שאלה 4

.1

.i

נשים לב שבכל צעד מתבצעות 3 פעולות קבועות. באיטרציה ה- i נבצע את 3 הפעולות האלו i פעמים כדי להתקדם בחיפוש ובנוסף נבצע את 3 הפעולות האלו i-1 פעמים כדי לחזור אחורה בחיפוש.

באיטרציה הראשונה i=1 נבצע צעד חיפוש אחד (שהוא מכיל 3 צעדים קבועים לכן זמן ריצה קבוע), ולאחר מכן 0 צעדים אחורה.

באיטרציה השניה i=2 נבצע 2 צעדי חיפוש (עדיין קבוע) ולאחר מכן 1 צעדים אחורה

...

נשים לב כי i=n/2 זו האיטרציה האחרונה שיכולה להתבצע ולכן נבצע n/2 צעדי חיפוש ולאחר מכן n/2-1 צעדים אחורה.

נחשב את זמן הריצה באופן הבא:

$\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} 3\cdot i + 3\cdot(i-1)$ (כאשר 3 מסמן את מספר הפעולות שעושים בכל צעד)

$$\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} 3\cdot i + 3\cdot(i-1) = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} 3\cdot i + 3\cdot i - 3 = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} 6\cdot i - 3$$

נשים לב כי מדובר בטור חשבוני ולכן נוכל להציגו באופן הבא:

$$\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} 6\cdot i - 3 = \frac{n}{4}\cdot(3 + 3n - 3) = \frac{3n^2}{4}$$

נראה כי $\frac{3n^2}{4}$ חסום מלמעלה ע"י n^2:

$\frac{3}{4}n^2 = O(n^2)$

כלומר שקיים c ו - n_0 כך שמתקיים : שלכל $n_0 \le n$

$0 < \frac{3}{4}n^2 \le c\cdot n^2$

$0 < \frac{3}{4} \le c$

ניקח $c = 1$ n_0 = 1

נציב:

$0 < \frac{3}{4} \le 1$ ולכן n^2 מהווה חסם עליון עבור הפונקציה $\frac{3n^2}{4}$.

נראה כי $\frac{3n^2}{4}$ חסום מלמטה ע"י n^2:

נראה לפי הגדרה כי $\frac{3}{4}n^2 = \Omega(n^2)$

כלומר שקיים c ו - n_0 כך שמתקיים : שלכל $n_0 \le n$

$0 < c\cdot n^2 \le \frac{3}{4}n^2$

$0 < c \le \frac{3}{4}$

ניקח $c = \frac{3}{4}$ n_0 = 1.

נציב:

$0 < \frac{3}{4} \le \frac{3}{4}$ ולכן n^2 מהווה חסם תחתון עבור הפונקציה $\frac{3n^2}{4}$.

.ii

נשים לב כי בכל איטרציה i נבצע:

1. צעד אחד קדימה
2. i-2 צעדים אחורה
3. i-2 צעדים קדימה
4. i-3 צעדים אחורה
5. i-3 צעדים קדימה

.
.
.

1 צעד אחורה
1 צעד קדימה

לכן, אפשר לומר, כי באיטרציה i נעשה צעד אחד חיפוש, i-2 פעולות backtrack כאשר מספר הצעדים אחורה נע בין $1 \le k \le i-2$ ו- i-2 פעולות search כאשר גם כאן מספר הצעדים קדימה נע בין $1 \le t \le i-2$.

נחשב את זמן הריצה באופן הבא:

$$\sum_{i=1}^{n}(1+\sum_{k=1}^{i-2}k+\sum_{t=1}^{i-2}t) = \sum_{i=1}^{n}(1+2(\frac{1+(i-2)}{2}\cdot(i-2)) = \sum_{i=1}^{n}1+2(\frac{i^2-3i+2}{2})$$
$$= \sum_{i=1}^{n}i^2-3i+3$$

נראה כי $\sum_{i=1}^{n}i^2-3i+3$ חסום מלמעלה ע"י n^3:

במקרה הגרוע ביותר אנו נחפש את האיבר במערך שלא קיים ולכן נבצע n איטרציות, כלומר i=n.

נפתח את הסכום ונקבל :

$$1+1+3+7+...+(n^2-3n+3) < n((n^2-3n+3) = n^3-3n^2+3n$$

נראה לפי הגדרה: $f(n) = n^3-3n^2+3n = O(n^3)$

כלומר שקיים c ו - n_0 כך שמתקיים : שלכל $n_0 > n$

$$0 < n^3-3n^2+3n \le c\cdot n^3$$

נחלק בשני האגפים ב- n^3:

$$0 < 1-\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2} \le c$$

ניקח $c = 3,\ n_0 = 1$

נציב:

$$0 < 1-\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2} \le 3$$

ניתן לראות כי $\lim_{n\to\infty} 1-\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2} = 1$ ולכן n^3 מהווה חסם עליון עבור $f(n)$.

