

## מבני נתונים - תרגיל 1

תאריך פרסום: 19.03.2020

תאריך הגשה: 02.04.2020, 23:59

מרצה ומתרגל אחראים: מיכל שמש, שחר שנפ

### הנחיות:

- הגשת העבודה הינה ביחידים או בזוגות, לבחירתכם.
- העבודה חייבת להיות מוקלדת.
- יש להגיש קובץ בפורמט pdf למערכת ההגשה.
- אין צורך לפרט דברים שנלמדו כיתה. עם זאת, יש להוכיח כל טענה שלא נלמדה בהרצאה או בתרגול.
- יש לנתח את זמן הריצה בצורה ההדוקה ביותר תוך התחשבות במקרה הגרוע ביותר.
- $\log()$  מתייחס ללוגריתם בבסיס 2.
- >!--יש לתת הוכחות פורמליות עבור חסמים אסימפטוטיים, בדומה לדוגמאות שהועברו בכיתה.
- שאלות לגבי העבודה יש לשאול בפורום באתר הקורס או בשעות קבלה של המרצה/המתרגל האחראיים על העבודה.

### שאלה 0

מלאו את שמכם ותעודת הזהות שלכם בהצהרה הבאה, והגישו אותה כשאלה 0

I, <name> (<ID>), assert that the work I submitted is entirely my own. I have not received any part from any other student in the class, nor did I give parts of it for use to others.

I realize that if my work is found to contain code that is not originally my own, a formal case will be opened against me with the BGU disciplinary committee.

### שאלה 1

סדרו את הפונקציות הבאות לפי סדר אסימפטוטי מן ה"קטנה" ל"גדולה".

אם שתי פונקציות בסידור מקיימות  $f_i = \Theta(f_k)$  אז ציינו זאת. תנו הוכחה פורמלית לתשובותיכם.

$$f_1(n) = 2020, f_2(n) = 3^{\log_{\sqrt{3}} n}, f_3(n) = 2^{\sqrt{n}}, f_4(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}, f_5(n) = 5^n,$$

$$f_6(n) = 2^{3^n} = 2^{(3^n)}, f_7(n) = n^n, f_8(n) = 3^{2^n} = 3^{(2^n)}, f_9(n) =$$

$$\log\left(n^{\frac{2}{5}}\right), f_{10}(n) = \log_3(3^n n^2),$$

$$f_{11}(n) = \log(n^5), f_{12}(n) = n^3 + n^2 + \log(n) + n, f_{13}(n) = 2^{100}, f_{14}(n) = \frac{4n}{3}$$

## שאלה 2

א. יהיו  $f(n), g(n)$  פונקציות חיוביות.

הוכיחו כי:  $f(n) = O(g(n))$  וגם  $f(n) = \Omega(g(n))$  אם  $f(n) = \Theta(g(n))$

ב. הוכיחו כי: אם  $f(n) = O(g(n))$  אז  $g(n) = \Omega(f(n))$ .

ג. יהיו  $p_1(n), p_2(n)$  פולינומים מחזקה  $n_1, n_2$  בהתאמה. נסמן  $p_1(p_2(n)) = \Theta(g(n))$ . מציאו את  $g(n)$ .

ד. יהי  $A$  מערך באורך  $n > 0$ . נתבונן בפרוצדורה הבאה אשר זמן הריצה שלה הוא  $T(n)$ :

FindIndex(A, key)

(1) index  $\leftarrow$  -1

(2) **for** i = 1 **to** A.length-1 **do**:

(3)       **if** A[i] == key :

(4)               index  $\leftarrow$  i

(5)               **break**

(6) **return** index

נתחו את זמן הריצה במונחים של  $\Theta$  (זכרו: אם לא מצוין יש לנתח את זמן הריצה בהתחשב במקרה הגרוע ביותר). הוכיחו את תשובתכם.

## שאלה 3

מצאו חסם עליון וחסם תחתון אסימפטוטיים עבור  $T(n)$  בכל אחת מנוסחאות הנסיגה שלהלן. הניחו כי  $T(n)$  קבועה עבור  $n$  קבוע. מצאו חסמים הדוקים ככל שתוכלו ונמקו את תשובותיכם.

