Vorlesungsumdruck

Flugdynamik

Ausgabe 5.0

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dieter Moormann

Institut für Flugsystemdynamik
RWTH Aachen University

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **1**

1.1 Einordnung . . . 1

1.1.1 Flugdynamik . . . 1

1.1.2 Fachgebiete/Vorlesung . . . 1

1.1.3 Verbindungen . . . 2

2 Grundlagen **3**

2.1 Grundbegriffe Flugdynamik/Flugeigenschaften . . . 3

2.1.1 Stabilität . . . 3

2.1.2 Steuerbarkeit/Führungsverhalten . . . 4

2.1.3 Trimmbarkeit . . . 6

2.1.4 Störverhalten . . . 6

2.2 Bezeichnungen . . . 7

2.3 Koordinatensysteme . . . 7

2.3.1 Winkeldefinitionen und Transformation . . . 9

2.3.2 Längs- und Seitenbewegung . . . 11

2.4 Luftkräfte und Luftkraftmomente . . . 12

2.4.1 Allgemeines . . . 12

2.4.2 Auftrieb . . . 13

2.4.3 Widerstand . . . 16

2.4.4 Druckpunkt . . . 19

2.4.5 Neutralpunkt . . . 20

2.4.6 Gleichgewicht . . . 21

2.4.7 Polare . . . 22

3 Stationäre Längsbewegung **24**

3.1 Luftkräfte . . . 24

3.2 Nickmomente . . . 27

3.3 Statische Längsstabilität . . . 29

3.3.1 Statische Stabilität bei festem Ruder . . . 29

3.3.2 Einflussgrößen . . . 32

3.3.3 Höhenleitwerksauslegung . . . 35

3.3.4 Höhenruderausschlag . . . 36

3.3.5 Stabilität bei freiem Ruder . . . 39

3.3.6 Manöverstabilität . . . 42

3.3.7 Zusammenfassung . . . 46

3.4 Steuerung . . . 46

3.4.1 Höhenruder-Scharniermoment . . . 47

3.4.2 Steuerkräfte . . . 47

3.4.3 Steuerhilfen . . . 52

3.4.4 Trimmung . . . 53

3.5 Derivative der Längsbewegung . . . 53

4 Stationäre Seitenbewegung **54**

4.1 Definitionen . . . 54

4.2 Gierbewegung . . . 55

4.2.1 Statische Richtungsstabilität . . . 55

4.2.2 Gierdämpfung . . . 59

4.2.3 Giersteuerung . . . 59

4.3 Rollbewegung . . . 61

4.3.1 Statische Rollstabilität . . . 61

4.3.2 Rolldämpfung . . . 65
4.3.3 Rollsteuerung . . . 66
4.3.4 Stationäres Rollen . . . 68
4.4 Kopplungen . . . 69
4.4.1 Roll-Seitenkraft . . . 69
4.4.2 Gier-Rollmoment . . . 69
4.4.3 Roll-Giermoment . . . 70
4.5 Derivative der Seitenbewegung . . . 70
4.6 Stationärer Flug . . . 70
4.6.1 Kurvenflug . . . 71
4.6.2 Schiebeflug . . . 72
4.6.3 Einmotorenflug . . . 73

5 Bewegungsgleichungen 75
5.1 Grundlagen . . . 75
5.1.1 Beschreibungsformen . . . 76
5.1.2 Lösungsverfahren . . . 78
5.1.3 Dynamisches Verhalten . . . 82
5.2 Nichtlineare Bewegungsgleichungen . . . 86
5.2.1 Annahmen . . . 86
5.2.2 Differentialgleichungen . . . 87
5.3 Lineare Bewegungsgleichungen . . . 90
5.3.1 Bezugsflugzustand . . . 90
5.3.2 Vereinfachte Differentialgleichungen . . . 91
5.3.3 Windeinfluss . . . 93
5.3.4 Umformung . . . 94
5.3.5 Linearisierung . . . 94
5.4 Derivative (Ergänzung) . . . 99

6 Dynamik der Längsbewegung 101
6.1 Signalflussdiagramm . . . 101
6.2 Sprungantworten . . . 102
6.3 Eigenverhalten . . . 103
6.3.1 Anstellwinkelschwingung . . . 104
6.3.2 Phygoide . . . 105
6.4 Führungsverhalten . . . 107
6.4.1 Schub . . . 108
6.4.2 Höhenruder . . . 109
6.4.3 Auftriebsklappen . . . 110
6.5 Störverhalten . . . 111
6.5.1 Horizontalwind . . . 111
6.5.2 Vertikalwind . . . 112

7 Dynamik der Seitenbewegung 113
7.1 Signalflussdiagramm . . . 113
7.2 Sprungantworten . . . 114
7.3 Eigenverhalten . . . 115
7.3.1 Taumelschwingung . . . 115
7.3.2 Rollbewegung . . . 116
7.3.3 Spiralbewegung . . . 117
7.4 Führungsverhalten . . . 118
7.4.1 Querruder . . . 118
7.4.2 Seitenruder . . . 119
7.5 Störverhalten . . . 119

8 Flugeigenschaftsforderungen **121**
8.1 Grundlagen 121
8.1.1 Vorschriften 121
8.2 Klassifizierungen 122
8.2.1 Bewertungsverfahren 123
8.3 Längsbewegung 124
8.3.1 Anstellwinkelschwingung 124
8.3.2 Phygoide 125
8.4 Seitenbewegung 126
8.4.1 Taumelschwingung 126
8.4.2 Rollbewegung 126
8.4.3 Spiralbewegung 126

9 Anhang **128**
9.1 Koordinatentransformation 128
9.1.1 Bildungsgesetz 128
9.2 Ersatzgrößen 130
9.3 Literatur 132
9.4 Symbolverzeichnis 133

1 Einführung

1.1 Einordnung

1.1.1 Flugdynamik

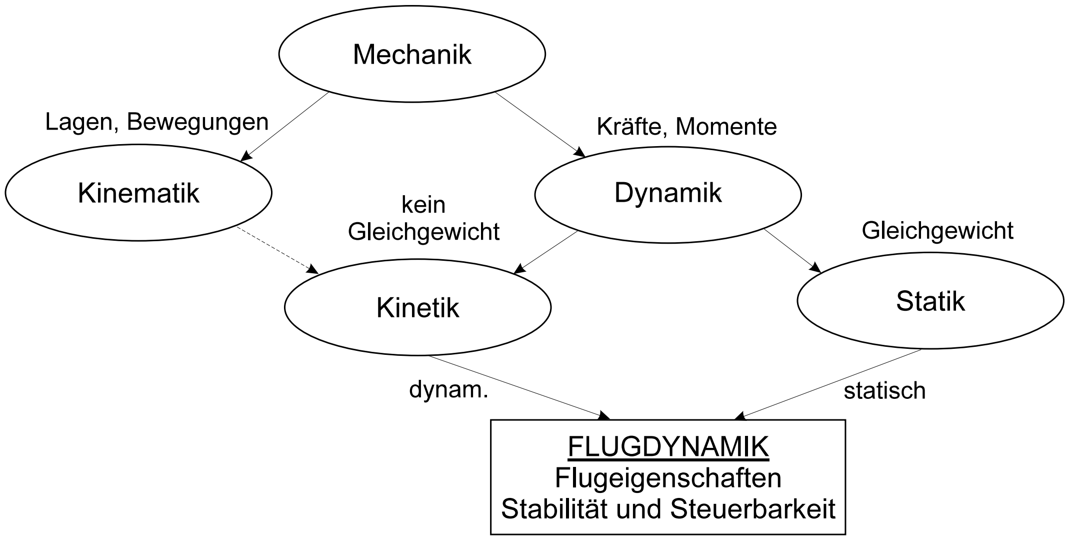


Bild 1.1 Einordnung

1.1.2 Fachgebiete/Vorlesung

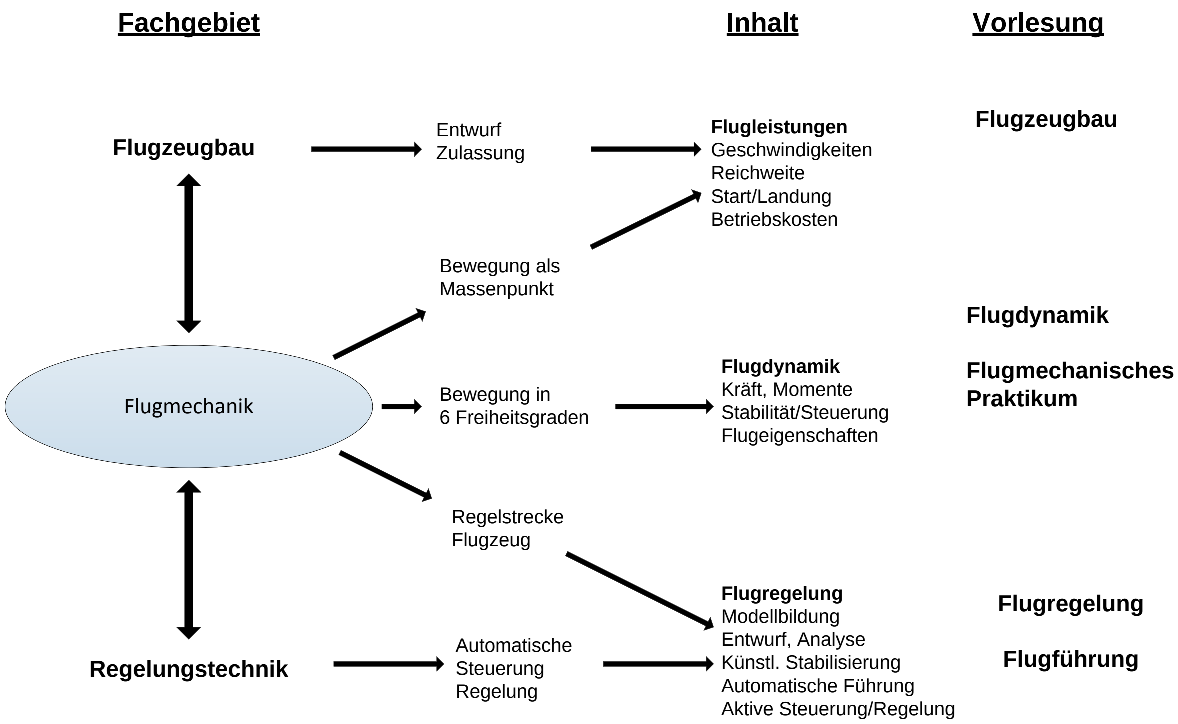


Bild 1.2 Gebiete/Vorlesungen

1.1.3 Verbindungen

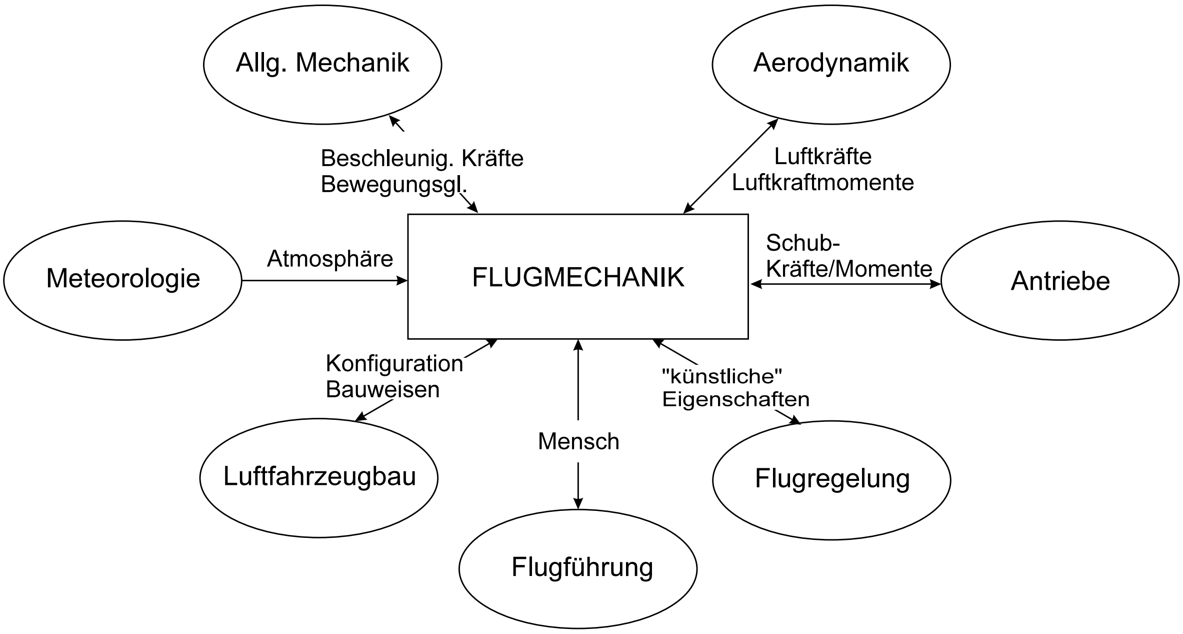


Bild 1.3 Verbindungen

2 Grundlagen

2.1 Grundbegriffe Flugdynamik/Flugeigenschaften

- Flugeigenschaften beschreiben des Gesamtverhaltens des Flugzeugs
  - im Gleichgewichtszustand (getrimmter Flugzustand, stationärer Flug)
  - bei Steuereingaben (z.B. Ruderausschläge)
  - bei Störungen (z.B. Böen)
- Flugeigenschaften bestimmen die Arbeitslast des Piloten und das Wohlbefinden der Passagiere
- Flugeigenschaften sind schwierig zu quantifizieren (anders als bei Flugleistungen)
- Anforderungen an ein Flugzeug sind festgelegt in Flugeigenschaftskriterien
- Kenngrößen

- Stabilität	- Steuerbarkeit
- Trimmbarkeit	- Störverhalten

- Flugeigenschaftsuntersuchung
  - Identifizieren von Einflussgrößen
  - Beschreibung der statischen Eigenschaften
  - Beschreibung des dynamischen Verhaltens

2.1.1 Stabilität

- Definition: Fähigkeit des Flugzeugs, nach einer Störung aus dem Gleichgewichtszustand ohne Zutun des Piloten wieder in diesen (einen) Gleichgewichtszustand zurückzukehren (statische Stabilität)
- Keine Aktivität von Pilot oder Regelungssystem erforderlich: → natürliche Stabilität
- Regelungssystem erforderlich: → künstliche Stabilität
- Gleichgewichtszustand: i.a. stationärer Flugzustand (unbeschleunigter Horizontalflug, Kurvenflug mit konst. Radius)
- Statische Stabilität: Es tritt eine rückführende Kraft (ein rückführendes Moment) nach einer Störung auf → sagt nur aus, dass eine rückführende Kraft auftritt, nicht wie
- Dynamische Stabilität: Beschreibt die Art des Abklingens einer Bewegung nach einer Störung aus dem Gleichgewichtszustand → z.B.: wie schnell klingt eine Schwingung ab
- Natürliche dynamische Stabilität setzt statische Stabilität voraus
- Stabilität alleine genügt nicht für gute Flugeigenschaften. Die Fähigkeit und Eigenschaften des Menschen stellen bestimmte Anforderungen an:

- Frequenz und Dämpfung von Bewegungen

- Kopplungen zwischen Bewegungen

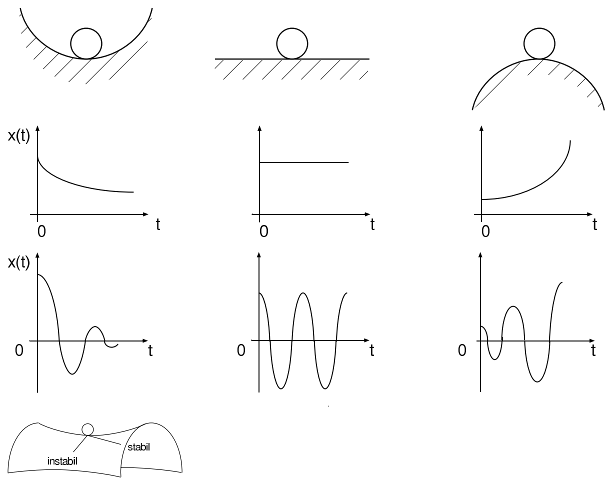
stabil indifferent instabil

Mechanisches Beispiel

Aperiodische Bewegung

Periodische Bewegung

Mehrere Freiheitsgrade



2.1.2 Steuerbarkeit/Führungsverhalten

- **Steuerung** Beeinflussung der Bewegung durch Steuerorgane (Wechseln des Flugzustandes, Manövrieren, Störunterdrückung)

- **Statische Steuerbarkeit** Stationäre Zuordnung von Steuerausschlag und Bewegung

- **Dynamische Steuerbarkeit** Bewegung bei Steuerbetätigung (Übertragungsverhalten)

- **Primäre Steuerelemente** (Momente, hochfrequent) Höhen-, Quer-, Seitenruder (Bild 2.1)

- **Sekundäre Steuerelemente** (Kräfte, niederfrequent) Schub, Landeklappen, Vorflügel, Luftbremsen (Bild 2.2)

- **Steuerkräfte** Annehmbare Charakteristik (Bild 2.3) Maximalwerte, Minimalwerte, Gradienten Natürliche Kraftrückmeldung, "Künstliches Gefühl"

- Gute Steuerbarkeit und hohe Stabilität sind widersprüchliche Forderungen!

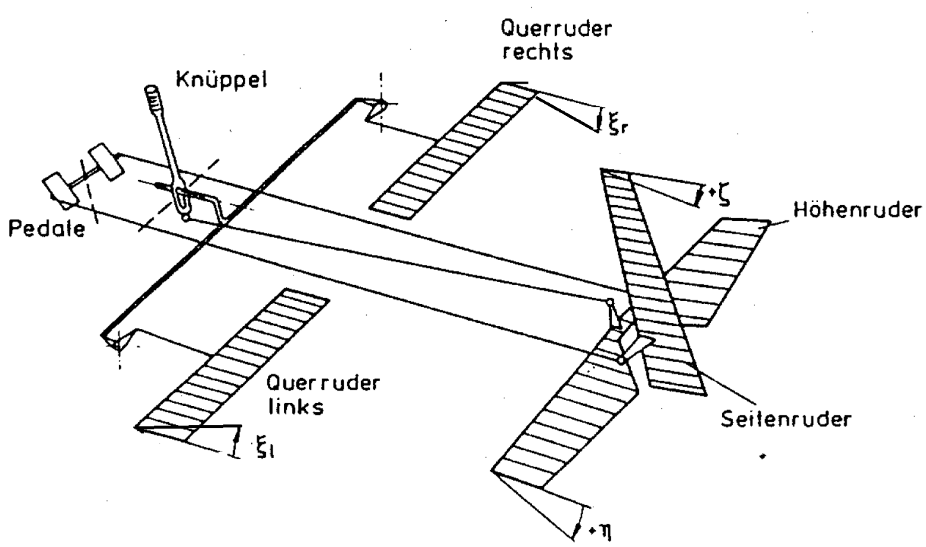


Bild 2.1 Prinzip Flugzeug-Steuerungssystem, Primäre Steuerelemente

- Konvention: positiver Ruderausschlag erzeugt negatives Moment

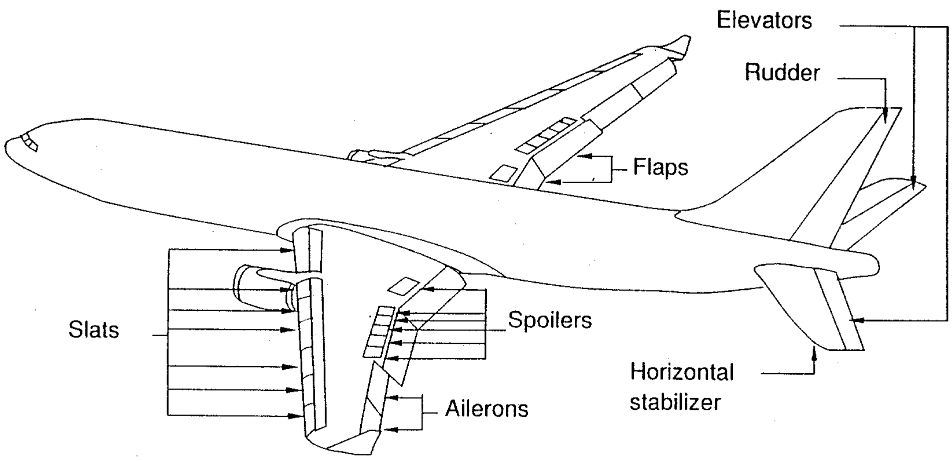


Bild 2.2 Aerodynamische Steuerflächen

- Funktionsweise Spoiler: Wölbung wird größer $\rightarrow$ Widerstand wird größer

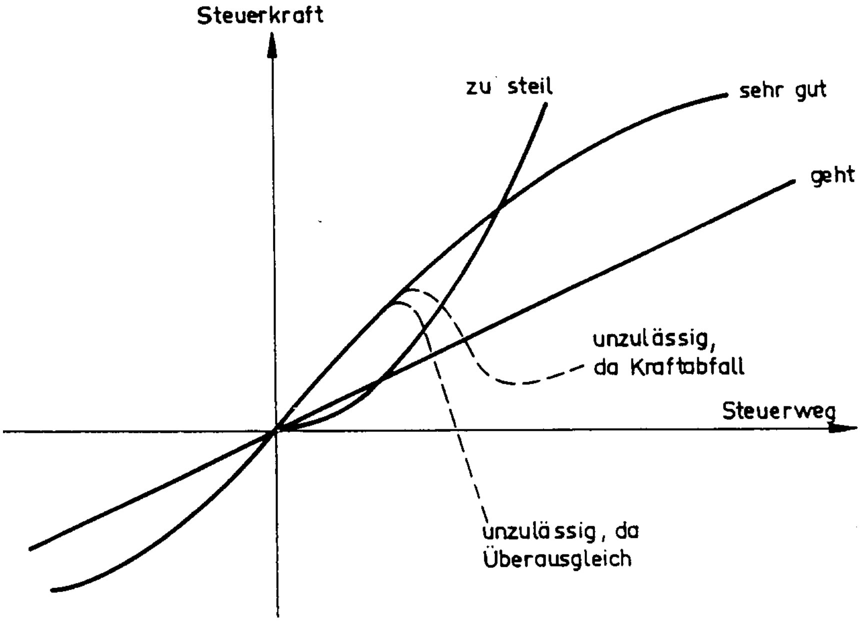


Bild 2.3 Steuerkraft-Steuerwegverlauf, Anforderungen für konventionelle Flugzeuge

- Steuerweg und Steuerkraft sollen grundlegend proportional zueinander sein

2.1.3 Trimmbarkeit

- Trimmung

  - Ausgleich der Gesamtmomente um die einzelnen Achsen durch Verstellen von Flossen und Trimmrudern

  - Steuerkräfte werden durch Trimmung zu Null gemacht (manuelle Trimmung, automatische Trimmung)

  - Ändern von Flugzuständen durch Trimmung (Reiseflug, Landeanflug)

  - Gute Trimmbarkeit: Ausfliegen des gesamten Flugbereichs (Enveloppe) bei verschiedenen Trimmpunkten, je nach Fluglage, Geschwindigkeit, etc.

2.1.4 Störverhalten

- Störverhalten: Bewegungsverhalten bei Störung (z.B. Windböen) Gute Flugeigenschaften: Geringe Auswirkungen von Störungen

2.2 Bezeichnungen

- **Flugzeug:** Starrer Körper (in dieser Vorlesung) mit
  6 Freiheitsgraden (3 translatorische, 3 rotatorische; s. Bild 2.4)

- **Bezeichnungen**

Position	$\vec{s}$	$= [\, x\ y\ z\,]^T$	Kraft	$\vec{R}$	$= [\, X\ Y\ Z\,]^T$
Geschwindigkeit	$\vec{V}$	$= [\, u\ v\ w\,]^T$	Moment	$\vec{Q}$	$= [\, L\ M\ N\,]^T$
Winkelgeschwindigkeit	$\vec{\Omega}$	$= [\, p\ q\ r\,]^T$			
Lagewinkel	$\underline{\phi}$	$= [\, \phi\ \theta\ \psi\,]^T$	(Eulerwinkel)		

$\rightarrow$ 12 Zustandsgrößen

- **Indizierung**

A aerodynamische Größen
K Bahngrößen
W Windgrößen
F Schubgrößen

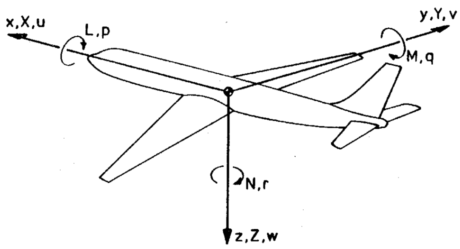


Bild 2.4

2.3 Koordinatensysteme

- unterschiedliche Koordinatensysteme erleichtern das Rechnen mit verschiedenen Kräften
- Kräfte zeigen in Richtung der Achsen
- einfaches Umrechnen mittels Transformationsmatrizen
- Flugmechanische Koordinatensysteme
  - orthogonal, rechtshändig
  - Ursprung meist im Schwerpunkt
  - Bewegung mit dem Flugzeug
- **Geodätisches Koordinatensystem** (Index g)

x_g, y_g : Erd-Horizontalebene
z_g : Erdlot

$\rightarrow$ Gewichtskraft

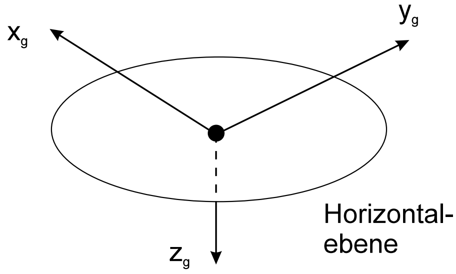


Bild 2.5

- **Körperfestes/Flugzeugfestes Koordinatensystem** (Index: ohne oder f)

x_f, z_f : in der Symmetrieebene
y_f : in Flügelrichtung

→ Schubkraft

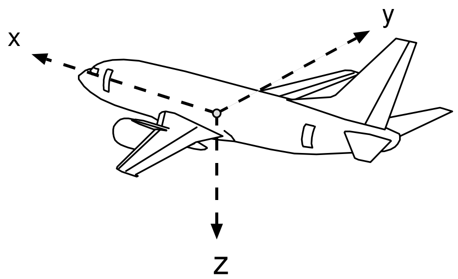


Bild 2.6

- **Flugbahnfestes Koordinatensystem** (Index k)

x_k : in Richtung des Bahngeschwindigkeitsvektors $\vec{V_K}$
y_k : in der Horizontalebene (nach rechts)
z_k : orthogonal

→ Trägheitskräfte

stationärer Horizontalflug ohne Wind: $(x, y, z)_k = (x, y, z)_a$

- **Aerodynamisches Koordinatensystem** (Index a)

x_a : in Richtung des Fluggeschwindigkeitsvektors $\vec{V}$
z_a : in der Symmetrieebene
y_a : orthogonal

→ Luftkraft

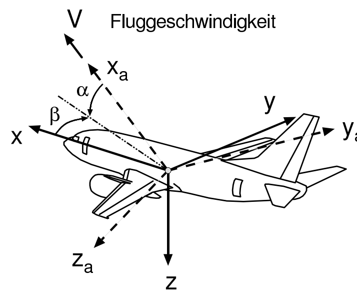


Bild 2.7

- **Experimentelles Koordinatensystem** (Index e)

x_e : Projektion von x_a in x_f, z_f-Ebene
y_e $= y_f$
z_e : orthogonal

→ Luftkraftmomente

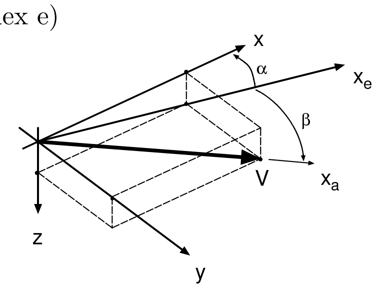


Bild 2.8

2.3.1 Winkeldefinitionen und Transformation

- **Lage des Flugzeugs gegenüber der Erde**

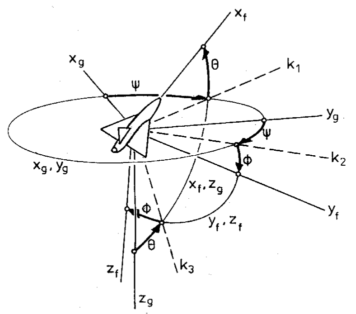


Bild 2.9

ψ Azimut, Gierwinkel, Steuerkurs (heading), Drehachse z_g
θ Längsneigung, Nickwinkel (pitch angle), Drehachse k_2
ϕ Hängewinkel, Rollwinkel (bank angle), Drehachse x_f

Eulerwinkel
Transformation vom erdlotfesten KS (g) in das flugzeugfeste KS (f)

Transformation erdfest $\rightarrow$ flugzeugfest (Drehfolge: ψ, θ, ϕ)

$$\underline{M}_{fg} = \begin{bmatrix} \cos\psi\,\cos\theta & \sin\psi\,\cos\theta & -\sin\theta \\ \cos\psi\,\sin\theta\,\sin\phi - \sin\psi\,\cos\phi & \sin\psi\,\sin\theta\,\sin\phi + \cos\psi\,\cos\phi & \cos\theta\,\sin\phi \\ \cos\psi\,\sin\theta\,\cos\phi + \sin\psi\,\sin\phi & \sin\psi\,\sin\theta\,\cos\phi - \cos\psi\,\sin\phi & \cos\theta\,\cos\phi \end{bmatrix}$$

- **Bahngeschwindigkeitsvektor in erdfesten Koordinaten**

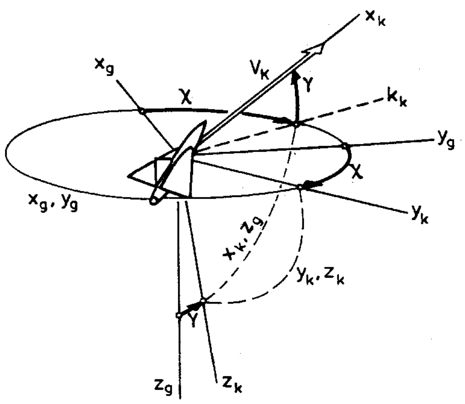


Bild 2.10

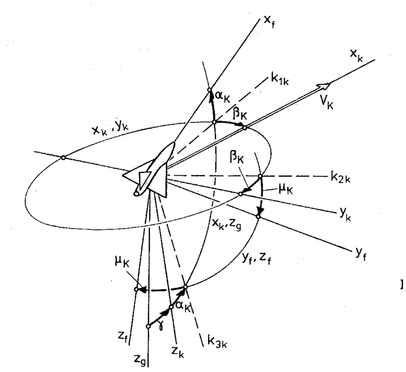
χ Bahnazimut (flight-path azimuth)
Drehachse z_g

γ Bahnneigungswinkel
Bahnwinkel (angle of climb)
Drehachse y_k

Transformation erdfest $\rightarrow$ bahnfest (Drehfolge: χ, γ)

$$\underline{M}_{kg} = \begin{bmatrix} \cos\gamma\,\cos\chi & \cos\gamma\,\sin\chi & -\sin\gamma \\ -\sin\chi & \cos\chi & 0 \\ \sin\gamma\,\cos\chi & \sin\gamma\,\sin\chi & \cos\gamma \end{bmatrix}$$

- **Bahngeschwindigkeitsvektor in flugzeugfesten Koordinaten**



β_k Bahnschiebewinkel
Drehachse z_k

α_k Bahnanstellwinkel
Drehachse k_{2k}

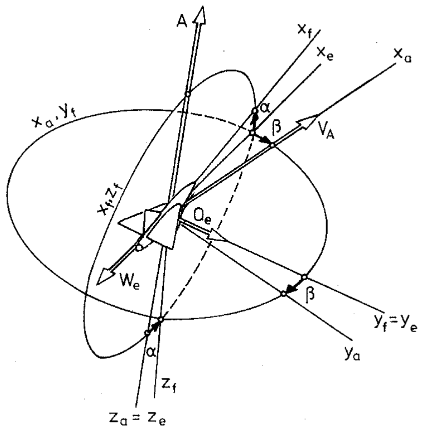
μ_k Bahnhängewinkel
Drehachse x_f

Bild 2.11

Transformation bahnfest $\rightarrow$ flugzeugfest (Drehfolge: $-\beta_k$, α_k, μ_k)

$$\underline{M}_{fk} = \begin{bmatrix} \cos\beta_k\,\cos\alpha_k & -\sin\beta_k\,\cos\alpha_k & -\sin\alpha_k \\ \cos\beta_k\,\sin\alpha_k\,\sin\mu_k + \sin\beta_k\,\cos\mu_k & -\sin\beta_k\,\sin\alpha_k\,\sin\mu_k + \cos\beta_k\,\cos\mu_k & \cos\alpha_k\,\sin\mu_k \\ \cos\beta_k\,\sin\alpha_k\,\cos\mu_k - \sin\beta_k\,\sin\mu_k & -\sin\beta_k\,\sin\alpha_k\,\cos\mu_k - \cos\beta_k\,\sin\mu_k & \cos\alpha_k\,\cos\mu_k \end{bmatrix}$$

- **Aerodynamische Größen in flugzeugfesten Koordinaten**



α Anstellwinkel
(angle of attack)
Drehachse y_f

β Schiebewinkel
(sideslip angle)
Drehachse z_a

Bild 2.12

Transformation aerodynamisch $\rightarrow$ flugzeugfest (Drehfolge: $-\beta$, α)

$$\underline{M}_{fa} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\,\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

2.3.2 Längs- und Seitenbewegung

Beschreibung der Flugzeugdynamik durch nichtlineare Differentialgleichungen (s. Kap. 5).

