
    * חישוב r ע"י $\sqrt{x^2+y^2}$
    * חישוב $0\le\theta<2\pi$ ע"י $arctan\left(\frac{y}{x}\right)$. אם הנקודה (x,y) ברביע השלישי מוסיפים π, אם היא ברביע הרביעי מוסיפים 2π.
  - **מציאת שורש של מספר מרוכב:** השורש ה-jי (עבור $0\le j\le n$) של המספר $re^{\theta i}$ הוא $\lambda_j=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2\pi j}{n}}$.
- **דטרמיננטות**
  - **פיתוח דטרמיננטה לפי עמודה:** יהי $1\le j\le n$, אזי מתקיים $detA=\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_j^i detA(i|j)$.
  - **פיתוח דטרמיננטה לפי שורה:** יהי $1\le i\le n$, אזי מתקיים $detA=\sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_j^i detA(i|j)$.
  - **השפעת פעולות אלמנטריות על הדטרמיננטה:** תהי $det:M_n(\mathbb{F})\to\mathbb{F}$ פונקצית דטרמיננטה ותהי $A_{n\times n}$.
    * אם A' מתקבלת מ-A ע"י **הוספת כפולה של שורה אחת לשורה אחרת** אז $det(A')=det(A)$ - לא משפיע.
    * אם A' מתקבלת מ-A ע"י **הכפלת שורה בסקלר** $c\neq 0$ אז $det(A')=c\cdot det(A)$ - **כופלים את הדטרמיננטה בסקלר.**
    * אם A' מתקבלת מ-A ע"י **החלפת שתי שורות** אז $det(A')=-det(A)$ - **לוקחים את הנגדי של הדטרמיננטה.**
  - דטרמיננטה היא כפלית - $detAB=detA\cdot detB$.
  - דטרמיננטה היא מתחלפת - $detAB=detBA$ גם אם $AB\neq BA$.
  - מטריצה היא הפיכה אם"ם הדטרמיננטה שלה **שונה מאפס.**
  - שחלוף לא משפיע על הדטרמיננטה.
  - הדטרמיננטה של משולשית תחתונה / עליונה / אלכסונית היא מכפלת האיברים על האלכסון הראשי.
  - הדטרמיננטה של משולשית בבלוקים היא מכפלת הדטרמיננטות של הבלוקים.

- **שונות:**
  - **הופכית של מטריצה 2×2** $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$: מחשבים $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

1.2 אופרטורים, ערכים עצמיים ולכסון

פולינומים

הרצאה 1 (קלואי)

- **פולינום מעל $\mathbb{F}$:** פולינום מעל $\mathbb{F}$ במשתנה X הוא ביטוי מהצורה $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$, כאשר $n \in \mathbb{N}$ ו־$a_i \in \mathbb{F}$ לכל $0 \le i \le n$. ()
- **מקדמים של פולינום:** $a_0, \dots, a_n$נקראים המקדמים של P. נגדיר מקדמים a_iל־P גם ל־$i > n$, עם $a_i = 0$.
- **קבוצת כל הפולינומים:** $\mathbb{F}[X]$ היא קבוצת כל הפולינומים במשתנה X מעל $\mathbb{F}$.
- **סכום פולינומים:** יהיו $P, Q \in \mathbb{F}[X]$ פולינומים, $n \ge m$ כך ש־ $\begin{matrix} P(X) = a_nX^n + a_{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \\ Q(X) = b_mX^m + b_{m-1}X^{m-1} + \cdots + b_1X + b_0 \end{matrix}$, נגדיר את הסכום של P ו־Q בתור: $(P+Q)(X) = \sum\limits_{i=0}^{n}(a_i + b_i)(X^i)$.
- **מכפלת פולינום בסקלר:** יהי $P \in \mathbb{F}[X]$ פולינום כך ש־ $P(X) = a_nX^n + a_{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$, ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$ סקלר. נגדיר את המכפלה של P ו־λ בתור: $(\lambda P)(X) = \lambda a_nX^n + \cdots + \lambda a_1X + \lambda a_0$.
  - **הערה:** זה נותן ל־$\mathbb{F}[X]$ מבנה של מ"ו מעל $\mathbb{F}$, וקטור האפס שלו הוא פולינום האפס, והמרחב הוא ממימד אינסופי עם בסיס $(1, X, X^2, \dots)$.
- **פולינום האפס:** פולינום שכל המקדמים שלו שווים לאפס.
- **מכפלת פולינומים:** יהיו $P, Q \in \mathbb{F}[X]$ פולינומים, $n \ge m$ כך ש־ $\begin{matrix} P(X) = a_nX^n + a_{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \\ Q(X) = b_mX^m + b_{m-1}X^{m-1} + \cdots + b_1X + b_0 \end{matrix}$,
  נגדיר את המכפלה של P ו־Q בתור: $(PQ)(X) = \sum\limits_{k=0}^{n+m}\left(\sum\limits_{\substack{i+j=k \\ 0 \le i \le n \\ 0 \le j \le m}} a_ib_j\right)X^k$. {כל איבר (לדוגמא X^5) במכפלה מקבל מקדם שמורכב מהסכום של מכפלות האיברים המקוריים שיוצאות אותו (נגיד עבור X^5 ־ המקדם של X^2 כפול המקדם של X^3, ועוד ־ המקדם של X^4 ועוד המקדם של X^1 וכו')}.
  - **הערה:** ניתן לבדוק כי כל מכפלה של שלושה פולינומים P, Q, R מקיימת:
    - <u>קומוטטיביות (במכפלת פולינומים):</u> $(PQ)R = P(QR)$
    - <u>אסוציאטיביות:</u> $PQ = QP$
    - <u>דיסטריבוטיביות:</u> $P(Q+R) = PQ + PR$
    - <u>קומוטטיביות (במכפלת פולינומים וסקלר):</u> $\lambda(PQ) = (\lambda P)Q = P(\lambda Q)$
- **מעלה של פולינום:** יהי $P \in \mathbb{F}[X]$ פולינום עם מקדמים $(a_0, a_1, \dots)$. האינדקס j המקסימלי כך ש־$a_j \neq 0$ נקרא המעלה של P, ונסמן אותה $deg(P)$.
  - נאמר שהמעלה של פולינום האפס היא $-\infty$.
- **מקדם מוביל וגורם מוביל של פולינום:** אם $deg(P) = k$, אז המקדם המוביל של P הוא a_k, והגורם המוביל של P הוא a_kX^k.
- **פולינום מתוקן:** אם המקדם המוביל של הפולינום הוא 1, נאמר שהפולינום מתוקן.

- **למה:** יהיו $P,Q\in\mathbb{F}[X]$, אזי: $\begin{matrix} deq(P+Q)\le max\left(degP,degQ\right) \\ deg(PQ)=degP+degQ \end{matrix}$. עבור השורה הראשונה (מעלת חיבור פולינומים), יתקיים שוויון באחד משני המקרים הבאים:
    1. $degP=degQ=n$ וגם $a_n=-b_n$ {לדוגמא $Q(X)=X-X^2,P(X)=X^2$}
    2. $degP\ne degQ$

- **חילוק שלמים:** ב־$\mathbb{Z}$, אומרים ש־$d\in\mathbb{Z}$ מחלק את $p\in\mathbb{Z}$ אם קיים $q\in\mathbb{Z}$ כך ש־$p=dq$. אם ל־d יש הופכי אז גם $p=(pd)(d^{-1})$.

- **חילוק פולינומים:** יהיו $P,D\in\mathbb{F}[X]$ פולינומים. נאמר ש־D **מחלק** את P אם קיים $Q\in\mathbb{F}[X]$ כך ש־$P=QD$. נאמר גם ש־D הוא **גורם** של P, או ש־P הוא **כפולה** של D.

- **פולינום קבוע:** אם $P\in\mathbb{F}[X]$ כך ש־$P(X)=a_0$ {כלומר לא מכיל משתנים} עם $a_0\in\mathbb{F}$, נאמר ש־P הוא פולינום קבוע.

- **חלוקה אוקלידית של פולינומים:** יהיו $P,D\in\mathbb{F}[X]$ פולינומים שונים מאפס, אזי קיימים פולינומים Q,R <u>יחידים</u> כך שמתקיים: $\begin{matrix} P=QD+R \\ degR<degD \end{matrix}$.

הרצאה 2 (קלואי)

- **שורש של פולינום:** יהי $P\in\mathbb{F}[X]$ פולינום: $P(X)=a_kX^k+a_{n-1}+\cdots+a_1X+a_0$, מתקיים כי P מגדיר פונקציה $f:\mathbb{F}\to\mathbb{F}$: $P(b)=a_kb^k+\cdots+a_1b+a_0\in\mathbb{F}$. b הוא **שורש** של P אם מתקיים $P(b)=0$. {אנחנו מבדילים בין הפולינום לפונקציה, כי יתכנו שני פולינומים שמגדירים את אותה הפונקציה. לדוגמא ב־$\mathbb{F}_2$, הפולינומים $P(X)=X,Q(X)=X^2$ הם פולינומים שונים עם פונקציה זהה: $0\to0,1\to1$}

- **הערה:** אם Q מחלק את P, אז כל שורש של Q יהיה שורש של P.

- **טענה:** $a\in\mathbb{F}$ הוא שורש של P $\iff$ $x-a$ מחלק את P.

- **טענה:** יהי $P\in\mathbb{F}[X]$, אם $degP=n$ אזי יש ל־P לכל היותר n שורשים שונים.

- **המשפט היסודי של האלגברה:** לכל $P\in\mathbb{C}[X]$ לא קבוע, יש שורש.
    - **מסקנה:** אם $P\in\mathbb{C}[X]$ ו־$degP=n$, אזי ניתן לכתוב אותו כמכפלת גורמים ממעלה 1 עם סקלר: $P(X)=\lambda(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_n)$ עם $\lambda,c_i\in\mathbb{C}$. c_i הם שורשים של P, והם לא בהכרח שונים זה מזה.

- **הערה:** יהי $P\in\mathbb{F}[X]$ פולינום, אזי $P|P$ (P מחלק את עצמו), וכל פולינום קבוע שונה מאפס (כלומר ממעלה 0) מחלק את P. כלומר, לכל $0\ne\lambda\in\mathbb{F}$ ניתן לכתוב $P=\lambda\left(\frac{1}{\lambda}P\right)$.

- **פולינום אי פריק:** נאמר ש־$P\in\mathbb{F}[X]$ פולינום לא קבוע הוא **אי פריק** אם לכל $A,B\in\mathbb{F}[X]$ כך ש־$P=AB$ מתקיים ש־$degA=0$ או $degB=o$. {כלומר בכל פעם שאנחנו מצליחים לכתוב את P בתור מכפלה של שני פולינומים, אחד מהם הוא פולינום קבוע}.
    - **הערה:** אם $degP=1$, אז P הוא אי פריק.

- **פולינום פריק:** נאמר ש־$P\in\mathbb{F}[X]$ פולינום לא קבוע הוא **פריק** אם ניתן לפרק אותו למכפלה של 2 פולינומים לא קבועים.

תרגול 1

- **הטלה במקביל:** אופרטור לינארי $P:V\to V$ נקרא הטלה במקביל (או בקיצור הטלה) אם קיימים תתי מרחבים של V כך שמתקיים $V=U\oplus W$, ולכל $u\in U$ ו־$w\in W$ מתקיים $P_{U,W}(u+v)=u$. נשים לב כי $kerP=W$, $imP=U$ ו־$P\circ P=P$.

- **הערה:** אם V מ"ו, העתקת הזהות והעתקת האפס מהוות דוגמאות להטלות.

- **טענה:** מתקיים $P_{U,W}(u)=u$ לכל $u\in U$ ומתקיים $P_{U,W}(w)=0$ לכל $w\in W$.

- **טענה:** אם V מ"ו, $T:V\to V$ ה"ל כך ש־$T\circ T=T$, אז T היא הטלה במקביל.

הרצאה 3 (קלואי)

- **מסקנה:** הפולינום האי פריקים היחידים ב־$\mathbb{C}[X]$ הם הפולינומים ממעלה 1 (שהם אי פריקים בכל שדה).
- **טענה:** הפולינומים האי פריקים היחידים של $\mathbb{R}[X]$ הם פולינומים ממעלה 1 (שאי פריקים בכל שדה), ופולינומים מהצורה aX^2+bX+c עם $\Delta=b^2-4ac<0$ (מפני שלאלו אין שורש בממשיים).
- **הערה:** אם P פריק עם $P=AB$ כך ש־$degA, degB \geq 1$, אז $degP > degA, degB \geq 1$.
- **משפט:** יהי $P \in \mathbb{F}[X]$ פולינום. אזי קיימים פולינומים אי פריקים ומתוקנים יחידים $A_1, \dots A_m \in \mathbb{F}[X]$ וסקלר יחיד $a \in \mathbb{F}$ כך ש־$P = a \cdot A_1 \cdots A_m$.
- **הצבת אופרטור בפולינום:** יהי $P \in \mathbb{F}[X]$ כך ש־$P(X)=b_nX^n+b_{n-1}X^{n-1}+\dots+b_1X+b_0$, נגדיר את ההצבה של האופרטור f ב־P באופן הבא: $P(f)=b_nf^n+b_{n-1}f^{n-1}+\dots+b_1f+b_0Id_V$, כלומר עבור $v \in V$ יתקיים $P(f)(v)=b_nf^n(v)+b_{n-1}f^{n-1}(v)+\dots+b_1f(v)+b_0v$.
- **הצבת מטריצה בפולינום:** יהי $P \in \mathbb{F}[X]$ כך ש־$P(X)=b_nX^n+b_{n-1}X^{n-1}+\dots+b_1X+b_0$, ותהי $A \in M_k(\mathbb{F})$. אזי $P(A)=b_nA^n+b_{n-1}A^{n-1}+\dots+b_1A+b_0I$.
- **הערה:** אם B בסיס של V, כך ש־$[f]_B=A$, אז מתקיים $[P(f)]_B=P(A)$.

