

19. Matemática Financeira I

A Matemática Financeira é uma ferramenta útil na análise de algumas alternativas de investimentos ou financiamentos de bens de consumo. Consiste em empregar procedimentos matemáticos para simplificar a operação financeira a um Fluxo de Caixa. A primeira aplicação importante que veremos são os JUROS.

19.1. Juros

Sendo o capital um dos fatores de produção, torna-se mais que justo que se tenha uma remuneração. Esta é denominada de JUROS.

O juro é a premiação ou a retribuição do capital empregado. Sendo assim, os juros representam, de fato, a remuneração do Capital empregado em alguma atividade produtiva, seja ela de qualquer fim.

Os juros podem ser capitalizados da seguinte forma: simples ou composto ou mesmo empregados de forma mista.

Ainda falando sobre definição de juros, ela pode ser a remuneração pelo empréstimo de algum dinheiro.

Os juros existem, porque a grande maioria das pessoas prefere o consumo imediato de um bem e está disposta a pagar um preço maior por isto.

Em contrapartida, a pessoa que tiver a capacidade de esperar o tempo necessário para auferir a quantia necessária para comprar o determinado item, e neste entretanto, estiver disposta a emprestar esta quantia com paciência reduzida, será recompensado por esta operação na proporção do tempo e risco de receber de volta o capital.

A equação **tempo X risco X quantidade** de dinheiro disponível no mercado financeiro é que define o que é tão conhecida como taxa de juros.

Para checar quanto o capital rende, é indispensável que se conheça os elementos necessários que compõem estes cálculos financeiros e também a forma de aplicação.

Estes elementos são:

A) CAPITAL;

O capital pode ser definido como o valor aplicado através de alguma operação tipicamente financeira e também é muito conhecido como: Valor principal, Valor atual, Valor aplicado, Valor presente.

B) TAXA;

Denomina-se taxa aos juros relativos a 100 unidades monetárias por UNIDADE DE TEMPO. Exprime-se sob a forma de porcentagem acrescentando-se a unidade de tempo.

Exemplos:

- Taxa de 7% ao ano, ou 7 % a.a
- Taxa de 52% ao ano, ou 52% a.a

Isto significa dizer que para cada R\$ 100 reais emprestados, receberemos R\$ 7,00 de juros no caso de 7% a.a, e no caso de 52% a.a, para cada R\$ 100,00 emprestados a pessoa/instituição receberá R\$ 52,00 de juros.

19.2. Juros Simples

O sistema de cálculo de juros simples será empregado quando o percentual (%) de juros incidirem apenas sobre o valor principal do dinheiro.

Sobre o valor dos juros gerados em cada período de tempo não incidirão novos juros.

O que chamamos de Valor Principal, ou simplesmente Principal, é o valor financeiro inicial emprestado ou aplicado, antes de fazer a soma aos juros auferidos no período.

É possível ter também como parâmetro de definição de juros simples aquele que se admite que os juros sejam diretamente proporcionais ao tempo da operação em questão.

Como de fato os juros são a variação entre o Capital (valor principal) e o montante, esta deve ocorrer ao longo do tempo, o valor dos juros deve sempre estar associado ao período do tempo que foi necessário para gerar este valor de juros.

Transformando toda esta definição em fórmula:

$$J = P \times I \times N$$

Onde:

J = Juros

P = Principal (capital)

I = Taxa de juros

N = Número de período

Exemplos de fixação Juros Simples:

a) Um funcionário tem uma dívida de R\$ 500,00 que tem de ser paga com juros de 6% a.m pelo sistema de juros simples e este deve fazer o pagamento em 03 meses.

Aplicando a fórmula de juros simples

$$J = P \times I \times N$$

Substituindo valores:

$$J = 500 \times 0,06 \times 3 = R\$ 90,00$$

O montante total será de **R\$ 590,00** (R\$ 500,00 + R\$ 90,00).

Ou seja,

Montante = Principal + Juros

Montante = Principal + (Principal x Taxa de juros x Número de períodos).

Assim sendo, a fórmula do montante é:

$$M = P . (1 + (I \times N))$$

b) Calcule o montante resultante da aplicação de R\$ 60.000,00 à taxa de 9,5% a.a durante 120 dias.

Aplicando a fórmula de montante

$$M = P \cdot (1 + (I \times N))$$

Substituindo os valores:

$$M = 60.000 \times [1 + (9,5/100) \cdot (120/360)] = \text{R\$ } 61.900,00$$

Vale observar que é expresso a taxa “i” e o período “n”, na mesma unidade de tempo (anos). Portanto é preciso dividir 120/360, para se obter o valor equivalente em anos, levando-se em consideração que o ano comercial são 360 dias.

c) Calcular os juros simples de R\$ 1.500,00 a 13 % a.a. por 2 anos.