Nicht geschlossen lösbar, Vereinfachungen je nach Aufgabenstellung:

- Betrachtung nur der Kräfte $\rightarrow$ Flugleistungsuntersuchungen
- Entkopplung $\rightarrow$ Längs- / Seitenbewegung
  schnelle, langsame Vorgänge
- Linearisierung $\rightarrow$ Beschreibung von kleinen
  Abweichungen vom Arbeitspunkt

- **Längsbewegung**
  - Bewegung in der Symmetrieebene mit folgenden Zustandsgrößen: Longitudinale Translation (x,u), vertikale Translation(z,w), Nickbewegung (q, θ)
  - Vektor der Fluggeschwindigkeit $\vec{V}$ und Luftkräfte liegen in der Symmetrieebene
  - Stationärer Geradeausflug, keine Einflüsse aus unsymmetrischer Bewegung

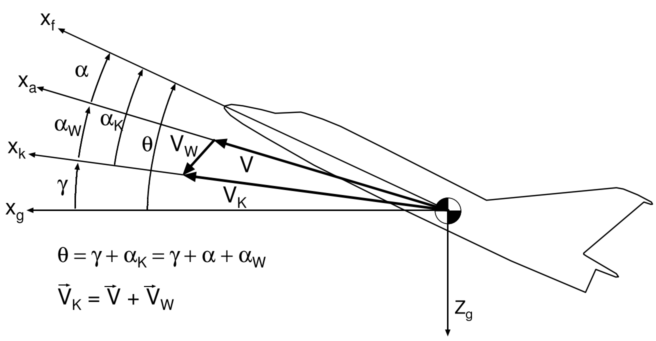


Bild 2.13 x_g, z_g-Ebene,ϕ, β, $\beta_W = 0$)

α	Anstellwinkel
α_W	Wind-Anstellwinkel
α_K	Bahn-Anstellwinkel
γ	Bahnwinkel
θ	Längsneigung
V	Fluggeschwindigkeit
V_W	Windgeschwindigkeit
V_K	Bahngeschwindigkeit

- **Seitenbewegung**
  - Unsymmetrische Bewegung mit folgenden Zustandsgrößen: Laterale Translation (y,v), Rollen (p,ϕ), Gieren(r,ψ)
  - Keine Einflüsse aus der symmetrischen Bewegung

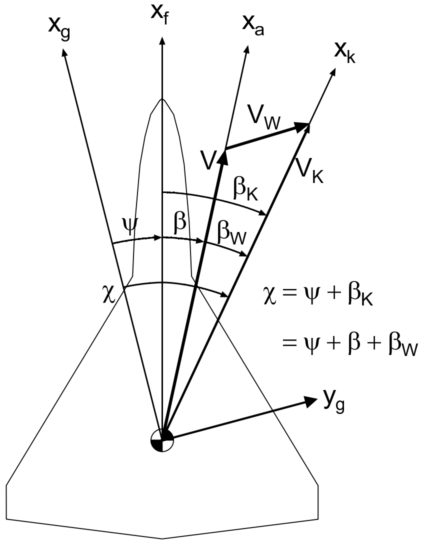


Bild 2.14 x_g, y_g-Ebene

($\gamma = \theta = 0$)

β Schiebewinkel
β_W Wind-Schiebewinkel
β_K Bahn-Schiebewinkel
ψ Azimut
χ Bahn-Azimut
ϕ Hängewinkel

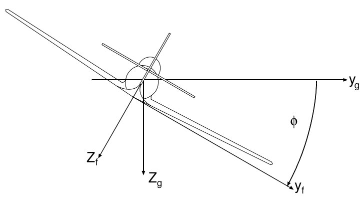


Bild 2.15 y_g, z_g-Ebene

2.4 Luftkräfte und Luftkraftmomente

2.4.1 Allgemeines

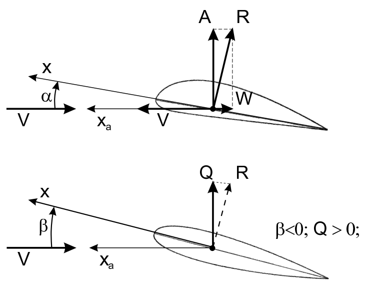


Bild 2.16

Ermittlung / Beschreibung der Luftkräfte
$\rightarrow$ Strömungsmechanik
Aerodynamik

V: Betrag der Fluggeschwindigkeit (Flugmechanik) = Betrag der Anströmgeschwindigkeit (Aerodynamik)

Resultierende Luftkraft	$R^A = \frac{\varrho}{2} V^2 S C_R$	$\overline{q} = \frac{\varrho}{2} V^2$	Staudruck
Auftrieb	$A = \frac{\varrho}{2} V^2 S C_A$	S:	Bezugsfläche
Widerstand	$W = \frac{\varrho}{2} V^2 S C_W$	C_A :	Beiwert (Formeinfluss)
Querkraft	$Q = \frac{\varrho}{2} V^2 S C_Q$		

(Aerodynamisches Koordinatensystem)

Normal-, Tangential-, Seitenkraft (Körperfestes Koordinatensystem)

2.4.2 Auftrieb

Kraft senkrecht zur Anströmung

Haupteinfluss: Anstellwinkel α

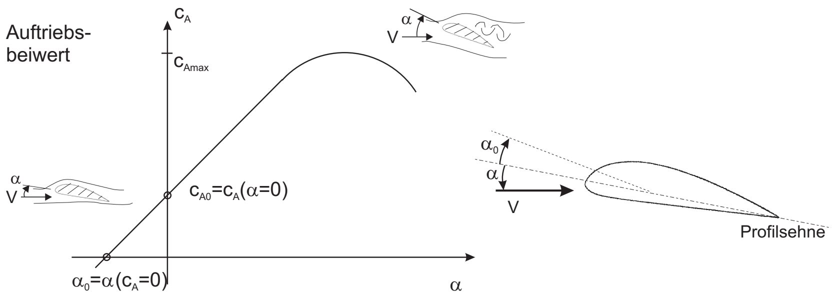
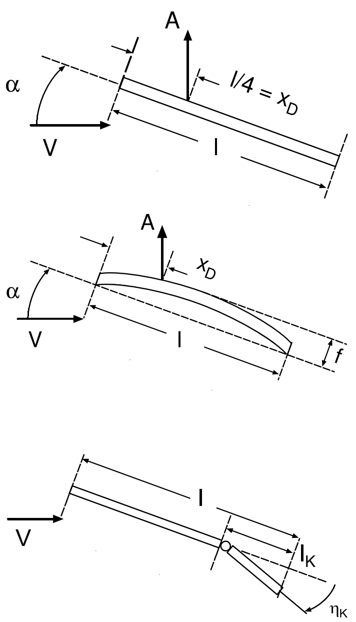


Bild 2.17

$$\text{Linearer Bereich} \qquad C_A = C_{A_0} + \underbrace{\frac{\partial C_A}{\partial \alpha}}_{C_{A_\alpha}} \alpha \quad , \qquad C_A = (\alpha - \alpha_0)\,\frac{\partial C_A}{\partial \alpha}$$

- durch Erhöhung vom Anstellwinkel α erfolgt Zunahme des Auftriebsbeiwertes
- geometrischer Anstellwinkel α_0
- bei hohem Anstellwinkel reißt die Strömung ab
- **Auftriebseigenschaften** einfacher Profile (Skelett- Theorie)

  (Zweidimensionale, inkompressible Strömung)



Ebene Platte

$$C_{A\alpha} = 2\pi$$
$$\alpha_0 = 0$$
$$\frac{x_D}{l} = \frac{1}{4}$$

Parabelskelett

$$C_{A\alpha} = 2\pi \qquad C_A(\alpha = 0) = 4\pi\,\frac{f}{l}$$
$$\alpha_0 = -2\frac{f}{l}$$
$$\frac{x_D}{l} = \frac{1}{4} + \frac{\pi\,\frac{f}{l}}{2\pi\,(\alpha + \frac{2f}{l})}$$

Klappenprofil

$$C_{A\alpha} = 2\pi$$
$$\alpha_0 = -\frac{2}{\pi}(\arcsin\sqrt{\lambda_K} + \sqrt{\lambda_K(1-\lambda_K)}\,)\eta_K$$
$$\lambda_K = \frac{l_K}{l}$$

Bild 2.18

- **Einfluss von Wölbung und Klappen**

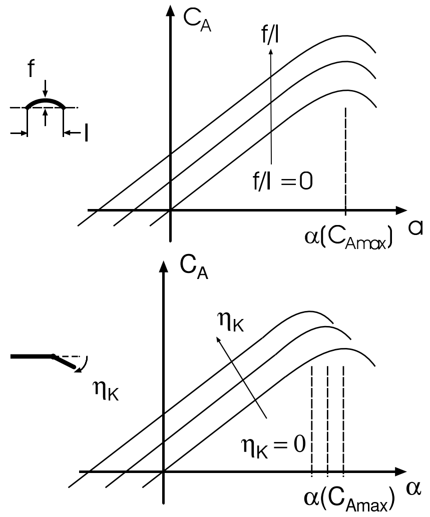


Bild 2.19

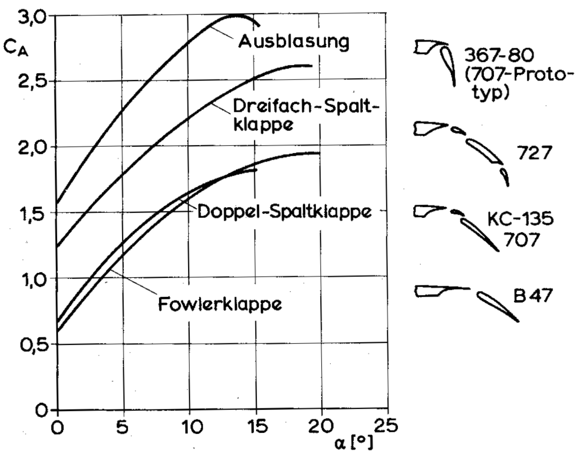


Bild 2.20

- Erhöhung der Wölbung f führt zu größeren maximalen Auftriebsbeiwerten C_{Amax}
- Höhenruderausschlag η_K führt zu größeren C_{Amax}, Strömung reißt jedoch bei kleineren Anstellwinkeln α ab

- **Einfluss der Kompressibilität**

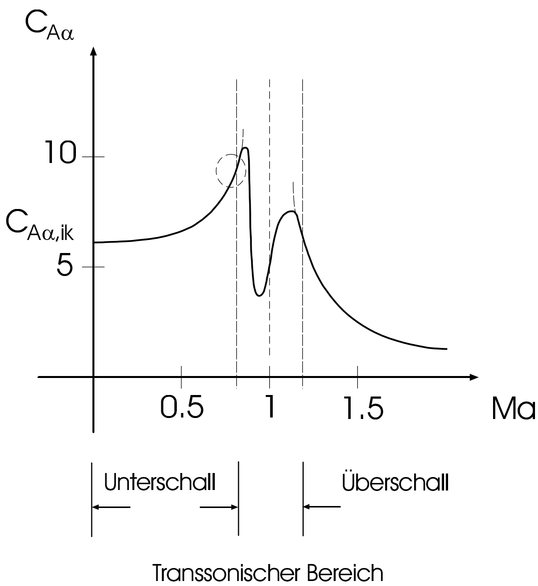


Bild 2.21

Erhöhung der Machzahl:

→ $C_{A\alpha}$ wächst an (Unterschall)
→ $C_{A\alpha}$ fällt ab (Überschall)

◌ **Buffeting:**

Rütteln des Flugzeugs durch oszillierende, lokale Abreisserscheinungen im hohen Unterschall

Machzahl: $Ma = \frac{V}{a}$
Strömung mechanisch ähnlich: Ma gleich
a: Schallgeschwindigkeit

Prandtl-Glauert

$$C_{A\alpha} = \frac{C_{A\alpha,ik}}{\sqrt{1 - Ma^2}}$$

Ackeret

$$C_{A\alpha} = \frac{4}{\sqrt{Ma^2 - 1}}$$

- **Einfluss der Streckung**

  Druckausgleich an Flügelenden
  → Auftriebsreduzierung, Randwirbel
  → Wirbel verursachen induzierte Geschwindigkeiten w_i (Abwind am Flügel)
  w_i: – wachsen mit Anstellwinkel
  – sinken mit wachsender Streckung

  Prandtl (elliptische Auftriebsverteilung)

$$C_{A\alpha} = \frac{C_{A\alpha\infty}}{1 + \frac{C_{A\alpha\infty}}{\pi\Lambda}}$$

$$C_{A\alpha\infty} = C_{A\alpha}(\Lambda = \infty)$$

$$\Lambda = \frac{b^2}{S} \quad \text{Streckung}$$

b: Spannweite

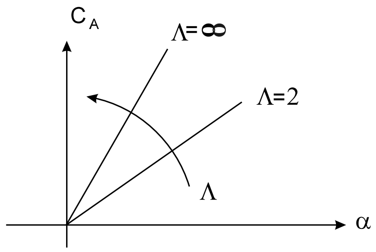


Bild 2.22

- bei unendlicher Streckung Λ theoretisch keine Randwirbel → kein induzierter Widerstand
- je kleiner die Streckung, desto mehr prägen sich die Randwirbel aus → der maximale Auftriebsbeiwert C_{Amax} sinkt

2.4.3 Widerstand

- **Kraft in Strömungsrichtung**

  - **Nullwiderstand:** Widerstand bei Null-Auftrieb

    - Reibungswiderstand: Schubspannungen von Luft auf umströmten Körper, stark abhängig von der Grenzschicht (Bild 2.23)

    - Druckwiderstand: Druckdifferenz zwischen Vorder- und Rückseite des angeströmten Körpers (Bild 2.24)

    - Wellenwiderstand: Widerstand bei Nullauftrieb im Überschall (Bild 2.25)

  - **Auftriebswiderstand:** Widerstand durch Anstellwinkeländerung

    - Profil-Auftriebswiderstand: C_A-abhängiger Widerstandsanteil bei unendlicher Streckung (Bild 2.26)

    - Induzierter Widerstand: Widerstand durch endliche Spannweite (Bild 2.27)

    - Auftriebswellenwiderstand: Komponente in Strömungsrichtung (Bild 2.28)

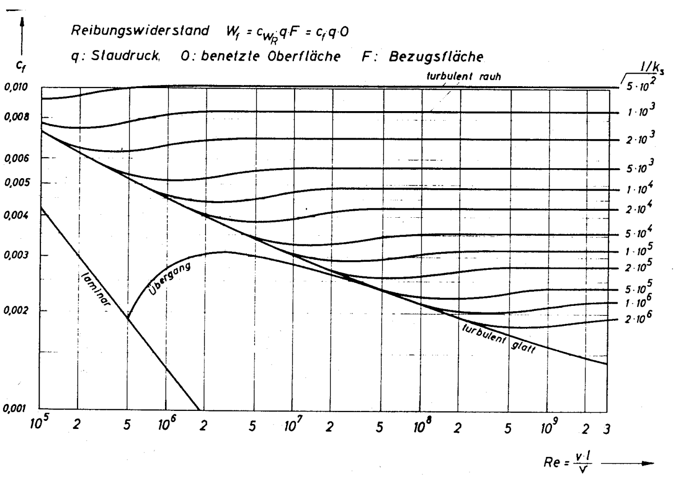


Bild 2.23 Reibungswiderstand, Ebene Platte

$Re = \dfrac{V\,l}{\nu}$ Reynolds-Zahl, charakterisiert Verhältnis von Trägheitskraft zu Reibungskraft
Ähnlichkeitsgesetz für reibungsbehaftete Strömung
ν: kinematische Zähigkeit

$\frac{l}{k_s}$ Relative Rauhigkeit

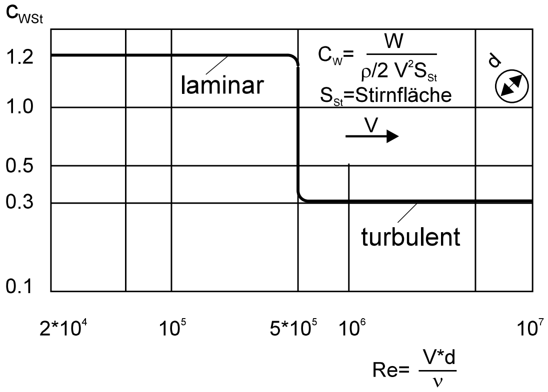


Bild 2.24 Druckwiderstand eines Kreiszylinders

Turbulente Grenzschicht:
Ablösung später,
Totwasser kleiner

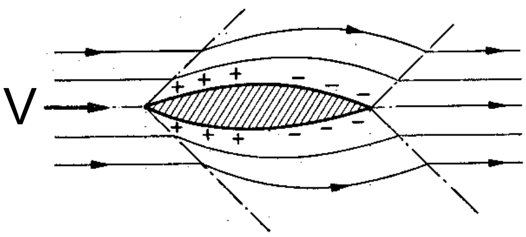


Bild 2.25 Wellenwiderstand bei Nullauftrieb

Druckänderung hängt von Steigung der Kontur ab
→ dünne Profile günstig

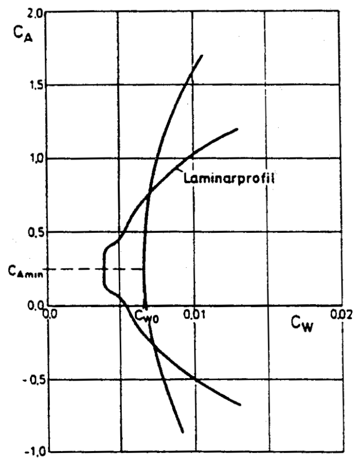


Bild 2.26 Auftrieb / Widerstand (unsymmetrisches Profil, unendliche Streckung), Profilpolare

– Zunahme des Profilwiderstands durch Auftriebsänderung

– Vertikale Verschiebung von C_A (C_W) durch Wölbung oder Klappen

– Laminarprofile: "Laminardelle"

- Laminarprofil

  - durch große Dickenrücklage findet ein kontinuierlicher Druckabfall bis etwa $\frac{x}{l} = 0,5$ statt

  - erst danach positiver Druckgradient und möglicher Umschlag der Strömung

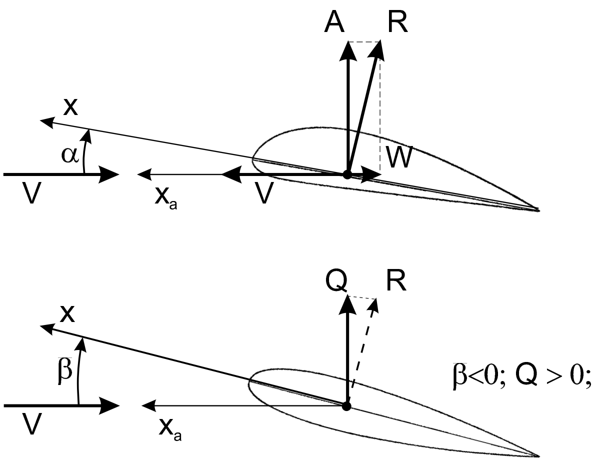


Bild 2.27 Induzierter Widerstand

- Endliche Spanweite:
  - Druckausgleich an Flügelenden
  - Randwirbel
  - Induzierte Geschwindigkeit w_i, induzierter Anstellwinkel $\alpha_i < 0$
  - Wirksam ist der effektive Anstellwinkel
- Induzierter Widerstand W_i:
  - Neigung des Auftriebsvektors durch induzierten Anstellwinkel
  - W_i hängt vom Auftrieb ab $C_{wi} = k_i \; {C_A}^2$ (Bei elliptischer Auftriebsverteilung)

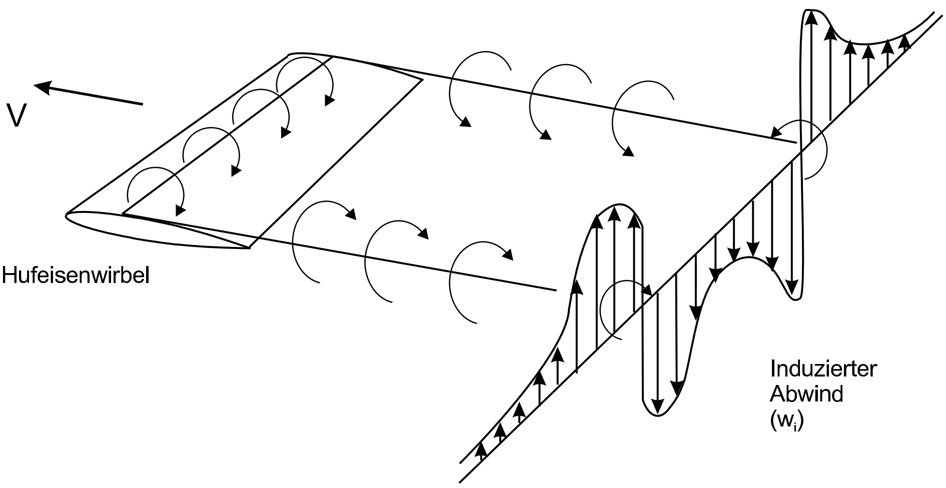


Bild 2.28 Geschwindigkeitsverteilung

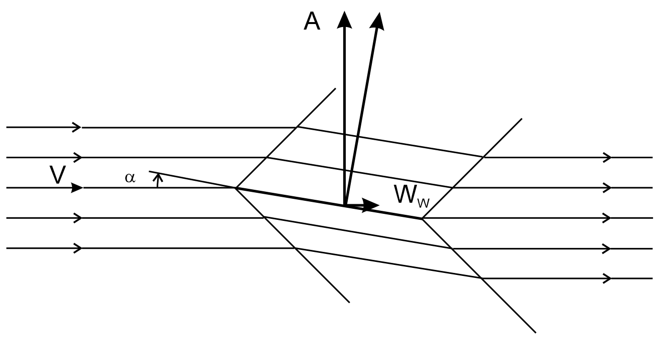


Bild 2.29 Wellenwiderstand durch Auftrieb

Im Überschall:

- Verdichtung Unterseite
- Verdünnung Oberseite

Kraft senkrecht zu Profil hat Komponente W_W in Strömungsrichtung

→ Auftriebswellenwiderstand

2.4.4 Druckpunkt

- **Druckverteilung**

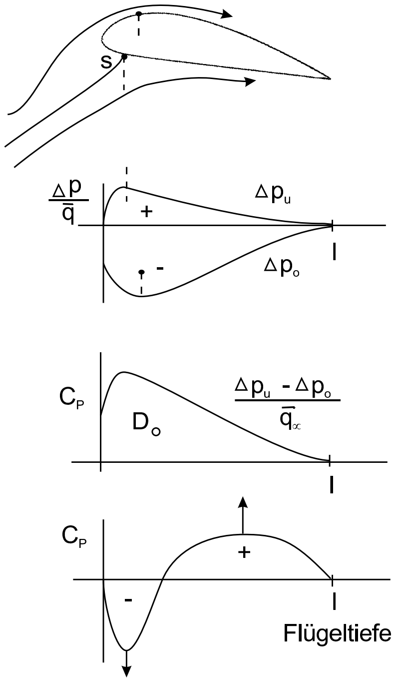


Bild 2.30

"Tragendes" Profil (positive Wölbung)
S: Staupunkt

Unterseite: Überdruck
Oberseite: Unterdruck
$\overline{q}$: Staudruck
$\Delta p \;=\; p - p_\infty$

Druckverteilung für $C_A > 0$
DRUCKPUNKT: Flächenschwerpunkt D

Druckverteilung für $C_A = 0$
führt zu negativem Moment
$(C_{m0} < 0)$

- **Druckpunkt:** Angriffspunkt der Luftkraft

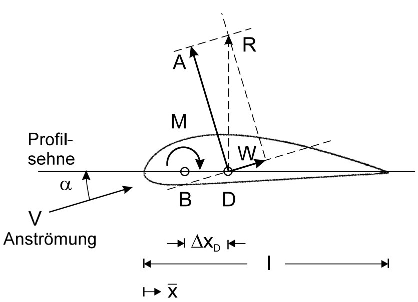


Bild 2.31

Moment um Bezugspunkt B:

$$
\begin{aligned}
M &= -A\,\Delta x_D\,cos(\alpha) - W\,\Delta x_D\,sin(\alpha) \\
&\approx -A\,\Delta x_D \qquad (\alpha\ klein) \\
A &= \overline{q}\,S\,C_A \quad ; \quad \overline{q} = \frac{\rho}{2}\,V^2 \\
M &= \overline{q}\,S\,l\,C_m
\end{aligned}
$$

- Moment um D: $M_D = 0$
- Lage von D ändert sich i. a. mit dem Anstellwinkel
  Parabelskelett:
  $\alpha = 0 \qquad \overline{x}_D = \frac{l}{2}$
  $\alpha = \infty \qquad \overline{x}_D = \frac{l}{4}$
- Es gibt druckpunktfeste Profile (symmetrisch, S-Schlag)
- Bezugspunkt B:
  i. a. $\overline{x}_B = \frac{l}{4}$
  (Druckpunkt Ebene Platte)

$$\boxed{\frac{\Delta x_D}{l} = -\frac{C_m}{C_A}} \quad \text{Lage des Druckpunktes} \tag{2.1}$$

2.4.5 Neutralpunkt

Im Neutralpunkt ergibt sich bei einer Auftriebsänderung keine Momentenänderung, jedoch existiert ein Moment M_0 (= const)

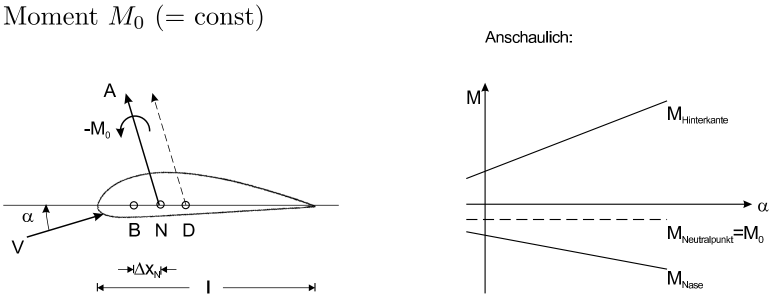


Bild 2.32

Moment um B

$$
\begin{aligned}
M &= M_0 - A\,\Delta x_N \\
C_m &= C_{m0} - C_A \frac{\Delta x_N}{l}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\frac{\Delta x_N}{l} = -\frac{dC_m}{dC_A}}$$ Lage des Neutralpunktes

Skelett-Theorie: Bezugspunkt = Nasenpunkt
$\hookrightarrow \dfrac{\Delta x_N}{l} = \dfrac{1}{4}$

- Abstand Druckpunkt – Neutralpunkt

$$\frac{\Delta x_D}{l} - \frac{\Delta x_N}{l} = -\frac{C_m}{C_A} + \frac{dC_m}{dC_A}$$

mit $C_m = C_{m0} + \dfrac{dC_m}{dC_A} C_A$

$$\boxed{\frac{\Delta x_D}{l} - \frac{\Delta x_N}{l} = -\frac{C_{m0}}{C_A}} \qquad (2.5\text{-}6)$$

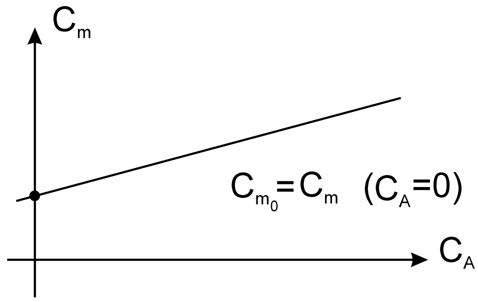
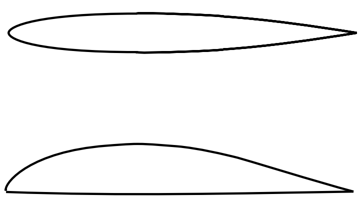


Bild 2.33



Symmetrisches Profil: $C_{m0} = 0$, $\Delta x_D = \Delta x_N$

"Tragendes" Profil: $C_{m0} < 0$, $\Delta x_D > \Delta x_N$
($f > 0$ vgl. (2.5-3)) $\hookrightarrow$ Höhenleitwerk zur Stabilisierung erforderlich

Bild 2.34

2.4.6 Gleichgewicht

- **Flügel** (kleine Winkel)

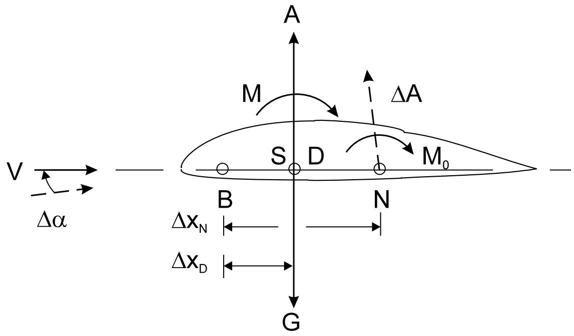
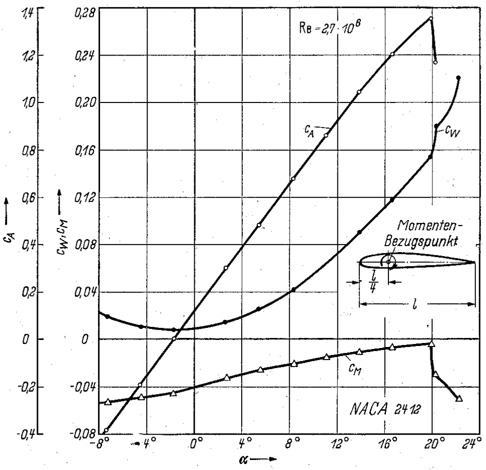


Bild 2.35

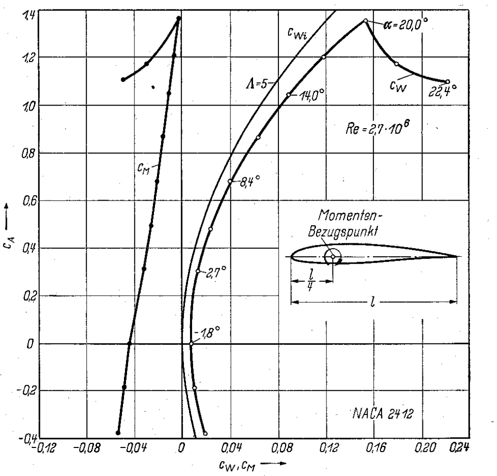
- Gleichgewicht: $A = G\,,\ M = 0\,,\ M_0 = A\,(\Delta x_N - \Delta x_D)\ >\ 0$
- Störung $\Delta\alpha$: ΔA : $\Delta M < 0$ (kopflastig) $\rightarrow$ stabil: $\Delta x_N > \Delta x_D$
  $\Delta M > 0$ (schwanzlastig) $\rightarrow$ instabil: $\Delta x_N < \Delta x_D$
- Positiv gewölbte Profile ($\Delta x_N < \Delta x_D$) $\rightarrow$ instabil
- $\Rightarrow$ Voraussetzung für Stabilität:
  $M_0 > 0$
  $\Delta M < 0$
- Auftrieb im Druckpunkt, Gewichtskraft im Schwerpunkt
  - im Gleichgewicht: Schwerpunkt im Druckpunkt

2.4.7 Polare

- Flügelpolare /9/



Beiwerte C_A, C_W, C_m
in Abhängigkeit von α



Polare $C_A(C_W)$, $C_A(C_m)$

Λ $= 5$, Rechteckflügel
Re $= 2,7 \cdot 10^6$
M $= 0,15$

Bild 2.36

- **Flugzeugpolare**

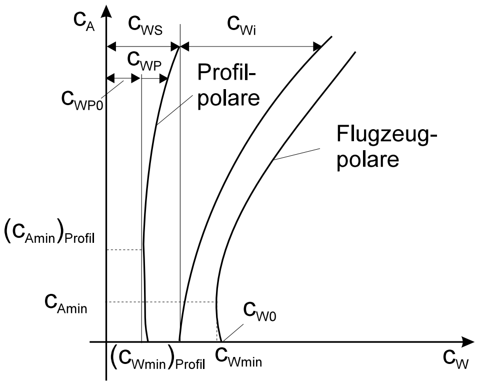


Bild 2.37

$$C_W = C_{Wmin} + k\,(C_A - C_{Amin})^2$$

C_{WS}: Schädlicher Widerstand
(Rumpf, Triebwerke, Fahrwerk, ...)

- **Flugzeugpolare** Unterschall-Verkehrsflugzeug

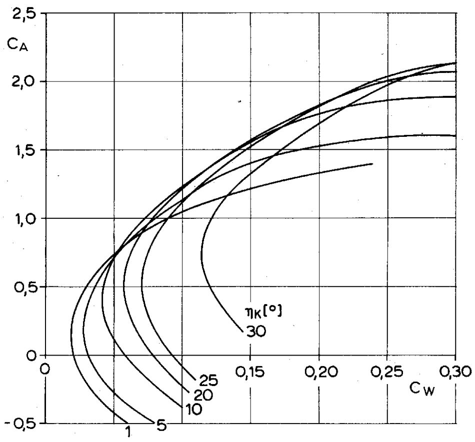


Bild 2.38 Einfluß der Klappenstellung

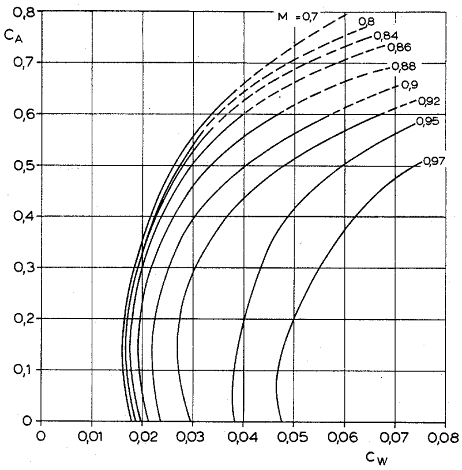


Bild 2.39 Einfluß der Machzahl

3 Stationäre Längsbewegung

3.1 Luftkräfte

Statische Betrachtung $\rightarrow$ Gleichgewichtszustände
Dynamische Betrachtung $\rightarrow$ Bewegungsvorgänge

- Längsbewegung:
  - stationärer Geradeausflug
  - Anströmung und Kräfte liegen in der Symmetrieebene

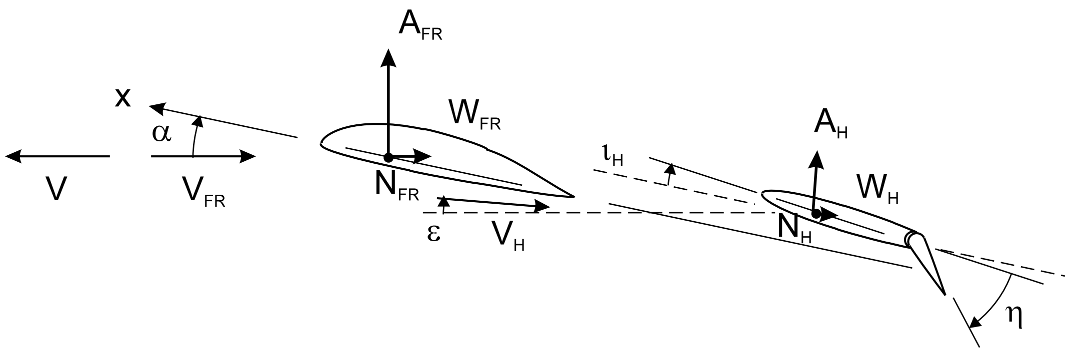


Bild 3.1

- Flügel beeinflusst Strömung $\rightarrow \alpha_{FR} \neq \alpha_H = \alpha$ - $\varepsilon + i_H \rightarrow V_{FR} \neq V_H$

  x: Flugzeugfestes Koordinatensystem, Nullauftriebsrichtung Flügel-Rumpf
  VORSICHT: Definition α anders als bei Flügel (Kap.)