תרגול 2

- **מונחים בחילוק פולינומים:** יהיו $P, D \in \mathbb{F}[X]$ כך ש־$D \neq 0$, נאמר ש־D **מחלק** את P ונסמן $D|P$ אם קיים $Q \in \mathbb{F}[X]$ כך ש־$P=DQ$. במקרה זה, נקרא ל־P **המחולק** ול־D **המחלק.** לפולינום Q נקרא **המנה** של החלוקה.
- **טענה:** לכל זוג פולינומים $P, D \in \mathbb{F}[X]$ כך ש־$D \neq 0$ קיימים פולינומים $Q, R \in \mathbb{F}[X]$ המקיימים $P=DQ+R$ עם $degR < degD$.
- **טענה:** אם פולינום $P \in \mathbb{F}[X]$ הוא מדרגה 2 בלי שורשים אז P אי פריק.
- **הערה:** ישנם פולינומים בלי שורשים שהם פריקים.
- **טענה:** $P \in \mathbb{F}[X]$ פולינום שדרגתו גדולה מ־0 אז קיימים פולינומים אי פריקים $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{F}[X]$ כך ש־$P=P_1 \cdots P_r$.
- **פירוק טריוויאלי של פולינום:** פירוק שבו המעלה של אחד הגורמים היא 0.
- **למה:** יהי $P \in \mathbb{R}[X]$ פולינום ממשי (נזכיר כי אפשר לחשוב עליו בתור פולינום מרוכב), אם $c \in \mathbb{C}$ הוא שורש של $P(X)$ אז גם $\overline{c} \in \mathbb{C}$ הוא שורש של $P(X)$.
- **למה:** יהי $P \in \mathbb{R}[X]$ פולינום ממשי, אם הדרגה שלו גדולה מ־3 אז הוא פריק.
- **טענה:** הפולינומים הבלתי פריקים ב־$\mathbb{R}[X]$ הם בדיוק הפולינומים ממעלה 1 והפולינומים ממעלה 2 מהצורה $P(X)=aX^2+bX+c$ שעבורם מתקיים $\Delta=b^2-4ac<0$.

תרגיל 2

- כל פולינום מדרגה 3 ללא שורשים הוא אי פריק
- יהי $P(X) \in \mathbb{F}[X]$, $D(X)=X-a$, עבור $a \in \mathbb{F}$ נתון. השארית $R(X)$ של חילוק $P(X)$ ב־$D(X)$ היא הפולינום הקבוע $P(a)$.

אופרטורים

הרצאה 3 (קלואי)

- **אופרטור לינארי:** יהי V מ"ו נ"ס מעל $\mathbb{F}$. **אופרטור לינארי** על V הוא העתקה לינארית $f : V \to V$ (כלומר - העתקה לינארית מהמרחב לעצמו). בסימון נוסף, אופרטור הוא איבר ב-$Hom(V, V)$ (מרחב כל הה"ל מ-V לעצמו).
- **חיבור אופרטורים:** יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, ויהיו f, g אופרטורים. ניתן להגדיר את $f + g$ כמו בכל העתקה לינארית: $(f + g)(v) = f(v) + g(v)$.
- **כפל אופרטור בסקלר:** יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, ויהי f אופרטור. ניתן להגדיר את αf עם $\alpha \in \mathbb{F}$ כמו בכל העתקה לינארית: $(\alpha f)(v) = \alpha f(v)$.
- **הרכבת אופרטורים:** יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, ויהיו f, g אופרטורים. ניתן להגדיר את $g \circ f$ כמו בכל העתקה לינארית: $(g \circ f)(v)$ מוגדר ע"י: $\begin{matrix} g \circ f : V \to V \\ v \to g(f(v)) \end{matrix}$.
- **הערה:** קיימים האופרטורים הבאים:
  - **אופרטור האפס** (איבר ניטרלי לסכום): $f(v) = 0_V$. כאשר נרכיב את אופרטור האפס עם כל אופרטור אחר, נקבל אפס.
  - **אופרטור הזהות** (איבר ניטרלי להרכבה): $f(v) = v$. כאשר נרכיב את אופרטור הזהות עם כל אופרטור, נקבל את אותו האופרטור.

הרצאה 4 (קלואי)

- **הצגה מטריציאלית של אופרטורים:** תהי $f : V \to W$ העתקה לינארית. אם נרצה להציג אותה כמטריצה, נצטרך לבחור בסיס B ל-V ו-C ל-W, ואז נכתוב את ההעתקה $[f]_C^B$. כאשר אנחנו עוסקים באופרטורים, ברוב המקרים נרצה לבחור בסיס אחד B ל-V, ואז נוכל להציג את האופרטור f ביחס אליו - $[f]_B^B$, נכתוב בד"כ רק $[f]_B$ שהיא תמיד מטריצה ריבועית.
- **תכונות של מטריצה מייצגת של אופרטור:** אם $v \in V$, ו-$B = (b_1, \ldots, b_n)$ בסיס סדור של V, ניתן לכתוב את v כצ"ל יחיד של איברי הבסיס: $v = \alpha_1 b_1 + \ldots \alpha_n b_n$, ואז $[v]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$. אזי $[f]_B$ היא מטריצה המקיימת $[f(v)]_B = [f]_B[v]_B$.
בפרט, אם $v = b_i$, אז $[b_i]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ כאשר יש 1 בשורה ה-i ואפסים בשאר הוקטור. לכן, $\overbrace{[f(b_i)]_B}^{i\ col\ of\ [f]_B} = [f]_B \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$. לכן המטריצה תיראה כך: $[f]_B = \begin{bmatrix} | & & | \\ [f(b_1)]_B & \cdots & [f(b_n)]_B \\ | & & | \end{bmatrix}$.
- **מטריצות דומות:** מטריצות A, B מגודל $n \times n$ הן **דומות** אם קיימת מטריצה הפיכה M_n כך ש-$B = M^{-1}AM$.
  - **הערה:** הוכחנו שהמטריצות של אופרטור לפי בסיסים שונים הן דומות.
  - **הערה:** היחס של מטריצות דומות הוא יחס שקילות, שמקיים:
    * <u>טרנזיטיביות:</u> אם A דומה ל-B, ו-B דומה ל-C, אז A דומה ל-C.
    * <u>סימטריות:</u> אם A דומה ל-B אז B דומה ל-A.
    * <u>רפלקסיביות:</u> A דומה לעצמה - ניקח $M = M^{-1} = Id$.
- **תת מרחב אינווריאנטי:** יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, ו-$f : V \to V$ אופרטור. יהי $U \subseteq V$ תת מרחב וקטורי של V. נאמר ש-U הוא f-אינווריאנטי אם לכל $u \in U$ מתקיים ש-$f(u) \in U$, או באופן אחר - $f(U) \subseteq U$ {חשוב לזכור שההגדרה הזו מתארת תת מרחב של V, ותלויה באופרטור f}. כלומר, f "שומר על האופרטוריות שלו" גם ביחס לתת המרחב U.

- **הערה:** נשים לב ש־$\{0\}$ (מרחב האפס) ו־V (המרחב כולו) הם f־אינווריאנטים לכל אופרטור.

- **צמצום של פונקציה:** הצמצום של f על U, מסומן $f|_U$, והוא: $f|_U : U \to U$. הצמצום הוא אופרטור על U. הכוונה היא לצמצום של f, כלומר יוצרים אופרטור מ־f המקורי כך שהוא יהיה אופרטור ביחס ל־U.

- **מטריצה בבסיס מתאים לתת מרחב אינווריאנטי:** יהי V מ"ו נ"ס, U ת"מ f־אינווריאנטי. ניתן לבחור בסיס סדור $B_U = (b_1, \dots, b_m)$, ולהרחיב אותו לבסיס ל־V: $B = (b_1, \dots, b_m, b_{m+1}, \dots, b_n)$. נרצה להסיק מהי $[f]_B$: נרצה לחשב את הקואורדינטות של $[f(b_i)]_B$, כלומר הקואורדינטות של f בבסיס B.

  - **אם $i \le m$**, אז בוודאי המתקיים $f(b_i) \in U$, לכן $[f(b_i)]_B = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, נשים לב ש־$[f(b_i)]_{B_U} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$.
  - **אחרת, $i > m$**, אין לנו יכולת לדעת שום דבר על $[f(b_i)]_B$.

  נקבל: $f[b] = \left[\begin{array}{ccc|c} & [f|_U]_{B_U} & & A \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & B \\ 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right]$ כאשר גודל הבלוק השמאלי העליון הוא $m \times m$, ו־A, B הן מטריצות שאנחנו לא יודעים עליהן כלום, ו־$[f|_U]_{B_U} = \begin{bmatrix} | & & | \\ [f(b_1)]_{B_U} & \cdots & [f(b_m)]_{B_U} \\ | & & | \end{bmatrix}$.

- **טענה:** יהיו f, g אופרטורים מעל V, ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$ סקלר. אם U ת"מ של V שהוא גם f־אינווריאנטי וגם g־אינווריאנטי, אז הוא גם:
  - $(f+g)$־אינווריאנטי
  - $(f \circ g)$־אינווריאנטי
  - (λf)־אינווריאנטי
  - $(P(f))$־אינווריאנטי לכל $P \in \mathbb{F}[X]$

תרגול 3

- **טענה:** יהיו V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$, $f : V \to V$ אופרטור לינארית ו־$P(X), Q(X), R(X) \in \mathbb{F}[X]$ פולינומים. אזי מתקיים:
  - $(P+Q)(f) = P(f) + Q(f)$
  - $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$
  - האופרטורים $P(f), Q(f)$ מתחלפים, כלומר $P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f)$
  - אם $P(X) = Q(X) \cdot R(X)$ אז $kerR(f) \subseteq kerP(f)$ וגם $kerQ(f) \subseteq kepP(f)$

- **טענה:** יהי V מ"ו ממימד n ויהי $B = (b_1, \dots, b_n)$ בסיס סדור של V, ויהי $f : V \to V$ אופרטור לינארי. נסמן $A = [f]_B$. תהי $D \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה הדומה ל־A. אזי קיים בסיס סדור C כך ש־$D = [f]_C$.

- **טענה:** יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהיו $A, D \in M_n(\mathbb{F})$ שתי מטריצות דומות. אז קיים מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{F}$ ואופרטור לינארי $f : V \to V$ כך ש־A ו־D מייצגות שתיהן את f.

הרצאה 5 (קלואי)

- **הערה:** יהי V מ"ו נ"ס ויהי $f : V \to V$ אופרטור. ניקח $0 \ne v \in V$. כל תת מרחב f־אינווריאנטי U, כך ש־$v \in U$, מקיים $f(v) \in U$ וגם $f(f(v)) \in U$, נסמן זאת $f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k\ times}$.

- **תת מרחב ציקלי:** תת המרחב הציקלי $Z(f,v)$ הוא: $span\left(v,f(v),f^2(v),\dots\right)$. שימו לב שצ"ל הוא סכום סופי, אי אפשר להתייחס לסכום אינסופי של איברים, לכן בכל פעם בוחרים מספר סופי של וקטורים מתוך $\left(v,f(v),f^2(v),\dots\right)$.
- **טענה:** המרחב הציקלי הוא f־אינווריאנטי.
- **הערה:** אם V נ"ס, קיים $k\in\mathbb{N}$ (כך ש־$k\le dimV$) מינימלי כך ש־$\left(v,f(v),f^2(v),\dots,f^k(v)\right)$ תלויים לינארית. כלומר, קיימים סקלרים $a_0,\dots,a_{k+1}$ שלא כולם אפס כך ש־ $a_0v+a_1f(v)+\cdots+a_kf^k(v)+a_{k+1}f^{k+1}(v)=0$. לצורך העניין, ניתן להניח ש־$a_{k+1}=1$, כי $\left(v,f(v),\dots,f^k(v)\right)$ בת"ל {כלומר ההוספה של f^{k+1}היא זו שיוצרת את התלות הלינארית}. לכן נוכל לקבל $-a_0v-a_1f(v)-\cdots-a_kf^k(v)=a_{k+1}f^{k+1}(v)$.
- **פולינום מינימלי של אופרטור:** נגדיר את $P\in\mathbb{F}[X]$ ע"י: $P(X)=a_0+a_1fX+\cdots+a_kX^k+a_{k+1}X^{k+1}=0$. ניתן לכתוב את $P(f)(v)\iff a_0v+a_1f(v)+\cdots+a_kf^k(v)+a_{k+1}f^{k+1}(v)$. P הוא **הפולינום המינימלי** של v יחסית ל־f, נסמנו $miv_v^f(X)$. זהו הפולינום עם המעלה המינימלית שמקיים $P(f)(v)=0$.
- **הערה:** נניח ש־$Q\in\mathbb{F}[X]$ מקיים $Q(f)(v)=0$, $Q(X)=a_0v+a_1f(v)+\cdots+a_mf^m(v)+a_{m+1}f^{m+1}(v)=0$. מכאן כי $m+1\ge k+1$ (יש ת"ל בין $\left(v,f(v),f^2(v),\dots,f^{m+1}(v)\right)$), לכן $degQ\ge degP$. כמו כן, P מחלק את Q.
- **טענה:** יהי V מ"ו נוצר סופית, $f:V\to V$ אופרטור ו־$0\ne v\in V$. אם k מינימלי כך ש־$\left(v,f(v),f^2(v),\dots,f^k(v),f^{k+1}(v)\right)$ ת"ל, אז $\left(v,f(v),f^2(v),\dots,f^k(v)\right)$ בסיס למרחב הציקלי $Z(f,v)$.

הרצאה 6 (קלואי)

- **המטריצה המלווה של $f|_{Z(f,v)}$:** יהי V מ"ו נוצר סופית, $f:V\to V$ אופרטור ו־$0\ne v\in V$. ננסה להבין מהי $[f|_{Z(f,v)}]_B$:
  - **אם $i<k$:** אז $f(b_i)=f(f^i(v))=f^{i+1}(v)=b_{i+1}$, ואנחנו יודעים ש־ $[b_{i+i}]_B=[f(b_i)]=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}$ עם 1 במקום ה־i ואפסים בכל שאר הוקטור.
  - **עבור b_k עצמו:** $f(b_k)=f(f^k(v))=f^{k+1}(v)$, ולכן $[f(b_k)]_B=\begin{bmatrix}-a_0\\-a_1\\\vdots\\\vdots\\-a_k\end{bmatrix}$.
  - לכן נוכל לבנות את המטריצה מגודל $(k+1)\times(k+1)$: $\left[\left[f|_{Z(f,v)}\right]_B\right]=\left[\begin{array}{cccc|c}0&0&\cdots&0&-a_0\\1&0&\cdots&0&-a_1\\0&1&\cdots&0&\vdots\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&-a_k\end{array}\right]$. מטריצה זו נקראת המטריצה מלווה של f מצומצם למרחב הציקלי.

תרגול 4

- **טענה:** יהי V מ"ו, $f:V\to V$ אופרטור לינארי, U תת מרחב f־אינווריאנטי ממימד 1. U הוא בהכרח f ציקלי.
- **טענה:** יהי V מ"ו, $f:V\to V$ אופרטור לינארי, U תת מרחב f־אינווריאנטי ממימד 2. U הוא <u>לא בהכרח</u> f ציקלי.
- **טענה:** יהי V מ"ו, $f:V\to V$ אופרטור לינארי כך ש־$f=f^2$ (כלומר f היא הטלה), יהי Z תת מרחב f־ציקלי, אזי $dimZ\le 2$.
- **הפולינום המינימלי של f ביחס ל־v - min_v^f:** $min_v^f(X)$ הוא הפולינום המתוקן $P(X)$ מהמעלה המינימלית שמקיים $P(f)(v)=0$.

