

高等理工学院《算法设计与分析》

(2019 年秋季学期)

第二次作业

作业提交截止时间：2019 年 10 月 29 日 23 : 55

1 最长回文子序列问题 (20 分)

一个子序列被称为回文序列是指：该序列从右往左读和从左往右读的结果是一样的。例如，如下所示序列：

$$S = \langle A, C, G, T, G, T, C, A, A, A, A, T, C, G \rangle$$

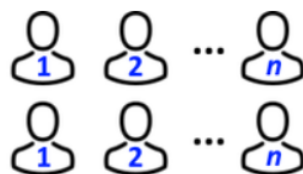
包含了许多回文子序列，如 $s_1 = \langle A, C, G, C, A \rangle$ ， $s_2 = \langle A, A, A, A \rangle$ 。请设计算法来计算序列 $S[1..n]$ 的最长回文子序列，并分析该算法的时间复杂度。

2 餐厅选址问题 (20 分)

某公司希望在高速公路上设立一些餐厅。现有 n 个位置可选，距高速公路的起点分别为 $m_1, m_2, \dots, m_n (m_1 < m_2 < \dots < m_n)$ 。对每个位置 m_i ，该公司如果在这个位置设立餐厅的话，期望盈利为 $p_i (p_i > 0)$ 。此外，公司设立的任意两个餐厅间的距离应大于等于 $k (k > 0)$ ，但设立的餐厅个数没有限制。请设计算法来帮助该公司选址使得期望盈利和最大，并分析该算法的时间复杂度。

3 球队组建问题 (20 分)

有 $2n$ 个学生分为两排，每排有 n 个人，由左至右分别编号为 $1, 2, \dots, n$ ，如图所示。现在请你在这两排学生中挑选出一些学生组成一支球队，挑选出的学生编号必须是严格递增的（编号相同的两名学生最多只能取其中一个）。此外，为避免球队中的队员都来自同一排，不能同时选择同一排相邻的两名学生（例如，若选择第一排的 5 号同学，就不能再选择第一排的 4 号和 6 号同学）。组建队伍的总人数没有限制。



给出同学们的身高数据 $h_{i,j}$ ， $h_{1,k} (1 \leq k \leq n)$ 表示第一排同学的身高， $h_{2,k} (1 \leq k \leq n)$ 表示第二排同学的身高。请你设计算法使组建成的球队中队员的身高之和最大，并分析该算法的时间复杂度。

4 数组排序问题 (20 分)

给定整数数组 $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ 。你的任务是对该数组进行一系列操作使其变为非降数数组：每次操作你需要选定一个数字 x ，然后将数组中所有等于 x 的元素统一移至数组的开始或结尾。例如数组 $A = [2, 1, 3, 1, 1, 3, 2]$ 可以通过如下两次操作变为非降数数组：

1. 将所有等于 1 的元素移至数组开头得到 $[1, 1, 1, 2, 3, 3, 2]$;
2. 将所有等于 3 的元素移至数组结尾得到 $[1, 1, 1, 2, 2, 3, 3]$ 。

请你设计算法来计算将给定数组变为非降序数组所需要的最少操作次数，并分析该算法的时间复杂度。

5 能耗降低问题 (20 分)

给定 n 个长度为 m 的 01 串，第 i 个串 $S_i = \langle s_{i,1}, s_{i,2}, \dots, s_{i,m} \rangle$ ($1 \leq i \leq n$)。我们定义每个串耗费的能源为串中相距最远的两个 1 之间的距离（包含 1 本身），若只含一个 1 则消耗的能源为 1。现在你可以在 n 个串，共计 $n \times m$ 个字符中选择 k 个字符对其取反（将 0 变为 1 或将 1 变为 0），从而降低消耗。例如：给定串 011000101，第二位和第九位上的两个 1 相距最远，故该串消耗为 $9 - 2 + 1 = 8$ ，如果我们将第二位上的 1 变为 0，则消耗就降为 7；如果我们将第二、三位上的 1 变为 0，则消耗可降至 3。请你设计算法计算对 k 个字符取反后最少仍需消耗多少能源，并分析该算法的时间复杂度。