- **Flügel-Rumpf (FR)** Betrachtung der Kombination FR
  - Anströmgeschwindigkeit V_{FR} , Fluggeschwindigkeit V
  - Anstellwinkel α: Winkel zur Nullauftriebsrichtung FR
  - Auftrieb: $A_{FR} = C_{AFR}\, \overline{q}\, S$ A_{FR} entspricht etwa dem Auftrieb des im Rumpfbereich fortgesetzt gedachten Flügels.
  - Widerstand: $W_{FR} = C_{WFR}\, \overline{q}\, S$
  - Staudruck: $\overline{q} = \dfrac{\rho}{2} V^2$
  - Bezugsfläche S: Flügelfläche incl. Rumpf-Zwischenteil
  - Auftriebsbeiwert:

$$(C_A)_{FR} = C_{AFR} = \frac{\partial (C_A)_{FR}}{\partial \alpha}\, \alpha = (C_{A\alpha})_{FR}\, \alpha \tag{3.1}$$

(Linearer Ansatz)

- **Höhenleitwerk** (H)

  - Anströmgeschwindigkeit V_H
  (durch Interferenz gegenüber V_{FR} geändert)

  - Anstellwinkel α_H
  (durch Abwind geg. α verändert)

  - Abwindwinkel ε

  - Einstellwinkel i_H

  ε anstellwinkelabhängig

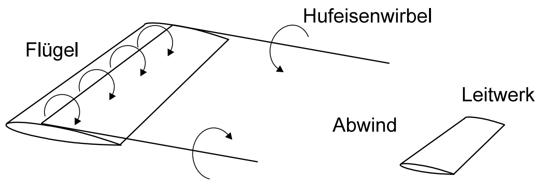


Bild 3.2

$$\alpha_H = \alpha - \varepsilon + i_H = (1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha})\,\alpha - \varepsilon_0 + i_H \tag{3.2}$$

Bei Höhenruderausschlag: Effektiver Einstellwinkel

$$i_H^* = i_H + \frac{\partial \alpha_H}{\partial \eta}\,\eta$$

$$\hookrightarrow \alpha_H = (1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha})\,\alpha - \varepsilon_0 + i_H^*$$

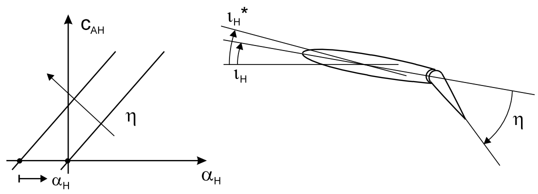


Bild 3.3

- Auftrieb $A_H = C_{AH}\,\overline{q_H}\,S_H \quad C_{AH} = \frac{\partial C_{AH}}{\partial \alpha_H}\,\alpha_H = C_{AH\alpha H}\,\alpha_H$
- Widerstand $W_H = C_{WH}\,\overline{q_H}\,S_H$
- Höhenleitwerksfläche S_H
- Staudruck $\overline{q_H} = \frac{\rho}{2}\,V_H^2$

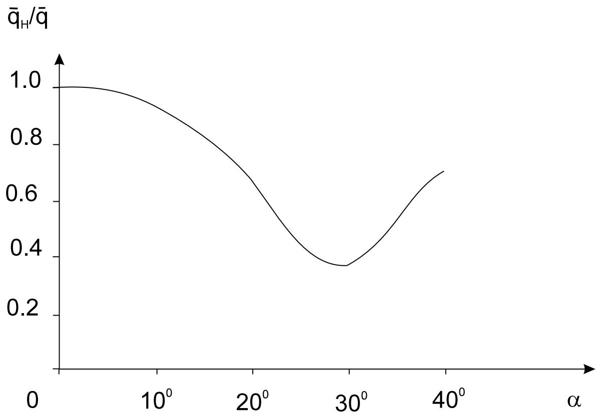


Bild 3.4 Staudruckverhältnis am Ort des Höhenleitwerkes

- Staudruckverhältnis am Ort des Höhenleitwerkes

- **Gesamtauftrieb**

$$A \;=\; A_{FR} \;+\; A_H \;\cos\varepsilon \;-\; W_H \;\sin\varepsilon$$

$$W_H \;\sin\varepsilon \ll A_H \;\;;\;\; \cos\varepsilon \;\approx\; 1$$

$$\hookrightarrow \qquad A \;=\; A_{FR} + A_H$$

- **Gesamtauftrieb setzt sich aus $\mathbf{A_{FR}}$ und $\mathbf{A_H}$ zusammen**

Gesamtbeiwert

Schreibweise: Anteile am Gesamtwert des Flugz.

$$C_A \;=\; C_{AFR} \;+\; \frac{\overline{q_H}\,S_H}{\overline{q}\,S}\,C_{AH} \;=\; \underset{\downarrow}{(C_A)_{FR}} \;+\; \underset{\downarrow}{(C_A)_H}$$

$$C_A \;=\; \underbrace{\left[(C_{A\alpha})_{FR} \;+\; (1 \;-\; \frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha})\,\frac{\overline{q_H}}{\overline{q}}\,\frac{S_H}{S}\,C_{AH\alpha H}\right]}_{\underbrace{(C_{A\alpha})_{FR} \;+\; (C_{A\alpha})_H}_{C_{A\alpha}}} \alpha \;+\; \underbrace{\frac{\overline{q_H}}{\overline{q}}\,\frac{S_H}{S}\,C_{AH\alpha H}\,(i_H^* \;-\; \varepsilon_0)}_{C_{A,\alpha=0}} \tag{3.3}$$

$$C_A \;=\; C_{A,\alpha=0} \;+\; C_{A\alpha}\,\alpha \;\;\text{oder} \qquad C_A \;=\; C_{A\alpha}\,\alpha_{eff} \quad , \quad \alpha_{eff} \;=\; \alpha - \alpha_{CA=0}$$

- **Auftriebsbeiwert**

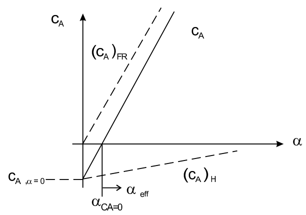


Bild 3.5

aus (3.3) $\qquad \alpha_{CA=0} \;=\; -\frac{C_{AH\alpha H}}{C_{A\alpha}}\,\frac{\overline{q_H}}{\overline{q}}\,\frac{S_H}{S}\,(i_H^* - \varepsilon_0)$

- Zusammenhänge:

$$\text{Gesamt}\, C_A :\; C_A \;=\; (C_A)_{FR} \;+\; (C_A)_H$$

$$H - Anteil\, :(C_A)_H = \frac{A_H}{\overline{q}\,S} \;=\; \frac{A_H}{\overline{q_H}\,S_H}\,\frac{\overline{q_H}}{\overline{q}}\,\frac{S_H}{S} \;=\; C_{AH}\,\frac{\overline{q_H}}{\overline{q}}\,\frac{S_H}{S} \quad ;\; C_{AH} :\; C_A \text{ für H}$$

$C_{A\alpha}$ für H-Anteil:

$$(C_{A\alpha})_H \;=\; \frac{\partial (C_A)_H}{\partial\alpha} \;=\; \frac{\partial C_{AH}}{\partial\alpha}\,\frac{\overline{q_H}}{\overline{q}}\,\frac{S_H}{S} \;=\; \frac{\partial C_{AH}}{\partial\alpha_H}\,\frac{\partial\alpha_H}{\partial\alpha}\,\frac{\overline{q_H}}{\overline{q}}\,\frac{S_H}{S} \tag{3.4}$$

$$= C_{AH\alpha H}\,(1 - \frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha})\,\frac{\overline{q_H}}{\overline{q}}\,\frac{S_H}{S}$$

3.2 Nickmomente

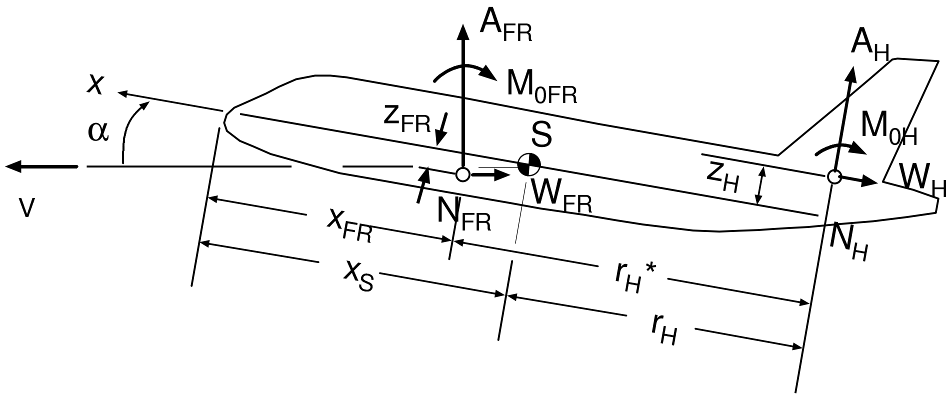


Bild 3.6

Nickmoment um Schwerpunkt:

$$
\begin{aligned}
M &= M_{FR} + M_H \\
M_{FR} &= M_{0FR} + (A_{FR}\cos\alpha + W_{FR}\sin\alpha)(x_S - x_{FR}) + (A_{FR}\sin\alpha - W_{FR}\cos\alpha)z_{FR} \\
M_H &= -\left[A_H\cos(\alpha-\varepsilon) + W_H\sin(\alpha-\varepsilon)\right] r_H + \left[-A_H\sin(\alpha-\varepsilon) + W_H\cos(\alpha-\varepsilon)\right] z_H + M_{0H}
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{array}{lcl} M_{0FR} & : & \text{Nullmoment Flügel-Rumpf} \\ N_{FR} & : & \text{Neutralpunkt Flügel-Rumpf} \end{array}\right\} \text{fest für gegebene Konfiguration}
$$

- **Vereinfachungen**
  - M_{0H} wird vernachlässigt (meist: $M_{0H} = 0$, symm. Profil)
  - Einfluss Hoch-/Tieflagen z_{FR}, z_H gering
  - Anstellwinkel α klein
  - W_{FR}, W_H - Anteile klein

damit

$$M = M_{0FR} + A_{FR}(x_S - x_{FR}) - A_H r_H \tag{3.5}$$

Umformung

$$A = A_{FR} + A_H \tag{3.6}$$

$$
\begin{aligned}
M &= M_{0FR} + (A - A_H)(x_S - x_{FR}) - A_H r_H \\
&= M_{0FR} + A(x_S - x_{FR}) - \underbrace{A_H \underbrace{(x_S - x_{FR} + r_H)}_{r_H^*}}_{\text{Leitwerksmoment, unabhängig von Schwerpunktlage}}
\end{aligned}
$$

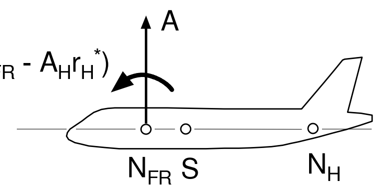


Bild 3.7

- **Beiwert-Schreibweise**

$$M \quad = C_m \, \overline{q} \, S \, l_\mu$$

Bezugs-Flügeltiefe

$$l_\mu = \frac{1}{S} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} l^2(y) \, dy \qquad b\text{: Spannweite} \tag{3.7}$$

Momente

$$\underbrace{\boxed{C_m \;=\; (C_{m0})_{FR} \;-\; \frac{r_H{}^*}{l_\mu} \frac{\overline{q_H}}{\overline{q}} \frac{S_H}{S} C_{AH}} }_{\text{unabhängig}} \; \underbrace{+ \; \frac{x_S - x_{FR}}{l_\mu} \, C_A}_{\text{abhängig}} \tag{3.8}$$

von Schwerpunktlage

Abkürzung:

$$V_H{}^* \;=\; \frac{r_H{}^*}{l_\mu} \frac{\overline{q_H}}{\overline{q}} \frac{S_H}{S} \qquad \text{(Leitwerksfaktor)} \tag{3.9}$$

enthält geometrische Entwurfsparameter

Wenn A_{FR} nicht durch A ersetzt wird ist

$$C_m = (C_{m0})_{FR} - \frac{r_H}{l_\mu} \frac{\overline{q_H}}{\overline{q}} \frac{S_H}{S} C_{AH} \;+\; \frac{x_S - x_{FR}}{l_\mu} \, (C_A)_{FR} \tag{3.10}$$

- **Nullmoment** ($C_A = 0$), gesamt

$$\begin{aligned} C_{m0} \;&=\; (C_{m0})_{FR} \;-\; \frac{r_H{}^*}{l_\mu} \frac{\overline{q_H}}{\overline{q}} \frac{S_H}{S} C_{AH,CA=0} \\ &=\; (C_{m0})_{FR} \;-\; \frac{r_H{}^*}{l_\mu} \, (C_A)_{H,CA=0} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Es war $\quad C_{AH} = C_{AH\alpha H} \, \alpha_H = C_{AH\alpha H} \left[\left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right) \alpha - \varepsilon_0 + i_H{}^* \right] \qquad (3.12)$

damit ist $\quad C_{AH,CA=0} = C_{AH\alpha H} \left[\left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right) \alpha_{CA=0} - \varepsilon_0 + i_H{}^* \right]$

und mit $\quad \alpha_{CA=0} = -\frac{C_{AH\alpha H}}{C_{A\alpha}} \frac{\overline{q_H}}{\overline{q}} \frac{S_H}{S} \, (i_H{}^* - \varepsilon_0)$

wird (3.12) $\boxed{C_{m0} \;=\; (C_{m0})_{FR} \; - C_{AH\alpha H} \, V_H{}^* \, \left\{ 1 - \frac{C_{AH\alpha H}}{C_{A\alpha}} \frac{\overline{q_H}}{\overline{q}} \frac{S_H}{S} \, (1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}) \right\} \, (i_H{}^* - \varepsilon_0)}$

$$\underbrace{\frac{C_{AH\alpha H}}{C_{A\alpha}} \frac{\overline{q_H}}{\overline{q}} \frac{S_H}{S}}_{\frac{(C_{A\alpha})_H}{C_{A\alpha}}}$$

$$\underbrace{1 - \frac{(C_{A\alpha})_H}{C_{A\alpha}} (1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha})}_{\frac{(C_{A\alpha})_{FR}}{C_{A\alpha}} \quad (vgl. Gl. 3.3)}$$

- **Momentenänderung** aus (3.8):

$$C_{m\alpha} = \frac{\partial C_m}{\partial \alpha} = -\,{V_H}^* \frac{\partial C_{AH}}{\partial \alpha} + \frac{x_S - x_{FR}}{l_\mu} \frac{\partial C_A}{\partial \alpha}$$

mit

$$C_{AH} = C_{AH\alpha H}\ \alpha_H = C_{AH\alpha H} \left[\left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) \alpha - \varepsilon_0 + {i_H}^* \right]$$

$$\frac{\partial C_{AH}}{\partial \alpha} = C_{AH\alpha H} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right)$$

wird

$$\boxed{C_{m\alpha} = C_{A\alpha} \left[\frac{x_S - x_{FR}}{l_\mu} - \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) \frac{C_{AH\alpha H}}{C_{A\alpha}} {V_H}^* \right]} \tag{3.13}$$

oder wenn A_{FR} nicht durch A ersetzt wird (vergl. 3.5)

$$C_{m\alpha} = (C_{A\alpha})_{FR} \frac{x_N - x_{FR}}{l_\mu} - \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) C_{AH\alpha H}\ \underbrace{\frac{\overline{q_H}\ S_H\ r_H}{\overline{q}\ S\ l_\mu}}_{\overline{V}_H} \tag{3.14}$$

3.3 Statische Längsstabilität

3.3.1 Statische Stabilität bei festem Ruder

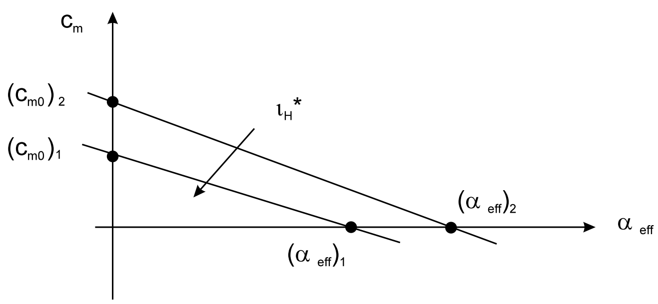
Höhenruderausschlag $\eta = \text{const}$, z. B. durch Stellmotor

Stationärer Flug:

$$C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha_{eff} = 0 \tag{3.15}$$

$${i_H}^* = i_{H0} + \frac{\partial \alpha_H}{\partial \eta}\eta$$

$$C_A = C_{A\alpha}\alpha_{eff}$$



Trimmzustand: $i^*_{H2} < i^*_{H1}$
(Effektiver Einstellwinkel)

Bild 3.8

- **Momentengleichgewicht**

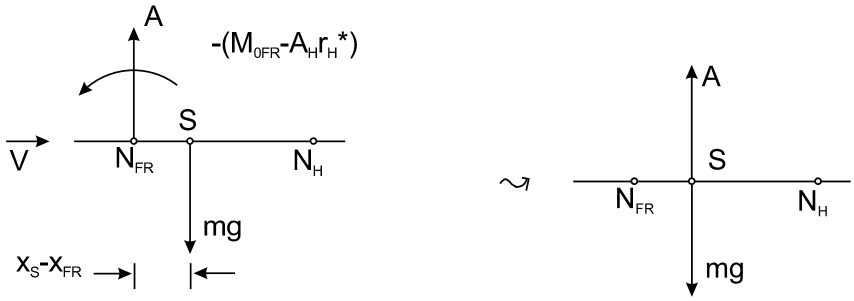


Bild 3.9

- **Störung des Gleichgewichts**

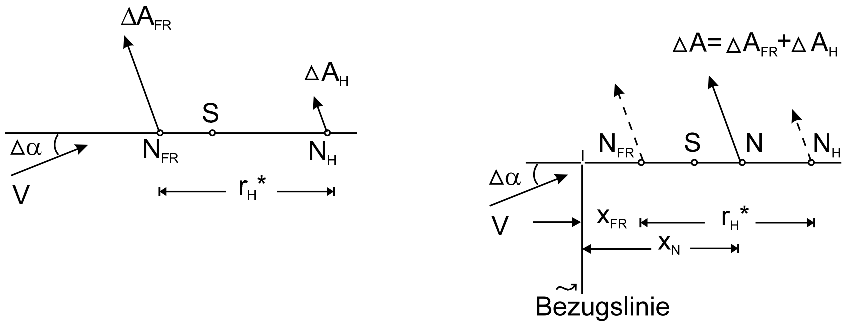


Bild 3.10

- **Lage des Flugzeugneutralpunkts**

$$\Delta A = \Delta A_{FR} + \Delta A_H$$
$$\Delta A_{FR}\,(x_N - x_{FR}) - \Delta A_H\;\left[{r_H}^* - (x_N - x_{FR})\right] = 0$$
$= 0$ da keine Momentenänderung im Neutralpunkt
$$\hookrightarrow \quad x_N - x_{FR} = \frac{\Delta A_H}{\Delta A}\,{r_H}^*$$
mit $\Delta A = \overline{q}\,S\,C_{A\alpha}\,\Delta\alpha$
$$\Delta A_H = \left(1 - \frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}\right)\overline{q_H}\,S_H\,C_{AH\alpha H}\,\Delta\alpha \quad ; \; {V_H}^* = \frac{{r_H}^*}{l_\mu}\,\frac{\overline{q_H}}{\overline{q}}\,\frac{S_H}{S}$$
wird $\boxed{\frac{x_N - x_{FR}}{l_\mu} = \left(1 - \frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}\right)\frac{C_{AH\alpha H}}{C_{A\alpha}}\,{V_H}^*}$ Lage des Neutralpunkts (3.16)

Gleiches Ergebnis für $C_{m\alpha} = 0$ (Gl. (3.13))

- **Statische Stabilität**

- Schwerpunkt vor Neutralpunkt
  Rückführendes Moment $\longrightarrow$ statisch stabil
- Schwerpunkt im Neutralpunkt
  Kein Moment $\longrightarrow$ indifferent ("neutral stabil")
- Schwerpunkt hinter Neutralpunkt
  Mitdrehendes Moment $\longrightarrow$ statisch instabil

- **Bedingung** für statische Stabilität

$$\text{Störmoment} \quad \Delta M = -(x_N - x_S)\,\Delta A$$

$$\text{mit} \quad \Delta M = \overline{q}\,S\,l_\mu\,C_{m\alpha}\,\Delta\alpha \quad ; \quad \Delta A = \overline{q}\,S\,C_{A\alpha}\,\Delta\alpha$$

$$\text{ist} \quad \boxed{C_{m\alpha} = -\frac{x_N - x_S}{l_\mu}\,C_{A\alpha}} \tag{3.17}$$

$$\text{wird} \quad \boxed{\frac{\partial C_m}{\partial C_A} = -\frac{x_N - x_S}{l_\mu}}$$

$$\text{d. h.} \quad \frac{\partial C_m}{\partial C_A} < \quad \text{oder} \quad C_{m\alpha} < 0$$

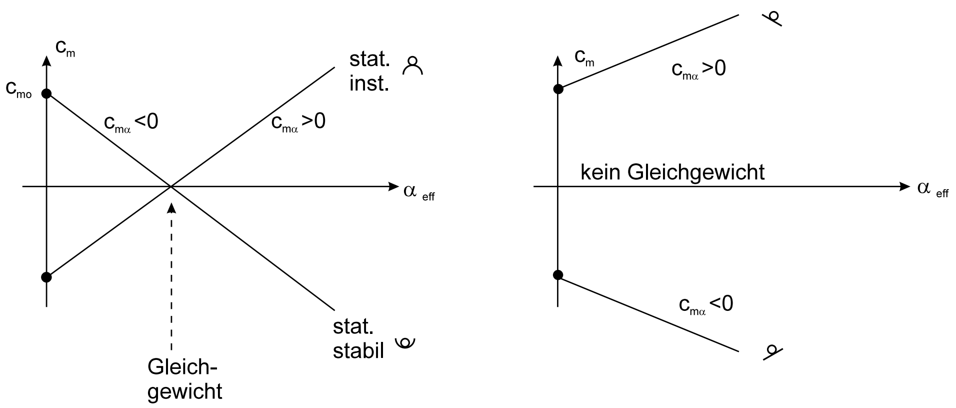


Bild 3.11 (vlg. Bild (57))

$$\boxed{\begin{array}{l} C_{m0} > 0 \\ C_{m\alpha} < 0 \end{array}} \qquad \text{Bedingung für statische Stabilität}$$

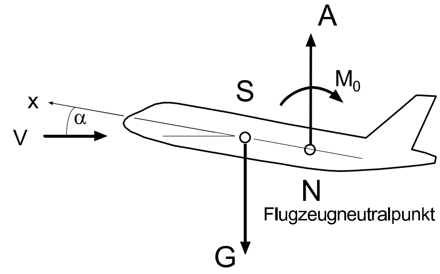
- Aufnicken bewirkt Anstellwinkelzunahme

  → C_m sinkt

  → rückführendes Moment in Richtung der Gleichgewichtslage

- **Zusammenfassung**

  - Gleichgewicht

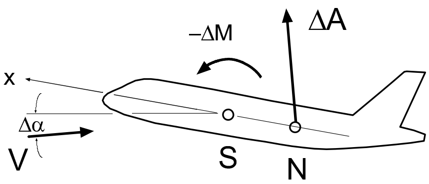


$$M_S = 0$$

$$\boxed{M_0 > 0}$$

Bild 3.12

  - Störung $\Delta\alpha$



$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial \alpha} < 0}$$

Bild 3.13

Störung erzeugt rückdrehendes Moment

$\hookrightarrow$ **Statische Stabilität**

3.3.2 Einflussgrößen

Auf die Neutralpunktlage bzw. die statische Stabilität. Es war (3.16)

$$\frac{x_N}{l_\mu} = \frac{x_{FR}}{l_\mu} + \underbrace{\left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) \frac{C_{AH\alpha H}}{C_{A\alpha}} \frac{{r_H}^*}{l_\mu} \frac{\overline{q_H}}{\overline{q}} \frac{S_H}{S}}$$

Neutralpunktlage Flugzeug	Neutralpunktlage Flügel/Rumpf	Neutralpunktverschiebung durch Höhenleitwerk

- **Neutralpunktverschiebung Flügel**

Verschiebung des Flügelneutralpunkts relativ zu geometrischem Neutralpunkt Geometrischer Neutralpunkt: Bezugspunkt, abhängig von Flügelgeometrie, Definition:

$$x_{N25} = \frac{1}{S} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} l(y)\, x_{25}(y)\, dy \qquad y_{N25} = 0$$

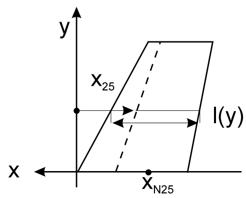


Bild 3.14

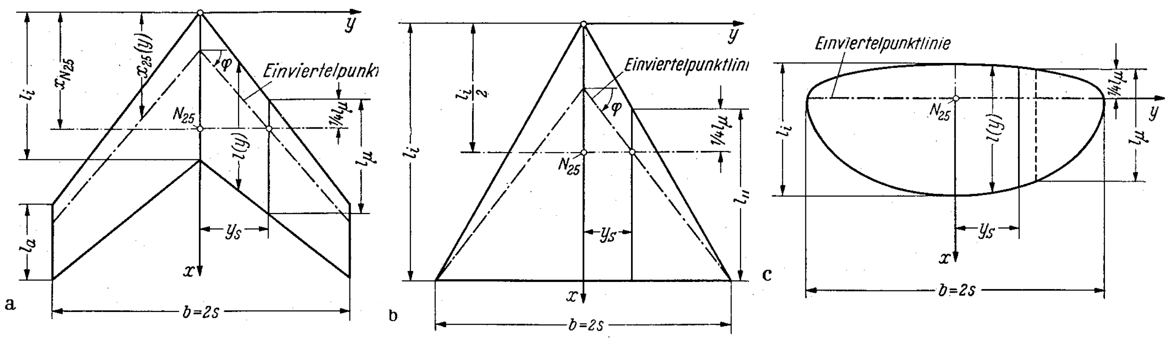


Bild 3.15 Geometrischer Neutralpunkt /9/

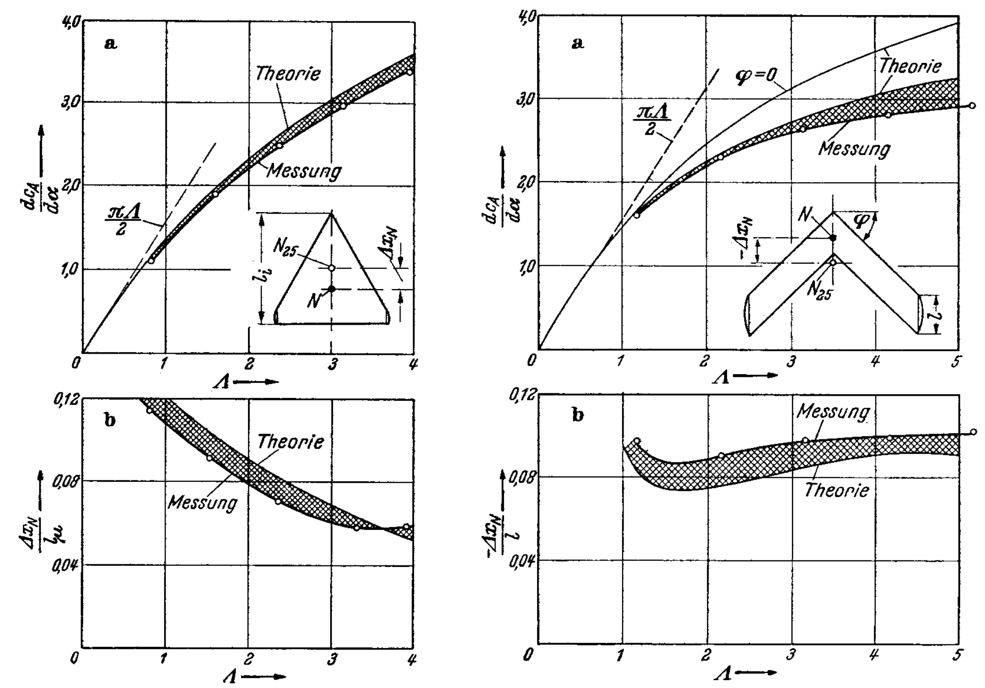


Bild 3.16 Einfluss der Streckung auf die Neutralpunktlage /9/

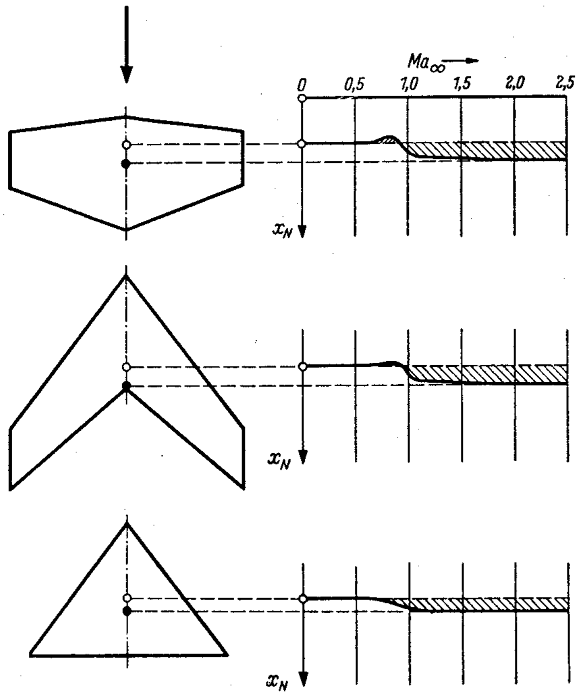


Bild 3.17 Einfluss der Machzahl auf die Neutralpunktlage
Im Überschall (bzw. ab Ma_{krit}) → andere Strömungsphysik (z.B. Stöße) und somit andere Druckverteilung

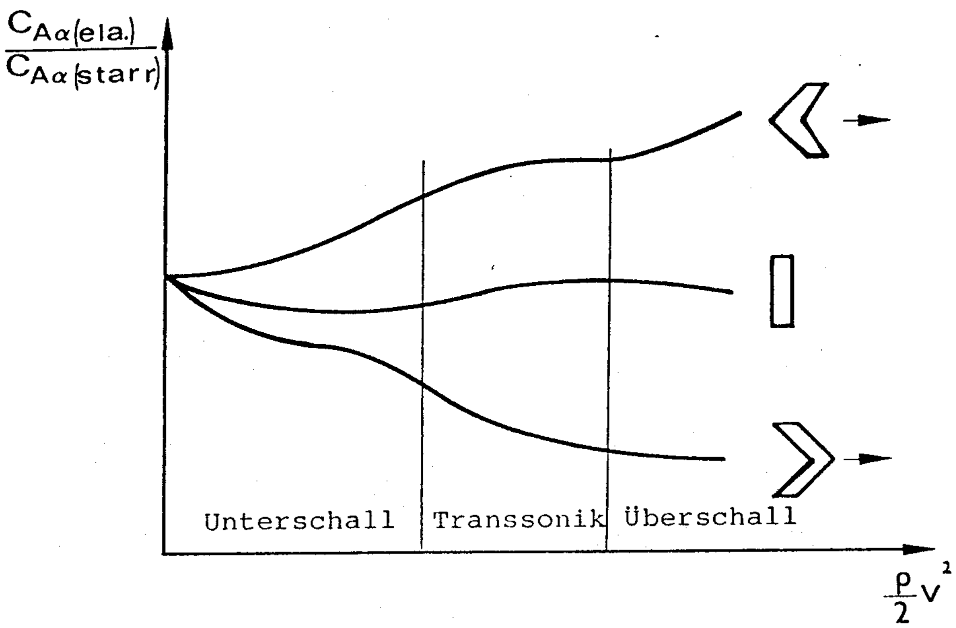


Bild 3.18 Einfluss der Aeroelastizität auf $C_{A\alpha}$

3.3.3 Höhenleitwerksauslegung

Anforderungen: *)

1. Statische Stabilität: Schwerpunkt vor Neutralpunkt
2. Nickmomentenausgleich bei vorderster Schwerpunktlage

1. Stabilitätsgrenze: $x_N = x_S$ (vgl. (3.14))

$$C_{m\alpha} = 0 = (C_{A\alpha})_{FR} \, \frac{x_N - x_{FR}}{l_\mu} - \underbrace{\left(1 - \frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}\right) C_{AH\alpha H} \, \frac{\overline{q_H} \, S_H \, r_H}{\overline{q} \, S \, l_\mu}}_{(C_{A\alpha})_H \, \frac{r_H}{l_\mu}}$$

$$r_H = {r_H}^* - (x_S - x_{FR}) = {r_H}^* - (x_N - x_{FR})$$

$$\left.\frac{S_H}{S}\right|_{C_{m\alpha}=0} = \frac{\frac{(C_{A\alpha})_{FR}}{C_{AH\alpha H}}}{\left(1 - \frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}\right)\frac{\overline{q_H}}{\overline{q}}} \quad \frac{(x_N - x_{FR}) \, \frac{1}{{r_H}^*}}{1 - (x_N - x_{FR}) \, \frac{1}{{r_H}^*}} \tag{3.18}$$

*) zusätzlich: Flugleistungs-Gesichtspunkte

2. Steuerbarkeitsgrenze: (vgl. (3.10))

$$C_m = 0 = (C_{m0})_{FR} + (C_A)_{FR} \, \frac{x_S - x_{FR}}{l_\mu} - C_{AH} \frac{\overline{q_H} \, S_H \, r_H}{\overline{q} \, S \, l_\mu}$$

$$\hookrightarrow \qquad \left.\frac{S_H}{S}\right|_{C_m=0} = \frac{(C_A)_{FR}}{C_{AH}} \, \frac{\overline{q}}{\overline{q_H}} \, \frac{x_S - x_{FR} + l_\mu \frac{(C_{m0})_{FR}}{(C_A)_{FR}}}{{r_H}^* - (x_S - x_{FR})} \tag{3.19}$$

Auftriebsbereich Leitwerk $\qquad C_{AH,min} \;\leq\; C_{AH} \;\leq\; C_{AH,max}$

Kritischer Fall:
– vordere Schwerpunktlage x_{SV}
– $C_{AH,min}$; unterer Extremwert Höhenleitwerksauftrieb
– $(C_A)_{FR,max}$; Hochauftriebskonfiguration

$$\hookrightarrow \qquad \left.\frac{S_H}{S}\right|_{C_m=0} = \frac{(C_A)_{FR,max}}{C_{AH,min}} \, \frac{\overline{q}}{\overline{q_H}} \, \frac{\frac{x_{SV} - x_{FR}}{{r_H}^*} + \frac{l_\mu}{{r_H}^*} \, \frac{(C_m0)_{FR}}{(C_A)_{FR,max}}}{1 - \frac{x_{SV} - x_{FR}}{{r_H}^*}} \tag{3.20}$$

Steuerbarkeitsgrenze Landeanflug

- Erforderliche Leitwerksgröße bei natürlicher Stabilität

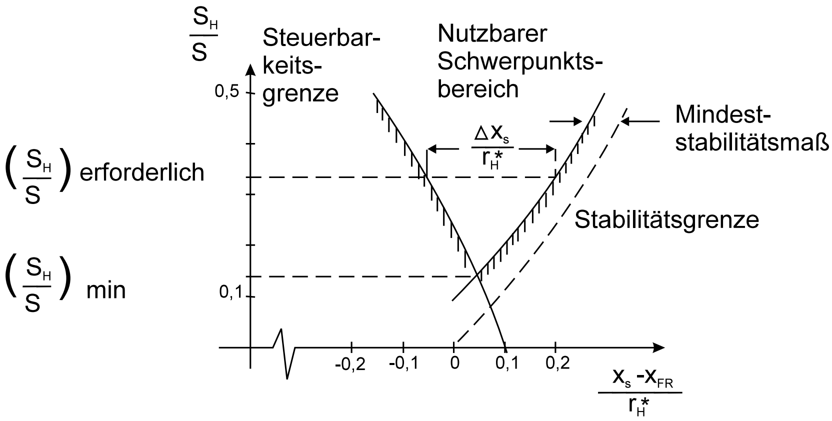


Bild 3.19 Auslegungsfall Landeanflug /6/

Andere Auslegungsfälle : Manöverflug
Bugradabheben

Maßgebend : $\left(\frac{S_H}{S}\right)$ ungünstigster Fall

- bei Leitwerksauslegung spielen dessen Position/Hebelarm sowie die Größe eine Rolle

- je größer das Leitwerk, desto größer der Bereich in dem es angebracht werden kann

3.3.4 Höhenruderausschlag

- Zusammenhang zwischen statischer Stabilität und Höhenruder - Trimmausschlag

Wirkung Höhenruderausschlag

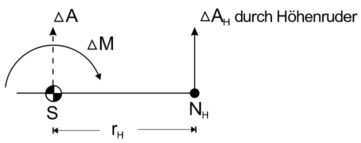


Bild 3.20

$$\Delta A = \Delta A_H \qquad \Delta M = -r_H \, \Delta A_H$$

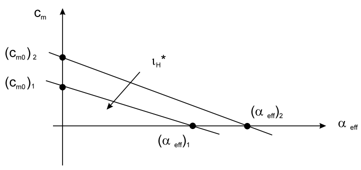
$$\bar{q}\, S\, C_{A\eta}\, \eta = \overline{q_H}\, S_H\, C_{AH\alpha H}\, \alpha_H \qquad \bar{q}\, S\, l_\mu\, C_{m\eta}\, \eta = -r_H\, \overline{q_H}\, S_H\, C_{AH\alpha H}\, \alpha_H$$

$$\leftarrow {}^* \frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$C_{A\eta} = \frac{\overline{q_H}\, S_H}{\bar{q}\, S}\, C_{AH\alpha H}\, \frac{\partial \alpha_H}{\partial \eta} \qquad C_{m\eta} = -\frac{\overline{q_H}\, S_H}{\bar{q}\, S}\, \frac{r_H}{l_\mu}\, C_{AH\alpha H}\, \frac{\partial \alpha_H}{\partial \eta} \tag{3.21}$$

Für $\eta = 0$ gilt $\quad \begin{aligned} C_A &= C_{A\alpha}\,\alpha_{eff,\eta=0} \\ C_m &= C_{m0,\eta=0} + C_{m\alpha}\,\alpha_{eff,\eta=0} \end{aligned}$

für $\eta \neq 0$ ist $\quad \begin{aligned} C_A &= C_{A\alpha}\,\alpha_{eff,\eta=0} + C_{A\eta}\,\eta \\ C_m &= C_{m0,\eta=0} + C_{m\alpha}\,\alpha_{eff,\eta=0} + C_{m\eta}\,\eta \end{aligned}$



Daraus

Bild 3.21

für $C_m = 0$ (Gleichgewicht), $\alpha_{eff,\eta=0}$ eliminiert:

$$\eta = \frac{-\,C_{m0,\eta=0} - C_A \dfrac{C_{m\alpha}}{C_{A\alpha}}}{C_{m,\eta} - C_{A\eta}\dfrac{C_{m\alpha}}{C_{A\alpha}}}$$

und mit $\dfrac{C_{m\alpha}}{C_{A\alpha}} = -\dfrac{(x_N - x_S)}{l_\mu}$

$$\eta = -\frac{C_{m0,\eta=0} - C_A \dfrac{(x_N - x_S)}{l_\mu}}{C_{m\eta} + C_{A\eta}\dfrac{(x_N - x_S)}{l_\mu}} \tag{3.22}$$

Umformung mit

$$C_{m\eta,N} = -\frac{\overline{q_H}\,S_H}{\overline{q}\,S}\,\frac{r_{HN}}{l_\mu}\,C_{AH\alpha H}\,\frac{\partial \alpha_H}{\partial \eta} \qquad {}^*\text{Ableitung wie (3.21) mit N statt S}$$

$$r_{HN} = r_H - (x_N - x_S)$$

ergibt $\quad C_{m\eta,N} = C_{m\eta} + C_{A\eta}\,\dfrac{x_N - x_S}{l_\mu}$ $\qquad$ vgl. (3.21)

$$\text{und} \quad \eta = \underbrace{-\frac{C_{m0,\eta=0}}{C_{m\eta,N}}}_{\eta_0} + \frac{C_A}{C_{m\eta,N}}\,\frac{x_N - x_S}{l_\mu} \tag{3.23}$$

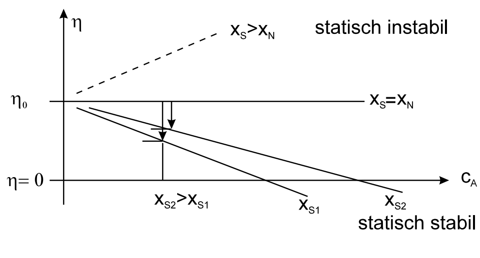


Bild 3.22

Aussage: – Größere statische Stabilität (Schwerpunktverschiebung nach vorn) erfordert größeren (negativen) Höhenruderausschlag ("Ziehen")

- **Fahrteinfluss** $\quad$ stationär A = G

$$\hookrightarrow \quad C_A = \frac{m\,g}{\frac{\rho}{2}\,V^2\,S} \tag{3.24}$$

$$\hookrightarrow \quad \eta = -\frac{C_{m0,\eta=0}}{C_{m\eta,N}} + \underbrace{\frac{\dfrac{2\,m\,g}{S}}{C_{m\eta,N}\,\rho\,V^2}\,\frac{x_N - x_S}{l_\mu}}_{\sim\, -\frac{1}{V^2}} \tag{3.25}$$