- **טענה:** אם קיים פירוק $min_v^f(X)=P(X)Q(X)$ כאשר שני הפולינומים P,Q מתוקנים, אז קיים וקטור $w\in Z(f,v)$ שעבורו $min_w^f(X)=P(X)$.

תרגול 5

- **הפולינום המינימלי של f - m_f:** הפולינום המינימלי של f, המסומן $m_f(X)$, הוא הפולינום $a_0+a_1X+a_2X^2+\cdots+a_{k-1}X^{k-1}+X^k$ המתוקן מהמעלה המינימלית שמקיים $P(f)=0$.
- **משפט:** יהי V מ"ו , ו־$f:V\to V$ אופרטור, ו־$Q\in\mathbb{F}[X]$ פולינום. אז $Q(f)=0$ אם"ם הפולינום המינימלי של f מחלק את Q.

ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

הרצאה 6 (קלואי)

- **ערך עצמי של אופרטור:** יהי V מ"ו נוצר סופי, $f:V\to V$ אופרטור, $\lambda\in\mathbb{F}$ סקלר. λ הוא **ערך עצמי של f** אם קיים $0\neq v\in V$ כך ש־$f(v)=\lambda v$.
- **וקטור עצמי של אופרטור:** יהי V מ"ו נוצר סופי, $f:V\to V$ אופרטור. v הוא **וקטור עצמי של f** אם קיים $\lambda\in\mathbb{F}$ כך ש־$f(v)=\lambda v$.
- **הערה:** מתקיים:
  - $\lambda v-f(V)=0$
  - $0=(\lambda id-f)(v)$
  - $v\in ker(\lambda id-f)$
  - $\{0\}\notin ker(\lambda id-f)$
- **הערה:** לכל $\alpha\in\mathbb{F}$, מתקיים $f(\alpha v)=\alpha f(v)=\alpha\lambda v=\lambda(\alpha v)$ מלינאריות. לכן:
  - גם αv הוא ו"ע של f המתאים ל־λ, לכל α
  - $f(\alpha v)\in span(v)$ לכל α. לכן $span(v)$ הוא תת מרחב f־אינווריאנטי.
- **מרחב עצמי:** אם λ ע"ע של f, **המרחב העצמי** המתאים ל־λ הוא: $V_\lambda=\{v\in V\mid f(v)=\lambda v\}$. זהו המרחב שמכיל את כל הוקטורים העצמיים השייכים ל־λ, ואת וקטור האפס.
- **הערות:**
  - אם $\lambda=0$, אז $V_\lambda=V_0=\{v\mid f(v)=0\}=kerf$. אם λ הוא ע"ע של f, אז $dir\ kerf>0$.
  - $0\in V_\lambda$ תמיד, למרות שהוא לא וקטור עצמי.
  - שתי דרכים לזהות מרחב עצמי:
    * לחשוב אם יש וקטור v כך שניתן להציג $f(v)=\lambda v$
    * לחפש תת מרחב f־אינוריאנטי ממימד 1
- **ערך עצמי וקטור עצמי של מטריצה:** יהי V מ"ו נוצר סופי, B בסיס סדור של V, $A=[f]_B$ מטריצה מייצגת של f בבסיס B. נניח ש־v הוא ו"ע של f עם הע"ע λ, נקבל $[f(v)]_B=[\lambda v]_B=\lambda[v]_B$. ומצד שני, $[f(v)]_B=[f]_b[v]_B=A[v]_B$. זה נותן את המוטיבציה להגדרת **ערך עצמי של מטריצה:** λ יקרא ע"ע של A אם קיים וקטור קואודרינטות $0\neq x=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$ כך ש־$Ax=\lambda x$. x יקרא **וקטור עצמי של A**.

תרגול 4

- **טענה:** יהי V מ"ו, $f:V\to V$ אופרטור לינארי, ויהי $0\neq v\in V$. תת המרחב $span\{v\}$ הוא f־אינווריאנטי אם"ם v הוא ו"ע.

- **ריבוי גאומטרי של ע"ע:** יהי λ ע"ע של $f : V \to V$ אופרטור, הריבוי הגאומטרי של λ מוגדר להיות $dimV_\lambda$.

הרצאה 7 (קלואי)

- **מסקנה:** יהיו V מ"ו נ"ס, $f : V \to V$ אופרטור, $\lambda \in \mathbb{F}$. אזי התנאים הבאים שקולים:
  - λ הוא ע"ע של f
  - קיים $0 \neq v \in ker(\lambda id_v - f)$
  - $ker(\lambda id_V - f) \neq \{0\}$
  - $V \neq Im(\lambda id_v - f)$
  - $(\lambda id_v - f)$ לא הפיך (כי ההעתקה לא חח"ע ועל).
- **אותה מסקנה לגבי מטריצות:** יהיו V מ"ו נ"ס, $A_{n\times n} \in M_n$ מטריצה, $\lambda \in \mathbb{F}$. אזי התנאים הבאים שקולים:
  - λ הוא ע"ע של A
  - קיים $0 \neq v \in ker(\lambda id_v - f_A)$
  - $ker(\lambda id_V - f_A) \neq \{0\}$ כאשר f_A מוגדרת באופן הבא: $f_A : \mathbb{F}^n_{col} \to \mathbb{F}^n_{col}$ עם $f_A\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.
  - $\mathbb{F}^n_{col} \neq Im(\lambda id_v - f_A)$
  - $(\lambda I - A)$ לא הפיכה, ולכן גם $det(\lambda I - A) = 0$.
- **טענה:** יהי V מ"ו נ"ס, $f : V \to V$. אם $v_1, \dots, v_k$ ו"ע השייכים לע"ע $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ (השונים זה מזה) בהתאמה, אז $v_1, \dots, v_k$ בת"ל.
- **מסקנה:** אם $dimV = n$ אז ל-f יש לכל היותר n ע"ע שונים.
- **טענה:** מתקיים כי V_λ הוא תת מרחב וקטורי, ומתקיים $V_\lambda = ker(\lambda id_v - f)$. כמו כן, V_λ הוא ת"מ f-אינווריאנטי.
- **הערה:** אם λ ע"ע, אז קיים $0 \neq v \in V$ כך ש-$1 \leq dim(V_\lambda)$.
- **ריבוי גיאומטרי של ערך עצמי:** יהי λ ע"ע, הריבוי הגרומטרי שלו הוא $dim(V_\lambda)$ ומסומן $m_g(\lambda)$. כלומר, $dimV_\lambda = dim\ ker(\lambda Id_v - f)$.

הרצאה 9 (קלואי)

- **טענה:** תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$. התנאים הבאים שקולים:
  - λ הוא ע"ע של A
  - קיים $0 \neq x \in \mathbb{F}^n_{col}$ כך ש-$Ax = \lambda x$
  - קיים $0 \neq x \in \mathbb{F}^n_{col}$ כך ש$(A - \lambda I)x = 0$
  - מתקיים $det(A - \lambda I) = 0$ (ניתן להתייחס גם ל-$(\lambda I - A)$).
- **מסקנה:** הערכים העצמיים של A הם הפתרונות של המשוואה $det(A - tI) = 0$.

סכומים ישרים

הרצאה 7 (קלואי)

- **קבוצת ת"מ וקטוריים בת"ל:** נאמר שאוסף $U_1, \dots, U_k$ של תתי מרחבים של מ"ו V הם בת"ל, אם לכל בחירה של וקטורים $u_i \in U_i$ מתקיים: $\sum_{i=0}^{k} u_i = 0 \to u_1 = u_2 = \cdots = u_k = 0$ {כלומר U הוא סכום ישר של $U_1, \dots, U_k$ אם לכל $u_i \in U_i$ מתקיים שאם הסכום של הוקטורים הוא 0, אז זה אומר שכל וקטור הוא 0 בעצמו}.

- **הערות:**
  - אם $U_1,\dots,U_k$ בת"ל, ואם $u_1\in U_1,\dots,u_k\in U_k$ כולם שונים מאפס, אז $u_1,\dots,u_k$ בת"ל.
  - אם $u_1,\dots,u_k\in V$ וקטורים בת"ל, אז המקחבים $U_i=span(v_i)$ הם בת"ל.
- **טענה:** יהיו $U_1,\dots,U_k\subseteq V$ תתי מרחבים של V. נסמן $U=U_1+\dots+U_k$ (גם U הוא תת מרחב של V), אזי התנאים הבאים שקולים:
  - $U_1,\dots,U_k$ בת"ל.
  - לכל בחירה של בסיס $B_i=(b_{i1},\dots,b_{id_i})$ ל־U_i, הסדרה $B=(\overbrace{b_{11},\dots,b_{1d_1}}^{B_1},\overbrace{b_{21},\dots,b_{2d_2}}^{B_2},\dots,\overbrace{b_{k1},\dots,b_{kd_k}}^{B_k})$ היא בסיס של U (כאשר $d_i=dimU_i$). כלומר, איחוד בסיסים של $U_1,\dots,U_k$ הוא בסיס של U.
  - $dimU=\sum_{i=0}^{k}dimU_i$. תזכורת - $dim\left(U_1+\dots+U_k\right)\le dimU_1+\dots dimU_k$ (ממשפט המימדים), לכן משמעות הטענה היא שקיים שוויון אם"ם הסכום הוא ישר.
- **סכום ישר של k קבוצות:** אם התנאים בטענה הנ"ל מתקיימים, נאמר כי $U_1,\dots,U_k$ הם **בסכום ישר**, או ש־U הוא **הסכום הישר** של $U_1,\dots,U_k$. במקרה זה נסמן $U=U_1\oplus\dots\oplus U_k$. ($U$ לא חייב להיות כל V).

תרגול 5

- **טענה:** יהי V מ"ו, ויהיו $U_1,\dots,U_n$תתי מרחבים של V. נסמן $U_1+\dots+U_n$, אז מתקיים $U=U_1\oplus\dots\oplus U_n$ אם"ם לכל $i\le n$ מתקיים $U_i\cap\left(\sum_{j\neq i}U_j\right)=\{0\}$ {כלומר, זה לא משנה איזה זוג תתי מרחבים נקח, החיתוך ביניהם יהיה רק וקטור האפס}.
- **אופרטור סיבוב ב־$\mathbb{R}^2$:** סיבוב וקטור במישור הממשי בזווית θ הוא האופרטור $f_A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ כאשר $A=\begin{bmatrix}cos\theta & -sin\theta\\ sin\theta & cos\theta\end{bmatrix}$ ו־f_A מוגדר ע"י $f_A\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ לכל $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$. כדי שלוקטור יהיה ו"ע, צריך שיתקיים כי θ היא כפולה של π. אם θ הוא כפולה זוגית של π, אז ה"סיבוב" הוא העתקת הזהות, והע"ע יהיו 1. אם θ הוא כפולה אי זוגית של π, כל ישר עובר לעצמו אך עובר "מתיחה של -1.
- **אופרטור סיבוב ב־$\mathbb{C}$:** סיבוב וקטור במישור המרוכב בזווית θ הוא האופרטור $f_A:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ כאשר $A=\begin{bmatrix}cos\theta & -sin\theta\\ sin\theta & cos\theta\end{bmatrix}$ ו־f_A מוגדר ע"י $f_A\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ לכל $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^2$. יש לו שני ערכים עצמיים מרוכבים: $\begin{matrix}\lambda_1=cos\theta+i\ sin\theta=e^{i\theta}\\ \lambda_2=cos\theta-i\ sin\theta=e^{-i\theta}\end{matrix}$. הערכים האלו שונים זה מזה (והאופרטור לכסין) כל עוד θ היא לא כפולה שלמה של π.

לכסון ופולינומים אופיניים

הרצאה 8 (קלואי)

- **מטריצה אלכסונית:** מטריצה $A\in M_n(\mathbb{F})$ היא **אלכסונית** אם כל האיברים מחוץ לאלכסון הם 0.
- **אופרטור לכסין:** יהי V מ"ו נ"ס, אופרטור $f:V\to V$ יקרא **לכסין** אם קיים בסיס סדור B של V כך ש־$[f]_B$ אלכסונית.
- **הערה:** אם $B=(b_1,\dots,b_n)$ בסיס ומתקיים $[f]_B=\begin{bmatrix}\alpha_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0\\ \vdots & \dots & \dots & \vdots\\ 0 & \dots & \dots & \alpha_n\end{bmatrix}$, אז לכל $1\le i\le n$: $i\leftarrow$ $\begin{matrix}[f\left(b_i\right)]_B=\begin{bmatrix}0\\0\\\alpha_i\\\vdots\\0\end{bmatrix}\\ f\left(b_i\right)=\alpha_ib_i\end{matrix}$ null ()

לכן $f(b_i)=\alpha_ib_i$, כלומר b_i ו"ע עצמי של f עם ע"ע α_i.

- **טענה:** f לכסין $\iff$ קיים בסיס B של וקטורים עצמיים של f.
- **טענה - תנאי מספיק ללכסון:** יהי f אופרטור על מ"ו נ"ס V כך שמתקיים $dimV = n$. אם ל־f יש n ערכים עצמיים שונים זה מזה, f לכסין. (זהו תנאי מספיק אך לא הכרחי, כלומר יתכן אופרטור לכסין אשר אינו מקיים את התנאי).
- **מטריצה לכסינה:** נניח ש־B בסיס ל־V, $f: V \to V$ אופרטור, $A = [f]_B$, אז התנאים הבאים שקולים:
  - f לכסין
  - קיים בסיס D כך ש־$[f]_D$ אלכסונית
  - קיימת מטריצה M הפיכה $(M = M_B^D)$ כך ש־$M^{-1}AM$ אלכסונית. נשים לב שמתקיים $[f]_D = M_D^B [f]_B M_B^D$.

  מטריצה תקרא **לכסינה** על $\mathbb{F}$ אם קיימת מטריצה הפיכה $M \in M_n(\mathbb{F})$ כך ש־$M^{-1}AM$אלכסונית.
- **טענה:** יהי V מ"ו נ"ס, $f: V \to V$ אופרטור. אם $U_1 + \dots + U_k$ תתי מרחבים f־אינווריאנטים בת"ל כך שמתקיים $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$, ו־$b_i$ בסיס ל־U_i, ו־B הוא האיחוד של כל ה־B_i (כלומר בסיס של V), אזי מתקיים: $[f]_B = \begin{bmatrix} [f|U_1]_{B_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & [f|U_2]_{B_2} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & [f|U_k]_{B_k} \end{bmatrix}$.
- **מטריצה אלכסונית בבלוקים:** מטריצה מהצורה בהערה הקודמת נקראת מטריצה אלכסונית בבלוקים.