Escrevendo a fórmula

$$J = P \times I \times N$$

$$J = 1.500 \times 0,13 \times 2 = \text{R\$ } 390,00$$

d) Calcular os juros simples produzidos por R\$20.000,00, aplicados à taxa de 32% a.a., durante 155 dias.

Escrevendo a fórmula

$$J = P \times I \times N$$

Calculando o tempo da taxa = 32% a.a equivale a 32%/360 dias = 0,088 a.d (ao dia). Para podermos utilizar a % na fórmula, precisamos ainda dividir por 100, $0,088/100 = 0,00088$.

Desta forma, como a taxa e o período estão convertidos à mesma unidade de tempo (dias), podemos usar a fórmula e efetuar o cálculo diretamente:

$$J = 20.000 \times 0,00088 \times 155 = \text{R\$ } 2.728,00$$

e) Qual o capital que, aplicado a juros simples de 1,5% a.m., rende R\$2.600,00 de juros em 90 dias?

Escrevendo a fórmula

$$J = P \times I \times N$$

Temos imediatamente:

$$2.600 = P \cdot (1,5/100) \cdot (90/30)$$

Observe que expressamos a taxa i e o período n em relação à mesma unidade de tempo, ou seja, meses. Assim:

$$2.600 = P \cdot 0,015 \cdot 3 = P \cdot 0,045$$

Na seqüência, temos:

$$P = 2.600 / 0,045 = \text{R\$ } 57.777,77$$

f) Se a taxa de uma aplicação é de 130% ao ano, quantos meses serão necessários para dobrar um capital aplicado através de capitalização simples?

Escrevendo a fórmula de Montante para Fixação

$$M = P \cdot (1 + (i \times N))$$

Objetivo final: $M = 2 \cdot P$

Dados do problema: $i = 130/100 = 1,3$

Resolução:

$$2P = P (1 + 1,3 n)$$

$$2 = 1 + 1,3 \cdot n$$

$$n = 0,769 \text{ (arredondado = 8 meses)}$$

19.3. Juros compostos

É denominado regime de Juros Compostos aquele onde os juros relativos, a cada período, são calculados sobre o montante referente ao período anterior.

Em resumo, os juros que são produzidos ao fim de cada período passaram a fazer parte do capital ou montante que serviu de base para cálculo, de modo que o total conseguido será a base para os cálculos em períodos seguintes.

O sistema de juros compostos é mais comum e usado no sistema financeiro, pois, para os bancos e empresas financeiras, principalmente os que trabalham com produto “dinheiro”, torna-se muito mais vantajoso e rentável que se trabalhe com este tipo de regime de juros.

Neste caso, é mais útil para o usuário que saiba como se aplica estes conceitos, pois, em provas de concursos ou mesmo no dia a dia, é necessário que se saiba como efetuar estes cálculos.

Desta forma, vale frisar que neste regime de juros, o resultado dos juros de cada período é incorporado ao capital inicial, gerando um novo montante para o período seguinte.

Definimos como capitalização o momento em que os juros encontrados no período são incorporados ou somados ao valor principal.

Vejamos um exemplo:

Após quatro meses de capitalização, temos o seguinte:

1º mês:

$$M = P \cdot (1 + i)$$

2º mês: O valor principal é igual ao montante do mês anterior:

$$M = P \times (1 + i) \times (1 + i)$$

3º mês: O valor principal é igual ao montante do mês anterior:

$$M = P \times (1 + i) \times (1 + i) \times (1 + i)$$

E assim sucessivamente, com o período sendo relativo ao que foi acordado.

Simplificando, obtemos a fórmula:

$$M = P \cdot (1 + i)^n$$

Obs. Vale ressaltar que a taxa “i” deve estar na mesma medida de tempo do valor “n”, ou seja, para se poder ter o cálculo correto, tem que estar em dia/dia, mês/mês, ano/ano.

Desta maneira, para que se possa efetuar o cálculo apenas dos juros, simplesmente diminua o valor principal do montante ao final do período dado no problema.

Obtemos a fórmula:

$$J = M - P$$

Exemplos para fixação de conteúdo:

Um montante ou valor principal, mês a mês, de uma aplicação de R\$ 1.000,00 à taxa de 8% a.m. em um período de 6 (seis) meses no regime de juros compostos.