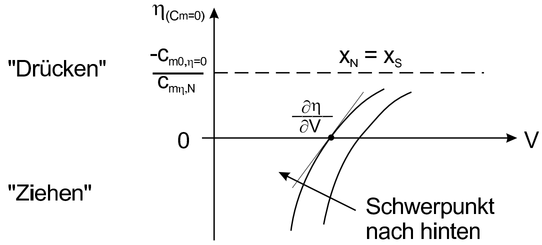


Bild 3.23

Geschwindigkeitszunahme $\longrightarrow$ Drücken

Fahrtänderung durch Schwerpunktverschiebung

- **Fahrtstabilität**

$$\frac{\partial \eta}{\partial V} = -\frac{\frac{4\,m\,g}{S}}{C_{m\eta,N}\;\rho\;V^3}\;\frac{x_N - x_S}{l_\mu} \overset{!}{>} 0 \qquad \text{Flugeigenschaftsmaß!} \tag{3.26}$$

Bestimmung der statischen Stabilität durch Flugversuche
1. $\frac{\partial \eta}{\partial V}$ für verschiedene x_S erfliegen
2. Schnittpunkt für $\frac{\partial \eta}{\partial V} = 0 \longrightarrow$ Neutralpunktlage

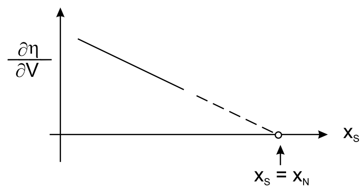


Bild 3.24

stationäre Fahrt nicht mehr mit dem Höhenruder steuerbar

Die Aussagen gelten bei Flossentrimmung entsprechend

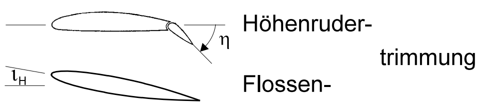


Bild 3.25

- **Kompressibilitätseinfluss**

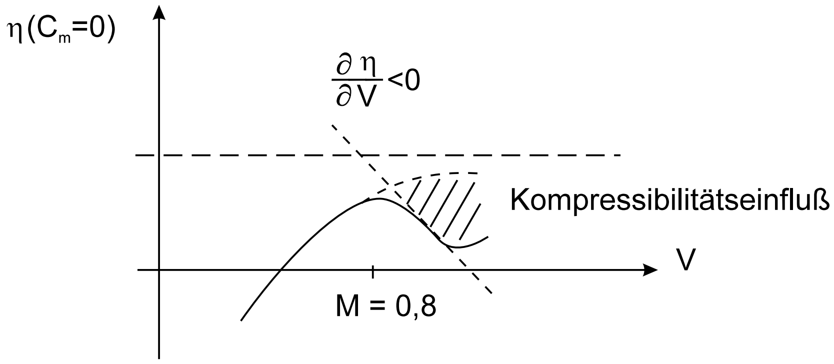


Bild 3.26

- Änderung der aerodynamischen Beiwerte mit wachsender Machzahl durch Einfluss der Kompressibilität (örtliches Erreichen der kritischen Machzahl)

- $\frac{\partial \eta}{\partial V} < 0$, d. h. Geschwindigkeitsinstabilität, nicht erlaubt im zugelassenen Geschwindigkeitsbereich

3.3.5 Stabilität bei freiem Ruder

Servosteuerung: Hydraulischer Stellmotor , praktisch rückwirkungsfrei
(Elastizität Gestänge vernachlässigt)
Handkraftsteuerung: Rückwirkung der aerodynamischen Lasten
Keine Handkraft: freies Ruder (Reibung Gestänge vernachlässigt)
$\longrightarrow$ Einfluss auf statische Stabilität

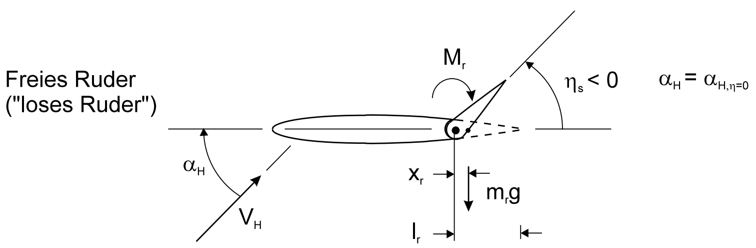


Bild 3.27

Moment um Drehachse (Scharniermoment)

$$M_r = \frac{\partial M_r}{\partial \alpha_H}\,\alpha_H \;+\; \frac{\partial M_r}{\partial \eta}\,\eta \;+\; m_r\,g\,x_r \qquad (m_r\,g\,x_r \quad \text{klein, z.B. durch Massenausgleich})$$

Auswehen heißt

$$M_r = 0 \;\longrightarrow\; \eta_S = -\frac{\frac{\partial M_r}{\partial \alpha_H}}{\frac{\partial M_r}{\partial \eta}}\,\alpha_H \;= -\,\frac{C_{r\alpha H}}{C_{r\eta}}\,\alpha_H \qquad \eta_S\text{: Schwimmwinkel} \qquad (3.27)$$

$$C_{r\eta} < 0\,, \quad C_{r\alpha H} < 0 \qquad \longrightarrow \qquad \frac{\partial \eta_S}{\partial \alpha_H} < 0$$

d. h. Verminderung des Leitwerksauftriebs durch loses Ruder (Index: l)

$$A_{H,l} = \frac{\partial A_H}{\partial \alpha_H}\,\alpha_H \;+\; \frac{\partial A_H}{\partial \eta}\;\eta_S$$

In Beiwerten und η_S eingesetzt

$$C_{AH,l} = C_{AH\alpha H}\ \alpha_H - C_{AH\eta}\ \frac{C_{r\alpha H}}{C_{r\eta}}\alpha_H$$

Auftriebsanstieg

$$C_{AH\alpha H,l} = C_{AH\alpha H} - C_{AH\eta}\ \frac{C_{r\alpha H}}{C_{r\eta}}$$

daraus

$$\frac{C_{AH\alpha H,l}}{C_{AH\alpha H}} = 1 - \frac{C_{AH\eta}}{C_{AH\alpha H}}\ \frac{C_{r\alpha H}}{C_{r\eta}} = \delta_l \qquad \text{Auswehfaktor } < 1 \tag{3.28}$$

d. h. Abminderung des Auftriebsanstiegs für loses Ruder:

$$\begin{aligned} C_{AH\alpha H,l} &= \delta_l\ C_{AH\alpha H} \\ \delta_l &= 1 - \frac{\partial \alpha_H}{\partial \eta}\ \frac{C_{r\alpha H}}{C_{r\eta}} \end{aligned}$$

- **Auswirkung loses Ruder auf Gesamtflugzeug**

- Auftriebsanstieg (3.3)

$$C_{A\alpha,l} \ = \ (C_{A\alpha})_{FR} \ + \ \delta_l \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right)\ \frac{\overline{q_H}}{\overline{q}}\ \frac{S_H}{S}\ C_{AH\alpha H} \ = \ (C_{A\alpha})_{FR} + \delta_l\ (C_{A\alpha})_H \tag{3.29}$$

- Momentenanstieg (3.13)

$$\begin{aligned} C_{m\alpha,l} \ &= \ C_{A\alpha,l} \left\{ \frac{x_S - x_{FR}}{l_\mu} \ - \ \delta_l \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right)\ \frac{C_{AH\alpha H}}{C_{A\alpha,l}}\ {V_H}^* \right\} \\ &= \ C_{A\alpha,l} \left\{ \frac{x_S - x_{FR}}{l_\mu} \ - \ \delta_l\ \frac{(C_{A\alpha})_H}{C_{A\alpha,l}}\ \frac{{r_H}^*}{l_\mu} \right\} \end{aligned} \tag{3.30}$$

- Neutralpunktlage ($C_{m\alpha,l} = 0$)

$$\frac{x_{N,l} - x_{FR}}{l_\mu} \ = \ \delta_l\ \frac{(C_{A\alpha})_H}{C_{A\alpha,l}}\ \frac{{r_H}^*}{l_\mu} \tag{3.31}$$

- Abstand Schwerpunkt – Neutralpunkt (3.17)

$$\frac{x_{N,l} - x_S}{l_\mu} \ = \ -\left(\frac{\partial C_m}{\partial C_A}\right)_l \ = \ \frac{C_{m\alpha,l}}{C_{A\alpha,l}} \tag{3.32}$$

- Nullmoment (3.12)

$$C_{m0,l} \ = \ (C_{m0})_{FR} \ - \ \delta_l\ C_{AH\alpha H}\ \frac{(C_{A\alpha})_{FR}}{C_{A\alpha,l}}\ {V_H}^*\ (i_H - \varepsilon_0) \ < \ C_{m0} \tag{3.33}$$

Differenz Neutralpunktlage festes/loses Ruder (3.16)

$$\begin{aligned} \frac{x_N - x_{N,l}}{l_\mu} \ &= \ \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right)\ \frac{C_{AH\alpha H}}{C_{A\alpha}}\ {V_H}^* \left\{1 \ - \ \delta_l\ \frac{C_{A\alpha}}{C_{A\alpha,l}}\right\} \\ &= \ \frac{(C_{A\alpha})_H}{C_{A\alpha}}\ \frac{{r_H}^*}{l_\mu} \left\{1 \ - \ \delta_l\ \frac{C_{A\alpha}}{C_{A\alpha,l}}\right\} \end{aligned}$$

$C_{A\alpha}$, $C_{A\alpha,l}$ und δ_l eingesetzt ergibt (3.3), (3.31), (3.30)

$$\frac{x_N - x_{N,l}}{l_\mu} = \frac{(C_{A\alpha})_H}{C_{A\alpha}} \frac{r_H{}^*}{l_\mu} \frac{\partial \alpha_H}{\partial \eta} \frac{C_{r\alpha H}}{C_{r\eta}} > 0 \tag{3.34}$$

$$\hookrightarrow \qquad x_N > x_{N,l}$$

d. h. Neutralpunkt (loses Ruder) liegt vor Neutralpunkt (festes Ruder)

- **Auswirkungen loses Ruder**

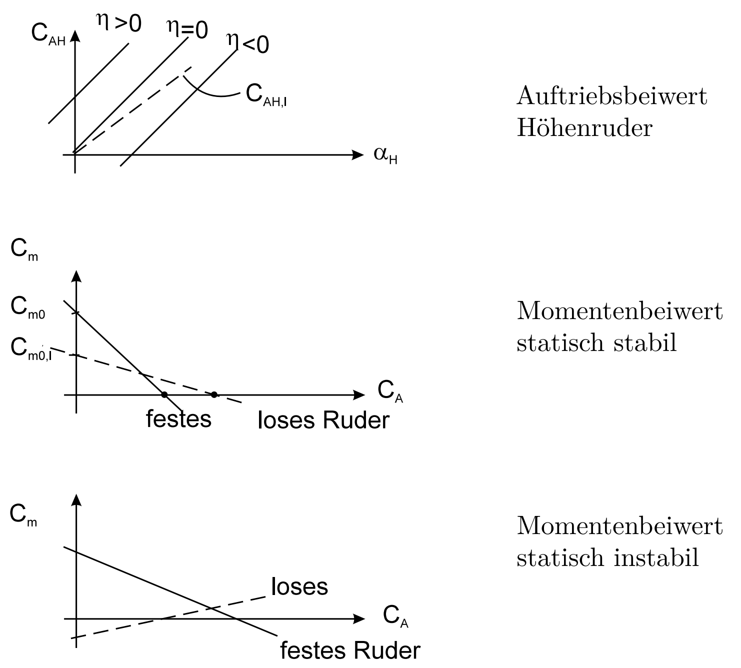


Bild 3.28

- **Zusammenfassung**
  - loses/freies Ruder weht aus
  - Auftriebsänderung am Höhenruder bei Störung geringer
  - Neutralpunkt wandert nach vorne
  - Destabilisierung

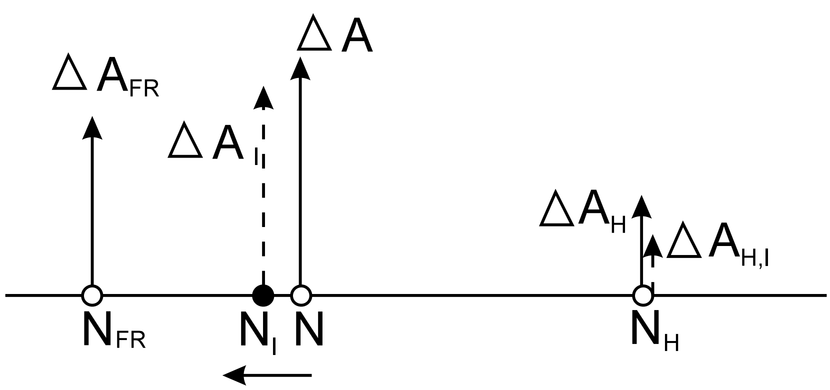


Bild 3.29

3.3.6 Manöverstabilität

Manövrieren in der Längsbewegung: Abfangen (Flug auf gekrümmter Bahn)

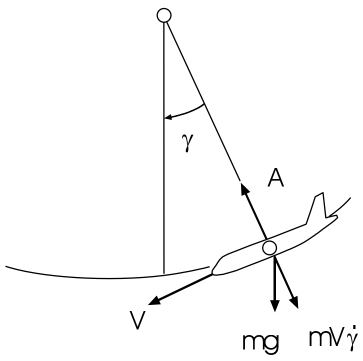


Bild 3.30

quasistationär:

- γ klein und damit
  $m\,g\,\cos\gamma \approx const.$
- X-Kräfte im Gleichgewicht
  d. h. $V = const.$

- **Gleichgewicht** senkrecht zur Bahn:

$$m\,g\,\cos\gamma + m\,V\,\dot{\gamma} - A = 0$$

- **Stationärer Horizontalflug**

$$m\,g - A_0 = 0$$

- **Lastvielfaches**

Definition $\quad n = \dfrac{A}{G} \quad ; G = m\,g \quad ; \quad (n = n_z)$

Stat. Horizontalflug $\quad n_0 = \dfrac{A_0}{G} = 1$

Abfangen $\quad \cos\gamma \approx 1\,,\ \dot{\gamma} = \dot{\theta} - \dot{\alpha} \approx \dot{\theta} \approx q)$

$$m\,g + m\,V\,q - A = 0$$

Differenz zu $\quad m\,g \qquad - A_0 = 0$

ergibt $\quad \triangle A = m\,V\,q$

Zusatzlastvielfaches
$$\triangle n = \frac{\triangle A}{m\,g} = \frac{V\,q}{g} \tag{3.35}$$

- **Auftriebsänderung**

$$\triangle A = \overline{q}\,S\,\triangle C_A$$

- **Momentenänderung**

$$\triangle M = \overline{q}\,S\,l_\mu\,\triangle C_m$$

- **Beiwerte**

$$C_A = C_{A\alpha}\triangle\alpha + C_{Aq}\frac{l_\mu}{V}q + C_{A\eta}\triangle\eta$$
$$C_m = C_{m\alpha}\triangle\alpha + C_{mq}\frac{l_\mu}{V}q + C_{m\eta}\triangle\eta \tag{3.36}$$

mit $\quad C_{Aq} = \dfrac{\partial\,C_A}{\partial\,(q\,\frac{l_\mu}{V})} \quad ; \quad C_{mq} = \dfrac{\partial\,C_m}{\partial\,(q\,\frac{l_\mu}{V})} \quad$ Nickdämpfungsderivativ

- **Zusatzanblasung** durch Drehung Hauptbeitrag zu C_{mq} durch Höhenleitwerk

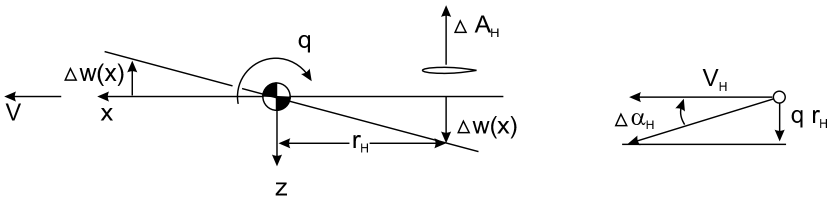


Bild 3.31

Anstellwinkeländerung $\triangle w = -x \cdot q$

$$\triangle\alpha = \frac{\triangle w}{V} = -\frac{x\,q}{V} \qquad \hookrightarrow \qquad \triangle\alpha_H = \frac{r_H}{V_H}\,q$$

- Auftriebsänderung am Höhenleitwerk

$$\triangle A_H = \overline{q}_H\, S_H\, C_{AH\alpha H}\, \frac{r_H}{V_H}\, q$$

$$\triangle (C_A)_H = C_{AH\alpha H}\, \overline{V}_H\, q\, \frac{l_\mu}{V_H}$$

$$\overline{V}_H = \frac{r_H}{l_\mu}\,\frac{S_H}{S}\,\frac{\overline{q}_H}{\overline{q}} \qquad \text{Abkürzung (Leitwerksfaktor)}$$

- Momentenänderung durch Auftriebsänderung

$$\triangle M_H = -r_H \triangle A_H$$

$$\triangle (C_m)_H = -\triangle (C_A)_H\, \frac{r_H}{l_\mu}$$

- Damit Beiwert-Derivative für q $\left(\partial/\partial\,(q\,\frac{l_\mu}{V})\right)$

$$C_{Aq} = C_{AH\alpha H}\, \overline{V}_H\, \frac{V}{V_H} = C_{AH\alpha H}\, \sqrt{\frac{\overline{q}_H}{\overline{q}}} \cdot \frac{S_H}{S} \cdot \frac{r_H}{l_\mu}$$

$$C_{mq} = -C_{Aq}\, \frac{r_H}{l_\mu} = -C_{AH\alpha H}\, \overline{V}_H\, \frac{V}{V_H}\, \frac{r_H}{l_\mu} = -C_{AH\alpha H}\, \sqrt{\frac{\overline{q}_H}{\overline{q}}} \cdot \frac{S_H}{S} \cdot (\frac{r_H}{l_\mu})^2$$

- Aus (3.36) ergibt sich für $\triangle C_m = 0$ der für das Abfangen erforderliche Höhenruderausschlag

$$\triangle\eta = -\frac{\triangle C_A C_{m\alpha} + (C_{mq} C_{A\alpha} - C_{Aq} C_{m\alpha})\, q\, \frac{l_\mu}{V}}{C_{m\eta} C_{A\alpha} - C_{A\eta} C_{m\alpha}} \tag{3.37}$$

Umformung

$$q\,\frac{l_\mu}{V} = \triangle n\,\frac{g\,l_\mu}{V^2} = \triangle n\,\frac{C_A^*}{\mu} \qquad (C_A^* = C_{A,n=1}) \tag{3.38}$$

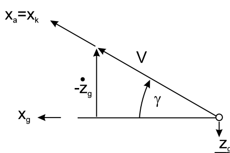


Bild 3.32

$$q = \frac{g}{V}\triangle n$$

$$\gamma = -\frac{\dot z_g}{V}$$

$$\dot\gamma = -\frac{\ddot z_g}{V}$$

$$\triangle n = -\frac{\ddot z_g}{g} = \frac{V}{g}\dot\gamma \approx \frac{V}{g} q$$

$$\frac{g\,l_\mu}{V^2} = \frac{C_A^*}{\mu}$$

$$C_A^* = \frac{m\,g}{\frac{\rho}{2}V^2 S} = \mu\,\frac{g}{V^2}\,l_\mu$$

mit $\mu = \dfrac{m}{\frac{\rho}{2}\,S\,l_\mu}$

Normierte Masse

Es war : Moment um Neutralpunkt durch Ruderausschlag

$$C_{m\eta,N} = C_{m\eta} + C_{A\eta}\underbrace{\frac{x_N - x_S}{l_\mu}}_{-\frac{C_{m\alpha}}{C_{A\alpha}}} \qquad \text{(vgl.3.23)}$$

Ergebnis der Umformung

$$\frac{\triangle\eta}{\triangle n} = -\frac{C_A^*}{C_{m\eta,N}}\left\{\frac{C_{m\alpha}}{C_{A\alpha}}\left(1 - \frac{C_{A\,q}}{\mu}\right) + \frac{C_{m\,q}}{\mu}\right\}$$

Mit
$$C_{mq,N} = C_{mq} + C_{Aq}\,\frac{x_N - x_S}{l_\mu}$$
$$= C_{mq} - C_{Aq}\,\frac{C_{m\alpha}}{C_{A\alpha}}$$

Nickgeschwindigkeits-Momentenbeiwert
bezogen auf Neutralpunkt

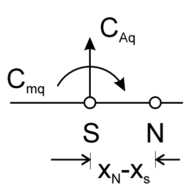


Bild 3.33

Wird
$$\frac{\triangle\eta}{\triangle n} = \frac{C_A^*}{C_{m\eta,N}}\underbrace{\left\{\frac{x_N - x_S}{l_\mu} - \frac{C_{mq,N}}{\mu}\right\}}_{\frac{x_M - x_S}{l_\mu}}$$

und $$\frac{\triangle\eta}{\triangle n} = \frac{C_A^*}{C_{m\eta,N}} \frac{x_M - x_s}{l_\mu} \tag{3.39}$$

$x_M = x_{S,\eta=0}$ Lage des Manöverpunktes M (Schwerpunktlage, für die $\triangle\eta$ verschwindet)

- **Aussagen:**

- Manöverpunkt liegt wegen $C_{mq} < 0$ hinter Neutralpunkt
- M wandert mit zunehmender Höhe nach vorn ($\mu \sim \frac{1}{\rho}$)
- Ruderausschlag pro Lastvielfachem ist proportional zum Abstand Schwerpunkt/Manöverpunkt

$\hookrightarrow$ Stabilitätserhöhung durch Abfangmanöver

Analog: Loses Ruder (Definition!)

$$\frac{x_{M,l}}{l_\mu} = \frac{x_{N,l}}{l_\mu} - \frac{C_{mq,N,l}}{\mu}$$

$\hookrightarrow$ geringere Stabilitätserhöhung

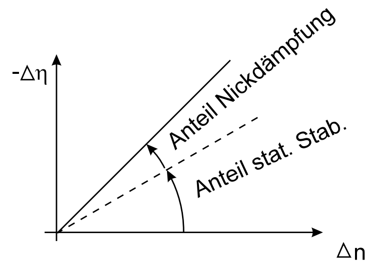


Bild 3.34

- Anschaulich:

Gleichgewicht

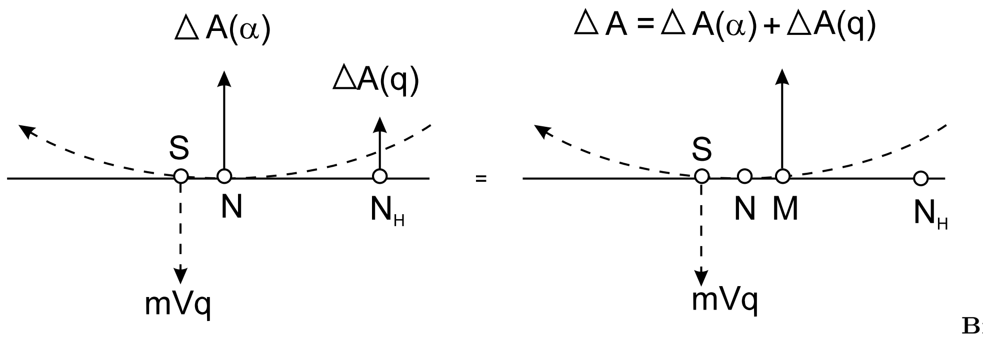


Bild 3.35

- Zusatzauftrieb durch Anstellwinkel im Flugzeugneutralpunkt

- Zusatzauftrieb durch Nickgeschwindigkeit (im wesentlichen) im Neutralpunkt des Höhenleitwerks

-Gesamter Zusatzauftrieb im Manöverpunkt

- Größerer Hebelarm der rückstellenden Kraft d. h. Stabilitätserhöhung

3.3.7 Zusammenfassung

- Statische Stabilität in der Längsbewegung erfordert

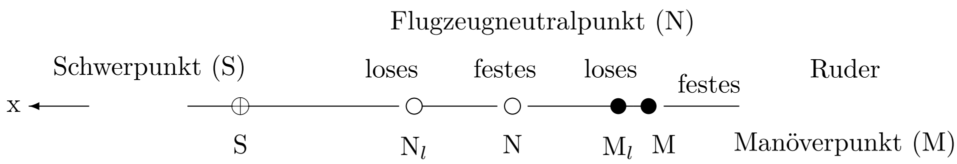
$$\begin{aligned} C_{m0} &> 0 \\ C_{m\alpha} &< 0 \\ bzw. \qquad x_S &< x_N \end{aligned}$$

- Loses Ruder verringert die statische Längsstabilität

$$x_{N,l} < x_N$$

- Der erforderliche Trimm-Höhenruderausschlag wächst mit der statischen Stabilität
- Beim Flug auf gekrümmter Bahn wächst die Stabilität (Statische Stabilität + Nickdämpfung)

$$\begin{aligned} x_M &> x_N \\ x_{M,l} &< x_M \end{aligned}$$



3.4 Steuerung

- Höhenrudersteuerung: Erzeugung von Nickmomenten zum Ändern des stationären Flugzustandes (Trimmen) und zum Manövrieren.

- Gute Steuerbarkeit: Anpasssung der Eigenschaften des Steuerungssystems (Weg, Kraft) an Pilotenwünsche.

- **Handkraftsteuerung**

  ”Aerodynamische” Steuerung, Steuerkräfte am Bedienelement und Momente am Ruder stehen im Zusammenhang.

  Steuerkraft-Charakteristik wichtig für Flugzeugeigenschafts-Beurteilung :

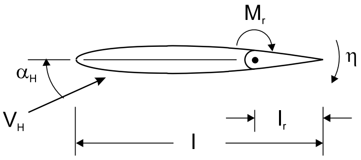
  - Änderung der Steuerkraft mit Änderung der Geschwindigkeit im stationären Geradeausflug (Stabilitätshandkraft).

  - Änderung der Steuerkraft mit Lastvielfachem beim Abfangen (Abfanghandkraft).

- **Servosteuerung**

  Steuerkräfte unabhängig von aerodynamischen Lasten durch Verwendung von Stellmotoren. Steuerkrafterzeugung künstlich (z. B. Feder).

3.4.1 Höhenruder-Scharniermoment



$$\alpha_H \;=\; \alpha_{H,\eta=0}$$

Bild 3.36

$$M_r \;=\; \overline{q}_H\, S_r\, l_r\, C_r \quad ; \qquad C_r \;=\; C_{r\alpha H}\,\alpha_H \;+\; C_{r\eta}\,\eta \tag{3.40}$$

$C_r \;<\; 0$, d. h. rückdrehendes Moment

$-C_{r\alpha H}$

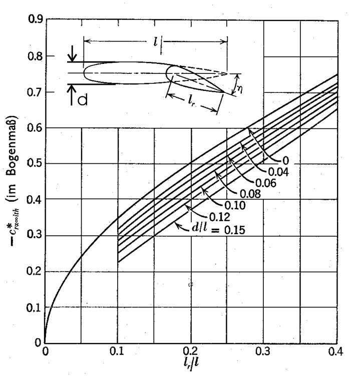


Bild 3.37 Scharniermomentenbeiwert /1/

3.4.2 Steuerkräfte

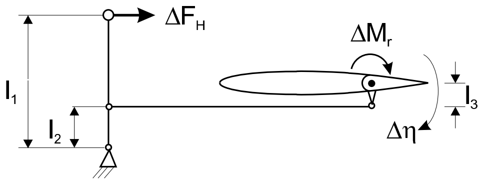


Bild 3.38

- **Stabilitätshandkraft** (stationärer Geradeausflug)
  - Änderung der Handkraft mit der Geschwindigkeit
  - im Trimmpunkt ist die Steuerkraft $F_H = 0$

Steuerkraft
$$\Delta F_H \;=\; K_{\ddot{u}} \,\cdot\, \Delta M_r \qquad\qquad K_{\ddot{u}} \;=\; \frac{l_2}{l_1\, l_3} \tag{3.41}$$
$$\;=\; K_{\ddot{u}}\, \overline{q}_H\, S_r\, l_r\, \Delta C_r$$

Es war
$$\Delta C_r \;=\; C_{r\alpha H}\, \Delta\alpha_H \;+\; C_{r\eta} \Delta\eta \quad (3.40)$$
$$\alpha_H \;=\; (1 \;-\; \frac{\partial\, \varepsilon}{\partial\, \alpha})\, \alpha \;+\; i_H \;-\; \varepsilon_0 \quad (3.2)$$
$$\Delta\alpha \;=\; \frac{C_A}{C_{A\alpha}}; \qquad \Delta\alpha_H = \left(1 - \frac{\partial\epsilon}{\partial\alpha}\right) \Delta\alpha$$
$$\Delta\eta_{Cm=0} \;=\; \frac{-C_{m0,\eta=0} \;-\; C_A\, \frac{C_{m\alpha}}{C_{A\alpha}}}{C_{m\eta} \;-\; C_{A\eta}\, \frac{C_{m\alpha}}{C_{A\alpha}}} \quad (3.22)$$

Damit wird

$$\Delta C_r \;=\; \frac{C_{r\eta}}{C_{m\eta}} \left\{ \frac{C_{m\eta}}{C_{r\eta}} \frac{C_{r\alpha H}}{C_{A\alpha}} \,(1 \;-\; \frac{\partial\,\varepsilon}{\partial\,\alpha})\, C_A \;\; - C_{m\eta}\, \frac{C_{m0,\eta=0} \;+\; C_A\, \frac{C_{m\alpha}}{C_{A\alpha}}}{C_{m\eta} \quad - \quad C_{A\eta}\, \frac{C_{m\alpha}}{C_{A\alpha}}} \right\}$$

$$= \; - \frac{C_{r\eta}}{C_{m\eta}} \left\{ C_{m0,\eta=0} \;+\; \left[\frac{C_{m\alpha}}{C_{A\alpha}} \;-\; \frac{C_{r\alpha H}}{C_{r\eta}} \frac{C_{m\eta}}{C_{A\alpha}} \,(1 \;-\; \frac{\partial\,\varepsilon}{\partial\,\alpha}) \right] C_A \right\}$$

Einsetzen von

$$C_{m\eta} \;=\; -\,C_{AH\alpha\,H}\,\overline{V}_H\,\frac{\partial\,\alpha_H}{\partial\,\eta} \qquad ; \qquad \overline{V}_H \;=\; V_H^* \;+\; \frac{S_H}{S}\,\frac{\overline{q}_H}{\overline{q}}\,\frac{x_{FR} \;-\; x_S}{l_\mu} \qquad (3.21)$$

$$C_{m\alpha} \;=\; -\,C_{A\alpha} \left\{ \frac{x_{FR} \;-\; x_S}{l_\mu} \;+\; \frac{C_{AH\alpha\,H}}{C_{A\alpha}}\, V_H^*\,(1 \;-\; \frac{\partial\,\varepsilon}{\partial\,\alpha}) \right\} \qquad (3.13)$$

ergibt

$$\Delta C_r \;=\; - \frac{C_{r\eta}}{C_{m\eta}} \left\{ C_{mo,l} \;-\; \frac{x_{N,l} \;-\; x_S}{l_\mu} \;\cdot\; \underbrace{\frac{C_{A\alpha,l}}{C_{A\alpha}}}_{\approx\,1} \cdot\, C_A \right\} \qquad (3.42)$$

gute Näherung
bei Heckleitwerk

Damit wird die Handkraft (3.41)

$$\Delta F_H \;=\; -K_F\,\overline{q} \left\{ C_{mo,l} \;-\; C_A\,\frac{x_{N,l} \;-\; x_S}{l_\mu} \right\}$$

$$\text{mit} \qquad K_F \;=\; K_{\ddot{u}}\,S_r\,l_r\,\frac{\overline{q}_H}{\overline{q}} \left\{ \frac{C_{r\eta}}{C_{m\eta,N}} \;-\; \frac{C_{r\alpha H}}{C_{A\alpha}}\,\frac{C_{A\eta}}{C_{m\eta,N}}\,(1 \;-\; \frac{\partial\,\varepsilon}{\partial\,\alpha}) \right\}$$

$\hookrightarrow$ - K_F enthält flugzeugspezifische Parameter, d.h. sie können als konstant betrachtet werden

- Handkraftcharakteristik wird durch Momentengleichung für den Fall "loses Ruder" bestimmt

Wegen $\quad A \;=\; m\,g \quad \hookrightarrow \quad C_A \;=\; \frac{m\,g}{\overline{q}\,S}$

kann man auch schreiben

$$\Delta F_H \;=\; -\,K_F \left\{ C_{mo,l}\,\frac{\rho}{2}\,V^2 \;-\; \frac{m\,g}{S}\,\frac{x_{N,l} \;-\; x_S}{l_\mu} \right\} \qquad (3.43)$$

$$= \;\; F_{H0} \;+\; F_{H1}\,(V)$$

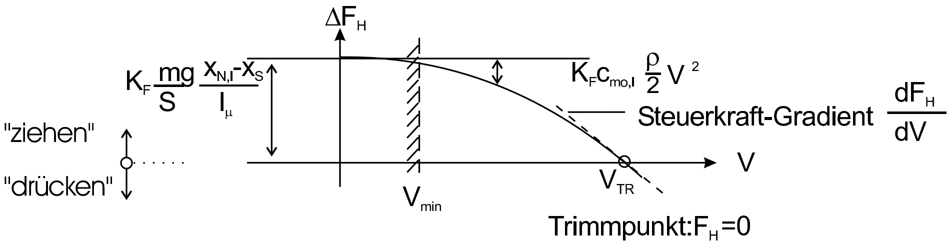


Bild 3.39

Steuerkraft-Gradient im Trimmpunkt

$$\frac{d\,F_H}{d\,V} \;=\; -\,K_F\,C_{mo,l}\,\rho\,V_{TR}$$

und aus (3.43) für $\quad \Delta F_H \; = \; 0$

$$V_{TR}^2 \;=\; \frac{2\, m\, g}{\rho\, S\, C_{mo,l}} \; \frac{x_{N,l} \;-\; x_S}{l_\mu}$$

ergibt

$$\frac{d\,F_H}{d\,V} \;=\; -\,2\,K_F\,\frac{\frac{m\,g}{S}}{V_{TR}}\;\frac{x_{N,l}\;-\;x_S}{l_\mu} \tag{3.44}$$

Stabilitätshandkraft

- **Erkenntnisse :**

  - Steuerkraftgradient proportional dem Maß für statische Stabilität bei losem Ruder ("stabiler"/ "instabiler" Gradient)
  - Bestimmung von N_l durch Messung von $\frac{d\,F_H}{d\,V}$ in Flugversuchen möglich
  - $\frac{d\,F_H}{d\,V}$ ist der Flächenbelastung $\frac{m\,g}{S}$ proportional
  - $\frac{d\,F_H}{d\,V}$ ist umgekehrt proportional zur Trimmgeschwindigkeit
  - $\frac{d\,F_H}{d\,V}$ hängt nicht von der Flughöhe (ρ) ab
  - $\frac{d\,F_H}{d\,V}$ wächst wegen $K_F \;\sim\; S_r\,l_r$ mit der dritten Potenz der Längenabmessungen.[0.2cm] Bei größeren Flugzeugen Maßnahmen zur Reduktion des Rudermomentes[0.2cm] erforderlich (s. Kap. 3.4.3) gegebenenfalls Servosteuerung.