הרצאה 9 (קלואי)

- **הערה:** אם $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ע"ע <u>שונים</u> של $f: V \to V$, אזי $\overset{\in u_n}{V_{\lambda_n}}, \dots, \overset{\in u_1}{V_{\lambda_1}}$כך ש־$u_1 + \dots + u_n = 0$. אם לא כולם וקטורי האפס, נקבל סכום של ו"ע השייכים לע"ע שונים שסכומם 0.
- **טענה:** יהי V מ"ו נ"ס, $f: V \to V$ אופרטור. נסמן את הערכים העצמיים של f בתור $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. אזי התנאים הבאים שקולים:
  - f לכסין
  - $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_n}$.
  - $\sum_{i=0}^{k} dimV_{\lambda_i} = dimV$
- **פולינום אופייני של מטריצה:** תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ כך ש־ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$,

  אז $xI - A = \begin{bmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & & -a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & \cdots & x - a_{nn} \end{bmatrix}$ היא מטריצה עם איברים ב־$\mathbb{F}[X]$ (פולינומים). **הפולינום האופייני של** A הוא $\chi_A(X) = det(XI - A)$.
- **הערה:** הדטרמיננטה של $(XI - A)$ היא פולינום (כי היא מתקבלת ממכפלות וסכומים של פולינומים בתהליך חישוב הדטרמיננטה).
- **טענה:** תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$, הע"ע של A הם השורשים של הפולינום האופייני $\chi_A(X)$.

- **למה:** מתקיים $deg\left(\chi_A(X)\right)=n$.
- **מסקנה:** ל־A יש לכל היותר n ע"ע שונים.
- **פולינום אופייני של אופרטור:** יהי V מ"ו נ"ס, $f:V\to V$ אופרטור. **הפולינום האופייני של** f המסומן x_f הוא הפולינום האופייני של המטריצה A שמייצגת את f.
- **טענה:** למטריצות דומות יש את אותו פולינום אופייני.
- **טענה:** הע"ע של f הם השורשים של χ_f.
- **הערה:** אם V מעל $\mathbb{C}$, אז לכל אופרטור על V יש ע"ע (כי לכל פולינום יש שורש ב־$\mathbb{C}[X]$).

תרגול 6

- **טענה:** כל ההגדרות השונות ללכסינות:
  - אופרטור לינארי $f:V\to V$ הוא לכסין אם"ם יש ל־V בסיס המורכב כולו מו"ע של f.
  - אופרטור לינארי $f:V\to V$ הוא לכסין אם יש ל־f $dimV$ ע"ע שונים.
  - אופרטור לינארי $f:V\to V$ הוא לכסין אם"ם עבור $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ כל הע"ע השונים של f מתקיים $dimV=dimV_{\lambda_1}+\dots+dimV_{\lambda_k}$.
- **טענה:** אם $A\in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה לכסינה, קיימת מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $A^n=P^{-1}D^nP$.

הרצאה 10 (קלואי)

- **טענה:** יהי V מ"ו נ"ס מעל $\mathbb{F}$ ויהי $f:V\to V$ אופרטור. יהי $U\leq V$ ת"מ f־אינווריאנטי ממימד k. הפולינום $\chi_{f|_U}$ (הפולינום האופייני של f מצומצם ל־U) מחלק את χ_f (הפולינום האופייני של f כולה). כלומר, קיים פולינום $Q\in\mathbb{F}[X]$ כך ש־ $\chi_f(X)=\chi_{f|_U}(X)\cdot Q(X)$.
- **הערה:** הפולינום האופייני של מטריצת בלוקים משולשית עליונה הוא מכפלת הפולינומים האופייניים של הבלוקים על האלכסון.
- **טענה:** יהי $P(X)=a_0+a_1X+\dots+a_{k-1}X^{-1}+X^k$ פולינום מתוקן ותהי $A=\begin{bmatrix}0&0&0&0&-a_0\\1&0&0&0&-a_1\\0&1&0&0&-a_2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&-a_{k-1}\end{bmatrix}\in M_k(\mathbb{P})$ המטריצה המלווה של P. אזי מתקיים $\chi_A(X)=P(X)$, כלומר הפולינום האופייני של המטריצה המלווה של P הוא P עצמו.
- **מסקנה:** יהי $f:V\to V$ אופרטור על מ"ו נ"ס ויהי $v\in V$. אזי min_v^f (הפולינום המינימלי של v ביחס ל־f) מחלק את χ_f.
- **משפט קיילי המילטון למטריצות:** אם $A\in M_n(\mathbb{F})$ אז $\chi_A(A)=0$, כלומר אם מציבים מטריצה בפולינום האופייני שלה מקבלים את מטריצת האפס מגודל $n\times n$.
- **משפט קיילי המילטון לאופרטורים:** אם $f:V\to V$ אופרטור מעל מ"ו נ"ס, אזי $\chi_f(f)=0$, כלומר אם מציבים אופרטור בפולינום האופייני שלו מקבלים את אופרטור האפס.
- **מסקנה:** יהי V מ"ו נ"ס ויהי $f:V\to V$ אופרטור. אזי $m_f|\chi_f$, כלומר הפולינום המינימלי של f מחלק את הפולינום האופייני של f.
- **מסקנה:** תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה, אזי $m_A|\chi_A$, כלומר הפולינום המינימלי של A מחלק את הפולינום האופייני של A.
- **הערה:** מתקיים $min_f^v(f)(v)=0$, אז min_f^v מחלק כל פולינום שמקיים $P(f)(v)=0$, ולכן min_f^v מחלק את m_f.

הרצאה 11 (קלואי)

- **ריבוי אלגברי של שורש של פולינום:** יהי $P\in\mathbb{F}[X]$ פולינום ויהי α שורש של P. אזי אנחנו יודעים כי $(X-\alpha)$ בהכרח מחלק את P, **הריבוי האלגברי** של השורש α הוא החזקה הגבוהה ביותר של $(X-\alpha)$ שמחלקת את P.

- **ריבוי אלגברי של ערך עצמי:** יהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ע"ע של $f : V \to V$ אופרטור מעל מ"ו נ"ס. אנחנו יודעים כי λ הוא שורש של הפולינום האופייני χ_f. **הריבוי האלגברי** של הערך העצמי λ הוא הריבוי האלגברי של λ בתור השורש של הפולינום האופייני χ_f, ומסומן $m_{alg}(\lambda)$. כלומר, המספר הטבעי המקסימלי m שמקיים $(X-\lambda)^m$ מחלק את χ_f.
- **למה:** יהי V מ"ו נ"ס ויהי $f : V \to V$ אופרטור, ויהי λ ע"ע של f. אזי $m_{geo}(\lambda) \le m_{alg}(\lambda)$, כלומר הריבוי הגאומטרי של כל ע"ע קטן או שווה לריבוי האלגברי שלו.
- **טענה:** יהי V מ"ו נ"ס ממימד n ויהי $f : V \to V$ אופרטור, אזי f לכסין א"ם הפולינום האופייני χ_f מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים (פולינומים ממעלה 1 מהצורה $(X-\alpha)$) מעל $\mathbb{F}$ והריבוי האלגברי של כל ע"ע של f שווה לריבוי הגאומטרי שלו.

תרגול 7

- **עקבה $trace$:** העקבה של מטריצה A היא סכום האיברים על האלכסון הראשי, ומסומנת $tr(A)$.
- **מסקנה:** כל פולינום $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ שהמעלה שלו גדולה או שווה ל־1 הוא מכפלה של גורמים לינאריים ב־$\mathbb{C}[X]$. כלומר קיימים $\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ שעבורם $P(X) = \alpha(X-\lambda_1)\dots(X-\lambda_n)$.
- **טענה:** יהי V מ"ו נ"ס מעל $\mathbb{C}$, ויהי $f : V \to V$ אופרטור. נסמן $dimV = n$. אזי מתקיים:
  - אם קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש־$f^k = 0$ אז הפולינום האופייני של f הוא X^nומתקיים $f^n = 0$.
  - יהי $v \in V$, אם קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש־$f^k(v) = 0$ אז מתקיים $f^n(v) = 0$.
- **טענה:** לפולינום האופייני של f ולפולינום המינימלי של f יש בדיוק אותם שורשים.

אופרטורים נילפוטנטיים וצורת ז'ורדן

הרצאה 11 (קלואי)

- **אופרטור נילפוטנטי:** יהי V מ"ו נ"ס ויהי $f : V \to V$ אופרטור. נאמר ש־f נילפוטנטי עם קיים $m \in \mathbb{N}$ כך ש־$f^m = 0$.
- **אינדקס נילפוטנטיות של אופרטור:** יהי f אופרטור נילפוטנטי, אינדקס הנילפוטנטיות של f הוא ה־m המינימלי שעבורו $f^m = 0$.
- **גובה של וקטור ביחס לאופרטור נילפוטנטי:** יהי f אופרטור נילפוטנטי ו־$v \neq 0$ וקטור, הגובה של v ביחס ל־f הוא ה־l המינימלי שעבורו $f^l(v) = 0$.
- **הערה:** לכל מ"ו V, אופרטור האפס הוא נילפוטנטי מאינדקס 1.
- **טענה:** f אופרטור נילפוטנטי שאינו אופרטור האפס $\iff$ f אינו לכסין.
- **טענה:** יהי $f : V \to V$ אופטור נילפוטנטי ויהי $0 \neq v \in V$ מגובה l, אזי הסדרה $\left(v, (f(v), \dots, f^{l-1}(v)\right)$ היא בת"ל.
- **שרשרת של אופרטור נילפוטנטי:** אם $f : V \to V$ אופרטור נילפוטנטי ו־$0 \neq v \in V$ מגובה l, אזי הסדרה $\mathcal{C}(f,v) = \left(v, (f(v), \dots, f^{l-1}(v)\right)$ היא בסיס לתת המרחב הציקלי $Z(f,v)$, ונקראת שרשרת.
- **מטריצת ז'ורדן נילפוטנטית אלמנטרית:** אם נתבונן בצמצום של f לתת המרחב הציקלי $Z(f,v)$ ונייצג אותו באמצעות מטריצה ביחס לבסיס $\mathcal{C}(f,v)$, נקבל את המטריצה $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_l(\mathbb{P})$ = $J_l(0)$, הנקראת **מטריצת ז'ורדן נילפוטנטית אלמנטרית בגודל l.**

תרגול 7

- **הערה:** אם λ הוא ע"ע של אופרטור נילפוטנטי f, אז $\lambda = 0$.
- **הערה:** אופרטור האפס הוא נילפוטנטי, כי מתקיים $f^1 = 0$.

- **טענה:** נניח כי V הוא מ"ו ממימד n, ו־$f:V\to V$ אופרטור לינארי נילפוטנטי מאינדקס נילפונטנטיות n. אז נוכל למצוא שרשרת מאורך n (שפורשת את V).

הרצאה 12 (קלואי)

- **משפט:** יהי $f:V\to V$ אופרטור נילפוטנטי. אזי קיימים וקטורים שונים מאפס $v_1,\dots,v_r\in V$ כך ש־$V=Z(f,v_1)\oplus\dots\oplus Z(f,v_r)$.
- **בלוק ז'ורדן נילפוטנטי:** נקח בסיסים של $\mathcal{C}_i(f,v_i)$ של שרשראות, ונשרשר אותם לבסיס $\mathcal{B}=(\mathcal{C}_1,\dots,\mathcal{C}_r)$ של V. המטריצה המייצגת של $[f]_B$ היא מטריצת בלוקים אלכסונית מהצורה $[f]_B=\begin{bmatrix}J_{l_1}(0) & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & J_{l_r}(0)\end{bmatrix}$, ע"י שינוי סדר הוקטורים v_i במידת הצורך, אנחנו יכולים להניח כי $1\le l_1\le\dots\le l_2\le l_1$, כלומר שהבלוק הכי גדול נמצא בפינה השמאלית העליונה וכך הלאה. נגדיר $J^{(l_1,\dots,l_r)}=\begin{bmatrix}J_{l_1}(0) & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & J_{l_r}(0)\end{bmatrix}$ בתור בלוק ז'ורדן ניפוטנטי.
- **הערה:** כל בלוק ז'ורדן נילפוטנטי הוא בעצמו מטריצת בלוקים אלכסונית שמורכבת מבלוקי ז'ורדן ניפוטנטים אחרים.
- **בסיס מז'רדן:** יהי $f:V\to V$ אופרטור נילפוטנטי. אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ של V עבורו המטריצה $[f]_B$ היא בלוק ז'ורדן נילפוטנטי. בסיס $\mathcal{B}$שכזה יקרא **בסיס ז'ורדן** או **בסיס מז'רדן.**
- **משפט:** יהי $f:V\to V$ אופרטור נילפוטנטי. אם שני בסיסים B,C של V אשר ביחס אליהם המטריצה המייצגת של f היא בלוק ז'ורדן ניפוטנטי אז $[f]_B=[f]_C$.
- **צורת ז'ורדן של אופרטור:** יהי $f:V\to V$ אופרטור נילפוטנטי ויהי $\mathcal{B}$בסיס ז'ורדן ל־V. המטריצה $[f]_B$ נקראת צורת ז'ורדן של f.
- **צורת ז'ורדן של מטריצה:** תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה נילפוטנטית. אזי A דומה לבלוק ז'ורדן יחיד, שהוא צורת ז'ורדן של המטריצה A. שתי מטריצות ניפוטנטיות דומות אם"ם יש להן את אותה צורת ז'ורדן.
- **שרשראות בת"ל:** יהי $f:V\to V$ אופרטור נילפוטנטי ויהיו $v_1,\dots,v_s$ וקטורים שונים מאפס. נסמן ב־$\mathcal{C}(v_i)=$ $(\mathcal{C}(v_1),\dots,\mathcal{C}(v_s))$ את השרשראות המתאימות (כך שהגובה l_iשל v_i הוא k_i+1). נאמר ש־$(\mathcal{C}(v_1),\dots,\mathcal{C}(v_s))$ בת"ל אם השרשור $(\mathcal{C}(v_1),\dots,\mathcal{C}(v_s))=\left(v_1,\dots,f^{k_1}(v_1),v_2,\dots,f^{k_2}(v_2),\dots,v_s,\dots,f^{k_s}(v_s)\right)$ הוא בת"ל.
- **הערה:** השרשראות $(\mathcal{C}(v_1),\dots,\mathcal{C}(v_s))$ הן בת"ל אם"ם הסכום $Z(f,v_1)+\dots+Z(f,v_s)$ הוא סכום ישר.
- **למה:** יהי $f:V\to V$ אופרטור נילפוטנטי ויהיו $v_1,\dots,v_s$וקטורים שונים מאפס. אזי השרשראות $(\mathcal{C}(v_1),\dots,\mathcal{C}(v_s))$ בת"ל אם"ם סדרת הזנבות $\left(f^{k_1}(v_1),\dots,f^{k_s}(v_s)\right)$ היא בת"ל.
- **טענה:** יהי $f:V\to V$ אופוטר נילפוטנטי ויהיו $(\mathcal{C}(v_1),\dots,\mathcal{C}(v_s))$ שרשראות כך ש־$V=span(\mathcal{C}(v_1),\dots,\mathcal{C}(v_s))$, אזי קיימות שרשראות בלתי תלויות $(\mathcal{C}(w_1),\dots,\mathcal{C}(w_r))$ כך ש־$V=span(\mathcal{C}(w_1),\dots,\mathcal{C}(w_r))$.