Veja o quadro a seguir:

Período	Juros encontrados no final do período	Montante Final
1º mês	8 % de R\$ 1.000,00, ou seja, R\$ 80,00	R\$ 1.080,00
2º mês	8 % de R\$ 1.080,00, ou seja, R\$ 86,40	R\$ 1.166,40
3º mês	8 % de R\$ 1.166,40, ou seja, R\$ 93,31	R\$ 1.259,71
4º mês	8 % de R\$ 1.259,71, ou seja, R\$ 100,77	R\$ 1.360,48
5º mês	8 % de R\$ 1.360,48, ou seja, R\$ 108,83	R\$ 1.469,31
6º mês	8 % de R\$ 1.469,31, ou seja, R\$ 117,54	R\$ 1.586,85

a) Os juros e o montante, no fim do 1º mês, têm os valores iguais aos que seriam produzidos no sistema de juros simples.

b) Os juros vão se tornando maiores mês a mês ou período a período, de modo que após o 1º mês, a diferença entre um Montante calculado no sistema de juros compostos e o correspondente valor no sistema de juros simples torna-se cada vez maior de acordo com o tempo que vai sendo aplicado.

c) No exemplo acima, cada Montante novo é obtido calculando-se um aumento de 8% sobre o Montante anterior, o que resulta em aumentos constantes com uma taxa fixa de 8%.

No exemplo de fixação acima, é observado também a definição de Capitalização. Como este é o processo de incorporação ou soma dos juros ao capital ou montante inicial de uma operação financeira, verifique na terceira coluna a evolução do aumento do Montante Final.

É fato comum também ser encontrado em diversas situações as expressões do tipo: regime de capitalização simples e regime de capitalização composta ao invés de regime de juros simples e regime de juros compostos.

Em alguns problemas ou enunciados feitos no mercado financeiro ou em provas de concursos, frequentemente são encontradas outras expressões usadas para indicar o regime de juros compostos:

a) taxa de X% a.a. capitalizada semestralmente;

- Expressão indica juros compostos capitalizados por semestre;

b) taxa composta de X% a.m.;

- Expressão indica juros compostos com capitalização mensal;

c) capitalização composta, montante composto;

- Expressão indica a atuação do sistema de juros compostos.

Exercícios Resolvidos:

No tópico anterior, vimos apenas exemplos práticos de uso das fórmulas. Agora serão vistos exercícios práticos com as respectivas respostas e algumas ocasiões de aplicações.

a) Um capital de R\$ 300,00 foi aplicado em regime de juros compostos com uma taxa de 10% ao mês. Calcule o Montante desta aplicação após dois meses.

Escrevendo a fórmula:

$$M = P \cdot (1 + i)^n$$

Resumindo os dados do problema:

Capital ou Principal (P)	= 300
Taxa (i)	= 10% = 0,1
Períodos de Capitalização (n)	= 2

Primeiramente calcule o montante:

Substituindo, temos: $M = 300 \cdot (1 + 0,1)^2$

$$M = 300 \cdot (1,1)^2$$

$$M = 300 \cdot (1,21)$$

$$M = 300 \cdot 1,21 = 363,00$$

Então, o Montante da aplicação fornecida neste problema após 02 meses é de **R\$ 363,00**.

b) Um dono de empresa consegue um empréstimo de R\$ 30.000,00 que deverá ser pago, no fim de um ano, acrescidos de juros compostos de 3% ao mês. Quanto o dono da empresa deverá pagar ao final do prazo estabelecido?

Escrevendo a fórmula:

$$M = P \cdot (1 + i)^n$$

Resumindo os dados do problema:

Capital ou Principal (P)	= 30.000,00
Taxa (i)	= 3% = 0,03
Períodos de Capitalização (n)	= 12

Primeiramente calcule o montante:

Substituindo temos : $M = 30.000 \cdot (1 + 0,03)^{12}$

$$M = 30.000 \cdot (1,03)^{12}$$

$$M = 30.000 \cdot (1,4257)$$

$$M = 30.000 \cdot 1,4257 = 42.771$$

Então, o dono da empresa deverá pagar ao final do prazo o valor de **R\$ 42.771,00**.

Exercícios:

- 1) O que é Capital?
- 2) O que é Taxa?
- 3) O que são Juros Simples?
- 4) O que são Juros Compostos?
- 5) Uma pessoa deve ao Banco R\$ 6.000,00, que tem de ser pagos com juros de 12% a.m pelo sistema de juros simples em 6 meses. Quanto será o valor total pago?
- 6) Calcule Juros simples de R\$ 3.200,00 a 8 % a.a. por 3 anos e meio.
- 7) Calcule os juros simples produzidos por R\$ 250.000,00, aplicados à taxa de 12% a.m., durante 210 dias.
- 8) Se a taxa de uma aplicação é de 85% ao ano, quantos meses serão necessários para triplicar um capital aplicado através de capitalização simples?
- 9) Um capital de R\$ 150,00 foi aplicado em regime de juros compostos com uma taxa de 12% ao mês. Calcule o montante desta aplicação após 6 meses.
- 10) Você consegue um empréstimo de R\$ 300,00, que deve ser pago em 3 meses, acrescidos de juros compostos de 12% ao mês. Quanto você pagará no final?



CLIQUE AQUI
PARA CONCLUIR