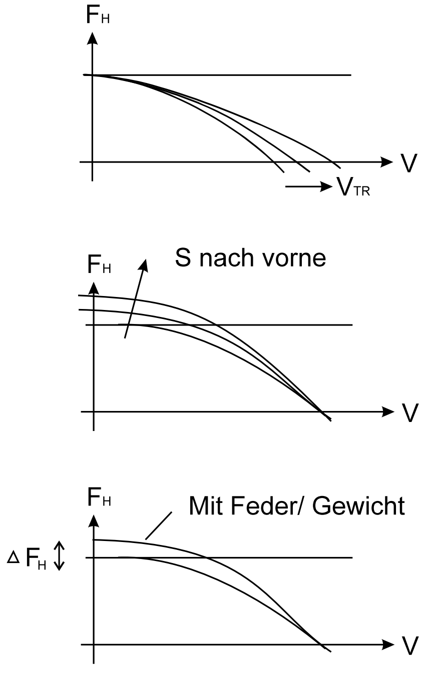


Bild 3.40

– Einfluss der Trimmgeschwindigkeit :

$\frac{d\,F_H}{d\,V}$ nimmt bei höherer Trimmgeschwindigkeit ab

– Einfluss der Schwerpunktlage:

Höhere Stabilität
→ steilerer Gradient

– Beeinflussung der Kraftcharakteristik:

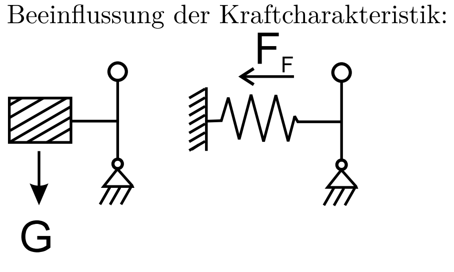


Bild 3.41

- **Abfanghandkraft**

  - Gradient von Steuerkraft zu Lastvielfachen gibt an, mit welcher Handkraft der Pilot beim Abfangen ein definiertes Lastvielfaches erreicht

- Maß für Manövrierfähigkeit

- abhängig von flugzeugspezifischen Parametern (K_f), der Flächenbelastung ($\frac{G}{S}$) und der Schwerpunktlage

Zusatz-Handkraft zum Abfangen

$$\begin{aligned} \triangle F_H &= K_{\ddot{u}}\, \overline{q}_H\, S_r\, l_r \triangle C_r && (3.45)\\ \text{mit } \triangle C_r &= C_{r\alpha H} \triangle \alpha_H + C_{r\eta} \triangle \eta && \text{Scharniermomenten-Beiwert}\\ \triangle \alpha_H &= (1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}) \triangle \alpha + \frac{r_H}{V_H}\, q && \text{Anstellwinkeländerung HLW} \end{aligned}$$

Umformung

$$\begin{aligned} \text{Mit} \qquad \triangle \alpha &= \frac{1}{C_{A\alpha}} \left(\triangle C_A - C_{Aq} \frac{l_\mu}{V}\, q - C_{A\eta} \triangle \eta \right)\\ \text{Lastvielfachenänderung :} \qquad \triangle n &= \frac{\triangle C_A}{C_A} \qquad C_A = C_{A,n=1}\\ \frac{r_H}{V_H}\, q &= \triangle n \frac{r_H}{l_\mu} \frac{C_A}{\mu} \quad ; \quad \mu = \frac{m}{\frac{\rho}{2} S\, l_\mu} \quad \text{Normierte Masse} \end{aligned}$$

wird

$$\begin{aligned} \triangle C_r = \frac{C_{r\eta}}{C_{m\eta,N}} \triangle n\, C_A \Bigg\{ & \overbrace{\left[1 - (1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}) \frac{C_{r\alpha}}{C_{r\eta}} \frac{C_{A\eta}}{C_{A\alpha}} \right]}^{C_{A\alpha,l}/C_{A\alpha}} \left[\frac{x_{N,l} - x_S}{l_\mu} - \frac{C_{mq,N}}{\mu} \right]\\ & + \frac{C_{r\alpha}}{C_{r\eta}} \frac{C_{m\eta,N}}{C_{A\alpha}} \left[(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha})(1 - \frac{C_{Aq}}{\mu}) + \frac{r_H}{l_\mu} \frac{C_{A\alpha}}{\mu} \right] \Bigg\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{und} \quad \triangle C_r = \frac{C_{r\eta}}{C_{m\eta,N}} \frac{C_{A\alpha,l}}{C_{A\alpha}} \triangle n\, C_A \Bigg\{ & \underbrace{\frac{x_N - x_S}{l_\mu} + (1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}) \frac{C_{m\eta,N}}{C_{A\alpha,l}} \frac{C_{r\alpha}}{C_{r\eta}}}_{\frac{x_{N,l} - x_S}{l_\mu}}\\ & - \frac{C_{mq,N}}{\mu} + \frac{1}{\mu} \frac{C_{r\alpha}}{C_{r\eta}} \frac{C_{m\eta,N}}{C_{A\alpha,l}} \underbrace{\left[\frac{r_H}{l_\mu} C_{A\alpha} - (1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}) C_{Aq} \right]}_{\frac{r_H}{l_\mu} (C_{A\alpha})_{FR}} \Bigg\} \otimes \end{aligned}$$

Mit

$$C_{mq,N} = C_{mq,N,FR} - C_{AH\alpha H} V_{HN} \frac{r_H}{l_\mu} \frac{V}{V_H}$$

$$C_{m\eta,N} = \frac{\partial \alpha_H}{\partial \alpha} C_{AH\alpha H} V_{HN} \quad ; \quad V_{HN} = \frac{r_{HN}}{l_\mu} \frac{\overline{q}_H}{q} \frac{S_H}{S}$$

$$(C_{A\alpha})_{FR} \approx C_{A\alpha,l}$$

$$\left.\begin{aligned} - C_{mq,N} + C_{m\eta,N} \frac{C_{r\alpha}}{C_{r\eta}} \frac{r_H}{l_\mu} &= -C_{mq,N,FR} + \delta_l C_{AH\alpha H} V_{HN} \frac{r_H}{l_\mu} \\ &\approx -C_{mq,N,l} \qquad (V_{HN} \approx V_{HN,l}) \end{aligned}\right\} \otimes$$

$$x_{M,l} = x_{N,l} - C_{mq,N,l} \frac{l_\mu}{\mu}$$

wird $$\triangle C_r = \frac{C_{r\eta}}{C_{m\eta,N}} \frac{C_{A\alpha,l}}{C_{A\alpha}} \triangle n \, C_A \frac{x_{M,l} - x_S}{l_\mu} \tag{3.46}$$

und $$\triangle F_H = K_F \frac{m\,g}{S} \frac{x_{M,l} - x_S}{l_\mu} \triangle n$$

$$\frac{d F_H}{d n} = K_F \frac{m\,g}{S} \frac{x_{M,l} - x_S}{l_\mu} \qquad \text{Abfanghandkraft} \tag{3.47}$$

- **Erkenntnisse :**

  - Änderung der Steuerkraft mit dem Lastvielfachen $\frac{d F_H}{d n}$ hängt von der Manöverstabilität bei losem Ruder ab $(x_{M,l} - x_S)$
  - Größere Flächenbelastung $\rightarrow$ größere Abfanghandkraft
  - Flugeigenschaftsforderungen $\frac{d F_H}{d n})_{min,max}$

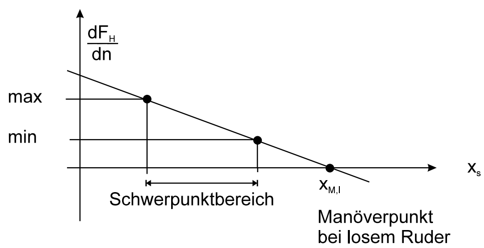


Bild 3.42

3.4.3 Steuerhilfen

Anstieg der Steuerkräfte mit der 3.Potenz der Längenmaße

→ Maßnahme zur Verringerung der Ruderscharniermomente ($C_{r\eta}$)

– **Ruderform**

Hornausgleich

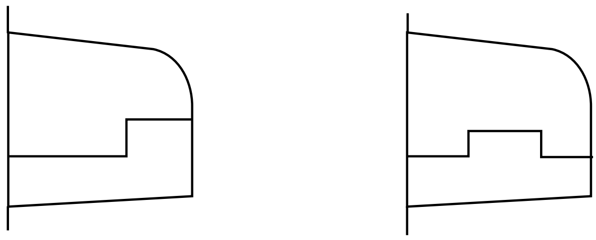


Bild 3.43

– **Hilfsruder**

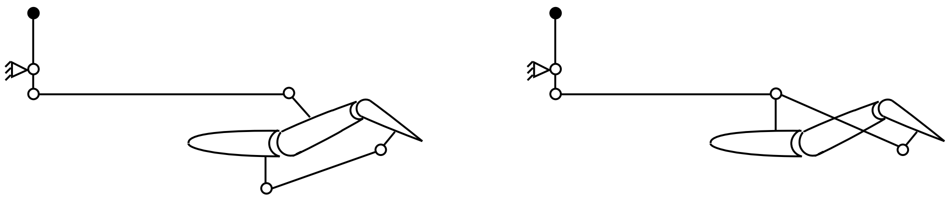


Bild 3.44

Gekoppeltes Hilfsruder   Flettnerruder

- **Servosteuerung**

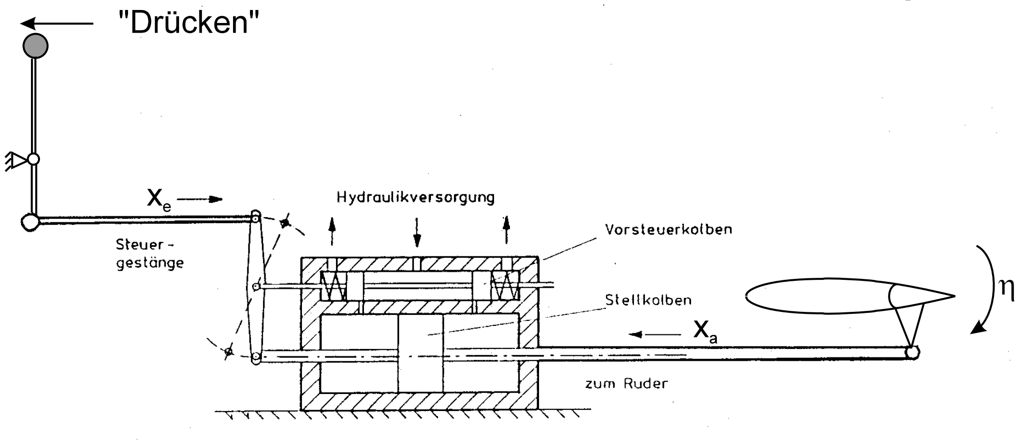


Bild 3.45 Hydraulischer Stellantrieb

3.4.4 Trimmung

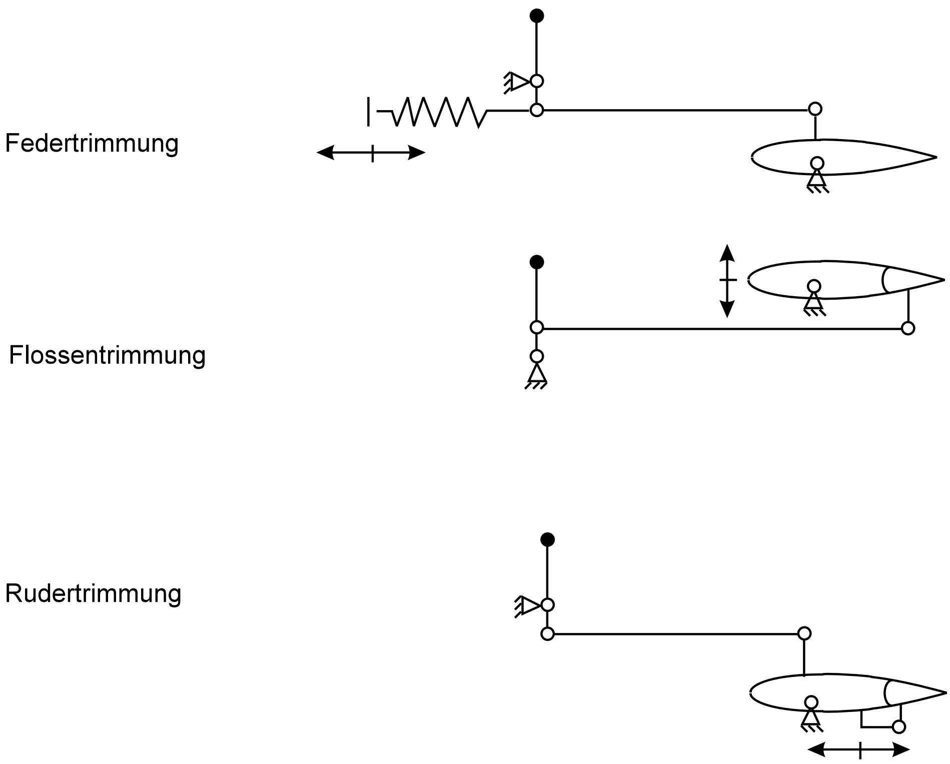


Bild 3.46

3.5 Derivative der Längsbewegung

Übersicht : Beiwertderivative (dimensionslos)

	Anstellwinkel α	Nickgeschwindigkeit q	Höhenruder η
Widerstand	$C_{W\alpha}$	C_{Wq}	$C_{W\eta}$
Auftrieb	$C_{A\alpha}$ Kap. 3.1	C_{Aq} Kap. 3.3.6	$C_{A\eta}$ Kap. 3.3.4
Nickmoment	$C_{m\alpha}$ Kap. 3.3	C_{mq} Kap. 3.3.6	$C_{m\eta}$ Kap. 3.3.4

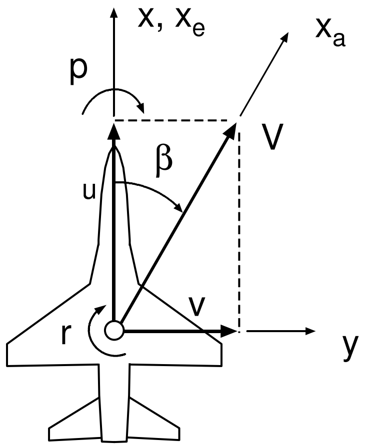
$$C_A \;=\; C_{A0} \;+\; C_{A\alpha}\,\alpha \;+\; C_{Aq}\,q\,\frac{l_\mu}{V} \;+\; \ldots\;;\; A \;=\; \frac{\rho}{2}\,V^2\,S\,C_A \tag{3.48}$$

Weitere Derivative (z. B. C_{WM} , $C_{m\dot{\alpha}}$) siehe Kap. 5

4 Stationäre Seitenbewegung

4.1 Definitionen

- **Bewegungsgrößen** (ohne Wind)



Schiebewinkel $\beta \approx \frac{v}{V}$
Rollgeschwindigkeit p
Giergeschwindigkeit r

- **Steuergrößen**

Querruder ξ
Seitenruder ζ

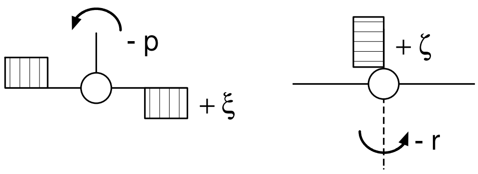


Bild 4.1

- **Kräfte und Momente** (Experimentelles Koordinatensystem)

Seitenkraft	$Y = \overline{q}\, S\, C_Y$	$\overline{q} = \frac{\rho}{2} V^2$
Rollmoment	$L = \overline{q}\, S\, s\, C_l$	$s = \frac{b}{2}$
Giermoment	$N = \overline{q}\, S\, s\, C_n$	Bezugslänge : Halbspannweite

- **Derivative**
  - Beiwertderivative (dimensionslos) : z. B. $C_{Y\beta} = \frac{\partial C_Y}{\partial \beta}$; $C_{Yp} = \frac{\partial C_Y}{\partial(\frac{s}{V}\, p)}$

$$\begin{aligned} C_Y &= C_{Y\beta}\,\beta + C_{Yp}\,\frac{s}{V}\,p + C_{Yr}\,\frac{s}{V}\,r + C_{Y\xi}\,\xi + C_{Y\zeta}\,\zeta + \ldots \\ C_l &= C_{l\beta}\,\beta + C_{lp}\,\frac{s}{V}\,p + C_{lr}\,\frac{s}{V}\,r + C_{l\xi}\,\xi + C_{l\zeta}\,\zeta + \ldots \\ C_n &= C_{n\beta}\,\beta + C_{np}\,\frac{s}{V}\,p + C_{nr}\,\frac{s}{V}\,r + C_{n\xi}\,\xi + C_{n\zeta}\,\zeta + \ldots \end{aligned} \tag{4.1}$$

  - Direkte Derivative (dimensionsbehaftet)

$$Y = Y_\beta\,\beta + Y_p\,p + \ldots \qquad z.B. \quad Y_\beta = \frac{\partial Y}{\partial \beta} = \overline{q}\,S\,C_{Y\beta} \tag{4.2}$$

$$L = L_\beta\,\beta + L_p\,p + \ldots \qquad Y_p = \frac{\partial Y}{\partial p} = \overline{q}\,S\,C_{Yp}\cdot\frac{s}{V}$$

$$N = N_\beta\,\beta + N_p\,p + \ldots$$

- Bezeichnung : $L_\beta \quad \rightarrow \quad$ Schiebe-Rollmoment

$\downarrow\uparrow \qquad \uparrow \qquad \downarrow$ $\boxed{\uparrow \text{ - Ursache} \qquad \downarrow \text{ - Wirkung}}$

4.2 Gierbewegung

4.2.1 Statische Richtungsstabilität

Definition: Bei Änderung der Anströmrichtung (d. h. Änderung des Schiebewinkels) wird ein Giermoment erzeugt, das das Flugzeug in die Anströmrichtung dreht.

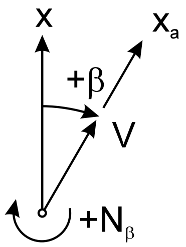


Bild 4.2

Vergleich :

$C_{m\alpha} < 0$

"Anstellwinkelstabilität"

$$N = \overline{q}\, S\, s\, C_{n\beta}\, \beta$$

$$N_\beta = \frac{\partial N}{\partial \beta} > 0$$

Forderung für statische Richtungsstabilität

oder $\quad C_{n\beta} > 0$

Anteile: $\quad N_\beta = (N_\beta)_{SLW\rightarrow S} + (N_\beta)_{Rumpf\rightarrow R} + (N_\beta)_{Flügel\rightarrow F}$

Seitenleitwerk

Das Seitenleitwerk erzeugt bei einer schrägen Anströmung unter dem Winkel β ein Giermoment N_S, welches das Flugzeug in die Anströmrichtung dreht

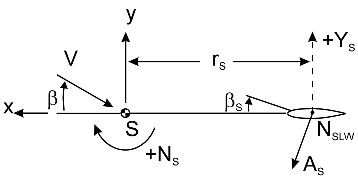


Bild 4.3

S_s Seitenleitwerks-Fläche

Giermoment $\quad N_s = A_s\, r_s$

Seitenkraft $\quad Y_s \approx -A_s \quad (\beta_s\ klein)$

$\rightarrow \quad N_s = -\overline{q}_s\, S_s\, r_s\, C_{Ys} \quad ; \quad C_{Ys} = \frac{\partial C_{Ys}}{\partial \beta_s}\, \beta_s$

Örtliche Anströmung

$$\beta_s = \beta - \varepsilon_s = (1 - \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \beta})\, \beta \tag{4.3}$$

Schiebe-Giermomentenbeiwert

$$(C_{n\beta})_s = -(1 - \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \beta})\, \frac{\partial C_{Ys}}{\partial \beta_s}\, \frac{\overline{q}_s}{\overline{q}}\, \frac{S_s}{S}\, \frac{r_s}{s} = -(C_{Y\beta})_s\, \frac{r_s}{s} \tag{4.4}$$

wegen $\quad (N_\beta)_s = \dfrac{\partial N_s}{\partial \beta} \quad ; \quad \overline{q}\, S\, s\, (C_{n\beta})_s = -\overline{q}_s\, S_s\, r_s\, \dfrac{\partial C_{Ys}}{\partial \beta_s}\, (1 - \dfrac{\partial \varepsilon_s}{\partial \beta})$

$(C_{n\beta})_s \; > \; 0$ Windfahnenstabilität, wächst mit wachsendem S_s und r_s

- **Einflussfaktoren** für die Wirksamkeit des Seitenleitwerks

  - Hebelarm

  - Größe
  - Streckung

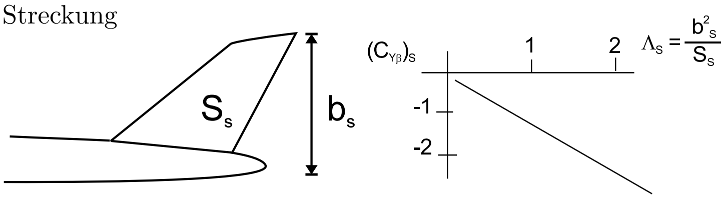


Bild 4.4

  - Höhenleitwerkslage

$\frac{\Lambda_{s\,eff}}{\Lambda_s}$:

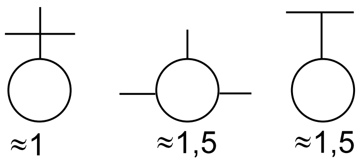


Bild 4.5

  - Rumpfform

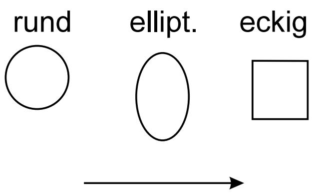


Bild 4.6
Zunahme der Seitenleitwerks-Effektivität

  - Flügellage

$$\frac{\beta_s}{\beta} \; = \; 1 \; - \; \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \beta}$$

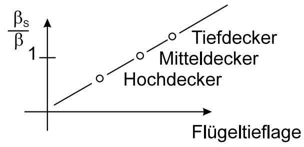


Bild 4.7

gleiches C_A
gleiche SLW-Lage

Hochdecker Tiefdecker

Seitliche Anströmung durch Schieben

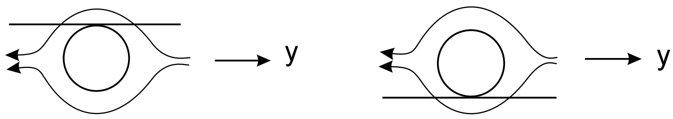


Bild 4.8

Zusätzlicher Anstellwinkel

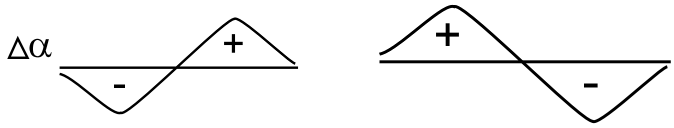


Bild 4.9

Ausgleichsströmung $\triangle v$ durch Druckdifferenz

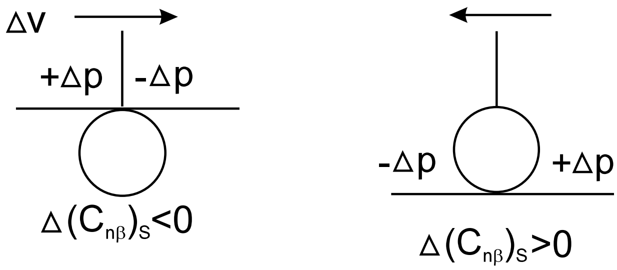


Bild 4.10

Höhere Windfahnenstabilität bei Tiefdecker

Rumpf

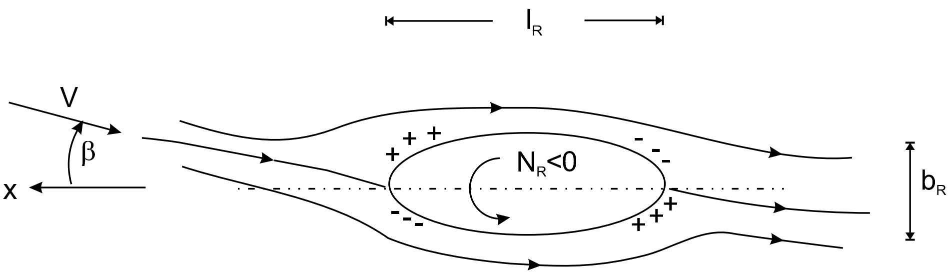


Bild 4.11

- Schiebe-Giermoment

$$N_R = -2\,k^*\,V_R^*\,\overline{q}\,\beta$$

$$V_R^* = \frac{\pi}{4}\int_0^{l_R} b_R^2(x)\,dx \qquad \text{Volumen Rotationskörper}$$

k^* Einflussfaktor für Rumpfform

- Schiebe-Giermomentenbeiwert

$$(C_{n\beta})_R = -2\,k^*\,\frac{V_R^*}{Ss} < 0 \qquad \hookrightarrow \text{ destabilisierend} \tag{4.5}$$

Flügel

Einfluss auf Richtungsstabilität im Vergleich zum Seitenleitwerk gering, d. h. $(C_{n\beta})_F \ll (C_{n\beta})_S$

- Streckung
  $(C_{n\beta})_F$ sinkt mit wachsender Streckung: Differenz des induzierten Widerstandes links/rechts durch Schräganblasung nimmt ab.

- V-Form: stabilisierend ($\nu > 0$)
  Höherer Anstellwinkel auf angeblasener Seite, dadurch höherer Auftrieb und Widerstand
  Rückführendes Giermoment durch Widerstandsdifferenz

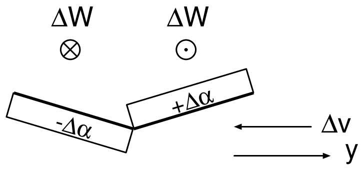


Bild 4.12

- Pfeilform : stabilisierend ($\varphi > 0$)
  Höhere Anströmgeschwindigkeit auf angeblasener Seite, dadurch höherer Auftrieb und Widerstand

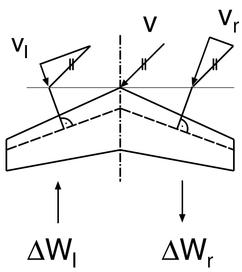
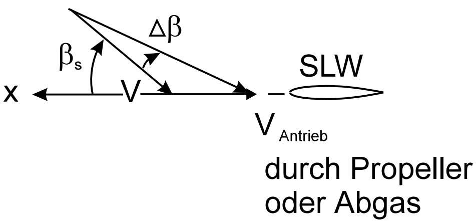


Bild 4.13

Antrieb



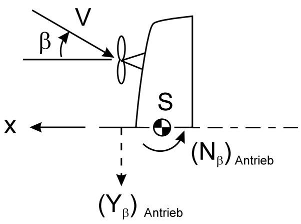


Bild 4.14

- Verringerung von β_s
  Verringerung der Windfahnenstabilität
- Erhöhung des Staudrucks am Seitenleitwerk : Stabilitätserhöhung
- Seitenkraft durch Propeller-Schräganblasung :
  destabilisierend Y_β vor Schwerpunkt
  stabilisierend Y_β hinter Schwerpunkt

Machzahl

vgl. Kap. 2.5.2
(Bild 41)

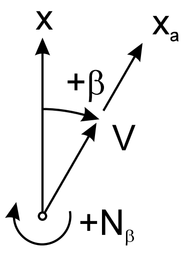


Bild 4.15

Unterschall : Prandtl-Glauert
Überschall : Ackeret

zur Berechnung der Beiwerte

4.2.2 Gierdämpfung

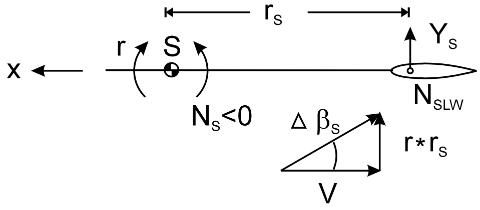


Bild 4.16

Giermoment durch Giergeschwindigkeit

Haupteinfluss : Seitenleitwerk

$$\text{Zusatz-Schiebewinkel:} \quad \triangle\beta_s \approx \frac{-r \cdot r_s}{V} \quad (\triangle\beta_s \quad \text{klein})$$

$$\text{Seitenkraft} \quad Y_s = -C_{Ys\beta s}\frac{r \cdot r_s}{V}\,\overline{q}_s\,S_s$$

$$\text{Dämpfendes Giermoment} \quad N_s = -Y_s\,r_s = (N_r)_s\,r$$

$$\text{Gierdämpfungsbeiwert} \quad \left(\frac{\partial C_n}{\partial(\frac{r\,s}{V})}\right)_s = (C_{nr})_s = C_{Ys\beta s}\frac{\overline{q}_s}{\overline{q}}\frac{S_s}{S}\left(\frac{r_s}{s}\right)^2 \tag{4.6}$$

des Seitenleitwerks

4.2.3 Giersteuerung

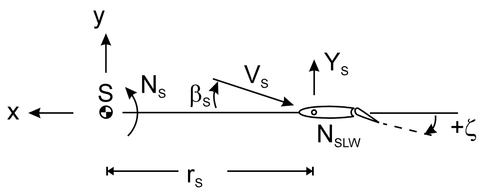


Bild 4.17

- **Giermoment** durch Seitenruderausschlag

$$N_S = -Y_s\,r_s = -\overline{q_s}\,S_s\,r_s\,C_{Ys}$$

$$C_{Ys} = -C_{Ys\beta s}\frac{\partial\beta_s}{\partial\zeta}\,\zeta \qquad \text{da} \quad \beta_s = -\frac{\partial\beta_s}{\partial\zeta}\,\zeta \quad \text{, Seitenruderwirksamkeit}$$

$$N_S = \overline{q}_s\,S_s\,r_s\,C_{Ys\beta s}\frac{\partial\beta_s}{\partial\zeta}\,\zeta$$

$$= \overline{q}\,S\,s\,C_{n\zeta}\,\zeta$$

$$C_{n\zeta} = \frac{\overline{q}_s}{\overline{q}}\frac{S_s}{S}\frac{r_s}{s}C_{Ys\beta s}\frac{\partial\beta_s}{\partial\zeta} \tag{4.7}$$

Seitenruder-Giermomentenbeiwert $C_{n\zeta} < 0$ wegen $C_{Ys\beta s} < 0$

- **Richtungsstabilität bei losem Ruder**

Rudermoment (vgl. Längsbewegung, Gleichung 3.4-1)

$$C_{rs} = C_{r\beta s}\,\beta_S + C_{r\zeta}\,\zeta$$

Schwimmwinkel ($C_{rs} = 0$)

$$\zeta_S \;=\; -\,\frac{C_{r\beta s}}{C_{r\zeta}}\,\beta_S$$

damit

$$C_{Ys\beta s,l} \;=\; \delta_{ls}\,C_{Ys\beta s}$$

$$\delta_{ls} \;=\; 1\;-\;\frac{C_{r\beta s}}{C_{r\zeta}}\,\frac{\partial\beta_S}{\partial\zeta} \qquad \text{(Ausweh-Faktor} < 1)$$

Ebenso Schiebegiermomentenbeiwert

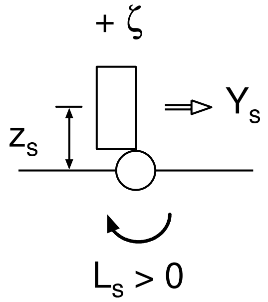
$$C_{n\beta s,l} \;=\; \delta_{ls}\,C_{n\beta s}$$

Reduktion der Windfahnenstabilität durch loses Ruder

Steuerkräfte analog zur Längsbewegung: Die Pedalkräfte hängen von der Stabilität bei losem Ruder ab (vgl. Kap. 3.4.2)

- **Seitenruder-Rollmoment**

- Höhendifferenz z_s des Seitenleitwerks-Druckpunktes zum Schwerpunkt des Flugzeugs→ Seitenruderausschlag bewirkt Rollmoment



Ableitung wie bei
Giermoment durch Seitenruder

Bild 4.18

$$C_{l\zeta} \;=\; -\,\frac{\overline{q}_S}{\overline{q}}\,\frac{S_S}{S}\,\frac{z_S}{s}\,C_{Ys\beta s}\,\frac{\partial\beta_S}{\partial\zeta} \qquad ; \qquad C_{l\zeta} > 0 \tag{4.8}$$

- **Seitenleitwerksgröße**

Bestimmend:

- Statische Richtungsstabilität ($C_{n\beta} > 0$)
- Start/Landung: Ausgleich von Seitenwind
- Einseitiger Antriebsausfall: Ausgleich des Gier-Störmomentes

4.3 Rollbewegung

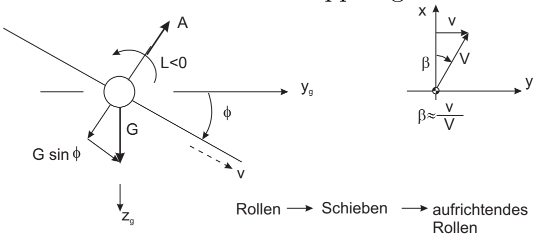
4.3.1 Statische Rollstabilität

- **Auslenkung** aus der Horizontallage (Hängewinkel, Rollwinkel) Kein rückstellendes aerodynamisches Moment aufgrund des Rollwinkels:

$$\begin{array}{lcll} C_{l\phi} & = & 0 & \text{Rollbewegung} \\ C_{m\alpha} & < & 0 & \text{Nickbewegung} \\ C_{n\beta} & > & 0 & \text{Gierbewegung} \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \text{zum Vergleich}$$

(daher stationärer Kurvenflug ohne große Steuereingabe möglich) Künstliches $C_{l\phi}$ durch Regelung ("Rollagehaltung")

- **"Rollstabilität"** durch Kopplung von Rollen und Schieben



$L \;= \overline{q}\; S\; s\; C_{l\beta}\; \beta$

$L_\beta = \frac{\partial L}{\partial \beta}$

Schieberollmoment

Bild 4.19

- **Forderung** für Rollstabilität Gesamtflugzeug

$$C_{l\beta} < 0 \tag{4.9}$$

- **Anteile**

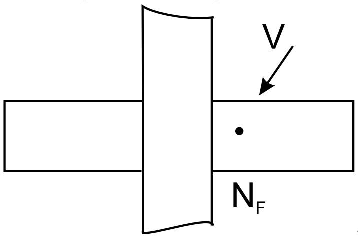
$$C_{l\beta} = \underbrace{(C_{l\beta})_F}_{Flügel} + \underbrace{(C_{l\beta})_R}_{Rumpf} + \underbrace{(C_{l\beta})_S}_{Seitenleitwerk}$$

Flügel

- Wichtigste Flugzeug-Komponente für Entstehung von L_β
- Einflussgrößen

Einflussgrößen	Streckung	Λ
	Geometrie	
	V-Stellung	ν
	Pfeilung	φ

- **Schräganblasung**



Neutralpunktverschiebung in Anströmrichtung durch Schräganblasung $\longrightarrow$ aufrichtendes Moment, abhängig von C_A

Bild 4.20

- **Geometrie**

$|(C_{l\beta})_F|$ wächst

– je kleiner Streckung Λ
– je größer Auftriebsbeiwert C_A
– je größer Pfeilwinkel φ

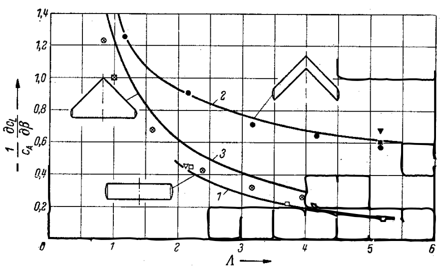


Bild 4.21 /9/

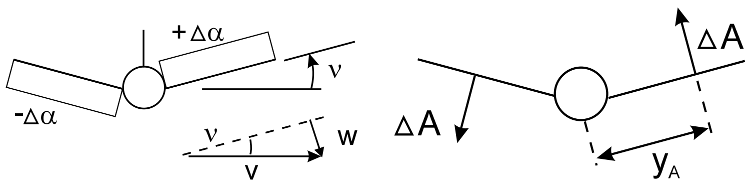


Bild 4.22

Geschwindigkeitskomponente w:	$-v\sin\nu$	$+v\sin\nu$
Anstellwinkel $\Delta\alpha$:	$-\frac{v}{V}\sin\nu$	$+\frac{v}{V}\sin\nu$
	$-\beta\nu$	$+\beta\nu$

Auftriebsänderung pro Flügel

$$\Delta A \;=\; \frac{1}{2}\,C_{A\alpha}\,\Delta\alpha\,\overline{q}\,S \;=\; \frac{1}{2}\,C_{A\alpha}\,\beta\nu\,\overline{q}\,S$$

- **Schieberollmoment** durch V-Form

  - $\nu > 0$: hängender Flügel erzeugt mehr Auftrieb woraus ein Schieberollmoment resultiert $\rightarrow$ Reduzierung des Hängewinkels

  - $\nu < 0$: hängender Flügel erzeugt weniger Auftrieb $\rightarrow$ Vergrößerung des Hängewinkels

$$\begin{aligned} (L_\beta)_\nu \;&=\; (C_{l\beta})_\nu\,\overline{q}\,S\,s \;=\; -\,C_{A\alpha}\,\overline{q}\,S\,y_A\,\nu \\ \hookrightarrow \qquad (C_{l\beta})_\nu \;&=\; -\,C_{A\alpha}\,\frac{y_A}{s}\,\nu \end{aligned} \tag{4.10}$$

y_A: Angriffspunkt ΔA aus Auftriebsverteilung berechnen (z. B. elliptische Auftriebsverteilung: $\frac{y_A}{s} = 0,424$)

Vorzeichen:

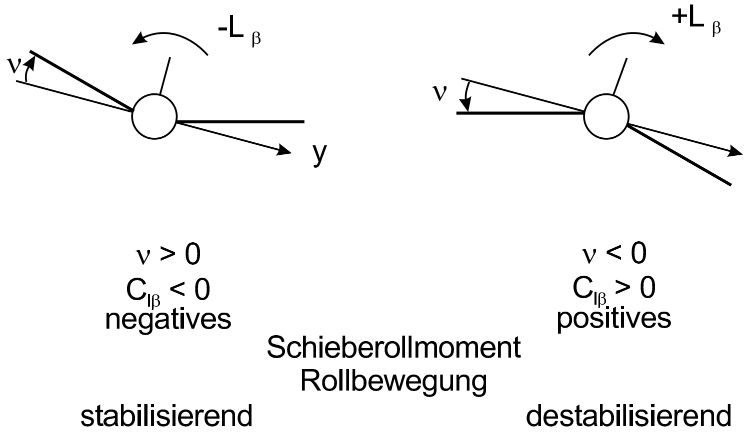


Bild 4.23

- **Pfeilung**

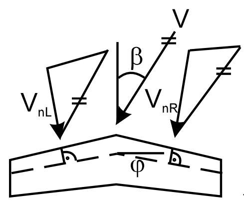


Bild 4.24

Maßgebend für Auftrieb:

Anströmgeschwindigkeit $\perp$ zur $\frac{1}{4}$-Linie

Auftriebsanteile:
$$A_R = \frac{\rho}{2} V_{nR}^{\,2} \frac{S}{2} C_A \quad ; \quad V_{nR} = V \cos(\varphi - \beta)$$
$$A_L = \frac{\rho}{2} V_{nL}^{\,2} \frac{S}{2} C_A \quad ; \quad V_{nL} = V \cos(\varphi + \beta)$$

Rollmoment
$$L = L_\beta \, \beta = A_L \, y_A - A_R \, y_A$$
$$= \frac{\rho}{2} V^2 \frac{S}{2} \left\{ \cos^2(\beta + \varphi) - \cos^2(\beta - \varphi) \right\} C_A \, y_A$$

mit
$$\cos^2(a+b) - \cos^2(a-b) = -2\,a \, \tan b$$

wird
$$(L_\beta)_\varphi = (C_{l\beta})_\varphi \, \overline{q} \, S \, s = -\frac{\rho}{2} V^2 \, S \, C_A \, \tan\varphi \, y_A$$
$$(C_{l\beta})_\varphi = - \tan\varphi \, \frac{y_A}{s} \, C_A \tag{4.11}$$

$\varphi > 0$: größere effektive Anströmgeschwindigkeit (senkrecht zur $\frac{1}{4}$-Linie) auf Seite des hängenden Flügels
$\rightarrow$ höherer Auftrieb auf angeströmter Seite woraus ein Schieberollmoment resultiert
$\rightarrow$ Reduzierung des Hängewinkels

Vorzeichen:

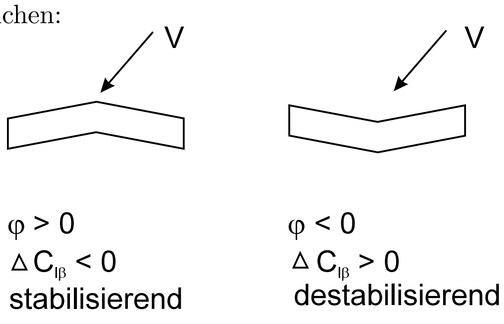


Bild 4.25

Rumpf

Durch Rumpf alleine aufgrund Symmetrie kein Schieberollmoment Rumpf beeinflusst örtlichen Anstellwinkel am Flügel (vgl. Kap. 4.2.1)

- **Flügellage**

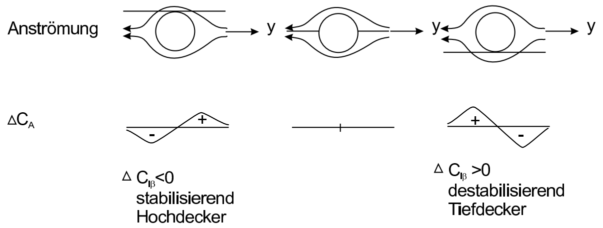


Bild 4.26

- **Einfluss Rumpfquerschnitt** /9/

Zusätzliches Schieberollmoment von Flügel-Rumpf-Anordnungen in Abhängigkeit von der Flügelhochlage für verschiedene Rumpfquerschnittsformen

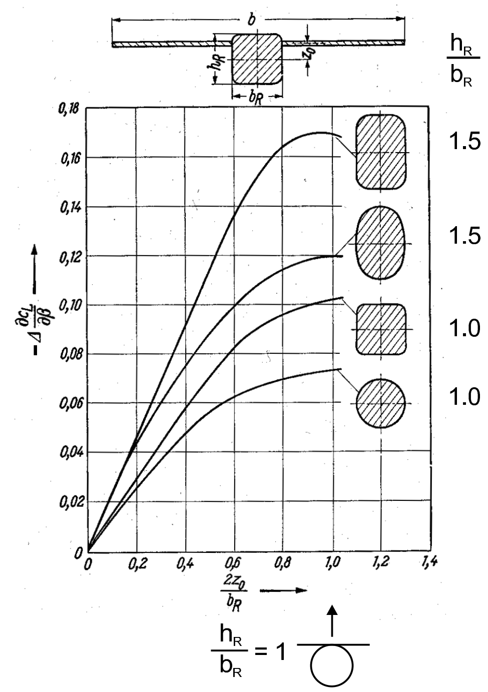


Bild 4.27

Seitenleitwerk

Rollmoment aufgrund der Seitenkraft des SLW beim Schieben

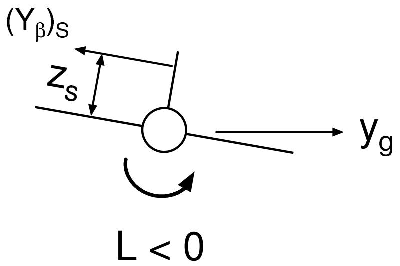


Bild 4.28

Rollmoment

$$(L_\beta)_S = (Y_\beta)_S\ z_S$$

$$= (C_{Y\beta})_S \left(1 - \frac{\partial\varepsilon_S}{\partial\beta}\right) \overline{q_S}\ S_S\ z_S$$

$$(C_{l\beta})_S = (C_{Y\beta})_S \left(1 - \frac{\partial\varepsilon_S}{\partial\beta}\right) \frac{\overline{q_S}}{\overline{q}}\ \frac{S_S}{S}\ \frac{z_S}{s} \tag{4.12}$$

$(C_{l\beta})_S < 0$ für $z_S > 0$ wegen $(C_{Y\beta})_S < 0$

$\longrightarrow$ stabilisierend

Antrieb

Positives L_β durch
höheren Staudruck
$\longrightarrow$ destabilisierend

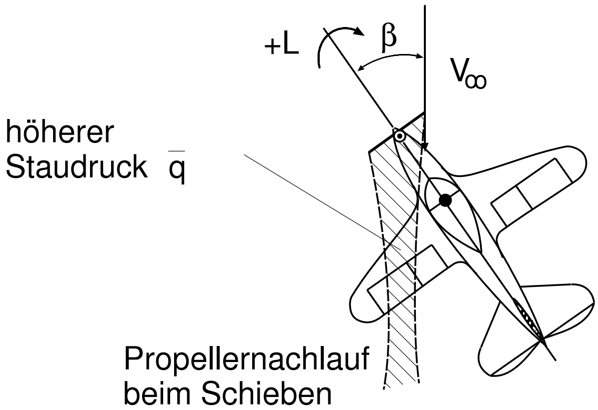


Bild 4.29

4.3.2 Rolldämpfung

- Der Rollbewegung entgegengerichtetes Rollmoment aufgrund der Rollgeschwindigkeit: Rolldämpfung L_p Anteile: Flügel, Seitenleitwerk

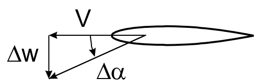


Bild 4.31

- **Flügel**

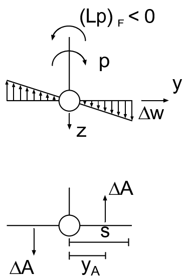


Bild 4.30

$\triangle A \;=\; C_{A\alpha} \triangle \overline{\alpha}\, \overline{q} \frac{S}{2}$

$$\triangle w \;=\; p\,y$$
$$\triangle \alpha \;=\; \frac{p\,y}{V}$$
$$\triangle \overline{\alpha} \;=\; \frac{p\,s}{2\,V}$$

Mittlerer Anstellwinkel

Rollmoment

$$(L)_F = (L_p)_F\; p = -2\;\Delta A\; y_A = -C_{A\alpha} \frac{p\;s}{2\;V}\;\overline{q}\;S\;y_A = \left(\frac{\partial C_l}{\partial\left(\frac{p\;s}{V}\right)}\right)_F \frac{p\;s}{V}\;\overline{q}\;S\;s \tag{4.13}$$

$$\left(\frac{\partial C_l}{\partial\left(\frac{p\;s}{V}\right)}\right)_F \;=\; (C_{lp})_F \;=\; -\;C_{A\alpha}\;\frac{1}{2}\;\frac{y_A}{s} \qquad \text{Rolldämpfungsbeiwert des Flügels} \tag{4.14}$$

Annahme : $\quad y_A = \frac{1}{2}\;s$

Rolldämpfungsbeiwert: $\quad (C_{lp})_F = -\frac{1}{4}\;C_{A\alpha}\; < \;0$

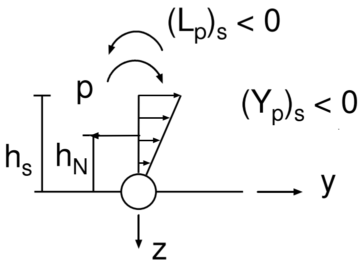
Traglinientheorie: Ungepfeilter Flügel mit elliptischer Auftriebsverteilung (vgl. Kap. 2.5.2)

$$(C_{lp})_F = -\frac{1}{4}\;\frac{C_{A\alpha,\Lambda=\infty}}{1+\frac{C_{A\alpha,\Lambda=\infty}}{\pi\Lambda}} \tag{4.15}$$

Rolldämpfung wächst mit zunehmender Streckung Λ und mit zunehmendem Auftriebsbeiwert $C_{A\alpha}$.

Gute Roll-Manövrierfähigkeit: Geringe Streckung, geringes $C_{A\alpha}$

- **Seitenleitwerk**



$\overline{\beta} \;=\; \frac{h_S\, p}{2\,V}$
Mittlerer Schiebewinkel des Seitenleitwerks durch Rollgeschwindigkeit

Bild 4.32

Seitenkraft durch Rollgeschwindigkeit

$$(Y)_S \;=\; (Y_p)_S\, p \;=\; (C_{Y\beta})_S\, \overline{\beta}\, \overline{q_S}\, S_S \;=\; (C_{Y\beta})_S\, \frac{h_S\, p}{2\,V}\, \overline{q_S}\, S_S$$

Rollmoment

$$(L)_S \;=\; (L_p)_S\, p \;=\; \left(\frac{\delta C_l}{\delta \frac{p\,s}{V}}\right)_S \frac{ps}{V}\, \overline{q}\, S\, s \;=\; (C_{Y\beta})_S\, \frac{h_S\, p}{2\,V}\, \overline{q_S}\, S_S\, h_N$$

Rolldämpfungsbeiwert des Seitenleitwerks

$$\left(\frac{\delta C_l}{\delta \frac{p\,s}{V}}\right)_S \;=\; (C_{lp})_S \;=\; (C_{Y\beta})_S\, \frac{\overline{q_S}}{\overline{q}}\, \frac{S_S}{S}\, \frac{h_N\, h_S}{2\, s^2} \tag{4.16}$$

Rolldämpfungsanteil wächst mit S_S, h_N, h_S

Hauptanteil Rolldämfung durch Flügel

4.3.3 Rollsteuerung

- Querrudersteuerung - gegenseitiger Ausschlag der Querruder zur Auftriebsänderung an beiden Flügeln

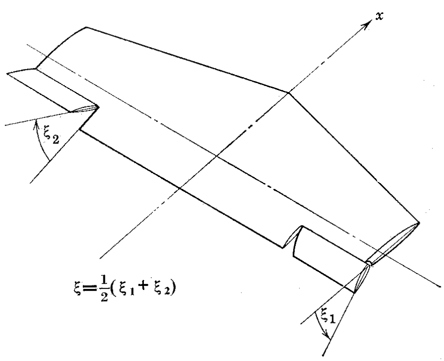


Bild 4.33

- Spoilersteuerung
  - Spoilerausschlag zur Auftriebsreduzierung

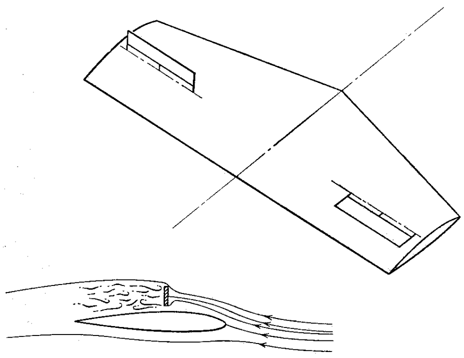


Bild 4.34

- **Querrudersteuerung**

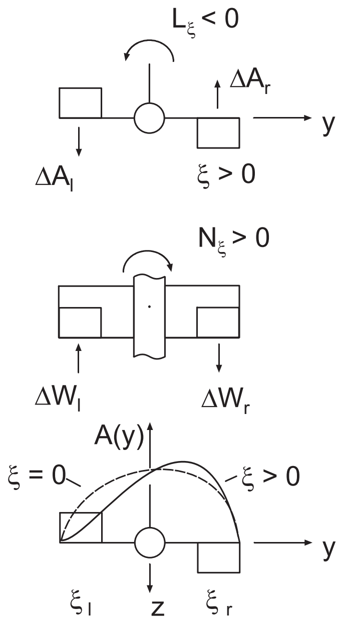


Bild 4.35

- Rollmoment durch gegenseitigen Querruderausschlag

$$Ł(\xi) \;=\; C_{l\xi}\,\xi\,\overline{q}\,S\,s \qquad (4.17)$$

- Giermoment durch Querruder (Widerstandsdifferenz)

$$N(\xi) \;=\; C_{n\xi}\,\xi\,\overline{q}\,S\,s \qquad (4.18)$$

- Änderung der Auftriebsverteilung durch Querruderausschlag

Größerer Auftrieb $\longrightarrow$ größerer Widerstand
hier $\Delta W_r > \Delta W_l$

$\rightarrow$ Rollen bewirkt Gieren

- **Wirkung**

$C_{l\xi} < 0$	Negatives Rollen durch Auftriebsänderung
$C_{n\xi} > 0$	Positives Gieren durch Widerstandsänderung
$\frac{C_{l\xi}}{C_{n\xi}} < 0$	”Gegengieren”: unerwünscht

Gegenmaßnahmen

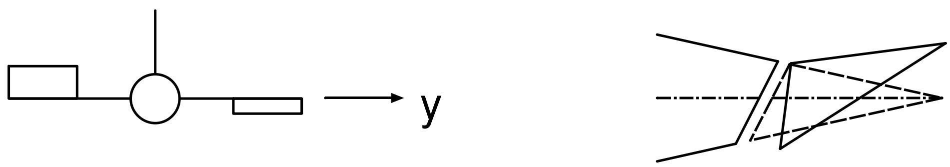


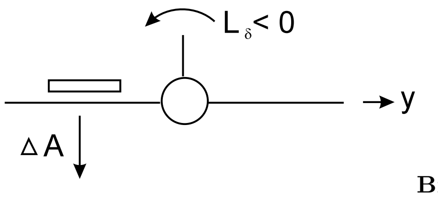
Bild 4.36

Differenzierung Friseruder (Spoilerwirkung)

Kurvenkoordinierung durch zusätzlichen Seitenruderausschlag

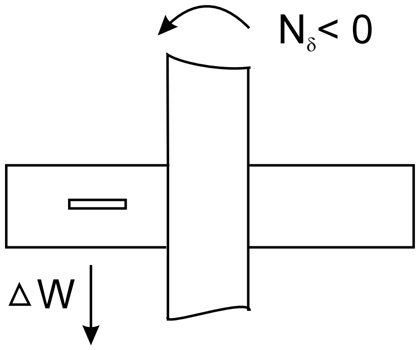
$$\frac{\zeta}{\xi} > 0$$

- **Spoilersteuerung**
  - Spoilerausschlag bewirkt Auftriebsreduzeriung und Widerstandszunahme
  - Rollmoment durch Auftriebsdifferenz
  - Giermoment durch Widerstandsdifferenz



$\frac{C_{l\delta}}{C_{n\delta}} > 0$

Bild 4.37

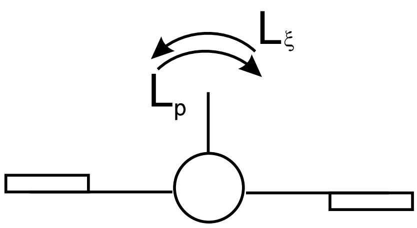


Positive Roll-Gierkopplung erwünscht
Nachteil: Widerstandserhöhung

Bild 4.38

Realisierung: Kopplung von Querruder- und Spoilersteuerung,
Abhängig von Fluggeschwindigkeit

4.3.4 Stationäres Rollen



Gleichgewicht zwischen Rollmoment durch Querruderausschlag und Rollmoment durch Rollgeschwindigkeit (Rolldämpfung)

Bild 4.39

$L_p\,p \;+\; L_\xi\,\xi \;=\; 0$ d. h. Keine Rollbeschleunigung

$$L_p\,p = \frac{\delta C_l}{\left(\delta \frac{p\,s}{V}\right)}\,\frac{p\,s}{V}\,\overline{q}\,S\,s$$

$$L_\xi\,\xi = C_{l\xi}\,\xi\,\overline{q}\,S\,s$$

$$p = -\,\frac{C_{l\xi}}{C_{lp}}\,\frac{V}{s}\,\xi$$

Flugeigenschaftsanforderungen: $12°/s$ - $130°/s$

(Transport-, Kampfflugzeuge)

4.4 Kopplungen

4.4.1 Roll-Seitenkraft

- **Seitenleitwerk**

$$\beta_S \;=\; \frac{p\,h_s}{V}\cdot\frac{1}{2} \tag{4.19}$$

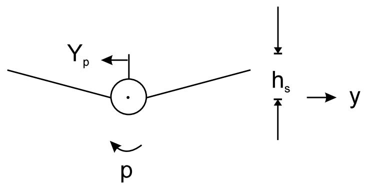


Bild 4.40

$$(Y)_S \;=\; (Y_p)_S\;p \;=\; (C_{Y\beta})_S\,\frac{p\,h_s}{2V}\,\overline{q}_S\,S_S$$

$$\left(\frac{\delta C_Y}{\delta\frac{p\,s}{V}}\right)_S \;=\; (C_{Yp})_S \;=\; \frac{1}{2}\,(C_{Y\beta})_S\,\frac{\overline{q_S}}{\overline{q}}\,\frac{S_S}{S}\,\frac{h_S}{s} \tag{4.20}$$

Roll-Seitenkraft-Beiwert (vgl. Kap. 4.3.2 Rolldämpfung)

- **Flügel**

Seitenkraft durch
V-Form

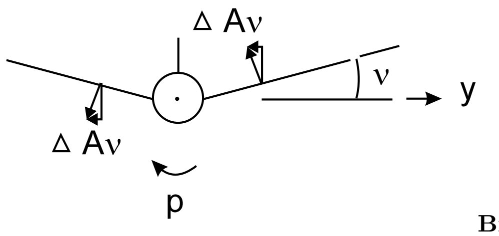


Bild 4.41

4.4.2 Gier-Rollmoment

- **Flügel**

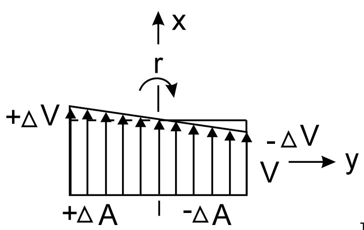


Bild 4.42

Änderung der Anströmung
durch Gierbewegung

$(C_{lr})_F \;=\; \left(\frac{\delta C_l}{(\delta\frac{r\,s}{V})}\right)_F \;>\; 0$ Abhängig von C_A und Λ

- **Seitenleitwerk**

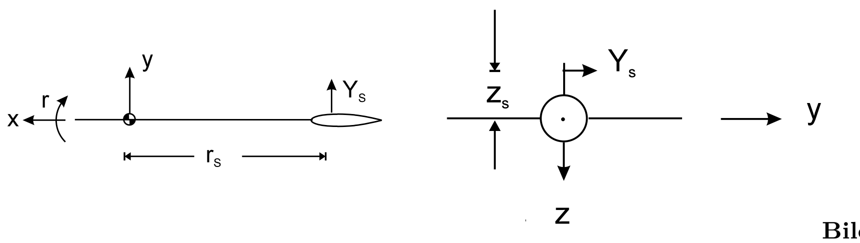


Bild 4.43

$(C_{lr})_S \;=\; \left(\frac{\delta C_l}{(\delta\frac{r\,s}{V})}\right)_S \;>\; 0$ Abhängig von r_S und z_S

4.4.3 Roll-Giermoment

- **Flügel**

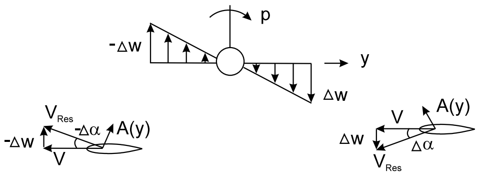


Bild 4.44

$$(C_{np})_F = \left(\frac{\delta C_n}{(\delta \frac{p\,s}{V})}\right)_F > 0 \quad (4.21)$$

- Positiver Anteil durch höheren induzierten Widerstand ($C_{Wi} \sim C_A^2$)
- Negativer Anteil durch Kippen des Auftriebsvektors

- **Seitenleitwerk**

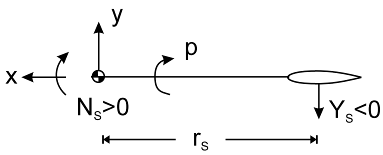


Bild 4.45

$$(C_{np})_S = \left(\frac{\delta C_n}{(\delta \frac{r\,s}{V})}\right)_S > 0$$

- Positives Giermoment durch positive Rollgeschwindigkeit

4.5 Derivative der Seitenbewegung

Übersicht: Direkte Derivative, Kapitelnummer

	β	p	r	ξ	ζ
Y	Y_β 4.2.1	Y_p 4.4.1	Y_r 4.2.2	Y_ξ 4.3.3	Y_ζ 4.2.3
L	L_β 4.3.1	L_p 4.3.2	L_r 4.4.2	L_ξ 4.3.3	L_ζ 4.2.3
N	N_β 4.2.1	N_p 4.4.3	N_r 4.2.2	N_ξ 4.3.3	N_ζ 4.2.3

$$N = N_\beta\,\beta + N_p\,p + ... \quad (4.22)$$

4.6 Stationärer Flug

- Konstante Fluggeschwindigkeit ($V = V_0$)
- Keine Beschleunigungen ($\dot{\beta} = \dot{p} = \dot{r} = 0$); Konstanter Hängewinkel ($\dot{\phi} = p = 0$)

- Aerodynamische Kräfte und Momente, vereinfacht

	β	p	r	ξ	ζ
Y	Y_β	–	–	–	–
L	L_β	–	L_r	L_ξ	–
N	N_β	–	N_r	–	N_ζ

4.6.1 Kurvenflug

Kein Wind	$V = V_0 = const$
Hängewinkel	$\phi = const$
Azimutänderung	$\dot{\psi} = const$
Giergeschwindigkeit	$r = const$
Schiebewinkel	$\beta = 0$
(idealer Kurvenflug)	

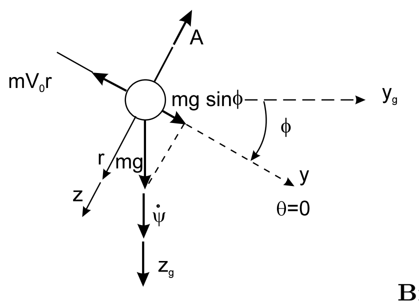


Bild 4.46

- **Gleichgewicht:**

$$
\begin{aligned}
Y = 0 &= -\, m\, V_0\, r \,+\, m\, g\, \sin\phi \\
L = 0 &= L_r\, r \,+\, L_\xi\, \xi \\
N = 0 &= N_r\, r \,+\, N_\zeta\, \zeta
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

- **Querkräfte:** $\sin\phi = \frac{V_0}{g}\, r \quad ; \quad r = \dot{\psi}\, \cos\phi \quad ; \quad \tan\phi = \frac{V_0}{g}\, \dot{\psi}$

- **Vertikalkräfte:** $A\, \cos\phi = m\, g$

- **Lastvielfaches**

$$
\begin{aligned}
n = \frac{A}{G} = \frac{1}{\cos\phi} = \sqrt{1 + \tan^2\phi} \\
\tan\phi = \sqrt{n^2 - 1} = \frac{V_0}{g}\dot{\psi}
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

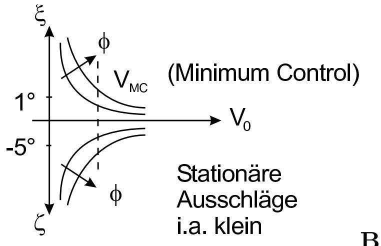
Mit zunehmender Fluggeschwindigkeit werden Hängewinkel ϕ und Lastvielfaches n bei gleicher Drehgeschwindigkeit $\dot{\psi}$ größer

- **Querruderausschlag**

$$\xi = -\frac{C_{lr}}{C_{l\xi}}\, \frac{s}{V_0}\, r = -\frac{s}{V_0}\, \frac{C_{lr}}{C_{l\xi}}\, \dot{\psi}\, \cos\phi = -\frac{sg}{V_0^2}\, \frac{C_{lr}}{C_{l\xi}}\, \sin\phi \tag{4.25}$$

- **Seitenruderausschlag**

$$\zeta = -\frac{C_{nr}}{C_{n\zeta}}\, \frac{s}{V_0}\, r = -\frac{s}{V_0}\, \frac{C_{nr}}{C_{n\zeta}}\, \dot{\psi}\, \cos\phi = -\frac{sg}{V_0^2}\, \frac{C_{nr}}{C_{n\zeta}}\, \sin\phi \tag{4.26}$$



- Erforderliche Ruderausschläge nehmen mit abnehmender Fluggeschwindigkeit zu

$\frac{\zeta}{\xi} = \frac{C_{nr}}{C_{lr}} \frac{C_{l\xi}}{C_{n\zeta}} < 0$ $\quad C_{l\xi} < 0 \quad C_{n\zeta} < 0$ $\quad C_{nr} < 0 \quad C_{lr} > 0$

Gierdämpfung

Bild 4.47

4.6.2 Schiebeflug

Geradeausflug mit großem Schiebewinkel bei

- Seitenwindlandung
- Steilanflug (Widerstandsvergrößerung $\gamma \sim \frac{C_W}{C_A}$) $\longrightarrow$ "Slip"

Bedingungen

Kein Rollen		$p = 0$
Kein Gieren		$r = 0$
	$\longrightarrow$	$\dot{\psi} = 0$
Bahnazimut-änderung		$\chi = \psi + \beta = 0$

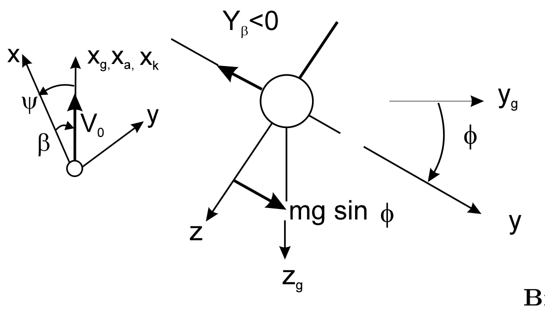


Bild 4.48

- **Gleichgewicht**

$$\begin{aligned} Y = 0 &= Y_\beta\, \beta + m\, g\, \sin\phi \\ L = 0 &= L_\beta\, \beta + L_\xi\, \xi \\ N = 0 &= N_\beta\, \beta + N_\zeta\, \zeta \end{aligned} \tag{4.27}$$

- **Querkräfte**

$$\begin{aligned} \sin\phi &= -\frac{Y_\beta}{m\,g}\,\beta = -\frac{Y_\beta}{A}\,n\,\beta = -\frac{C_{Y\beta}}{C_A}\,n\,\beta \\ \beta &= -\frac{C_A \sin\phi}{n\,C_{Y\beta}} \approx -\frac{C_A}{C_{Y\beta}}\,\frac{1}{n}\,\phi \end{aligned} \tag{4.28}$$

Flugeigenschaftsforderung: positives Schieben $\longrightarrow$ positiver Hängewinkel

$\hookrightarrow \frac{\phi}{\beta} > 0$, wegen $C_{Y\beta} < 0$ i. a. erfüllt

- **Querruderausschlag**

$$\xi = -\frac{C_{l\beta}}{C_{l\xi}}\,\beta = \frac{C_{l\beta}}{C_{l\xi}}\,\frac{C_A}{n}\,\frac{\sin\phi}{C_{Y\beta}} \tag{4.29}$$

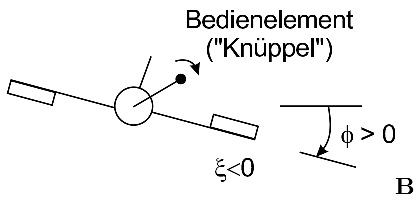


Bild 4.49

Flugeigenschaftsforderung: positiver Hängewinkel $\longrightarrow$ Knüppel nach rechts

$\hookrightarrow \frac{\xi}{\phi} < 0$, wegen $C_{l\xi} < 0$ und $C_{Y\beta} < 0$ folgt $C_{l\beta} \overset{!}{<} 0$ "Rollstabilität"

- **Seitenruderausschlag**

$$\zeta = -\frac{C_{n\beta}}{C_{n\zeta}}\,\beta = \frac{C_{n\beta}}{C_{n\zeta}}\,\frac{C_A}{n}\,\frac{\sin\phi}{C_{Y\beta}} \tag{4.30}$$

Wegen $C_{n\beta} > 0$ (Windfahnenstabilität) $C_{n\zeta} < 0$

folgt $\zeta \sim \beta \sim \phi$; $\frac{\zeta}{\phi} > 0$

"Gekreuzte Ruder"

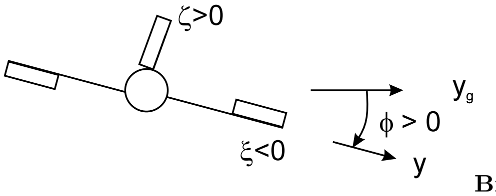


Bild 4.50

4.6.3 Einmotorenflug

Aufgabe: Nach Ausfall stationärer Geradeausflug, d. h. $p = 0$, $r = 0$

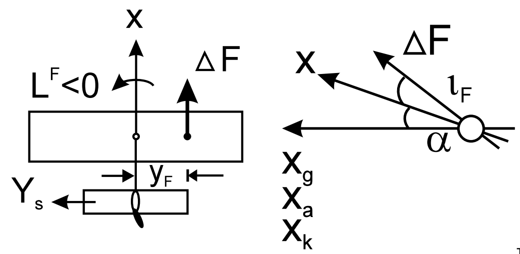


Bild 4.51

- **Störungen** durch Ausfall

Schub $\quad \Delta F = C_f\,\bar{q}\,S \quad , \quad f = \Delta F$

Rollmoment $\quad L^F = -\,\Delta F\,y_F\,\sin(\alpha + i_F) \qquad \frac{\delta L^F}{(\Delta F)} = L_f$

Giermoment $\quad N^F = -\,\Delta F\,y_F\,\cos(\alpha + i_F) \qquad \frac{\delta N^F}{(\Delta F)} = N_f$

- **Gleichgewicht**

$$\begin{aligned} Y = 0 &= Y_\beta\,\beta + m\,g\,\sin\phi \\ L = 0 &= L_\beta\,\beta + L_f\,f + L_\xi\,\xi \\ N = 0 &= N_\beta\,\beta + N_f\,f + N_\zeta\,\zeta \end{aligned} \tag{4.31}$$

... Gleichgewicht

$$\begin{aligned} 0 &= C_{Y\beta}\,\beta + C_A\,\sin\phi \\ 0 &= C_{l\beta}\,\beta - C_f\,\frac{y_F}{s}\,\sin(\alpha + i_F) + C_{l\xi}\,\xi \\ 0 &= C_{n\beta}\,\beta - C_f\,\frac{y_F}{s}\,\cos(\alpha + i_F) + C_{n\zeta}\,\zeta \end{aligned}$$

- **Anforderung:** Reiseflug $\beta = 0 \quad \hookrightarrow \quad \phi = 0$ (s. Seitenkräfte)

- **Querruderausschlag**

$$\xi = \frac{C_f}{C_{l\xi}}\,\frac{y_F}{s}\,\sin(\alpha + i_F) < 0 \qquad \text{wegen} \quad C_{l\xi} < 0$$

- **Seitenruderausschlag**

$$\zeta \;=\; \frac{C_f}{C_{n\zeta}}\,\frac{y_F}{s}\,\cos(\alpha + i_F) \;<\; 0 \qquad \text{wegen} \quad C_{n\zeta} \;<\; 0$$

$$\hookrightarrow \frac{\xi}{\zeta} \;=\; \frac{C_{n\zeta}}{C_{l\xi}}\,\tan(\alpha + i_F) \qquad > \; 0$$

- **Beispiel:** Triebwerksausfall linke Seite

  - durch Triebwerksausfall auf linker Seite giert das Flugzeug aufgrund ΔF
  - entgegenwirkendes Giermoment durch Seitenruderausschlag
  - Seitenruderausschlag erzeugt Rollmoment
  - entgegenwirkendes Rollmoment durch Querruderausschlag

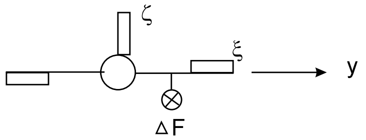


Bild 4.52

Seitenruderausschlag

Schub: $\Delta F \;\sim\; V^{n_F}$

$\hookrightarrow \; C_f \;=\; \frac{\Delta F}{\frac{\varrho}{2}\,V^2\,S} \;\sim\; \frac{1}{V^2}$

$n_F \;=\; -1$ Propeller-/Fantriebwerk
$n_F \;=\; 0$ Turboluftstrahltriebwerk
$n_F \;=\; 2$ Staustrahltriebwerk

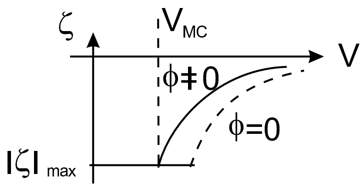


Bild 4.53

Für $\phi \;\neq\; 0$ d. h. $\beta \;\neq\; 0$
kann V_{MC} gesenkt werden

5 Bewegungsgleichungen

5.1 Grundlagen

- **Stationäre Flugzustände**
  - Bedingungen für Gleichgewicht von Kräften/Momenten ("Statik")
  - Zeitunabhängig
  - Beschreibung durch algebraische Gleichungen
- **Dynamische Vorgänge**
  - Beschreibung der Bewegung bei Störung des Gleichgewichts
  - Zeitabhängig
  - Beschreibung durch Differentialgleichungen
- **Bewegungsgleichung**, allgemeiner Fall:

Nichtlineare Differentialgl. mit nichtlinearen, zeitvariablen Koeffizienten

↓	↓	↓
z. B. Kopplungen von Drehgeschwindigkeiten	z. B. geschwindigkeits-abhängige Kräfte	z. B. durch Massenänderung

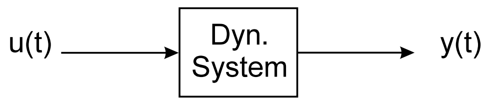
- **Vereinfachungen**
  - Betrachtung von kleinen Abweichungen zu Bezugszustand (Linearisierung)
  - Trennen von schwach gekoppelten, schnellen/langsamen Bewegungen
- **Betrachtung primärer Einflussgrößen**

	Moment	Derivativ	Dämpfung	Anregung
x	L	$C_{l\beta}$	C_{lp}	$C_{l\xi}$
y	M	$C_{m\alpha}$	C_{mq}	$C_{m\eta}$
z	N	$C_{n\beta}$	C_{nr}	$C_{n\zeta}$

5.1.1 Beschreibungsformen

5.1.1.1 Differentialgleichung

- Gewöhnliche Differentialgleichung



Eingrößensystem

Bild 5.1

$$a_n\, y^{(n)} \;+\; a_{n-1}\, y^{(n-1)} \;+\; ... \;+\; a_0 \;=\; b_m\, u^{(m)} \;+\; b_{m-1}\, u^{(m-1)} \;+ ... \;+\; b_0 \tag{5.1}$$

$$y \;=\; y(t), \quad u \;=\; u(t), \quad y^{(n)} \;=\; \frac{d^n y}{dt^n} \quad etc.$$

- Beispiel: Schwinger

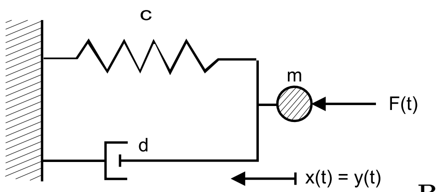


Bild 5.2

$$m\,\ddot{x}(t) \;=\; F(t) \;-\; d\,\dot{x}(t) \;-\; c\,x(t)$$

$$\ddot{x}(t) \;+\; \frac{d}{m}\,\dot{x}(t) \;+\; \frac{c}{m}\,x(t) \;=\; \frac{F(t)}{m}$$

$$\ddot{x}(t) \;+\; a_1\,\dot{x}(t) \;+\; a_0\,x(t) \;=\; b_0\,u(t) \tag{5.2}$$

Lineare Dgl. 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten

- **Zustandsgleichung**

Umformung mit $x_1 \;=\; x \quad , \quad x_2 \;=\; \dot{x}$ in 2 Dgln. 1. Ordnung

$$\text{ergibt} \quad \begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u \tag{5.3}$$

$$y \;=\; x_1$$

Zustandsgleichung in Regelungs-Normalform

- **Signalflussdiagramm**

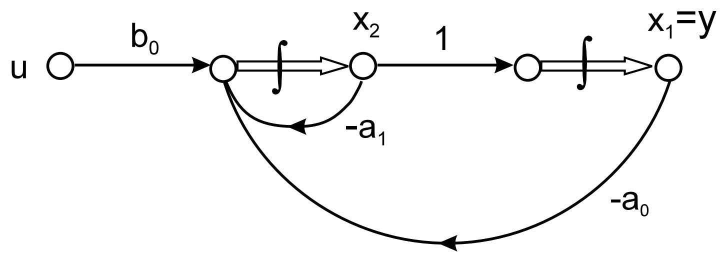
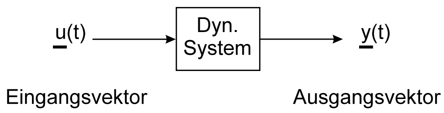


Bild 5.3

- **5.1.1.2 Zustandsgleichung**
- **Allgemeiner Fall:**

Vektor-Differentialgleichung nichtlinear, zeitvariabel



Ein- und Mehrgrössensystem

Bild 5.4

$$\underline{\dot{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) \qquad \text{– Zustandsdifferentialgleichung}$$

$\underline{x}(n)$Zustandsvektor, $\underline{u}(l)$Eingangs-, Stellvektor

$$\underline{y} = \underline{g}(\underline{x}, \underline{u}, t) \qquad \text{– Ausgangsgleichung}$$

$\underline{y}(m)$Ausgangsvektor (5.4)

- **Linearisierung** (Beispiel: Zeitinvariant)

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \underline{x}_0 + \Delta\underline{x} \\ \underline{u} &= \underline{u}_0 + \Delta\underline{u} \end{aligned}$$

x_0, u_0 : stationärer Zustand

$$\begin{aligned} (\underline{x}_0 + \Delta\underline{x})^{\bullet} &= \underline{f}\,[(\underline{x}_0 + \Delta\underline{x}), (\underline{u}_0 + \Delta\underline{u})] \\ &= \underline{f}(\underline{x}_0, \underline{u}_0) + \left(\frac{\delta\underline{f}}{\delta\underline{x}}\right)_0 \Delta\underline{x} + \left(\frac{\delta\underline{f}}{\delta\underline{u}}\right)_0 \Delta\underline{u} + ... \end{aligned}$$

Taylor-Reihe

mit

$$\left(\frac{\underline{f}}{\underline{x}}\right)_0 = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} & \cdots & \frac{\delta f_1}{\delta x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\delta f_n}{\delta x_1} & & \frac{\delta f_n}{\delta x_n} \end{bmatrix}_0 = \underline{A}(n,n)$$

Dynamikmatrix

$$\left(\frac{\delta\underline{f}}{\delta\underline{u}}\right)_0 = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta u_1} & \cdots & \frac{\delta f_1}{\delta u_l} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\delta f_n}{\delta u_1} & & \frac{\delta f_n}{\delta u_l} \end{bmatrix} = \underline{B}(n,l)$$

Eingangsmatrix

ebenso

$$\left(\frac{\delta\underline{g}}{\delta\underline{x}}\right)_0 = \underline{C}(m,n)$$

Ausgangsmatrix

$$\left(\frac{\delta\underline{g}}{\delta\underline{u}}\right)_0 = \underline{D}(m,l)$$

Durchgangsmatrix

Ergebnis: n lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung
für die Abweichungen vom stationären Zustand

$$\begin{aligned} \underline{\dot{x}}(t) &= \underline{A}\ \underline{x}(t) + \underline{B}\ \underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) &= \underline{C}\ \underline{x}(t) + \underline{D}\ \underline{u}(t) \end{aligned} \tag{5.5}$$

Δ weggelassen!