הרצאה 13 (קלואי)

- **משפט:** יהי $f:V\to V$ אופרטור נילפוטנטי מעל V נ"ס מעל $\mathbb{F}$. אזי קיימים וקטורים שונים מאפס $v_1,\dots,v_r$ כך ש־$V=Z(f,v_1)\oplus\dots\oplus Z(f,v_r)$.
- **משפט פיטינג:** יהי V מ"ו סוף מימדי מעל $\mathbb{F}$ ויהי $g:V\to V$ אופרטור. אזי קיים פירוק $V=V_N\oplus V_I$ של V כך ש־V_N,V_I הם תתי מרחבים g־אינווריאנטים וכך ש־ $g|_{V_N}$ נילפוטנטי ו־$g|_{V_I}$ הפיך. הסירוק הזה נקרא פירוק פיטינג של V והוא יחיד.
- **למה:** יהי V מ"ו נ"ס ויהי $g:V\to V$ אופרטור, נתבונן בסדרת תתי המרחבים: $\begin{matrix}\{0\}=\ker\left(g^0\right)\subseteq\ker\left(g^1\right)\subseteq\ker\left(g^2\right)\subseteq\dots\\ V=\operatorname{im}\left(g^0\right)\supseteq\operatorname{in}\left(g^1\right)\supseteq\operatorname{im}\left(g^2\right)\supseteq\dots\end{matrix}$ .null ()
  אם קיים $k\in\mathbb{N}_0$ כך ש־$ker(g^k)=ker(g^{k+1})$ לכל k שכזה, יתקיים גם:
  - $ker(g^r)=ker(g^{r+1})$ לכך $r\ge k$, כלומר סדרת הגרעינים מתייצבת החל מ־k: $\{0\}=\ker\left(g^0\right)\subseteq\ker\left(g^1\right)\subseteq\dots\subseteq$ $\ker\left(g^k\right)=\ker\left(g^{k+1}\right)=\ker\left(g^{k+2}\right)=\dots$.

- $im(g^r) = im(g^{r+1})$ לכל $r \geq k$, כלומר סדרת התמונות מתייצבת החל מ־k: $V = \mathrm{im}\left(g^0\right) 2\, \mathrm{im}\left(g^1\right) 2 \cdots 2\, \mathrm{im}\left(g^k\right) = \mathrm{im}\left(g^{k+1}\right) = \mathrm{im}\left(g^{k+2}\right) = \dots$
- $V = ker(g^k) \oplus im(g^k)$.

- **הערה:** יתכן כי פירוק פיטינג $V = V_N \oplus V_I$ של V ביחס לאופרטור $g: V \to V$ יצא "טריוויאלי" -
  - אם g הפיך אז סדרת הגרעינים $\{0\} = \ker\left(g^0\right) \subseteq \ker\left(g^1\right) \subseteq \cdots \subseteq \ker\left(g^k\right) = \ker\left(g^{k+1}\right) = \ker\left(g^{k+2}\right) = \dots$ תהיה קבועה ולכן $V_N = \{0\}$ ולכן $V_I = V$.
  - אם g נילפוטנטי מאינדקס k אז סדרת הגרעינים $\{0\} = \ker\left(g^0\right) \subsetneq \ker\left(g^1\right) \subsetneq \cdots \subsetneq \ker\left(g^k\right) = \ker\left(g^{k+1}\right) = \ker\left(g^{k+2}\right) = \cdots = V$ תתייצב על V ולכן $V_N = V$ו$V_I = \{0\}$.

- **הערה:** אם g לא נילפוטנטי ולא הפיך אז נקבל פירוק $V = V_N \oplus V_I$ לא טריוויאלי.

הרצאה 14 (קלואי)

- **צורת ז'ורדן כללי של ע"ע:** יהי $\lambda \in \mathbb{F}$. בלוק ז'ורדן המתאים ל־λ הוא מטריצה אלכסונית בבלוקים, עם $J_{k_1}(\lambda), \dots, J_{k_s}(\lambda)$ על האלכסון, עם $k_1 \geq \cdots \geq k_s$. בלוק ז'ורדן כללי $J(\lambda)$ יהיה:

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{matrix}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} \lambda & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{matrix}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} \lambda & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

- **מטריצת ז'ורדן:** מטריצת ז'ורדן היא מטריצה אלכסונית עם בלוקי ז'ורדן $J(\lambda_1), \cdots, J(\lambda_n)$ שונים זה מזה על האלכסון, כלומר אותו הרעיון כמו צורת ז'ורדן של λ רק עם λ_i שונים: $[f]_B = \left[\begin{array}{c|c} \left[f|_{V_N}\right]_{B_N} & 0 \\ \hline 0 & [f|v_i]_{B_i} \end{array}\right]$.

- **הערות:**
  - אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, אז ניתן לכתוב כל פולינום $\mathbb{C}[X]$ כמכפלה של גורמים ממעלה 1, לכן לכל אופרטור f ניתן למצוא בסיס B כך ש־$[f]_B$היא מטריצת ז'ורדן.
  - אם $[f]_B = \begin{bmatrix} J\left(\lambda_1\right) \uparrow n_1 & & & \\ & J\left(\lambda_2\right) \uparrow n_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J\left(\lambda_s\right) \end{bmatrix}$ אזי $\chi_f(x) = (x-\lambda_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_s)^{n_s}$ לכן $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ הם בדיוק הע"ע של f, וגם נשים לב ש־χ_f הוא מכפלה של פולינומים ממעלה 1.

תרגול 8

- **טענה:** לכל אופרטור $f: V \to V$ שעבורו קיים בסיס של שרשראות $v_1, \dots, v_n$ מתקיים:
  1. $ker f^k = span\{v_i \mid Height\ v_i \leq k\} = \{v \in V \mid Height\ v_i \leq k\}$
  2. v בגובה 1 אם"ם $v \in ker f \backslash \{0\}$, ולכן מספר הוקטורים בגובה 1 מבין $v_1, \dots, v_n$ שווה ל־$dim\ ker\ f$.

3. בכל שרשרת יש בדיוק וקטור אחד מגובה 1, ולכן מספר השרשראות בבסיס שווה ל־$dim\ ker\ f$. לכן מספר הבלוקים האלנטיריים שווה לריבוי הגאומטרי של הע"ע 0.
4. v הוא מגובה k אס"ם $v\in ker\ f^k \backslash ker\ f^{k-1}$, ולכן מספר הוקטורים בגובה k עבור $k\geq 1$ מבין $v_1,\ldots,v_n$ שווה ל־$dim\ ker\ f^k = dim\ ker\ f^{k-1}$.
5. מספר השרשראות באורך k שווה למספר הוקטורים בגובה k פחות מספר הוקטורים בגובה $k+1$.

- **טענה:** אם שתי מטריצות הן דומות ושתיהן מטריצות ז'ורדן נילפוטנטיות, הן שוות.
- **למה:** אם מתקיים $v\in span\left(\mathcal{C}(f,v_1),\ldots,\mathcal{C}(f,v_k)\right)$, אז גם $f(v)\in span\left(\mathcal{C}(f,v_1),\ldots,\mathcal{C}(f,v_k)\right)$.
- **למה:** אם מתקיים $v\in span\left(\mathcal{C}(f,v_1),\ldots,\mathcal{C}(f,v_k)\right)$, אז גם $\mathcal{C}(f,v)\subseteq span\left(\mathcal{C}(f,v_1),\ldots,\mathcal{C}(f,v_k)\right)$.

תרגול 9

- **מרחב עצמי מוכלל:** יהי $\lambda\in\mathbb{F}$ ערך עצמי של f. המרחב העצמי המוכלל של f המתאים לערך העצמי λ הוא המרחב

$$\hat{V_\lambda}:=\{v\in V\,|\,\exists n\in\mathbb{N}\ such\ that\ (f-\lambda\cdot id)^n(v)=0\}$$

וקטורים שונים מאפס שנמצאים במרחב הזה נקראים וקטורים עצמיים מוכללים.

- **טענה:** יהי V מרחב וקטורי סוף מימדי מעל $\mathbb{F}$ ויהי $f:V\to V$ אופרטור לינארי, שפולינום האופייני שלו מתפרק לגורמים לינאריים: $\chi_f(X)=(X-\lambda_1)^{m_1}\cdot(X-\lambda_2)^{m_2}\cdots(X-\lambda_k)^{m_k}$, כאשר $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ הם בערכים העצמיים של f, ו־ m_i הוא הריבוי הגאומטרי של λ_i. אזי מתקיים: $V=\hat{V_{\lambda_1}}\bigoplus\hat{V_{\lambda_2}}\bigoplus\cdots\bigoplus\hat{V_{\lambda_k}}$
- **מסקנה:** יהי V מרחב וקטורי סוף מימדי מעל $\mathbb{F}$ ויהי $f:V\to V$ אופרטור לינארי, שפולינום האופייני שלו מתפרק לגורמים לינאריים: $\chi_f(X)=(X-\lambda_1)^{m_1}\cdot(X-\lambda_2)^{m_2}\cdots(X-\lambda_k)^{m_k}$. אזי סדרה הגרעינים $\{0\}\subset ker(f-\lambda_i\cdot id)\subset ker\left((f-\lambda_i\cdot id)^2\right)\subset\ldots$ מתייצבת ב־ m_i או קודם. כלומר, $\hat{V_{\lambda_i}}=ker\left((f-\lambda_i\cdot id)^{m_i}\right)$.
- **טענה ־ יחידות צורת ז'ורדן:** אם $\mathcal{B}=(b_1,b_2,\ldots,b_n),\ \mathcal{C}=(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ בסיסים מז'רדנים עבור אופרטור f המוגדר על ידי מרחב וקטורי V סוף מימדי, אז ב־ $[f]_\mathcal{B}$ וב־ $[f]_\mathcal{C}$ מופעים אותם בלוקי ז'ורדן.

1.3 מרחבי מכפלה פנימית

מכפלה סקלרית ומכפלה פנימית

הרצאה 15 (קלואי)

- **מכפלה סקלרית ב־$\mathbb{R}^2$:** מכפלה סקלרית ב־$\mathbb{R}^2$ היא העתקה $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י: $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=x_1y_1+x_2y_2$.
- **אורך של וקטור ב־$\mathbb{R}^2$:** האורך של $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ הוא $\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, שזה שקול לשורש המכפלה הסקלרית של $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ עם עצמו: $\left|\left|\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right|\right|^2=\sqrt{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}}$(הנורמה של $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$).
- **מרחק בין וקטורים ב־$\mathbb{R}^2$:** המרחק בין x ו־y הוא אורך הוקטור $x-y$: $||x-y||^2=\sqrt{(y-x)\,(y-x)}$.
- **ניצבות ב־$\mathbb{R}^2$:** נגיד כי $\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ ניצבים אס"ם האורך של $x-y$ זהה לאורך של $x-y$.
- **מכפלה סקלרית ב־$\mathbb{R}^n_{col}$:** מכפלה סקלרית ב־$\mathbb{R}^n_{col}$ היא העתקה לינארית $\mathbb{R}^n_{col}\times\mathbb{R}^n_{col}\to\mathbb{R}^n_{col}$ המוגדרת ע"י $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}=x_1y_1+\ldots x_ny_n$. המכפלה הסקלרית ב־$\mathbb{R}^n_{col}$ מקיימת:

- לינאריות: $x(y+ay')=xy+axy'$
- סימטריות: $xy=yx$ {זה לא יתקיים ב-$\mathbb{C}$ - מה שיתקיים האו $xy=\overline{yx}$}
- לכל $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$, מתקיים שתוצאת המכפלה של x עם עצמו היא מספק ממשי חיובי ממש.

- **מכפלה סקלרית ב-$\mathbb{C}$:** מכפלה סקלרית ב-$\mathbb{C}$ היא ה"ל $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ המוגדרת ע"י $\overline{z_1}w_1+\dots\overline{z_n}w_n=\begin{bmatrix}w\\w_2\\\vdots\\\vdots\\w_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\\vdots\\z_n\end{bmatrix}$ עם $\overline{z_1},\dots\overline{z_n}$ הצמודים המרוכבים.

- **אורך של וקטור ב-$\mathbb{C}$:** מוגדר ע"י $\underbrace{\overline{z_n}z_n}_{||z_n||^2}+\dots+\underbrace{\overline{z_1}z_1}_{||z_1||^2}=\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\\vdots\\z_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\\vdots\\z_n\end{bmatrix}$ כאשר כל המחוברים ממשיים חיוביים.

- **מכפלה פנימית:** מכפלה פנימית על V היא העתקה $\mathbb{F}\to V\times V$ שלוקחת שני וקטורים (u,v) ומחזירה סקלר בשדה: $\langle u|v\rangle\to(u,v)$, כך שלכל $u,v,v'\in V$ ו-$a\in\mathbb{F}$ מתקיים:
  - לינאריות במשתנה השני: $\langle u|v\rangle+\langle u|v'\rangle=\langle u|v+v'\rangle$
    $a\langle u|v\rangle=\langle u|av\rangle$
  - סימטריות: $\langle v|u\rangle=\overline{\langle u|v\rangle}$. ז"א שאם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ אזי $\langle u|v\rangle=\langle v|u\rangle$ לכל $u,v\in V$.
  - חיוביות בהחלט: $\langle u|v\rangle$ הוא ממשי וחיובי, ומתקיים $u=0\iff\langle u|v\rangle=0$.

מרחבי מכפלה פנימית

הרצאה 16 (קלואי)

- **מרחב מכפלה פנימית:** יהי $\mathbb{F}=\mathbb{C}\vee\mathbb{R}$, מרחב מכפלה פנימית $(V,<|>)$ הוא מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{F}$יחד עם מכפלה פנימית $<|>$ מעל V.
- **מרחב אוקלידי:** מרחב מכפלה פנימית הוא אוקלידי אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ ו-$dimV$ סופי.
- **מרחב הרמיטי:** מרחב מכפלה פנימית הוא הרמיטי אם $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ ו-$dimV$ סופי.
- **נורמה של וקטור:** יהי $(V,<|>)$ ממ"פ ויהי $v\in V$. הנורמה של v היא $||v||=\sqrt{\langle v|v\rangle}$ (שורש המ"פ של הוקטור עם עצמו). {נורמה מייצגת את ה"אורך" של וקטור}
- **תכונות של הנורמה:**
  - הנורמה ממשית ואי שלילית.
  - הנורמה שווה לאפס אם"ם $v=0$.
- **הערה:** אם $0\neq v\in V$ אזי $\frac{v}{||v||}$ הוא וקטור יחידה.
- **טענה - נוסחת הפולריזציה בממשיים:** יהי V ממ"פ מעל $\mathbb{R}$, ויהיו $u,v\in V$. אזי מתקיים: $\langle u|v\rangle=\frac{1}{4}\left(||u+v||^2-||u-v||^2\right)$.