נראה לפי הגדרה: $f(n) = n^3 - 3n^2 + 3n = \Omega(n^3)$

כלומר שקיים c ו - n_0 כך שמתקיים : שלכל $n \geq n_0$

$0 < c \cdot n^3 \leq \frac{n^3 - 3n^2 + 3n}{4}$

$0 < c \leq 1 - \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2}$

ניקח $c = \frac{1}{4},\ n_0 = 1$

נציב:

$$0 < \frac{1}{4} \leq 1 - \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2}$$

ניתן לראות כי $\lim_{n \to \infty} 1 - \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} = 1$ ולכן n^3 מהווה חסם תחתון עבור $f(n)$.

.iii

לפי הקוד שכתבנו בסעיף $2a$ נגדיר: $n_1 = fd,\ n_2 = bk,\ n = A.length$

נשים לב כי בהתאם לקוד, קיימות לכל היותר n איטרציות ובכל איטרציה נבצע n_1 צעדים קדימה (כאשר בכל צעד מתבצעות פעולות קבועות ב- O(1)), ו- n_2 צעדים אחורה, כלומר, זמן הריצה הכולל הינו $\theta\left(n \cdot \left(n_1 + n_2\right)\right)$.

במקרה **הגרוע ביותר** n_1 ו- n_2 הם אינם קבועים אלא תלויים ב-n, כאשר $n_1 = \frac{n}{2},\ n_2 = n_1 - 1$ (כלומר, עבור כל מספר צעדים קדימה אנו נבצע מקסימום של מספר צעדים אחורה כך שלאחר ביצוע ה-backtracking התקדמנו באינדקס אחד בלבד)

במקרה זה אנו נחפש איבר במערך שלא קיים ובעקבות כך מספר האיטרציות המקסימלי שנבצע הינו $\frac{n}{2}$ ולכן זמן הריצה הכולל הינו

$$T(n) = \frac{n}{2} \cdot \left(n_1 + n_2\right) = \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} + \frac{n}{2} - 1\right) = \frac{n}{2} \cdot (n - 1) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = O\left(n^2\right)$$

נראה כי : $\mathbf{f(n) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = O(n^2)}$

צ"ל כי קיימים c, n_0 כך ש- $c > 0,\ n_0 > 0$, וגם ש-

$$0 \leq f(n) \leq c \cdot n^2 \to 0 \leq \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \leq c \cdot n^2$$

נגדיר $c = \frac{1}{2},\ n_0 = 1$ ולכן עבור כל $n \geq n_0$ נציב ונקבל:

$$0 \leq \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = \frac{n^2 - n}{2} \leq \frac{n^2}{2}$$

$n^2 - n \leq n^2$ עבור כל n כפי שהגדרנו, ולכן n^2 מהווה חסם עליון עבור הפונקציה $f(n)$.

נראה כי $f(n) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = \Omega(n^2)$ **:**

כלומר, צ"ל כי קיימים c ,n_0 כך ש- $c > 0,\ n_0 > 0$ וגם ש-

$$0 \le c \cdot n^2 \le f(n) \to 0 \le c \cdot n^2 \le \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$$

נחלק בשני האגפים ב- n^2 ונקבל:

$$0 \le c \le \frac{n-1}{2n}$$

כעת, נשים לב כי הפונקציה בצד ימין הינה פונקציה מונוטונית עולה אשר שואפת ל- 0.5 ולכן עבור $c = \frac{1}{3},\ n_0 = 3$, נקבל כי עבור כל $n \ge n_0$ מתקיים:

$0 \le \frac{1}{3} \le \frac{n-1}{2n}$ כי $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}$ ו - $\frac{1}{3} \le \frac{1}{2}$ ולכן n^2 מהווה חסם תחתון עבור הפונקציה $f(n)$.

2.

<u>unsorted array:</u>

ניתן לבצע backtrack על מערך לא ממוין בזמן ריצה של O(1) עבור **מחיקה** ועבור **הכנסה**, מכיוון שבפעולה זו ניתן לשלוף מהמחסנית אובייקט שמכיל שדות המשמשים כמצביעים למצב הקודם של המערך (כולל מצביע למקום הפנוי הבא העדכני לאותו מצב) ולעדכן אותם בהתאם. עבור מבני נתונים זה, אין הבדל במימוש הקוד עבור פעולת מחיקה/הכנסה.