- **Darstellung**

Signalflussdiagramm

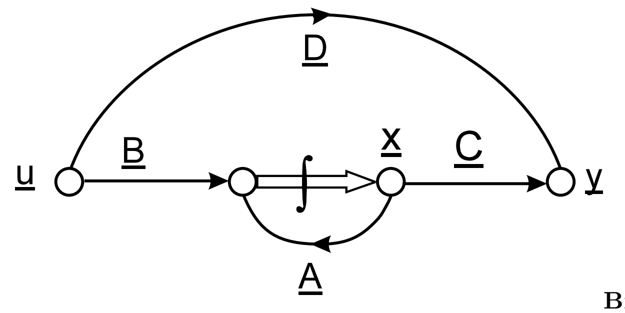


Bild 5.5

Blockschaltbild

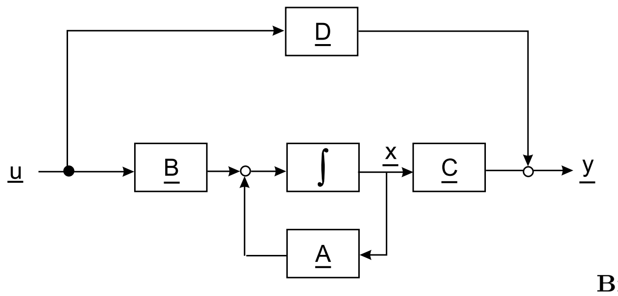


Bild 5.6

5.1.2 Lösungsverfahren

5.1.2.1 Simulation

Integration der Zustands(differential)gleichungen

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u})$$

$$\underline{x}(t_{k+1}) = \underline{x}(t_k) + \Delta\underline{x}(t_k)$$

$$\text{mit} \qquad \Delta\underline{x}(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \underline{f}(\underline{x}, \underline{u})\, d\tau \qquad k = 0, 1, 2 \ldots N$$

$$\underline{y}(t_{k+1}) = \underline{g}(\underline{x}, \underline{u}) \tag{5.6}$$

- Da $\Delta\underline{x}$ numerisch berechnet wird, ist das Lösungsverfahren auch für nichtlineare und zeitvariable Systeme anwendbar

- Durch numerische Integration vergleichsweise langsam (besonders bei großen Systemen)

5.1.2.2 Zeitbereich

- **Skalare Dgl**

$$\dot{x}(t) \;=\; a\,x(t) \;+\; b\,u(t)$$

$$\text{Lösung} \qquad x(t) \;=\; e^{at}\,x(0) \;+\int_0^t e^{a(t-\tau)}\;b\,u(\tau)\;d\tau \qquad \text{(Euler)}$$

- **Vektor-Dgl**

$$\dot{\underline{x}} \;=\; \underline{A}\,\underline{x} \;+\; \underline{B}\,\underline{u}$$

$$\text{Lösung} \qquad \underline{x}(t) \;=\; e^{\underline{A}(t-t_0)}\;\underline{x}(t_0) \;+\int_{t_0}^t e^{\underline{A}(t-\tau)}\;\underline{B}\;\underline{u}(\tau)\;d\tau$$

$$\underline{\phi} \;=\; e^{\underline{A}(t-t_0)} \qquad \text{Transitionsmatrix}$$

$$e^{\underline{A}t} \;=\; \underline{I} \;+\; \underline{A}t \;+\; \underline{A}^2\,\frac{t^2}{2!} + \;\ldots\; = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\underline{A}\,t)^{\nu}}{\nu!}$$

Matrixexponentialfunktion

5.1.2.3 Frequenzbereich (Laplace-Bereich, Bild-Bereich)

- **Laplace-Transformation**

$$\text{f(t)} \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \text{F(s)}: \qquad F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \;=\; \int_0^{\infty} f(t)\,e^{-st}\;dt \tag{5.7}$$

$$\text{F(s)} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; \text{f(t)}: \qquad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \;=\; \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)\,e^{st}\;dt \tag{5.8}$$

$s = \sigma \pm j\omega$	Komplexe Variable (Laplace-Variable)
c	Positive Konstante
$f(t) = 0$	für $t \leq 0$

- **Eigenschaften**
  - Die lineare Differentialgleichung wird in eine algebraische Gleichung mit der komplexen Variablen s umgeformt
  - Man erhält in einem Schritt die Lösung im Frequenzbereich unter Berücksichtigung von Anregung und Anfangsbedingung
  - Einfaches Zusammenschalten mehrerer Elemente
  - Einfache Stabilitätsbetrachtungen
  - Rücktransformation i. d. Zeitbereich mit Korrespondenztabellen

- **Rechenregeln**

  - Linearität: $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$
  - Verschiebung: $f(t-\tau) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s)e^{-s\tau} (\tau \geq 0)$
  - Differentiation: $\dot{f}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad sF(s) - f(-0)$

    $\ddot{f}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad s^2 F(s) - sf(-0) - \dot{f}(-0)$

    $\overset{(n)}{f}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} f(-0)$
  - Integration: $\int_0^t f(\tau) d\tau \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s} F(s)$

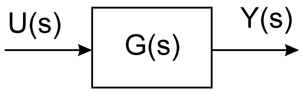
  - Grenzwerte: $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t \to \infty}} f(t) = \lim\limits_{\substack{s \to \infty \\ s \to 0}} sF(s)$

- **Einige Korrespondenzen**

Bildbereich, F(s)	Zeitbereich, f(t)	
1	$\delta(t)$	
$\frac{1}{s}$	$1(t)$	
$\frac{1}{s^2}$	t	
$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{at}$	$n = 1, 2, \ldots$
$\frac{{\omega_0}^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + {\omega_0}^2}$	$\frac{\omega_0}{\sqrt{1-D^2}}\, e^{\sigma t} \sin \omega\, t$	$\sigma = -D\omega_0$, $\omega = \omega_0\sqrt{1-D^2}$, $D < 1$
$\frac{{\omega_0}^2}{s(s^2 + 2D\omega_0 s + {\omega_0}^2)}$	$1 - e^{\sigma t}[\cos \omega\, t + \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \sin \omega\, t]$	
$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega\, t$	
$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega\, t$	

- **Übertragungsfunktion** (Eingrößensystem)

  Verhältnis des laplacetransformierten Ausgangssignals $Y(s)$ zum laplacetransformierten Eingangssignal U(s)



$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \qquad \text{(ÜF)}$$

Bild 5.7

Beispiel Schwinger

- Differentialgleichung $\quad \ddot{x}(t) + a_1\,\dot{x}(t) + a_0\,x(t) = b_0\,u(t) \qquad y(t) = x(t)$

  $x(0) = 0\,;\ \dot{x}(0) = 0$
- Laplace-transformiert $\quad X(s)\left[s^2 + a_1\,s + a_0\right] = b_0\,U(s)$
- Übertragungsfunktion $\quad \dfrac{X(s)}{U(s)} = \dfrac{b_0}{s^2 + a_1\;s + a_0} = G(s) = \dfrac{Z(s)}{N(s)}$

  hier $\quad Y(s) = X(s)$

  $Z(s)$ Zählerpolynom

  $N(s)$ Nennerpolynom

- **Übertragungsmatrix** (Mehrgrößensystem)

  - Zustandsgleichung $\quad \dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\,\underline{x}(t) + \underline{B}\,\underline{u}(t) \qquad \underline{x}(t_0) = 0$

    $\underline{y}(t) = \underline{C}\,\underline{x}(t) + \underline{D}\,\underline{u}(t)$

  - Laplace-transformiert $\quad s\,\underline{X}(s) = \underline{A}\,\underline{X}(s) + \underline{B}\,\underline{U}(s)$

    $\underline{X}(s) = (s\,\underline{I} - \underline{A})^{-1}\,\underline{B}\,\underline{U}(s)$

    $\underline{Y}(s) = \left[\underline{C}\,(s\,\underline{I} - \underline{A})^{-1}\,\underline{B} + \underline{D}\right]\underline{U}(s) = \underline{G}(s)\,\underline{U}(s)$

  - Übertragungsmatrix
$$\underline{G}(s) = \frac{1}{|s\,\underline{I} - \underline{A}|}\,\underline{C}\,(s\,\underline{I} - \underline{A})_{adj}\,\underline{B} + \underline{D} \qquad \text{(ÜM)} \tag{5.9}$$

    Gemeinsamer Nenner
$$|\underline{N}(s)| = |s\,\underline{I} - \underline{A}| \tag{5.10}$$

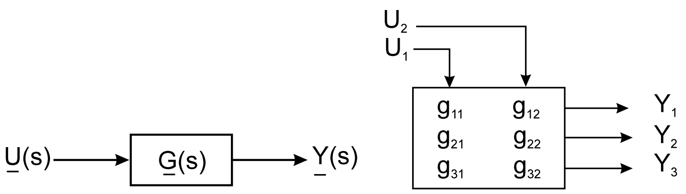


Bild 5.8

$$Y_1(s) = g_{11}\,U_1(s) + g_{12}\,U_2(s) \qquad \text{usw.}$$

5.1.3 Dynamisches Verhalten

5.1.3.1 Eigenverhalten Verhalten ohne Anregungsfunktion $u(t)$ (homogene Lösung)

- **Skalare Dgl.**

  Charakteristische Gleichung: linke Seite der Dgl bzw. Nenner der Übertragungsfunktion

$$a_n\, s^n \;+\; a_{n-1}\, s^{n-1} \;+\; \ldots \;+\; a_0 \;=\; 0 \tag{5.11}$$

  Vektorielle Dgl. (Zustandsgleichung)

  Determinante: $|s\, \underline{I} \;-\; \underline{A}| \;=\; 0$

$$\text{z. B.} \begin{vmatrix} s - a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & s - a_{22} \end{vmatrix} = s^2 \;+\; (-a_{11} \;-\; a_{22})\, s \;+\; a_{11}\, a_{22} \;-\; a_{12}\, a_{21} \;=\; 0$$

  Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung sind die Pole der Übertragungsfunktion.

- **Beispiel:** System 1. Ordnung
  - Dgl. $\dot{y}(t) \;+\; a\, y(t) \;= b\, u(t)$
  - L-Transformiert $s\, Y(s) \;+\; a\, Y(s) \;-\; y(0) \;=\; b\, U(s)$
  - ÜF $Y(s) \;=\; \underbrace{\frac{y(0)}{s+a}}_{\text{homogen}} \;+\; \underbrace{\frac{b\, U(s)}{s+a}}_{\text{partikulär}}$
  - Pol $s \;=\; -a$
  - Komplexe Zahlenebene

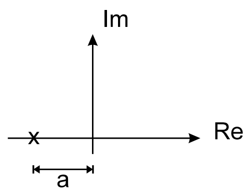


Bild 5.9

  - Zeitverlauf

$y(t) \;=\; y(0)\, e^{-at}$
(Rücktransformation)

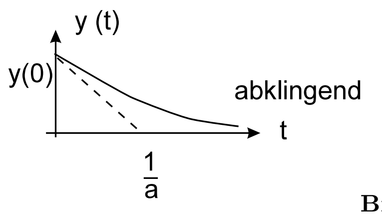


Bild 5.10

5.1.3.2 Führungsverhalten

Verhalten des Ausgangssignals $y(t)$ auf Eingangssignal $u(t)$ z. B. $y(t) = q(t)$ Nickgeschwindigkeit $u(t) = \eta(t)$ Höhenruder

- Übertragungsfunktion, allgemein

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1\, s + \ldots + b_n\, s^n}{a_0 + a_1\, s + \ldots + a_n\, s^n} \tag{5.12}$$

Sprungantwort (Übergangsfunktion)

$U(s) = \frac{1}{s}$

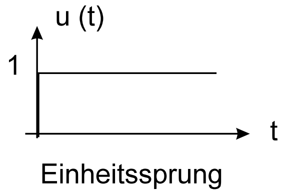


Bild 5.11

Grenzwertsatz

$$\begin{array}{llll} \lim y(t) & = \lim s\, Y(s) & = \lim s\, G(s)\, \frac{1}{s} & = \lim G(s) \\ t \to 0 & s \to \infty & s \to \infty & s \to \infty \\ t \to \infty & s \to 0 & s \to 0 & s \to 0 \end{array}$$

Zeitverlauf

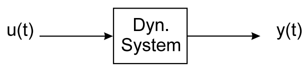


Bild 5.12 Sprungantwort (SA)

- **Beispiel:** System 1. Ordnung, $a = 0$, $y(0) = 0$

- Dgl. $\dot{y}(t) = b\, u(t)$
- L-Transformiert $Y(s) = \frac{b}{s}\, U(s)$
- Pol $s = 0$
- Komplexe Zahlenebene - Zeitverlauf, $U(s) = \frac{1}{s}$

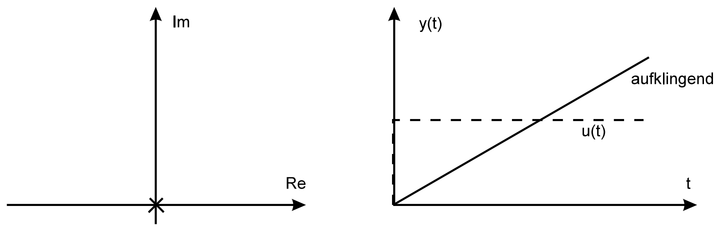


Bild 5.13

- **Stabilität** Ein dynamisches System heißt stabil, wenn jede beschränkte Änderung einer Eingangsgröße auch eine beschränkte Änderung der Ausgangsgröße hervorruft. $\longrightarrow$ Die Pole eines stabilen Systems liegen links der imaginären Achse (linke Halbebene)

- **Beispiel:** System 1. Ordnung, $a > 0$, $y(0) = 0$

  - ÜF $\quad G(s) = \frac{b}{s+a} = \frac{K}{1 + T\,s} \qquad K = \frac{b}{a}$ Stationärwert, Verstärkung

    $T = \frac{1}{a}$ Zeitkonstante

  - SA $\quad y(t) = K\,(1 - e^{-\frac{t}{T}})$

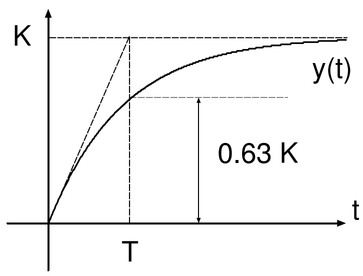


Bild 5.14

- **Beispiel:** System 2. Ordnung (Schwinger)

  - ÜF-Schreibweisen

$$G(s) = \frac{K_e}{ms^2 + ds + c} = \frac{b_0}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 - 2\sigma s + \omega_0^2} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2} \qquad (5.13)$$

Pole: $s_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ konjugiert komplex $(D < 1)$
$s_1 = \sigma_1$; $s_2 = \sigma_2$ reell $(D \geq 1)$

- Zusammenhänge

	m, d, c	ω, ω_0, σ	D
ω_0	$\sqrt{\frac{c}{m}}$	$\sqrt{\omega^2 + \sigma^2}$	$-\frac{\sigma}{D}$
ω	$\sqrt{\frac{c}{m} - (\frac{d}{2m})^2}$	$\sqrt{\omega_0^2 - \sigma^2}$	$\omega_0\sqrt{1 - D^2}$
σ	$-\frac{d}{2m}$	$-\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}$	$-\omega_0\,D$
D	$\frac{d}{2\sqrt{mc}}$	$-\frac{\sigma}{\omega_0}$	-

K_e	Verstärkung des Eingangssignals $U(s)$
K	Verstärkungsfaktor
m, d, c	Masse, Dämpfungs-, Federkonstante
ω	Frequenz (freie Schwingung)
ω_0	Eigenfrequenz (System ohne Dämpfung)
σ	Dämpfungsexponent
D	Dämpfungsgrad

- Zeitverhalten

$D = 0$	ungedämpfte Schwingung, Dauerschwingung
$0 < D < 1$	gedämpfte Schwingung
$D = 1$	Aperiodische Bewegung
$D > 1$	Aperiodische Bewegung
$D < 0$	Instabiles Verhalten

- Zuordnung

  Komplexe Zahlenebene

  Zeitverhalten

  Dämpfungsgrad

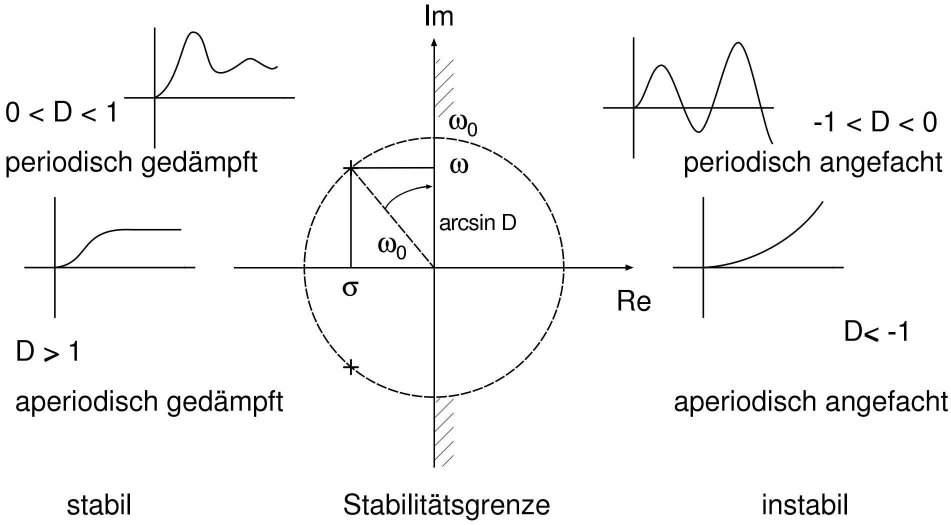


Bild 5.15

Dämpfung	Polverteilung	Sprungantwort	Zeitfunktion
$D = 0$			$y(t) = K(1 - \cos \omega_0 t)$
$0 < D < 1$			$y(t) = K\left[(1 - e^{\sigma t}(\cos \omega t - \frac{\sigma}{\omega}\sin \omega t)\right]$
$D \geq 1$			$y(t) = K\left[(1 - e^{-\omega_0 t}(1 + \omega_0 t)\right]$
$D \geq 1$			$y(t) = K\left[(1 - \frac{1}{\sigma_2 - \sigma_1}(\sigma_2 e^{\sigma_1 t} - \sigma_1 e^{\sigma_2 t})\right]$

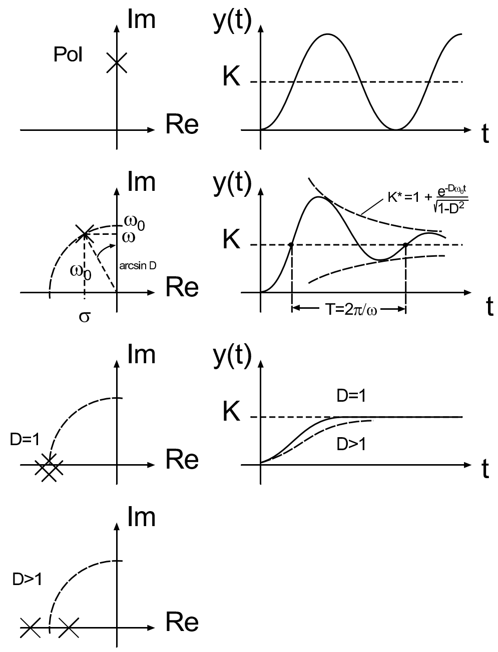
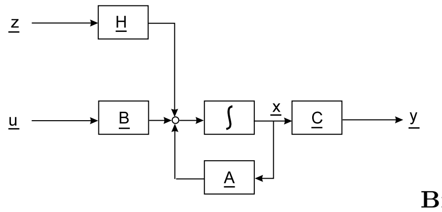


Bild 5.16

5.1.3.3 Störverhalten

- Verhalten des Ausgangssignals $y(t)$ auf ein Störsignal $z(t)$ $z(t)$: z. B. Böen, Scherwind
- Beschreibung wie in Kapitel 5.1.3.2 (Führungsverhalten)
- Die ÜF des Störverhaltens unterscheidet sich von der ÜF des Führungsverhaltens nur durch das Zählerpolynom (gleiches Eigenverhalten)
- Beispiel: Mehrgrößensystem



- Führungs-ÜM
$\underline{G}_F(s) = \frac{\underline{C}(s\underline{I}-\underline{A})_{adj}\underline{B}}{|s\underline{I}-\underline{A}|}$

- Stör-ÜM
$\underline{G}_S(s) = \frac{\underline{C}(s\underline{I}-\underline{A})_{adj}\underline{H}}{|s\underline{I}-\underline{A}|}$

Bild 5.17

$$
\begin{aligned}
\dot{\underline{x}} &= \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} + \underline{H}\,\underline{z} \\
\underline{y} &= \underline{C}\,\underline{x} \\
\underline{Y}(s) &= \underline{C}\,(s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\,[\underline{B}\,\underline{U}(s) + \underline{H}\,\underline{Z}(s)]
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

5.2 Nichtlineare Bewegungsgleichungen

5.2.1 Annahmen

- **Vereinfachungen**

- Bezugssystem:	Erde, eben, ruhend (Inertialsystem)
- Flugzeug:	· starrer Körper · Masse, Trägheitsmomente konstant · Symmetrisch bezüglich xz-Ebene · Kreiselmomente durch Antrieb vernachlässigt
- Anströmung:	quasistationär

- **Kräfte und Momente**

Bewegung wird verursacht durch im Schwerpunkt angreifende Kräfte $\vec{R}$ und Momente $\vec{Q}$ durch

- aerodynamische Wirkungen (aerodynamisches/experim. KS)

$$\vec{R}_a^A = f_1(\rho, M, V_A, \alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}, p_A, q_A, r_A, \xi, \zeta, \eta, \varkappa, \ldots)$$
$$\vec{Q}_a^A = f_2(\rho, M, V_A, \alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}, p_A, q_A, r_A, \xi, \zeta, \eta, \varkappa, \ldots)$$

- Antrieb (flugzeugfestes KS)

$$\vec{R}_f^F = f_3(\rho, M, \alpha, i_F, \delta_F, \ldots)$$

$$\vec{Q}_f^F = f_4(\rho, M, \alpha, i_F, y_F, z_F, \delta_F, \ldots)$$

- Flugzeuggewicht (geodätisches KS)

$$\vec{G}_g$$

- **Wahl des Koordinatensystems**

  Beschreibung der Kraft- und Momentengleichungen im flugzeugfesten Hauptachsensystem, d.h.

  - feste Trägheitsmomente
  - Eulerterme enthalten messbare Größen p_K, q_K, r_K
  - Transformation der aerodynamische Größen über kleine Winkel α, β

  Transformationen

$$\vec{R}_f^A = \underline{M}_{fa}\,\vec{R}_a^A$$
$$\vec{Q}_f^A = \underline{M}_{fa}\,\vec{Q}_a^A$$
$$\vec{G}_f = \underline{M}_{fg}\,\vec{G}_g$$

5.2.2 Differentialgleichungen

5.2.2.1 Geschwindigkeiten

- **Schwerpunktsatz, Impulssatz**

$$m\left(\frac{d\vec{V}_K}{dt}\right)^g = m\left[\left(\frac{d\vec{V}_K}{dt}\right)^f + \vec{\Omega}_K \times \vec{V}_K\right]_f = \underline{M}_{fa}\,\vec{R}_a^A + \vec{R}_f^F + \underline{M}_{fg}\,\vec{G}_g \tag{5.15}$$

Ableitung im Inertialsystem	Ableitung im körperfesten System	Euler-Term

mit

$$\vec{V}_K = \begin{bmatrix} u_K \\ v_K \\ w_K \end{bmatrix} \qquad \vec{\Omega}_K = \begin{bmatrix} p_K \\ q_K \\ r_K \end{bmatrix}$$

Bahngeschwindigkeiten — Drehgeschwindigkeiten

wird

$$\left(\frac{d\vec{V}_K}{dt}\right)_f^f = \begin{bmatrix} \dot{u}_K \\ \dot{v}_K \\ \dot{w}_K \end{bmatrix}_f = \frac{1}{m}\begin{bmatrix} X^A \\ Y^A \\ Z^A \end{bmatrix}_f + \frac{1}{m}\begin{bmatrix} X^F \\ Y^F \\ Z^F \end{bmatrix}_f + \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} g - \begin{bmatrix} q_K w_K & - & r_K v_K \\ r_K u_K & - & p_K w_K \\ p_K v_K & - & q_K u_K \end{bmatrix}_f \tag{5.16}$$

5.2.2.2 Drehgeschwindigkeiten

- **Drehimpulssatz, Drallsatz**

$$\underline{T}_f \left(\frac{d\vec{\Omega}_K}{dt}\right)^g = \left[\underline{T}_f \left(\frac{d\vec{\Omega}_K}{dt}\right)^f + \vec{\Omega}_K \times \underline{T}_f \vec{\Omega}_K\right]_f = \vec{Q}_f^A + \vec{Q}_f^F \tag{5.17}$$

Ableitung im Inertialsystem — Ableitung im körperfesten System — Euler-Term

$$\text{mit} \quad \underline{T}_f = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & -I_{zx} \\ 0 & I_y & 0 \\ -I_{zx} & 0 & I_z \end{bmatrix} \tag{5.18}$$

da für ein symmetrisches Flugzeug $I_{xy} = I_{yz} = 0$ gilt

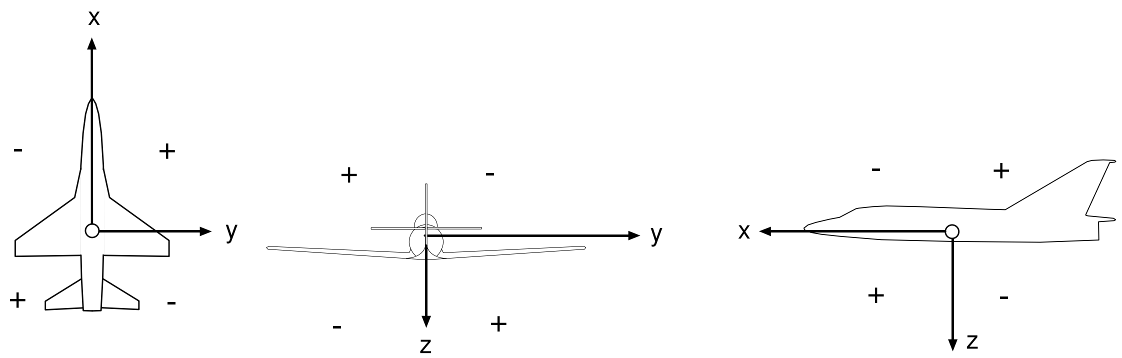


Bild 5.18

$$I_{xy} = I_{yx} = \int xy\, dm = 0 \qquad I_{yz} = I_{zy} = \int zy\, dm = 0 \qquad I_{xz} = I_{zx} = \int zx\, dm \neq 0$$

Damit wird

$$\left(\frac{d\Omega_K}{dt}\right)_f^f = \begin{bmatrix} \dot{p}_K \\ \dot{q}_K \\ \dot{r}_K \end{bmatrix}_f = \underline{T}_f^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} L^A & + & L^F \\ M^A & + & M^F \\ N^A & + & N^F \end{bmatrix}_f - \begin{bmatrix} q_K r_K (I_z - I_y) & - & p_K q_K I_{xz} \\ r_K p_K (I_x - I_z) & + & (p_K^2 - r_K^2) I_{xz} \\ p_K q_K (I_y - I_x) & + & q_K r_K I_{xz} \end{bmatrix}_f \right\} \tag{5.19}$$

$$\text{mit} \qquad \underline{T}_f^{-1} = \frac{1}{I_y(I_x I_z - I_{zx}^2)} \begin{bmatrix} I_y I_z & 0 & I_y I_{zx} \\ 0 & I_x I_z - I_{zx}^2 & 0 \\ I_y I_{zx} & 0 & I_x I_y \end{bmatrix}$$

5.2.2.3 Lagewinkel

$$\frac{d\underline{\phi}}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \underline{M}_{\phi f}\, \vec{\Omega}_K = \begin{bmatrix} 1 & \sin\phi \tan\theta & \cos\phi \tan\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi / \cos\theta & \cos\phi / \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_K \\ q_K \\ r_K \end{bmatrix}_f \tag{5.20}$$

$\underline{\phi}$: Lagewinkel (Eulerwinkel)

$\underline{M}_{\phi f}$: s. Anhang "Koordinatentransformation"

5.2.2.4 Windeinfluss

Die am Flugzeug angreifenden aerodynamischen Kräfte und Momente hängen von der Relativbewegung zwischen dem Flugzeug und der umgebenden Luft ab, d. h.

- von der Relativgeschwindigkeit zwischen Flugzeug ($\vec{V}_K$) und Luft ($\vec{V}_W$)

$$\vec{V}_A = \vec{V}_K - \vec{V}_W \tag{5.21}$$

- von der relativen Drehgeschwindigkeit zwischen Flugzeug ($\vec{\Omega}_K$) und Luft ($\vec{\Omega}_W$)

$$\vec{\Omega}_A = \vec{\Omega}_K - \vec{\Omega}_W \tag{5.22}$$

Die Wirkung des Windes auf die Flugzeugdynamik hängt von der Flugzeugbewegung selbst ab, d. h. beide Prozesse sind verkoppelt (vgl. Kap. 5.3.3).