- **טענה - נוסחת הפולריזציה במרוכבים:** יהי V ממ"פ מעל $\mathbb{C}$, ויהיו $u,v\in V$. אזי מתקיים:

$$\langle u|v\rangle=\frac{1}{4}\left(||u+v||^2-||u-v||^2-i\,||u+iv||^2+i\,||u-iv||^2\right)$$

אורתוגונליות

הרצאה 16 (קלואי)

- **וקטורים ניצבים / אורתוגונלים:** יהי V ממ"פ, $u,v\in V$ נקראים אורתוגולנליים אם $\langle u|v\rangle=0$, במקרה זה נסמן $u\perp v$.
- **הערה:** אורתוגונליות היא סימטרית כיוון ש־$\langle v|u\rangle=0\iff\langle u|v\rangle=0$.
- **משפט פיתגורס:** אם $u\perp v$, אזי מתקיים $||u+v||^2=||u||^2+||v||^2$. נשים לב שהמשפט הזה הוא לא תמיד אם"ם - הוא אם"ם רק אם החלק הממשי הוא 0. אם עובדים מעל $\mathbb{R}$, אז החלק הממשי הוא המספר עצמו, והגרירה של המשפט תהיה אם"ם. אם עובדים מעל $\mathbb{C}$, הגרירה היא רק "אם".

הרצאה 17 (קלואי)

- **משפט אי שוויון קושי־שוורץ:** יהי V ממ"פ ויהיו $u,v\in V$, אזי מתקיים: $|\langle u|v\rangle|\le||u||\cdot||v||$.
- **משפט אי שוויון המשולש:** יהי V ממ"פ ויהיו $u,v\in V$, אזי מתקיים: $||u+v||\le||u||+||v||$. בנוסף, מתקיים שוויון $||u+v||=||u||+||v||$ אם"ם הוקטורים ת"ל באופן חיובי, כלומר קיים $\alpha\ge0$ כך ש־$u=\alpha v$ או $v=\alpha u$.
- **מרחק בין וקטורים:** יהי V ממ"פ, ויהיו $v,w\in V$. המרחק בין v ו־w הוא $d(v,w)=||w-v||$.
- **פונקציית המרחק על ממ"פ / מטריקה:** יהי V ממ"פ, ויהיו $v,w\in V$. פונקציית המרחק על V היא $d:V\times V\to\mathbb{R}$ אשר מקבלת (v,w) ומחזירה את $d(v,w)$.
- **הערות:**
  - פונקצית המרחק היא סימטרית $d(v,w)=d(w,v)$.
  - מאי"ש המשולש ניתן להוכיח $d(u,w)\le d(u,v)+d(v,w)$.
- **אורתוגונליות ביחס לתתי מרחבים:** יהי V ממ"פ.
  - אם $S\subset V$ קבוצה, $v\in V$, אז $v\perp S$ אם לכל $u\in S$ מתקיים $v\perp u$.
  - אם $S,T\subset V$ קבוצות, אז $S\perp T$ אם לכל $v\in T$ ו־$u\in S$ מתקיים $u\perp v$.
  - אם $S\subset V$ קבוצה, אז $S^\perp=\{u\in V\mid u\perp S\}$, כלומר זוהי קבוצת כל הוקטורים $u\in V$ כך שלכל $v\in S$ מתקיים $u\perp v$.
- **למות:**
  - יהיו $S\subset V$, $v\in V$. אזי $v\perp S$ אם"ם $v\perp span(S)$.
  - אם $S\subset V$, אזי $S^\perp$ הוא תת מרחב של V.
  - אם $S\subset T\subset V$, אזי $T^\perp\subset S^\perp$.
- **הטלה אורתוגונלית / ניצבת:** יהיו V ממ"פ, W ת"מ וקטורי כלשהו, ו־$v\in V$. הטלה אורתוגונלית של v על W היא וקטור v_W כך ש־$v_W\in W$ וגם $(v-v_W)\perp W$.
- **הערות:**
  - אם נחשוב על זה גאומטריתת אם יש לנו וקטור v במרחב ותת מרחב W, ההטלה היא הוקטור ב־W שהכי קרוב ל־v.
  - אם $v\in W$, אז v הטלה אורתוגונלית של עצמו על W.
  - v_W הטלה אורתוגונלית של v על W $\iff$ יש $v_W\in W$ ו־v' המקיים $v'\perp W$ כך ש־$v=v_w+v'$.

- **טענה:** יהי W תת מרחב של הממ"פ V, ויהי $v \in V$. אם v_W היא הטלה אורתוגונלית של v על W אזי לכל $w \in W$ מתקיים $||v - v_w|| \leq ||v - w||$. כלומר, v_w קרוב ל־v יותר מכל וקטור אחר ב־W.
- **מסקנה:** יהי W תת מרחב של הממ"פ V, ויהי $v \in V$. ל־v יש לכל היותר הטלה אורתוגונלית אחת על W.
- **משפחה אורתוגונלית:** $v_1, \ldots, v_k \in V$ הם משפחה אורתוגונלית אם לכל $i \neq j$ מתקיים $v_i \perp v_j$, כלומר $\langle v_i | v_j \rangle = 0$.
- **משפחה אורתונורמלית:** $v_1, \ldots, v_k \in V$ הם משפחה אורתונורמלית (מקרה פרטי של משפחה אורתוגונלית) אם לכל i, j מתקיים $\langle v_i | v_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$. כלומר, $v_1, \ldots, v_k$ היא משפחה אורתוגונלית כל שלכל i, מתקיים $||v_i|| = 1$. במקרה זה נסמן $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$ (הדלתא של קרונקר).
- **טענה:** יהי V ממ"פ, ותהי $v_1, \ldots, v_k \in V \backslash \{0\}$ משפחה אורתוגונלית, אזי $v_1, \ldots, v_k$ בת"ל. {כלומר, ניצבות ← בת"ל}.
- **הערה:** אם $v_1, \ldots, v_k$ משפחה אורתוגונלית:
  - ניתן להגדיר לכל i: $v_i = \frac{u_i}{||u_i||}$, ואז מתקיים $||v_i|| = 1$.
  - מתקיים $\langle v_i | v_j \rangle = 0$.

תרגול 10

- **המרחב הניצב:** תהי S תת קבוצה של ממ"פ V. המרחב הניצב ל - S מוגדר על ידי $S^\perp = \{v \in V \,|\, \forall s \in S,\ \langle v | s \rangle = 0\}$.
- **טענה - תכונות של המרחב הניצב:**
  - $S^\perp$ הוא תת מרחב של V. לכן $span(S^\perp) = S^\perp$.
  - $(span(S))^\perp = S^\perp$.
- **למה:** יהי V מרחק מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F}$. יהיו $v, u \in V$. אזי $||u \pm v||^2 = ||u||^2 \pm 2 \cdot Re\langle u | v \rangle + ||v||^2$. כאשר $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, נקבל: $||u \pm v||^2 = ||u||^2 \pm 2\langle u | v \rangle + ||v||^2$
- **טענה:** יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$. יהי $v \in V$. אזי $\{u \in V \,|\, d(u, v) = d(u, -v)\} = \{v\}^\perp$.

תרגול 11

- **טענה:** $w = \frac{\langle v | u \rangle}{||v||^2} \cdot v$ הוא ההטלה הניצבת של u על w.
- **טענה:** אם W הוא תת מרחב של מרחב מכפלה פנימית V הנוצר סופית, אז קיים בסיס אורתונורמלי $(u_1, \ldots, u_n)$ של V, כך ש - $W = span(u_1, \ldots u_k)$.
- **מסקנה:** יהי V מרחב מכפלה פנימית הנוצר סופית. אם W הוא תת מרחב של V, אז $V = W \bigoplus W^\perp$ ו - $dimV = dimW + dimW^\perp$.
- **המשלים הניצב:** המרחב $W^\perp$נקרא המשלים הניצב של W.
- **טענה:** יהי V מרחב מכפלת פנימית הנוצר סופית. יהי W תת מרחב של V. אזי: $(W^\perp)^\perp = W$.
- **ההטלה הניצבת על W:** ההעתקה הלינארית $p_{W,W^\perp} : V \to V$, התמונה שלה W והגרעין שלה הוא $W^\perp$. כשנדבר על הטלה ניצבת נסמנה ב־ p_W.

הרצאה 18 (קלואי)

- **טענה:** יהי W תת מרחב של הממ"פ V, ונניח ש־ $w_1, \ldots, w_k$ בסיס אורתונורמלי של W. אזי לכל $v \in V$ קיימת הטלה אורתוגונלית v_W על W, ומתקיים $v_W = \sum_{i=1}^{k} \langle w_i | v \rangle\, w_i$.

- **טענה:** יהי V ממ"פ, ותהי $b_1,\dots,b_m$ משפחה בת"ל. אזי קיימת משפחה אורתונורמלית $u_1,\dots,u_m$ כך שלכל $k\le m$ מתקיים $span\left(u_1,\dots,u_k\right)=span\left(b_1,\dots,b_k\right)$.

- **מסקנה:** אם V ממ"פ ממימד סופי, אזי קיים בסיס אורתוגונלי ל־V.

- **טענה:** יהי V ממ"פ ממימד סופי ויהי $B=\left(u_1,\dots,u_n\right)$ בסיס אורתונורמלי. אזי לכל $v\in V$, מתקיים $[v]_B=\begin{bmatrix}\langle u_1|v\rangle\\ \vdots\\ \langle u_n|v\rangle\end{bmatrix}$, כלומר $v=\langle u_1|v\rangle u_1+\cdots+\langle u_n|v\rangle u_1$.

- **מסקנה ־ פרסבל** $Parseval$: יהי V ממ"פ ממימד n, ויהי $B=\left(u_1,\dots,u_n\right)$ בסיס אורתונורמלי. אזי לכל $v,w\in V$ מתקיים $\langle v|w\rangle=\sum_{i=1}^{n}\overline{\langle u_i|v\rangle}^t\langle u_i|w\rangle$.
  - נשים לב ש־$\overline{\langle u_i|v\rangle}$ היא הקואורדינטה ה־i של $[v]_B$ (בצמוד), וכמו כן ש־$\langle u_i|w\rangle$ היא הקואורדינטה ה־i של $[w]_B$, לכן $\langle v|w\rangle=\overline{[v]}_B^t[w]_B$.

- **מסקנה ־ בסל** $Bessel$: יהי V ממ"פ ממימד n, ויהי $B=\left(u_1,\dots,u_n\right)$ בסיס אורתונורמלי. אזי לכל $v,w\in V$ מתקיים $||v||^2=\sum_{i=1}^{n}|\langle u_i|v\rangle|^2$.

- **מסקנה:** יהי V ממ"פ ממימד סופית ויהי $B=\left(u_1,\dots,u_n\right)$ בסיס אורתונורמלי. אם $W=span(u_1,\dots,u_k)$ אז $W^{\perp}=span(u_{k+1},\dots,u_n)$.

- **איזומטריה בין ממ"פים:** יהיו V,W ממ"פים מעל $\mathbb{F}$. איזומטריה בין V ו־W היא העתקה $f:V\to W$ כך שלכל $v_1,v_2\in V$ מתקיים $\langle v_1|v_2\rangle=\langle f(v_1)\mid f(v_2)\rangle$, כלומר f שומרת על המכפלות הפנימיות.
  - איזומטריה שומרת גם על נורמה.

- **הערה:** אם $B=\left(u_1,\dots,u_n\right)$ בסיס אורתונורמלי ל־V אזי ההעתקה מ־V ל־$\mathbb{F}^n_{col}$ שלוקחת v ומחזירה $[v]_B$ היא איזומטריה בין הממ"פ של V ו־(הממ"פ הסטנדרטית, $\mathbb{F}^n_{col}$).

- **למה:** אם $f:V\to W$ איזומטריה, אזי f לינארית.

אופרטורים אורתוגונלים / אוניטרים

הרצאה 19 (קלואי)

- **אופרטור אורתוגונלי / אוניטרי:** יהי V ממ"פ, $f:V\to V$ איזומטריה, כלומר לכל $v,w\in V$ מתקיים $\langle v|w\rangle=\langle f(v)\mid f(w)\rangle$ובפרט $||fv||=||v||$. אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ נאמר ש־f אופרטור אורתוגונלי, אם $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ נאמר ש־f אופרטור אוניטרי.

- **הערה:** אם f אופרטור אורתוגונלי ו־$v,w\in V$ כך ש־$v\perp w$, אזי מתקיים $f(v)\perp f(w)$, כלומר גם התמונות אורתוגונליות. אבל, לא כל אופרטור ששומר על אורתוגונליות הוא אופרטור אורתוגונלי!

- **טענה:** יהי V ממ"פ, $f:V\to V$ אופרטור. אזי התנאים הבאים שקולים:
  - f אורתוגונלי / אוניטרי.
  - לכל $v\in V$ מתקיים $||f(v)||=||v||$ ־ f שומר על נורמה.
  - לכל $v\in V$ וקטור יחידה, מתקיים שגם $f(v)$ וקטור יחידה (ב־$\mathbb{C}$, אם v וקטור יחידה אז $f(v)$ על מעגל היחידה ־ זה למה f נקרה אוניטרי ־ הוא שומר על ה־$unit$).

- **הערה:** אם V ממימד סופי, $f:V\to V$ אופרטור אורתוגונלי / אוניטרי, אזי f הפיך ו־f^{-1} אוניטרי.

- **הערה:** אם V ממימד סופי, $f:V\to V$ אופרטור אורתוגונלי / אוניטרי, ו־λ ע"ע של f עם ו"ע v, אזי $|\lambda|=1$. כלומר, אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ אז $\lambda=\pm1$, ואם $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ ידוע רק ש־$|\lambda|=1$ (כלומר λ על מעגל היחידה).

- **טענה:** יהי V ממ"פ ממימד n, ויהי $f: V \to V$ אופרטור. אזי התנאים הבאים שקולים:
  - f אורתוגונלי / אוניטרי.
  - לכל $(b_1, \dots, b_n)$ בסיס אורתונורמלי, גם $(f(b_1), \dots, f(b_n))$ הוא בסיס אורתונורמלי.
  - קיים בסיס אורתונורמלי $(b_1, \dots, b_n)$ כך שגם $(f(b_1), \dots, f(b_n))$ הוא בסיס אורתונורמלי.
- **טענה - מטריצה של אופרטור אורתוגונלי / אוניטרי:** יהי V ממ"פ, $B = (b_1, \dots, b_n)$ בסיס אורתונורמלי, $f: V \to V$ אופרטור שהמטריצה המייצגת שלו בבסיס B היא $A = [f]_B$. אזי f אורתוגונלי / אוניטרי אם"ם $\overline{A}^t A = I$. בפרט, $\overline{A}^t = A^{-1}$.
- **מטריצה אורתוגונלית:** $A \in M_n(\mathbb{R})$ היא מטריצה אורתוגונלית אםם $A^t A = I$.
- **מטריצה אוניטרית:** $A \in M_n(\mathbb{R})$ היא מטריצה אורתוגונלית אםם $\overline{A}^t A = I$.