<u>sorted array:</u>

ניתן לבצע backtrack על מערך ממוין בזמן ריצה של $O(n)$ עבור **מחיקה** ועבור **הכנסה**, מכיוון שלפני כל פעולת מחיקה/הכנסה ניתן להכניס למחסנית אובייקט ששומר תמונת מצב קודם של המערך. ולכן, בפעולת backtracking נוכל לשלוף אובייקט מהמחסנית שמכיל שדות המשמשים כמצביעים למצב הקודם של המערך (כולל מצביע למקום הפנוי הבא העדכני לאותו מצב) ולעדכן אותם בהתאם:

עבור **הכנסה-** אם נרצה להכניס איבר למערך, הרי שמחקנו אותו קודם ולכן נשלוף אותו מהמחסנית ונשתמש בשדות שלו כדי לדעת היכן היה מיקומו, ערכו ומי המקום הפנוי הבא. לעבור על הערכים שנמצאים במערך משמאל לאיבר שהכנסנו כדי לשמור על המיון ובמקרה הגרוע ביותר נרוץ עד האיבר במקום הראשון, כלומר, נעבור על כל המערך ולכן $O(n)$.

עבור **מחיקה-** באופן דומה, נשלוף מהמחסנית את האובייקט של האיבר שהכנסנו לפני פעולה זו, ובאמצעות השדות שלו נוכל לדעת היכן היה מיקומו, ערכו ומי המקום הפנוי הבא. יש להזיז כל אחד מהאיברים מימין לאיבר שמחקנו מקום אחד שמאלה ובמקרה הגרוע האיבר שמחקנו הינו האיבר הראשון ולכן נצטרך לעבור על כל האיברים מימינו, כלומר, נעבור על כל המערך ולכן $O(n)$.

<u>bst:</u>

ניתן לבצע backtrack בעץ חיפוש בינארי בזמן ריצה של O(1) עבור **מחיקה** ועבור **הכנסה**, מכיוון שבפעולה זו אנחנו שולפים מהמחסנית מצביעים בהתאם לפעולה שנעשתה:

אם הפעולה הינה **delete** זה אומר שביצענו לפני כן פעולת הכנסה, ולכן נמחוק קודקוד שהוא עלה כי כל קודקוד שנכניס לעץ חיפוש בינארי יכנס בתור עלה, ולכן במקרה זה נשלוף מהמחסנית 2 מצביעים כאשר אחד מצביע למפתח של הקודקוד שרוצים למחוק והשני מצביע לקודקוד שהוא האבא של הקודקוד שאותו רוצים למחוק ונעדכן בהתאם.

אם הפעולה הינה **insert** זה אומר שביצענו לפני כן פעולת מחיקה, ולכן נרצה להכניס קודקוד לעץ כך שההכנסה תשמור על הסדר הקודם לפני המחיקה:
ישנם 3 מקרים עבור מחיקה, ועבור כל מקרה נכניס מספר מצביעים שונים:
במידה והקודקוד שמחקנו הינו עלה, אזי נרצה להכניס את אותו קודקוד בתור עלה ולכן לפני פעולת המחיקה, נכניס למחסנית מצביע לקודקוד שהוא האבא של הקודקוד שאותו נמחק ובנוסף נכניס למחסנית את ה- key של הקודקוד שאותו נמחק, ובפעולת backtrack נעדכן את המצביע של האבא של הקודקוד בהתאם ל- key.
במידה ולקודקוד שמחקנו יש בן אחד, אזי באותו אופן נכניס מצביע לאבא של הקודקוד שאותו נמחק ואת ה- key של הקודקוד שאותו נמחק, ובפעולת backtrack נחליף בין הערכים ונעדכן מצביעים בהתאם.
יש לציין כי יש להוסיף עוד ערך למחסנית בו נוכל להבדיל בין שני המקרים הנ"ל.
במידה ולקודקוד שמחקנו יש שני בנים, אזי נכניס למחסנית מצביעים לקודקודים היחידים שיעברו שינוי במסלול ההכנסה, כלומר: נכניס למחסנית מצביע לעוקב של הקודקוד אותו נרצה למחוק, מצביע לאבא של העוקב של הקודקוד אותו נרצה למחוק ואת ה- key של הקודקוד אותו נמחק.
סה"כ מדובר בשליפת מצביעים ועדכונם בכל אחד מהמקרים, ולכן- O(1).

<u>avl tree:</u>

ניתן להתייחס לעץ avl כאל עץ חיפוש בינארי אשר גובהו הינו logn אך מכיוון שפעולת ה-backtrack בעץ חיפוש בינארי ניתנת למימוש בזמן ריצה של O(1), ללא תלות בזמני הריצה של מחיקה והכנסה בעץ חיפוש בינארי, אזי גם בעץ avl פעולה זו ניתנת למימוש ב- O(1) לפי אותו דפוס פעולה.