א.  $T(n) = T(\sqrt{n}) + 1$

ב.  $T(n) = 5T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3 \log n$

ג.  $0 < c < 1, T(n) = T(cn) + T((1-c)n) + 1$

ד.  $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

ה.  $T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n$

ו.  $T(n) = 2T(n-1) + 1$

ז.  $T(n) = T\left(\frac{9}{10}n\right) + 1$

## שאלה 4

מהי סיבוכיות זמן ריצה של קטעי הקוד הבאים (במונחים של  $\Theta$ )? נסחו את תשובותיכם באופן מפורש (דהיינו ללא שימוש בסכומים, מכפלות או סימן עצרת). הסבירו ונמקו את דרך ההגעה לפתרון.

a) **function** mystery (A[1..n])

```

    for i ← 1 to n
        index = i
        for j ← i+1 to n
            if (A[j] < A[index])
                index ← j;
                temp ← A[index]
                A[index] ← A[i]
                A[i] ← temp

```

b) **function** exp(base , n)

```

    if (n = 0)
        return 1
    else if (n = 1)
        return base
    else
        return base · exp(base,n-1)

```

c) **function** exp2(base , n)

```

    if (n = 0)
        return 1
    else if (n = 1)
        return base
    else if (mod(n, 3) = 0)
        tmp ← exp2(base, n/3)
        return tmp · tmp · tmp
    else
        return base · exp2(base,n-1)

```

d)

נתון מספר טבעי  $2 \leq c \leq n$ . בסעיף זה יש לנתח את זמן הריצה כתלות ב- $c$ .  
מהו זמן הריצה כאשר  $c$  שווה ל- $n$ ? מהו זמן הריצה כאשר  $c$  קבוע?

**function** expC(base , n)

```

    if (n = 0)
        return 1
    else if (n = 1)
        return base
    else if (mod(n, c) = 0)
        tmp ← expC(base, n/c)
        ans ← 1
        for i ← 1 to c:
            ans ← ans * tmp
        return ans
    else
        return base · expC(base,n-1)

```

## שאלה 5

- א. נתונה הבעיה הבאה: יהי  $N > 1$  מספר טבעי כלשהו.  
קלט: מערך  $A$  לא ממוין באורך  $N$  המכיל את כל המספרים בין  $1$  ל  $N$ , אבל חלק מהמספרים ובו חסרים, והוחלפו ב  $-1$ .  
פלט: מערך  $A$  המכיל את המספרים בין  $1$  ל  $N$ , כך שכל מספר טבעי שהיה במערך הקלט נשאר באותו התא במערך הפלט.  
 הציעו אלגוריתם (תוך פירוט כלל השלבים באופן פורמלי) יעיל ככל הניתן לבעיה ונתחו את זמן ריצתו בצורה מפורטת.

לדוגמה בהינתן מערך  $A$  בגודל  $7$ : (כלומר מערך זה מכיל מספרים מ  $1-7$ )

index	1	2	3	4	5	6	7
A:	7	4	-1	3	-1	5	1

על האלגוריתם להחזיר:

index	1	2	3	4	5	6	7
A:	7	4	2	3	6	5	1

שימו לב כי במקרה זה תתכן תשובה נוספת (במקרה כזה על האלגוריתם להחזיר את אחת מהתשובות האפשריות)

index	1	2	3	4	5	6	7
A:	7	4	6	3	2	5	1

ב. בעיית מציאת האיבר ה- $k$  בגודלו  
קלט: שני מערכים ממויינים A,B באורך N.  
פלט: האיבר ה- $k$  בגודלו מבין אברי שני מערכי הקלט.

הציעו אלגוריתם (תוך פירוט כלל השלבים באופן פורמלי) יעיל ככל הניתן לבעיה ונתחו את זמן ריצתו בצורה מפורטת.

לדוגמה בהינתן מערכים A,B כדלקמן:

index	1	2	3	4	5	6	7
A:	6	10	21	40	56	70	95

index	1	2	3	4	5	6	7
B:	1	3	5	11	23	62	100

עבור  $k = 5$  על האלגוריתם להחזיר 10.