הרצאה 20 (קלואי)

- **הגדרה:** יהי $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ מרחב מכפלה פנימית, $w \in V$. נגדיר $< w| : V \to \mathbb{F}$ על ידי $< w|(v) =< w|v >$, לכל $v \in V$.
- **משפט ההצגה** $(Riesz)$: יהי $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי. $l: V \to \mathbb{F}$ פונקציונל לינארי. אז קיים $w \in V$ יחיד כך ש - $l =< w|$. (כלומר $l(v) =< w|v >$ לכל $v \in V$).
- **טענה:** יהי $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי. $f: V \to V$ אופרטור לינארי. אזי קיים אופרטור לינארית $f^*: V \to V$ יחיד כך ש - $\langle w|f(v) \rangle = \langle f^*(w)|v \rangle$ לכל $w, v \in V$. בנוסף, אם $\mathcal{B}$ בסיס אורתונורמלי של V, ו - $A = [f]_{\mathcal{B}}$ המטריציה המייצגת של f לפי בסיס $\mathcal{B}$, אזי מתקיים: $\overline{A}^t = [f^*]_{\mathcal{B}}$.
- **אופרטור צמוד:** אופרטור f^* המקיים $\langle w|f(v) \rangle = \langle f^*(w)|v \rangle$.
- **מטריצה צמודה:** המטריצה $\overline{A}^t$נקראת המטריצה הצמודה למטריצה A ומסומנת A^*.
- **הערה:** אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, אזי $A^* = A^t$.
- **הערה:** אם $dimV = 1$ אז $A = [a]$, ולכן $A^* = [\overline{a}]$.
- **טענה:** יהי $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי. $f: V \to V$ אופרטור אורתוגונלי / אוניטרי, אזי $f^* = f^{-1}$.
- **למה:** יהיו V ממ"פ נ"ס, f, g אופרטורים, $a \in \mathbb{F}$. אזי:
  - $(f + g)^* = f^* + g^*$
  - $(af)^* = \overline{a} f^*$
  - $(f^*)^* = f$
- **טענה:** יהי $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי. $f: V \to V$ אופרטור לינארי. W תת מרחב f אינווריאנטי של V. אזי $W^\perp$ הוא תת מרחב f^*אינווריאנטי.
- **אופרטור צמוד לעצמו:** יהי $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי. אופרטור לינארי $f: V \to V$ נקרא צמוד לעצמו כאשר $f^* = f$.
- **הערה:** יהי $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי. $f: V \to V$ אופרטור לינארי, $\mathcal{B}$ בסיס אורתונורמלי של V. אז הטענות הבאות שקולות:
  - f צמוד לעצמו.
  - $[f]_{\mathcal{B}} = [f^*]_{\mathcal{B}}$.
- **מטריצה צמודה לעצמה:** מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ המקיימת $A^* = A$ נקראת מטריצה צמודה לעצמה.
  - כאשר $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, המטריצה נקראת **סימטרית**.
  - כאשר $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, המטריצה נקראת **הרמטית**.

- **תכונה:** אם מטריצה $A \in M_n(\mathbb{C})$ מטריצה הרמטית, אז כל האיברים על האלכסון הראשי של A הם מספרים ממשיים.
- **טענה:** יהי $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$. $f : V \to V$ אופרטור צמוד לעצמי. $\lambda \in \mathbb{C}$ ערך עצמי של f. אזי $\lambda \in \mathbb{R}$. כלומר - ע"ע של אופרטור צמוד לעצמו הוא ממשי.

הרצאה 21 (קלואי)

- **טענה:** ו"ע המתאימים לע"ע ונים של אופרטור צמוד לעצמו הם אורתוגונלים.
- **טענה:** תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה צמודה לעצמה. אזי קיים $\lambda \in \mathbb{F}$ שהוא ערך עצמי של A. כלומר - אם A צמודה לעצמה קיים לה ע"ע.
- **טענה:** אם f אופרטור צמוד לעצמו על ממ"פ ממימד סופי, אזי יש ל-f ע"ע.
- **טענה:** יהי $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי, $f : V \to V$ אופרטור צמוד לעצמו. $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ ערכים עצמיים של f, כך ש - $\lambda \neq \mu$. יהיו $v, w \in V$ וקטורים עצמיים ששייכים ל - λ, μ בהתאמה. אזי מתקיים: $v \perp w$.

לכסון בבסיס אורתונורמלי

הרצאות 21-22 (קלואי)

- **אופרטור ניתן ללכסון בבסיס אורתונורמלי:** יהי $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ממ"פ נ"ס, ו-$f : V \to V$ אופרטור. f ניתן ללכסון בבסיס אורתונורמלי אם קיים בסיס אורתונורמלי B כך ש-$[f]_B$ אלכסונית.
- **הערה:** יהי $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי. $\mathcal{B}$ בסיס אורתונורמלי של V. יהי $\mathcal{C}$ בסיס כלשהו של V. אזי $\mathcal{C}$ הוא בסיס אורתונורמלי של V אם"ם $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ היא מטריצה אורתוגונלית / אוניטרית.
- **טענה:** יהי $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי, f אופרטור ניתן ללכסון בבסיס אורתונורמלי, אזי:
  - אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ אזי $f^* = f$.
  - אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ אזי $f \circ f^* = f^* \circ f$.

המשפט הספקטרלי - המקרה הממשי $\mathbb{R}$

- **מטריצה לכסינה אורתוגונלית:** מטריצה $A \in M_n(\mathbb{R})$ נקראת לכסינה אורתוגונלית כאשר קיימת מטריצה O הפיכה, כך ש - $O^{-1}AO$ היא מטריצה אלכסונית.
- **טענה:** יהי $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל $\mathbb{R}$, $f : V \to V$ אופרטור לכסין בבסיס אורתונורמלי. אזי f צמוד לעצמו.
- **משפט:** יהי $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל $\mathbb{R}$, $f : V \to V$ אופרטור צמוד לעצמו. אזי f לכסין בבסיס אורתונורמלי.
- **מסקנה:** תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ אזי A לכסינה אורתוגונלית אם"ם A סימטרית.

המשפט הספקטרלי - המקרה המרוכב $\mathbb{C}$

- **מטריצה לכסינה אוניטרית:** מטריצה $A \in M_n(\mathbb{C})$ נקראת לכסינה אוניטרית כאשר קיימת מטריצה U הפיכה, כך ש - $U^{-1}AU$ היא מטריצה אלכסונית.
- **אופרטור נורמלי:** יהי $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$. האופרטור $f : V \to V$ נקרא אופרטור נורמלי, כאשר $f \circ f^* = f^* \circ f$.
- **מטריצה נורמלית:** מטריצה $A \in M_n(\mathbb{C})$ נקראת נורמלית כאשר $A^*A = AA^*$
- **טענה:** יהי $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$, $f : V \to V$ אופרטור לכסין בבסיס אורתונורמלי. אזי, f אופרטור נורמלי.
- **למה:** יהי $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי, $f : V \to V$ אופרטור לינארי. W תת מרחב f ו- f^* אינווריאנטי של V. אזי $(f|_W)^* = f^*|_W$.

- **משפט:** יהי $(V,\langle\cdot|\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$, $f:V\to V$ אופרטור נורמלי. אזי, f לכסין בבסיס אורתונורמלי.

- **מסקנה:** A לכסינה אוניטרית אם"ם A נורמלית.

תרגול 12

- **טענה:** יהי f אורתוגונלי / אונטרי, ו - $v_1,v_2\in V$ וקטורים עצמיים המתאימים לערכים העצמיים $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{F}$ בהתאמה. אם $\lambda_1\neq\lambda_2$, אזי $v_1\perp v_2$.

- **טענה:** תהי $A\in M_2(\mathbb{R})$ מטריצה אורתוגונלית. אזי קיים $\theta\in[0,2\pi)$, כך ש - $A=A_1(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ או $A=A_2(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$

- **טענה:** נתונה המטריצה $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=A=A_1(\theta)$ עם $\theta\neq\pi k$. המטריצה האורתוגונלית היחידה השונה מ- $A_1(\theta)$ שדומה ל - $A_1(\theta)$ היא $A_1(2\pi-\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

- **טענה:** לכל מטריצה אורתוגונלית מהצורה $A=A_2(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$ דומה למטריצת השיקוף $A_2(0)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$.

- **טענה:** יהי Vמרחב מכפלה פנימית ממימד סופי, $f:V\to V$ אופרטור אורתוגונלי ו - U תת מרחב f אינווריאנטי של V. אזי:
  - (1) U הוא גם תת מרחב f^{-1} אינווריאנטי
  - (2) $U^{\perp}$הוא f אינווריאנטי.

- **טענה:** יהי f אופרטור אורתוגונלי מעל $\mathbb{R}^3$ (ביחס לאיזושהיא מכפלה פנימית), כך ש - $det\, f=1$. אזי 1 הוא ערך עצמי של f.

- **טענה:** אם $A=\begin{bmatrix}A_1 & \\ & A_2\end{bmatrix}$ מטריצת בלוקים, אז $det\, A=det\, A_1\cdot det\, A_2$.

- **למה:** יהי V מרחב מכפלה פנימית, $f,g:V\to V$ שני אופרטורים. נניח שלכל $u,v\in V$ מתקיים: $\langle u|f(v)\rangle=\langle u|g(v)\rangle$. אזי $f=g$.

- **טענה:** יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי. אופרטור לינארי $f:V\to V$ צמוד לעצמו אם"ם $\langle f(u)|v\rangle=\langle u|f(v)\rangle$ לכל $u,v\in V$.

- **טענה:** יהי V בסיס מכפלה פנימית, ו - V בסיס אורתונורמלי של V. אופרטור לינארי $f:V\to V$ צמוד לעצמו אם ורק אם $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ צמודה לעצמה.

- **טענה:** יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופית מעל $\mathbb{F}$, U תת מרחב של V, $p_U:V\to V$ הטלה אורתוגונלית על U. אזי p_Uצמוד לעצמו.

תרגול 13

- **טענה:**יהי V מרחב מכפלה פנימית, $f:V\to V$ אופרטור לינארי. אזי f נורמלי אם"ם לכל $v,u\in V$ מתקיים: $\langle f(v)|f(u)\rangle=\langle f^*(v)|f^*(u)\rangle$.

1.4 תבניות בילינאריות סימטריות ממשיות

הרצאה 23 (אלכס)

- **תבנית בילינארית סימטרית:** יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. תבנית בילינארית סימטרית ב - V היא פונקציה $g:V\times V\to\mathbb{R}$ שמקיימת:
  - $g(v,u'+u)=g(v,u')+g(v,u)$ לכל $v,u,u'\in V$ - אדטיביות במשתנה השני.

- $g(v,c\cdot u)=c\cdot g(v,u)$ לכל $v,u\in V$ ו - $c\in\mathbb{R}$ - הומוגניות במשתנה השני.
- $g(u,v)=g(v,u)$ לכל $v,u\in V$ - סימטריה.

- **תכונות של תבנית בילינארית סימטרית:** יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. $g:V\times V\to\mathbb{R}$ תבנית בילינארית סימטרית. אזי:
  - $g(u,0)=0$ לכל $u\in V$.
  - $g(u+u',v)=g(u,v)+g(u',v)$ לכל $v,u,u'\in V$ - אדטיביות במשתנה הראשון.
  - $g(c\cdot v,u)=c\cdot g(v,u)$ לכל $v,u\in V$ ולכל $c\in\mathbb{R}$ - הומוגניות במשתנה הראשון.

- **מטריצה של תבנית בילינארית סימטרית:** יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. $g:V\times V\to\mathbb{R}$ תבנית בילינארית סימטרית. $\mathcal{B}=(b_1,b_2,\dots b_n)$ בסיס סדור של V. המטריצה $G=\begin{bmatrix} g_1^1 & \cdots & g_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1^n & \cdots & g_n^n \end{bmatrix}$ של g ביחס ל - $\mathcal{B}$ מוגדרת על ידי $g_j^i=g(b_i,b_j)$.
  - **תכונה:** G היא מטריצה סימטרית.

- **טענה:** יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, $g:V\times V\to\mathbb{R}$ תבנית בילינארית סימטרית. $\mathcal{B}$ בסיס סדור של V, G מטריצה של g ביחס ל - $\mathcal{B}$. אזי, לכל $v,w\in V$ מתקיים:

$$g(v,w)=[v]_b\cdot(G\cdot[w]_b)$$

- **טענה:** יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, $g:V\times V\to\mathbb{R}$ תבנית בילינארית סימטרית. $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ בסיסים סדורים של V. $M=M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ מטריצת מעבר בסיסים. יהיו G,G' מטריצות של g ביחס ל - $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ בהתאמה. אזי - $G'=M^tGM$.

- **מטריצה חופפת:** נתונות $A,B\in M_n(\mathbb{R})$. נאמר ש - A חופפת ל - B כאשר קיימת מטריצה הפיכה $P\in M_n(\mathbb{R})$ כך ש - $A=P^tBP$.
  - תכונה (סימטריות): אם A חופפת ל - B, אז גם B חופפת ל - A.

- **טענה:** יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, $g:V\times V\to\mathbb{R}$ תבנית בילינארית סימטרית. $\mathcal{B}$ בסיס סדור של V, G מטריצה של g ביחס ל - $\mathcal{B}$. G' חופפת ל - G'. אזי קיים בסיס סדור $\mathcal{C}$ של V כך שהמטריצה של g ביחס לבסיס $\mathcal{C}$ היא המטריצה G'.

תרגול 13

- **טענה:** למטריצות חופפות אותה דרגה.
- **טענה:** אם $g:V\times V\to\mathbb{R}$ תבנית בילניארית סימטרית שמקיים גם חיוביות בהחלט (כלומר היא מכפלה פנימית), אז קיים בסיס $\mathcal{B}$שבו $[g]_{\mathcal{B}}=I$.

הרצאה 24 (אלכס)

- **ניצבות ביחס לתבנית בילינארית סימטרית:** יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, g תבנית בילניארית סימטרית על V. $u,v\in V$ נקראים ניצבים ביחס ל - g, כאשר $g(u,v)=0$.
- **סדרה אורתוגונלית ובסיס אורתוגונלי:** יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, g תבנית בילניארית סימטרית על V. תהי סדרה $\mathcal{V}=(v_1,v_2,\dots,v_k)\in V$. הסדרה $\mathcal{V}$ תיקרא **סדרה אורתוגונלית**, כאשר $v_i\perp v_j$ לכל $i\neq j$. בסיס סדור $\mathcal{B}$ נקרא **בסיס אורתוגנלי**, אם הוא מהווה סדרה אורתוגונלית.
- **טענה:** תהי $A\in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה סימטרית. אזי, קיימת מטריצה אלכסונית חופפת ל - A.
- **מסקנה:**יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, $g:V\times V\to\mathbb{R}$ תבנית בילינארית סימטרית. אזי קיים בסיס אורתוגונלי של V ביחס ל - g.

- **סימון:**יהיו $p,m,z\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. נסמן:

$$G(p,m,z)=\begin{bmatrix}[I_p] & \cdots & 0\\ \vdots & [I_m] & \vdots\\ 0 & \cdots & [I_z]\end{bmatrix}\in M_{p+m+z}(\mathbb{R})$$

- **טענה:** יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, $dimV=n$. $g:V\times V\to\mathbb{R}$ תבנית בילינארית סימטרית. אזי קיימים $p,m,z\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ ובסיס סדור $\mathcal{B}$של V, כך ש - $p+m+z=n$ והמטריצה של g ביחס ל - $\mathcal{B}$ היא $G(p,m,z)$.
- **מסקנה:** תהי $A\in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה סימטרית. אזי, אזי קיימים $p,m,z\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ ומטריצה $G(p,m,z)$ החופפת ל - A.
- **גרעין של תבנית בילינארית סימטרית:** יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. $g:V\times V\to\mathbb{R}$ תבנית בילינארית סימטרית. נגדיר את **הגרעין** של g להיות $\{u\in V\,|\,\forall v\in V\ g(u,v)=0\}$.
- **טענה:** יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, $dimV=n$. $g:V\times V\to\mathbb{R}$ תבנית בילינארית סימטרית. $\mathcal{B}$ בסיס סדור של V, G מטריצה של g ביחס ל - $\mathcal{B}$. U הגרעין של g. אזי $dimU=n-rk\,G$
- **משפט סילבסטר:** יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, $g:V\times V\to\mathbb{R}$ תבנית בילינארית סימטרית. $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ בסיסים סדורים של V כך שהמטריצות G,G' ביחס לבסיסים $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ בהתאמה הן $G(p,m,z),\ G(p',m',z')$. אזי מתקיים: $p=p',\ \ m=m',\ \ z=z'$.

2 אלגוריתמים

- **מציאת תמונה וגרעין של אופרטור בהנתן מטריצה מייצגת:**
  - תמונה: מוצאים בסיס למרחב העמודות $\mathcal{C}(A)$ -
    - מדרגים את המטריצה.
    - במטריצה המדורגת, בוחרים את העמודות שמכילות את המקדם המוביל, ועושים רשימה של האינדקסים שלהן.
    - חוזרים למטריצה המקורית, בוחרים את העמודות עם האינדקסים מהרשימה שיצרנו. זה הבסיס לתמונה.
  - גרעין: מוצאים בסיס למרחב $\mathcal{R}^0(A)$ - מדרגים את המטריצה ומציגים את קבוצת הפתרונות.
- **חלוקת פולינומים עם שארית:**
  - נשווה את הגורם המוביל למחלק ע"י כפל בפולינום כלשהו (נרשום בצד / למעלה באיזה פולינום כפלנו).
  - נחסר את תוצאת הכפל מהמחולק.
  - נחזור על שלב זה עד שנקבל סקלר (זוהי השארית). תוצאת החילוק היא סכום הפולינומים שכפלנו בהם.
- **פירוק פולינום לגורמים לינארים:** מוצאים את השורשים $\lambda_1,...,\lambda_k$ של הפולינום (אם מעל $\mathbb{C}$ מחשבים שורש מרוכב - צירפתי תזכורת מלינארית 1 בראש המסמך) ואז הפירוק הוא $(X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_k)$.
- **מציאת פולינום אופייני:** $det(XI-A)$.
- **מציאת ערכים עצמיים:** השורשים של הפולינום האופייני.
- **מציאת בסיס למרחב עצמי של ע"ע λ:** מחשבים את הגרעין של המטריצה $\lambda I-A$.
- **מציאת בסיס למרחב עצמי מוכלל של ע"ע λ:** מחשבים את הגרעין של המטריצה $(A-\lambda I)^m$ כאשר m הוא הריבוי האלגברי של λ.
- **מציאת בסיס מלכסן:**
  - מחשבים ע"ע, ומוצאים בסיס לכל מ"ע.
  - משרשרים את הבסיסים, זהו הבסיס המלכסן.
- **מציאת מטריצה מייצגת של אופרטור לכסין לפי בסיס מלכסן:**

- יוצרים מטריצה אלכסונית כשעל האלכסון הראשי יש את הע"ע, כל ע"ע מופיע כמות פעמים השווה לריבוי הגאומטרי שלו.

- **מציאת מטריצה אלכסונית D שהמטריצה הלכסינה A דומה לה $A=P^{-1}DP$:**
  - D היא המטריצה המייצגת של האופרטור לפי הבסיס המלכסן.
  - P היא "הדבקה" של הוקטורים מהבסיס המלכסן.

- **מציאת הפולינום המינימלי של וקטור ואופרטור min_v^f:**
  - מוצאים בסיס לת"מ הציקלי $Z(f,v)=\left(v,f(v),...,f^{k-1}(v)\right)$.
  - כותבים צ"ל של איברי הבסיס ביחד עם $f^k(v)$ (שתלוי בהם לינארית) השווה לאפס. זהו הפולינום המינימלי של v ו-f.

- **מציאת הפולינום המינימלי של אופרטור m_f:**
  - <u>דרך א' - בעזרת האופרטור עצמו:</u>
    * מוצאים מה ה-k המינימלי שעבורו $(id_V,f,f^2..)$ ת"ל.
    * מציגים את f^k בתור צ"ל של $(id_V,f,f^2..)$.
    * מציבים X במקום f, מעבירים את X^k לאגף השני, וקיבלנו את הפולינום המינימלי.
  - <u>דרך ב' - בעזרת המטריצה המייצגת של האופרטור:</u>
    * מוצאים מה ה-k המינימלי שעבורו $(A^0=I,A^1,A^2..)$ ת"ל.
    * מציגים את A^k בתור צ"ל של $(I,A,A^2..)$.
    * הסקלרים מהצ"ל הם המקדמים של הפולינום, לפי אינדקס (לדוג' הסקלר שכופל את A^0 הוא a_0, הסקלר שכופל את A^1 הוא a_1X, הסקלר שכופל את A^2 הוא a_2X^2 וכו').
  - <u>דרך ג':</u> מחשבים את הפולינום האופייני, ומציבים בו (עם חזקה 1 על כל הגורמים הלינארים) את המטריצה. אם זה לא מתאפס מעלים את החזקה עד שזה מתאפס.

- **מציאת בסיס שרשראות לאופרטור נילפוטנטי:**
  - לוקחים בסיס למרחב, מכל איבר בבסיס יוצרים שרשרת, ויוצרים בסיס מכל השרשראות.
  - אם מספר השרשראות בבסיס הוא $dimV$, סיימנו. אחרת:
    * אם יש שרשרת שמופיעה בשרשרת אחרת, או שהזנב שלה מופיע בשרשרת אחרת, נוריד את השרשרת כולה.
    * אחרת, נחליף שרשרת בשרשרת קצרה יותר - נחפש צ"ל לא טריויאלי, נוציא את האופרטור מחוץ לסוגריים כמה שאפשר, ונחליף את השרשרת במה שיש בתוך הסוגריים.
  - כשמגיעים לבסיס עם $dimV$ וקטורים, זהו בסיס שרשראות בת"ל.

- **מציאת צורת ז'ורדן נילפוטנטית:** לוקחים קבוצת שרשראות פורשת, מצמצמים אותה עד שהיא בת"ל. לפי הגובה של כל שרשרת מסיקים את גודל הבלוקים.

- **מציאת צורת ז'ורדן "רגילה" (לא בהכרח נילפוטנטית):**
  - מוצאים את הפולינום האופייני.
  - לכל ע"ע מוצאים בסיס למ"ע <u>המוכלל</u>.
  - לכל ע"ע יוצרים את בלוק הז'ורדן - מוצאים בסיס שרשראות, ובונים את בלוק הז'ורדן לפי אורכי השרשראות.
  - יוצרים מטריצת בלוקים אלכסונית מבלוקי הז'ורדן שיצרנו לע"ע השונים.

- **מציאת בסיס אורתונורמלי - אלגוריתם גראם שמידט:** עבור בסיס נתון $B=(b_1,\dots,b_n)$.
  - אם הוקטור הראשון b_1 לא מנורמל, מנרמלים אותו - כלומר כופלים אותו ב-$c_1=\frac{1}{||b_1||}$.
  - לוקחים את הוקטור שנירמלנו c_1 ואת הוקטור השני בבסיס המקורי b_2. <u>מחשבים</u> $w_2=\langle c_1|b_2\rangle\, c_1$.
  - מחסרים c_1-w_2, ומנרמלים, וקיבלנו את c_2 האיבר השני בבא"נ.

– אם יש וקטור שלישי b_3: עושים שוב פעם את התהליך, רק שאת החלק של החישוב עושים פעם אחת על הוקטור הראשון והשלישי, ופעם אחת על השני והשלישי, ואז סוכמים את מה שיצא וממשיכים לשלבים הבאים.

- **מציאת הטלה ניצבת:** עבור $B=(b_1,\ldots,b_n)$ בסיס אורתונורמלי (אם יש בסיס לא אורתונורמלי, הופכים אותו לאורתונורמלי באמצעות גראם שמידט), הנוסחא להטלה ניצבת היא $v_W=\sum\limits_{i=1}^{n}\langle b_i\mid v\rangle\, b_i$.

- **לכסון אורתוגונלי / אוניטרי:** עבור אופרטור צמוד לעצמו (ב־$\mathbb{R}$) או נורמלי (ב־$\mathbb{C}$):
  – מוצאים בסיס לכל מ"ע.
  – לכל בסיס עושים גראם שמידט והופכים אותו לאורתונורמלי.
  – משרשרים את כל הבסיסים האורתונורמליים לבסיס אחד גדול ־ זהו בסיס אורתונורמלי של האופרטור.
  – מצמצמים את הוקטורים למטריצה (המסומנת O מעל $\mathbb{R}$ או U מעל $\mathbb{C}$), ועבורה מתקיים $O^{-1}AO$ / $U^{-1}AU$ אלכסונית.

- **מציאת נוסחה מפורשת לסדרה רקורסיבית לינארית מעומק k:**
  – אם נתונה סדרה המוגדרת ע"י תנאי לינארי רקורסיבי מעומק k ־ כלומר ידועים לנו האיברים $a_0,\ldots,a_{k-1}$ וקיימים סקלרים $\gamma_0,\ldots,\gamma_{k-1}$ כך שהאיבר ה־a_n מוגדר באופן הבא ־ $a_n=\gamma_0a_{n-k}+\gamma_1a_{n-k+1}+\ldots+\gamma_{k-1}a_{n-1}$.
  – אז נגדיר $A=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&0\\0&0&0&\cdots&1\\\gamma_0&\gamma_1&\gamma_3&\cdots&\gamma_{k-1}\end{bmatrix}$ ונקבל ש־$\begin{bmatrix}a_n\\\vdots\\a_{n+k+1}\end{bmatrix}=A^n\begin{bmatrix}a_0\\\vdots\\a_{k-1}\end{bmatrix}$, כלומר הקואורדינטה הראשונה של הוקטור $A^n\begin{bmatrix}a_0\\\vdots\\a_{k-1}\end{bmatrix}$ תתן נוסחה לסדרת הנסיגה.

3 טיפים וטריקים

לכסינות

1. **דרכים להוכיח לכסינות:**
   (א) $dimV$ ע"ע שונים / קיים בסיס של ו"ע ל־V
   (ב) סכום מימדי המרחבים העצמיים הוא $dimV$.
   (ג) לכל ע"ע, הריבוי האלגברי שווה לריבוי הגאומטרי.
   (ד) הפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינארים שונים.
   (ה) האופרטור צמוד לעצמו.
   (ו) האופרטור אוניטרי.
   (ז) המטריצה המייצגת דומה למטריצה אלכסונית.
   (ח) המטריצה המייצגת היא הופכית של מטריצה לכסינה.
   (ט) אם מעל $\mathbb{R}$ ־ המטריצה סימטרית.
   (י) אם מעל $\mathbb{C}$ ־ האופרטור נורמלי.

2. **דרכים להפריך לכסינות:**
   (א) סכום מימדי המרחבים העצמיים אינו $dimV$.
   (ב) קיים ע"ע עם ריבוי גאומטרי שונה מהאלגברי.
   (ג) המטריצה דומה למטריצה לא לכסינה.

(ד) הפולינום האופייני לא מתפרק לגורמים לינאריים.
(ה) האופרטור נילפוטנטי ואינו אופרטור האפס.
(ו) צורת הז'ורדן לא אלכסונית (כלומר לא כל הבלוקים מגודל 1).
(ז) אין בכלל ערכים עצמיים.

דמיון בין מטריצות

1. **דרכים להוכיח דמיון:**

(א) המטריצות מייצגות את אותו האופרטור בבסיס שונה.
(ב) המטריצות לכסינות עם אותו פולינום אופייני.
(ג) אותה צורת ז'ורדן.
(ד) A דומה ל-A^t אם χ_A מתפרק לגורמים לינאריים.
(ה) המטריצות הן הצבה של מטריצות דומות באותו פולינום.

2. **דרכים להפריך דמיון:**

(א) דרגה שונה.
(ב) צורת ז'ורדן שונה.
(ג) פולינום אופייני שונה.
(ד) פולינום מינימלי שונה.
(ה) דטרמיננטה שונה.
(ו) עקבה שונה.
(ז) מטריצה אחת לכסינה והשניה לא לכסינה.
(ח) ערכים עצמיים שונים.
(ט) ריבויים גאומטריים שונים לאותם ע"ע.

חפיפה בין מטריצות

1. **דרכים להוכיח חפיפה:**

(א) שתי המטריצות מייצגות מכפלה פנימית כלשהי.
(ב) אם קיים סקלר c כלשהו כך ש-$\det A = c^2 \det B$ אז A, B חופפות.
(ג) עבור מטריצות סימטריות - יש אותו מספר של ע"ע חיוביים, שליליים ואפס.

2. **דרכים להפריך חפיפה:**

(א) דרגה שונה.
(ב) מטריצה אחת מייצגת מכפלה פנימית והשניה לא.
(ג) הדטרמיננטה של אחת מהן חיובית ושל השניה שלילית.