5.2.2.5 Struktur

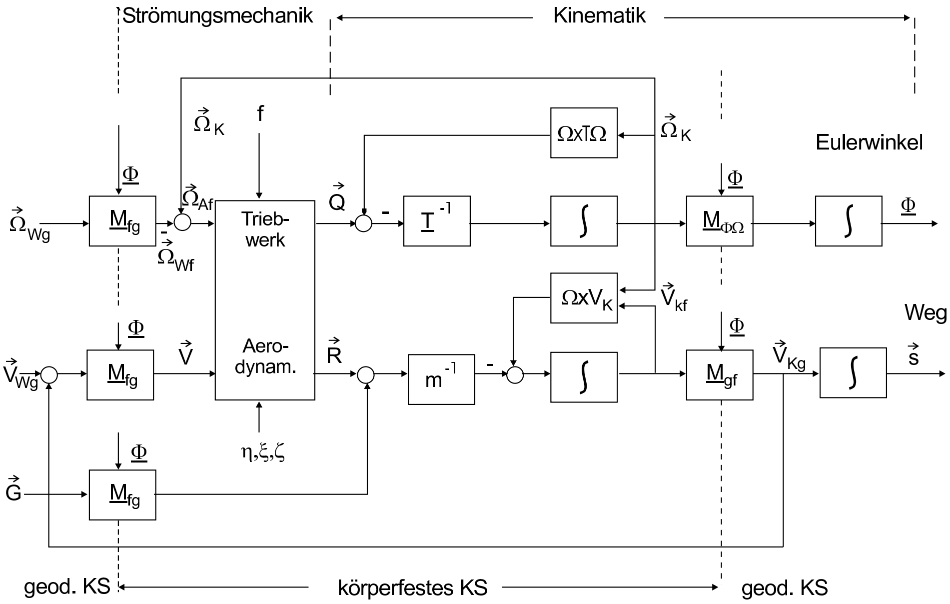


Bild 5.19

- **Eigenschaften**

6 Freiheitsgrade 6 Differentialgleichungen

Eingangsgrößen :	3 Kräfte	$\Big\}$	beeinflusst durch :
	3 Momente		Steuerflächen, Schub
			Wind, Atmosphäre

Ausgangsgrößen : 12 Zustandsgrößen

- Bahngeschwindigkeiten	$\vec{V}_K$	$=$	$[\; u_K \;\; v_K \;\; w_K \;]^T$
- Wegkomponenten	$\vec{s}$	$=$	$[\; x \;\; y \;\; z \;]^T$
- Drehgeschwindigkeiten	$\vec{\Omega}_K$	$=$	$[\; p_K \;\; q_K \;\; r_K \;]^T$
- Lagewinkel	$\underline{\phi}$	$=$	$[\; \phi \;\; \theta \;\; \psi \;]^T$

Rückwirkung der Zustandsvektoren

Zusätzliche Gleichungen für den Windeinfluss

5.3 Lineare Bewegungsgleichungen

- Nichtlineare Bewegungsgleichungen nicht geschlossen lösbar $\longrightarrow$ Numerische Simulation

- Vereinfachungen, damit analytische Rechnungen für Stabilitäts- und Steuerbarkeitsuntersuchungen möglich sind

- Vorgehensweise: Betrachtung von kleinen Abweichungen um einen definierten Betriebszustand (Arbeitspunkt, Flugzustand) $\longrightarrow$ Linearisierung

- Arbeitspunkt: Unbeschleunigter, symmetrischer Geradeausflug. Geschwindigkeitsvektoren liegen in der Symmetrieebene. Stationäre Drehgeschwindigkeiten sind Null

- Linearisierung in 2 Schritten 1. Linearisierung der Dgln (Transformationsmatrizen, Eulerterme) 2. Linearisierung der aerodynamischen Terme

5.3.1 Bezugsflugzustand

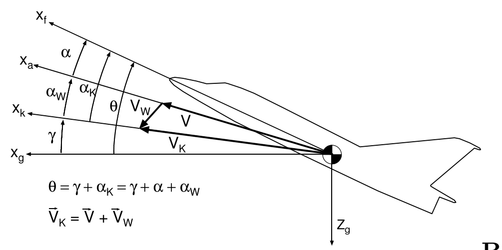


Bild 5.20

$$\vec{V}_W = \vec{0} \qquad \vec{\Omega}_W = \vec{0}$$
$$\vec{\Omega}_K = \vec{0}$$
$$\vec{V}_A = \vec{V}_K = \vec{V}_0$$
$$\beta = \beta_K = \phi = \Psi = \chi = 0$$
$$\gamma = \gamma_0$$
$$\alpha = \alpha_0$$
$$\theta = \theta_0 = \gamma_0 + \alpha_0$$

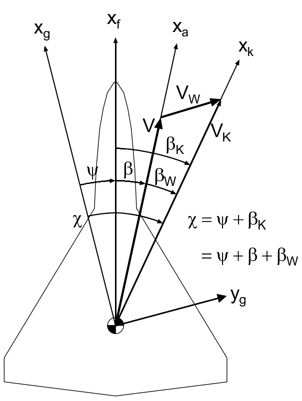


Bild 5.21

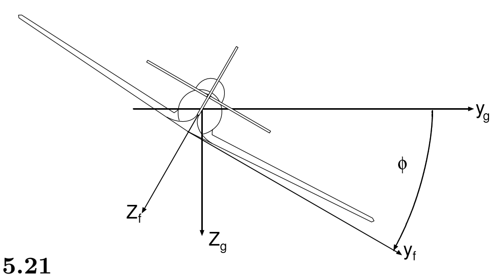


Bild 5.22

5.3.2 Vereinfachte Differentialgleichungen

- **Vereinfachungen**

  - Drehgeschwindigkeitskomponenten p_K, q_K, r_K sind klein

  - Winkel, wie α, β

    α_K, β_K

    α_W, β_W

    $\phi, \theta, \Psi, \gamma$ sind klein

  - Die Windgeschwindigkeit ist klein im Vergleich zur Anströmgeschwindigkeit ($V_W \ll V$

  - Die Bahnbeschleunigung $\dot{V}_K$ ist klein

dann lassen sich Produkte kleiner Größen vernachlässigen und Winkelfunktionen annähern ($\cos x = 1, \sin x = x$)

- **Vereinfachte Transformationen**

$$\underline{M}_{fa} = \begin{bmatrix} 1 & -\beta & -\alpha \\ \beta & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ aerodynamisch $\longrightarrow$ flugzeugfest

$$\underline{M}_{fe} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ experimentell $\longrightarrow$ flugzeugfest

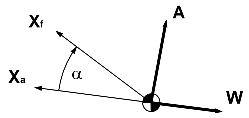
$$\underline{M}_{fg} = \begin{bmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ -\psi & 1 & \phi \\ \theta & -\phi & 1 \end{bmatrix}$$ geodätisch $\longrightarrow$ flugzeugfest

$$\underline{M}_{fk} = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_K & -\alpha_K \\ \beta_K & 1 & \mu_K \\ \alpha_K & -\mu_K & 1 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$ bahnfest $\longrightarrow$ flugzeugfest

$$\underline{M}_{\phi f} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \theta \\ 0 & 1 & -\phi \\ 0 & \phi & 1 \end{bmatrix}$$ flugzeugfeste Drehgeschwindigkeiten $\longrightarrow$Eulerwinkel

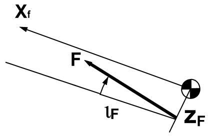
- **Kräfte und Momente**, vereinfacht Längs- und Seitenbewegung entkoppelt

- Aerodynamische Kräfte



$$\vec{R_f}^A = \begin{bmatrix} X^A \\ Y^A \\ Z^A \end{bmatrix}_f = \begin{bmatrix} -W & + & A\,\alpha \\ & Q & \\ -W\,\alpha & - & A \end{bmatrix} \tag{5.24}$$

- Schubkraft/-moment



$$\vec{R_f}^F = \begin{bmatrix} X^F \\ Y^F \\ Z^F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -i_F \end{bmatrix} F \quad \vec{Q}^F = \begin{bmatrix} L^F \\ M^F \\ N^F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ z_F \\ 0 \end{bmatrix} F \tag{5.25}$$

- Gewichtskraft

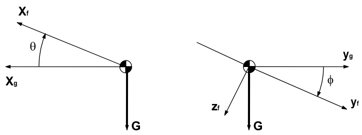


Bild 5.23

$$\vec{G}_f = \begin{bmatrix} -\theta \\ \phi \\ 1 \end{bmatrix} m \cdot g \tag{5.26}$$

- **Eulerterme, vereinfacht**

  - Geschwindigkeiten

$$u_K \approx V_K \qquad \begin{bmatrix} q_K w_K & - & r_K v_K \\ r_K u_K & - & p_K w_K \\ p_K v_K & - & q_K u_K \end{bmatrix}_f \approx \begin{bmatrix} 0 \\ r_K V_K \\ -q_K V_K \end{bmatrix}_f$$

  - Drehgeschwindigkeiten

$$\begin{bmatrix} q_K r_K (I_z - I_y) & - & p_K q_K \\ r_K p_K (I_x - I_z) & + & ({p_K}^2 - {r_K}^2) I_{xz} \\ p_K q_K (I_y - I_x) & + & q_K r_K I_{xz} \end{bmatrix}_f \approx \vec{0} \tag{5.27}$$

- **Vereinfachte nichtlineare Differentialgleichungen**

  - Geschwindigkeiten (aus 5.16)

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_K \\ \dot{v}_K \\ \dot{w}_K \end{bmatrix}_f = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} -W + A\alpha + F \\ Q \\ -W\alpha - A - F_{iF} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\theta \\ \phi \\ 1 \end{bmatrix} g + \begin{bmatrix} 0 \\ -r_K V_K \\ q_K V_K \end{bmatrix}$$

  - Drehgeschwindigkeiten (aus 5.19)

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_K \\ \dot{q}_K \\ \dot{r}_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_z^* & 0 & I_{zx}^* \\ 0 & \frac{1}{I_y} & 0 \\ I_{zx}^* & 0 & I_x^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^A \\ M^A + z_F F \\ N^A \end{bmatrix} \qquad I^* = \frac{I}{I_x I_z - I_{zx}^2}$$

  - Eulerwinkel (aus 5.20)

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \theta \\ 0 & 1 & -\phi \\ 0 & \phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_K \\ q_K \\ r_K \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} p_K \\ q_K \\ r_K \end{bmatrix} \tag{5.28}$$

5.3.3 Windeinfluss

- Stationärer Wind Verändert die Bahngeschwindigkeit und die Flugbahn, hat aber keinen Einfluss auf das dynamische Verhalten des Flugzeugs (s. Winkel und Geschwindigkeiten)

$$\vec{V}_K \;=\; \vec{V} \;+\; \vec{V}_W \qquad\qquad \gamma \;=\; \theta \;-\; \alpha \;-\; \alpha_W \qquad\qquad \chi \;=\; \psi \;+\; \beta \;+\; \beta_W$$

- Änderung des Windes längs der horizontalen Flugbahn

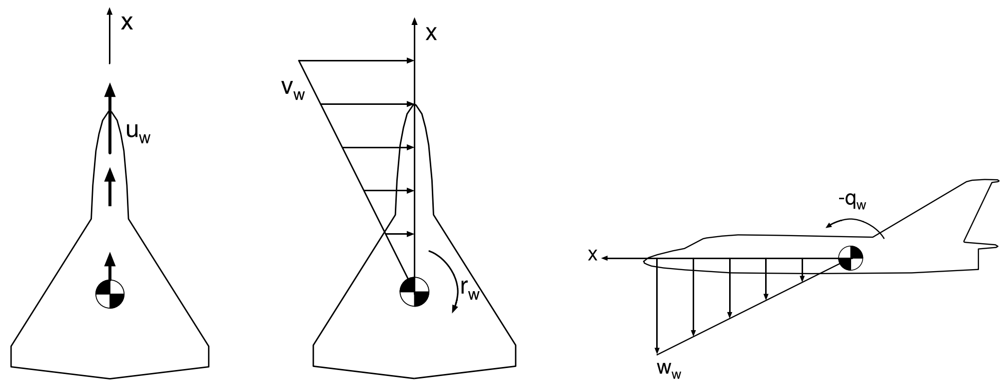


Bild 5.24

$\frac{\delta u_W}{\delta x} \;=\; u_{Wx} \;>\; 0$
zunehmender
Rückenwind

$v_{Wx} \;>\; 0$
zunehmender
Seitenwind

$w_{Wx} \;>\; 0$
zunehmender
Abwind

Umformung: z. B. $u_{Wx} \;=\; \dfrac{\delta u_W}{\delta x}\,\dfrac{dt}{dt} \;=\; \dot{u}_W\,\dfrac{1}{V_K}$ etc.

führt auf:

Translatorischer Wind

$$\dot{\vec{V}}_{Wf} \;\approx\; \dot{\vec{V}}_{Wg} \;=\; \begin{bmatrix} u_{Wx} \\ v_{Wx} \\ w_{Wx} \end{bmatrix}_g V_K \tag{5.29}$$

Rotatorischer Wind

$$\vec{\Omega}_W \;=\; \begin{bmatrix} p_W \\ q_W \\ r_W \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} 0 \\ -w_{Wx} \\ v_{Wx} \end{bmatrix} \tag{5.30}$$

5.3.4 Umformung

- **Wechsel der Zustandsgrößen** (Kartesische Koordinaten $\longrightarrow$ Polarkoordinaten)

Bahngeschwindigkeit
$$\vec{V}_{Kf} = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_K \\ \alpha_K \end{bmatrix} V_K \qquad (5.31)$$

Bahnbeschleunigung
$$\left(\frac{d\vec{V}_K}{dt}\right)_f = \begin{bmatrix} \dot{V}_K \\ \dot{\beta}_K\, V_K \\ \dot{\alpha}_K\, V_K \end{bmatrix} \qquad (\dot{V}_K \text{ klein}) \qquad (5.32)$$

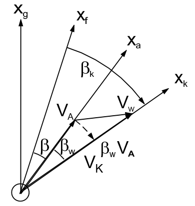


Bild 5.25

Windgeschwindigkeit
$$\vec{V}_{Wf} = \begin{bmatrix} u_W \\ v_W \\ w_W \end{bmatrix}_f = \begin{bmatrix} V_K \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ \beta_W \\ \alpha_W \end{bmatrix} V_A \qquad (5.33)$$

Windbeschleunigung
$$\dot{\vec{V}}_{Wf} = \begin{bmatrix} \dot{V}_W \\ \dot{\beta}_W\, V_A \\ \dot{\alpha}_W\, V_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{Wx} \\ v_{Wx} \\ w_{Wx} \end{bmatrix} V_K \quad (\dot{V}_A \text{ klein}) \qquad (5.34)$$

- Längsbewegung, vereinfacht

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_K \\ \dot{\alpha}_K V_K \\ \dot{q}_K \\ \dot{\theta} \\ --- \\ \dot{V}_W \\ \dot{\alpha}_W V_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m}\,(-W + \alpha A + F) \, - \, g\,\theta \\ -\frac{1}{m}\,(\alpha W + A + i_F F) \, + \, g \quad + \, q_K V_K \\ \frac{1}{I_y}\,(M^A + z_F F) \\ q_K \\ ---------------- \\ u_{Wx} V_K \\ w_{Wx} V_K \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{x-Kräfte} \\ \text{z-Kräfte} \\ \text{Nickmomente} \\ \text{Eulerwinkel} \\ \\ \text{Windänderung horizontal} \\ \text{Windänderung vertikal} \end{matrix} \qquad (5.35)$$

- Seitenbewegung, vereinfacht

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta}_K V_K \\ \dot{p}_K \\ \dot{r}_K \\ \dot{\phi} \\ --- \\ \dot{\beta}_W V_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m}\,Q \qquad + \, \phi\, g \quad - \, r_K V_K \\ I_z^*\, L^A \, + \, I_{zx}^* N^A \\ I_{zx}^*\, L^A \, + \, I_x^* N^A \\ p_K \\ --------------- \\ v_{Wx} V_K \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{y-Kräfte} \\ \text{Rollmomente} \\ \text{Giermomente} \\ \text{Eulerwinkel} \\ \\ \text{Windänderung lateral} \end{matrix} \qquad (5.36)$$

5.3.5 Linearisierung

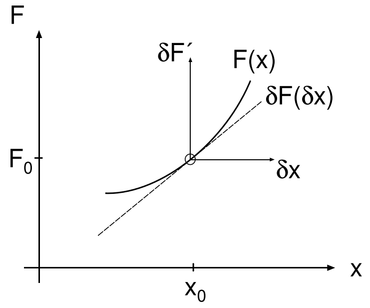
- Aufteilung einer Funktion F in den Wert am Arbeitspunkt F_0 und eine kleine Abweichung δF

$$F \; = \; F_0 \; + \; \delta F$$

durch Taylorreihen-Entwicklung

$$F(x, y, \ldots) \; = \; F_0(x, y, \ldots) \; + \; \left[\frac{\delta F}{\delta x}\,\delta x \; + \; \frac{\delta F}{\delta y}\,\delta y \; + \ldots\right]_0 \; + \; \underbrace{\text{Rest}}_{\longrightarrow 0} \qquad (5.37)$$

Beispiel



$$\delta F \;=\; \frac{\delta F}{\delta x}\Big|_0 \; \delta x$$
$$\;=\; F_x \, \delta x$$

Bild 5.26

- Nur die Abweichung wird weiter betrachtet

5.3.5.1 Längsbewegung

- **Linearisierung X-Kraft-Gleichung**

$$\dot{V}_K \;=\; \frac{1}{m}\,(\,-W \;+\; \alpha\, A \;+\; F\,) \;-\; g\,\theta \qquad \text{s. (5.35)}$$

- Kleine Abweichungen ($m, g = \text{const}$)

$$\begin{aligned}
&(\dot{V}_{K_0} \;+\; \delta\dot{V}_K) \;= \\
&=\; \frac{1}{m}\,[\,-\,(\,W_0 \;+\; \delta W\,) \;+\; (\,\alpha_0 \;+\; \delta\alpha\,)\,(\,A_0 \;+\; \delta A\,) \;+\; (\,F_0 \;+\; \delta F\,)\,] \;-\; g\,(\,\theta_0 \;+\; \delta\theta\,) \\
&=\; \frac{1}{m}\,[\,-\,(\,W_0 \;+\; \delta W\,) \;+\; \alpha_0\,A_0 \;+\; \delta\alpha\,A_0 \;+\; \alpha_0\,\delta A \;+\; (\,F_0 \;+\; \delta F\,)\,] \;-\; g\,(\,\theta_0 \;+\; \delta\theta\,)
\end{aligned}$$

- Arbeitspunkt

$$\dot{V}_{K_0} \;=\; 0 \;=\; \frac{1}{m}\,(\,-\,W_0 \;+\; \alpha_0\,A_0 \;+\; F_0\,) \;-\; g\,\theta_0$$

- Differenz

$$\delta\dot{V}_K \;=\; \frac{1}{m}\,(\,-\,\delta W \;+\; \delta\alpha\,A_0 \;+\; \alpha_0\,\delta A \;+\; \delta F\,) \;-\; g\,\delta\theta \tag{5.38}$$

- Abweichungen (Linearisierung der Kräfte)

$$W \;=\; \frac{\rho}{2}\,V_A^2\,S\,C_W\,(\,M,\;\alpha,\;\dot{\alpha},\;q_A,\;\eta\,) \;=\; W_0 \;+\; \delta W$$

$$A \;=\; \frac{\rho}{2}\,V_A^2\,S\,C_A\,(\,M,\;\alpha,\;\dot{\alpha},\;q_A,\;\eta\,) \;=\; A_0 \;+\; \delta A$$

$$\begin{aligned}
\delta W \quad &=\; \frac{\delta W}{\delta V_A}\Big|_0 \,\delta V_A \;+\; \frac{W}{M}\Big|_0 \,\delta M \;+\; \frac{W}{\alpha}\Big|_0 \,\delta\alpha \;+\; \frac{W}{\dot{\alpha}}\Big|_0 \,\delta\dot{\alpha} \;+\; \ldots \\
&= \rho\,V_0\,S\,C_{W_0}\,\delta V_A \;+\; \frac{\rho}{2}\,V_0{}^2\,S\,(\,\underbrace{\frac{\delta C_W}{\delta M}\,\frac{\delta M}{\delta V_A}}_{C_{WM}\,\frac{1}{a}}\,\delta V_A \;+\; \underbrace{\frac{\delta C_W}{\delta\alpha}}_{C_{W\alpha}}\,\delta\alpha \;+\; \underbrace{\frac{\delta C_W}{\delta(\frac{l_\mu}{V_0}\,\dot{\alpha})}}_{C_{W\dot{\alpha}}}\,\frac{l\mu}{V_0}\,\delta\dot{\alpha} \;+\; \ldots\,) \\
\delta A \quad &= \rho\,V_0\,S\,C_{A_0}\,\delta V_A \;+\; \frac{\rho}{2}\,V_0{}^2\,S\,(\,C_{AM}\,\frac{1}{a}\,\delta V_A \;+\; C_{A\alpha}\,\delta\alpha \;+\; C_{A\dot{\alpha}}\,\frac{l_\mu}{V_0}\,\delta\dot{\alpha} \;+\; \ldots\,)
\end{aligned}$$

$$\delta F \;=\; \frac{deltaF}{deltaM}\,\delta M \;+\; \frac{\delta F}{\delta f}\,\delta f \;=\; F_M\,\delta M \;+\; F_f\,\delta f \tag{5.39}$$

- In Gleichung für X-Kraft-Abweichungen eingesetzt

$$\begin{aligned}\delta\dot{V}_K \;=\; -\Big\{ & \frac{\rho\, V_0\, S}{m}\, C_{W_0}\,\delta V_A \;+\; \frac{\rho\, {V_0}^2\, S}{2\,m}\,\Big[C_{WM}\,\frac{1}{a}\,\delta V_A \;+\; C_{W\alpha}\,\delta\alpha \;+\; C_{W\eta}\,\delta\eta \;+ \\ & +\; \frac{l_\mu}{V_0}\,(\, C_{W\dot{\alpha}}\,\delta\dot{\alpha} \;+\; C_{Wq}\,\delta q_A\,)\Big]\Big\} + \frac{\rho\, {V_0}^2\, S}{2\,m}\, C_{A_0}\,\delta\alpha \\ & +\; \alpha_0 \Big\{ \frac{\rho\, V_0\, S}{m}\, C_{A_0}\,\delta V_A \;+\; \frac{\rho\, {V_0}^2\, S}{2\,m}\,\Big[C_{AM}\,\frac{1}{a}\,\delta V_A \;+\; C_{A\alpha}\,\delta\alpha \;+\; C_{A\eta}\,\delta\eta \;+ \\ & +\; \frac{l_\mu}{V_0}\,(\, C_{A\dot{\alpha}}\,\delta\dot{\alpha} \;+\; C_{A_q}\,\delta q_A\,)\Big]\Big\} \;+\; \frac{F_f}{m}\,\frac{1}{a}\,\delta V_A \;+\; F_f\,\delta f - g\delta\Theta\end{aligned}$$

- Terme mit gleichen Variablen zusammengefasst

$$\begin{aligned}\delta\dot{V}_K \;=\; & \Big\{ \frac{\rho\, {V_0}^2\, S}{2\,m}\,\Big[-\frac{2}{V_0}\, C_{W_0} \;-\; \frac{1}{a}\, C_{WM} \;+\; \alpha_0\,(\,\frac{2}{V_0}\, C_{A_0} \;+\; \frac{1}{a}\, C_{AM}\,)\Big] \;+\; \frac{1}{a}\,\frac{F_M}{m} \Big\}\,\delta V_A \\ & +\; \frac{\rho\, {V_0}^2\, S}{2\,m}\,\Big[-\, C_{W\alpha} \;+\; C_{A_0} \;+\; \alpha_0\, C_{A\alpha}\Big]\,\delta\alpha \\ & +\; \frac{\rho\, V_0\, l_\mu\, S}{2\,m}\Big[-\, C_{W\dot{\alpha}} \;+\; \alpha_0\, C_{A\dot{\alpha}}\Big]\,\delta\dot{\alpha} \\ & +\; \frac{\rho\, V_0\, l_\mu\, S}{2\,m}\Big[-\, C_{Wq} \;+\; \alpha_0\, C_{Aq}\Big]\,\delta q_A \\ & +\; \frac{\rho\, {V_0}^2\, S}{2\,m}\,\Big[-\, C_{W\eta} \;+\; \alpha_0\, C_{A\eta}\Big]\,\delta\eta \\ & +\; \frac{F_f}{m}\,\delta f \;-\; g\,\delta\theta\end{aligned}$$

- Abgekürzt

$$\delta\dot{V}_K \;=\; X_u\;\delta V_A \;+ X_\alpha\;\delta\alpha \;+ X_{\dot{\alpha}}\;\delta\dot{\alpha} \;+ X_q\;\delta q_A \;+ X_\eta\;\delta\eta \;+ X_f\;\delta f \;+ X_\theta\;\delta\theta \tag{5.40}$$

X_i: Gleichungskoeffizienten, "Ersatzgrößen" (s. Anhang 9.2)

Dimension z. B. $\big[\, X_u \big] \;=\; \frac{m/s^2}{m/s} \;=\; \frac{1}{s}$ etc.

- **Linearisierung Z-Kraft-Gleichung**

- Vorgehen wie bei X-Kraft-Gleichung führt auf

$$V_0\,\delta\dot{\alpha}_K \;+\; \alpha_0\,\delta\dot{V}_K \;= Z'_u\,\delta V_A \;+\; Z'_\alpha\,\delta\alpha \;+\; Z'_{\dot{\alpha}}\,\delta\dot{\alpha} + \; Z'_q\,\delta q_A \;+\; Z'_\eta\,\delta\eta + \; Z'_f\,\delta f \;+\; Z'_\theta\,\delta\theta \;+\; V_0\,\delta q_K$$

$$\alpha_0\,\delta\dot{V}_K \;\approx\; 0$$

- Zustandsschreibweise (nur eine Ableitung auf linker Seite)

$$\begin{aligned}\delta\dot{\alpha}_K \;&=\; \frac{1}{V_0}\left[\,Z_u{}'\;\;\delta V_A \;+\;\; Z_\alpha{}'\;\;\delta\alpha \;+\; \ldots \;+\; V_0\,\delta q_K\right]\\ &=\; Z_u\,\delta V_A \;+\; Z_\alpha\,\delta\alpha \;+\; Z_{\dot{\alpha}}\,\delta\dot{\alpha} \;+\; Z_q\,\delta q_A \;+\; Z_\eta\,\delta\eta \;+\; Z_f\,\delta f \;+\; Z_\theta\,\delta\theta \;+\; \delta q_K \qquad (5.41)\end{aligned}$$

Die Terme mit $\dot{\alpha}$ in X- und Z-Kraftgleichung müssten für eine Zustandsschreibweise ebenfalls eliminiert werden. Da für Drachenflugzeuge $c_{A\dot{\alpha}}$, $c_{W\dot{\alpha}}$ i. a. klein sind, werden $X_{\dot{\alpha}}$ und $Z_{\dot{\alpha}}$ in den linearisierten Gleichungen vernachlässigt. Gleiches gilt für X_q und Z_q.

- **Linearisierung Nickmomenten-Gleichung**

$$\begin{aligned}\delta\dot{q_K} \;&= \frac{1}{I_y}\left\{\frac{\rho}{2}\,{V_0}^2\,S\,l_\mu\left[\left(\,\frac{2}{V_0}\,C_{m_0} \;+\; \frac{1}{a}\,C_{mM}\,\right)\delta V_A \;+\; C_{m\alpha}\,\delta\alpha \;+\; C_{m\eta}\,\delta\eta\right.\right.\\ &\qquad\left.\left. +\;\frac{l_\mu}{V_0}\,\left(\,C_{m\dot{\alpha}}\,\delta\dot{\alpha} \;+\; C_{mq}\,\delta q_A\,\right)\right] \;+\; z_F\,\left(\,F_M\,\frac{1}{a}\,\delta V_A \;+\; F_f\,\delta f\,\right)\right\}\\ &=\; M_u\,\delta V_A \;\;+\; M_\alpha\,\delta\alpha \;\;+\; M_{\dot{\alpha}}\,\delta\dot{\alpha} \;\;+\; M'_q\,\delta q_A \;\;+\; M_\eta\,\delta\eta \;\;+\; M_f\,\delta f\end{aligned}$$

Ersetzen von $\delta\dot{\alpha}$: Für $\gamma = 0$ ist

$\dot{\theta} \;=\; q_K$ s.(5.35) $\qquad$ $q_A = q_K \;+\; w_{Wx}$ s.(5.30)

$\dot{w}_{Wg} \;=\; w_{Wx}\,V_K$ s.(5.29) $\qquad$ $\dot{\alpha} \;=\; \dot{\theta} \;-\; \frac{\dot{w}_{Wg}}{V_A}$

$\alpha \;=\; \theta \;-\; \frac{1}{V_A}\,w_{Wg}$ $\qquad$ $\;=\; q_K \;-\; w_{Wx}$ ($\dot{V}_A$ klein)

Damit

$$\begin{aligned}M'_q\,\delta q_A \;+\; M_{\dot{\alpha}}\,\delta\dot{\alpha} \;&=\; M'_q\,\left(\,\delta q_K \;+\; \delta w_{Wx}\,\right) \;+\; M_{\dot{\alpha}}\,\left(\,\delta q_K \;-\; \delta w_{Wx}\,\right)\\ &=\; M_q\,\delta q_K \;+ M_{Wx}\,\delta w_{Wx}\end{aligned}$$

mit $M_q \;=\; M'_q \;+\; M_{\dot{\alpha}}$ $\qquad$ $M_{Wx} \;=\; M'_q \;-\; M_{\dot{\alpha}}$

Momentengleichung

$$\delta \dot{q}_K = M_u\, \delta V_A + M_\alpha\, \delta\alpha + M_q\, \delta q_K + M_\eta\, \delta\eta + M_f\, \delta f + M_{Wx}\, \delta w_{Wx} \tag{5.42}$$

- **Windgleichungen**

$$\begin{aligned} \delta \dot{V}_W &= \delta u_{Wx}\, V_0 \\ \delta \dot{\alpha}_W &= \delta w_{Wx} \end{aligned} \tag{5.43}$$

- **Vereinfachungen**

  - δ zur Kennzeichnung kleiner Abweichungen wird weggelassen

  - Keine unterschiedliche Bezeichnung für Ersatzgrößen und direkte Derivative, keine Verwechslungsgefahr

  - Matrizenschreibweise (lineare Zustandsdifferentialgleichungen) Zustandsvektor $\underline{x}$, Eingangsvektor $\underline{u}$, Ausgangsvektor $\underline{y}$ Die Reihenfolge der Zustandsgrößen orientiert sich an den dynamischen Eigenschaften, dazu s. Kap. 6

- **Lineare Zustandsgleichungen der Längsbewegung**

$(\, \dot{\underline{x}} = \underline{A}\, \underline{x} + \underline{B}\, \underline{u} \;; \quad \underline{y} = \underline{C}\, \underline{x}\,)$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_K \\ \dot{\alpha}_K \\ \dot{V}_K \\ \dot{\theta} \\ -- \\ \dot{V}_W \\ \dot{\alpha}_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_q & M_\alpha & M_u & 0 & | & -M_u & -M_\alpha \\ 1 & Z_\alpha & Z_u & 0 & | & -Z_u & -Z_\alpha \\ 0 & X_\alpha & X_u & X_\theta & | & -X_u & -X_\alpha \\ 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_K \\ \alpha_K \\ V_K \\ \theta \\ -- \\ V_W \\ \alpha_W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_f & M_\eta & | & 0 & M_{Wx} \\ Z_f & Z_\eta & | & 0 & 0 \\ X_f & X_\eta & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ -- & -- & -- & -- & -- \\ 0 & 0 & | & V_0 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ \eta \\ u_{Wx} \\ w_{Wx} \end{bmatrix} \tag{5.44}$$

$$\begin{bmatrix} V_A \\ \alpha \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & | & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}$$

5.3.5.2 Seitenbewegung

- **Linearisierung Y-Kraft-Gleichung**

$$\begin{aligned} \delta\dot{\beta}_K\, V_0 &= \frac{1}{m}\, \delta Q + g\, \delta\phi - V_0\, \delta r_K \\ Q &= \frac{\rho}{2}\, {V_0}^2\, S\, C_Q\, (\beta,\, \dot{\beta},\, p_A,\, r_A,\, \xi,\, \zeta) \\ \delta\dot{\beta}_K &= Y_\beta\, \delta\beta + \underbrace{Y_{\dot{\beta}}\, \delta\dot{\beta} + Y_p\, \delta p_A + Y_r\, \delta r_A + Y_\xi\, \delta\xi}_{\approx 0} + Y_\zeta\, \delta\zeta + \frac{g}{V_0}\, \delta\phi - \delta r_K \\ &\approx Y_\beta\, \delta\beta + Y_\zeta\, \delta\zeta + \frac{g}{V_0}\, \delta\phi - \delta r_K \qquad \text{Ersatzgrößen s. Anhang 9.2} \end{aligned} \tag{5.45}$$

- **Linearisierung Rollmomenten-Gleichung**

$$\begin{aligned} \delta\dot{p}_K &= {I_z}^*\, \delta L^A + {I_{zx}}^*\, \delta N^A \\ &= {I_z}^*\, \frac{\rho}{2}\, {V_0}^2\, S\, s\, \left[C_{l\beta}\, \delta\beta + C_{lp}\, \frac{s}{V_0}\, \delta p_A + \ldots + C_{l\zeta}\, \delta\zeta \right] \\ &\quad + {I_{zx}}^*\, \frac{\rho}{2}\, {V_0}^2\, S\, s\, \left[C_{n\beta}\, \delta\beta + C_{np}\, \frac{s}{V_0}\, \delta p_A + \ldots + C_{n\zeta}\, \delta\zeta \right] \\ &= \frac{\rho/2\, {V_0}^2\, S\, s}{I_x\, I_z - {I_{zx}}^2} \left[(\, C_{l\beta}\, I_z + C_{n\beta}\, I_{zx}\,)\, \delta\beta + (\, C_{lp}\, I_z + C_{np}\, I_{zx}\,)\, \frac{s}{V_0}\, \delta p_A + \ldots \right] \\ &= L_\beta\, \delta\beta + L_{\dot{\beta}}\, \delta\dot{\beta} + L_p\, \delta p_A + L_r\, \delta r_A + L_\xi\, \delta\xi + L_\zeta\, \delta\zeta \end{aligned} \tag{5.46}$$

- **Linearisierung Giermomenten-Gleichung**

$$\begin{aligned} \delta\dot{r}_K &= I_{zx}{}^* \, L^A \; + \; I_x{}^* \, N^A \\ &= \frac{\rho/2 \, V_0{}^2 \, S \, s}{I_{xz}} \; - \; I_{zx}{}^2 \; \left[\, (\, C_{l\beta} \, I_{zx} \; + \; C_{n\beta} \, I_x \,) \, \delta\beta \; + \; \ldots \right] \\ &= N_\beta \, \beta \; + \; N_{\dot\beta} \, \dot\beta \; + \; N_p \, \delta p_A \; + \; N_r \, \delta r_A \; + \; N_\xi \, \delta\xi \; + \; N_\zeta \, \delta\zeta \end{aligned} \tag{5.47}$$

- **Windgleichung**

$$\delta\dot{\beta}_W \; = \; v_{Wx} \tag{5.48}$$

- **Umformungen/Vereinfachungen**

  $\dot\beta$-Terme vernachlässigt

  $p_A \; = \; p_K \qquad (p_W \; = \; 0)$

  $r_A \; = \; r_K \; - \; r_W \; = \; r_K \; - \; v_{Wx}$

  δ weggelassen

  Matrizenschreibweise, Reihenfolge der Zustandsgrößen entsprechend der dynamischen Eigenschaften (vgl. Kap. 7)

- **Lineare Zustandsgleichungen der Seitenbewegung**

  $(\, \underline{\dot{x}} \; = \; \underline{A} \, \underline{x} \; + \; \underline{B} \, \underline{u} \; ; \quad \underline{y} \; = \; \underline{C} \, \underline{x} \,)$

$$\begin{bmatrix} \dot r_K \\ \dot\beta_K \\ \dot p_K \\ \dot\phi \\ -- \\ \dot\beta_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_r & N_\beta & N_p & 0 & | & -N_\beta & \\ -1 & Y_\beta & 0 & Y_\phi & | & -Y_\beta & \\ L_r & L_\beta & L_p & 0 & | & -L_\beta & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & \\ -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_K \\ \beta_K \\ p_K \\ \phi \\ -- \\ \beta_W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_\xi & N_\zeta & -N_r \\ 0 & Y_\zeta & 0 \\ L_\xi & L_\zeta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \zeta \\ v_{Wx} \end{bmatrix} \tag{5.49}$$

$$\beta \; = \; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{x}$$

5.4 Derivative (Ergänzung)

- **Übersicht** Beiwertderivative

		M	α	$\dot\alpha$	q_A	η	β	$\dot\beta$	p_A	r_A	ξ	ζ
	X	C_{WM}	$C_{W\alpha}$	-	-	$C_{W\eta}$						
LB	Z	C_{AM}	$C_{A\alpha}$	-	-	$C_{A\eta}$						
	M	C_{mM}	$C_{m\alpha}$	$C_{m\dot\alpha}$	C_{mq}	$C_{m\eta}$						
SB	Y						$C_{Q\beta}$	-	-	-	-	$C_{Q\zeta}$
	L						$C_{l\beta}$	-	C_{lp}	C_{lr}	$C_{l\xi}$	$C_{l\zeta}$
	N						$C_{n\beta}$	-	C_{np}	C_{nr}	$C_{n\xi}$	$C_{n\zeta}$

- **Machzahlabhängigkeit** $(C_{WM},\ C_{AM},\ C_{mM})$

  Kompressibilitätseinfluss Wesentlich erst im hohen Unterschall ($M > 0.7$)

- **Abwindverzögerung** $(C_{m\dot{\alpha}})$

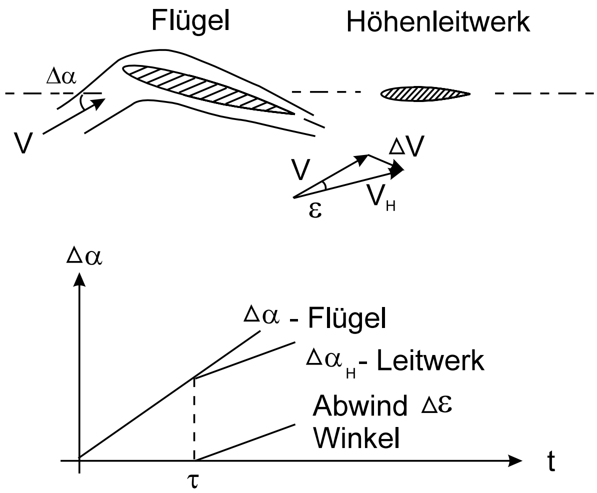


Bild 5.27

Bei Änderung des Anstellwinkels $\Delta\alpha$ tritt die Änderung des Abwindwinkels $\Delta\varepsilon$ durch die Laufzeit τ verzögert auf. Der während der Zeit τ vorhandene zusätzliche Auftrieb wirkt der Nickbewegung entgegen (Dämpfungserhöhung).

6 Dynamik der Längsbewegung

6.1 Signalflussdiagramm

Zustandsgleichung der Längsbewegung, ohne Wind ($V = V_K$)

Längsneigung θ ersetzt durch Bahnwinkel γ $\quad (\theta = \gamma + \alpha)$

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\alpha} \\ - \\ \dot{V} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} M_q & M_\alpha & | & M_u & 0 \\ 1 & Z_\alpha & | & Z_u & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & X_\alpha - g & | & X_u & -g \\ 0 & -Z_\alpha & | & -Z_u & 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\uparrow \\ \text{2 gekoppelte Schwingungen}}} \begin{bmatrix} q \\ \alpha \\ - \\ V \\ \gamma \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} (M_f) & (M_\varkappa) & M_\eta \\ (Z_f) & Z_\varkappa & (Z_\eta) \\ - & - & - \\ X_f & (X_\varkappa) & (X_\eta) \\ (-Z_f) & -Z_\varkappa & (-Z_\eta) \end{bmatrix}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Haupteinflüsse} \\ \text{in Stellmatrix} \\ \text{ohne Klammern}}} \begin{bmatrix} f \\ \varkappa \\ \eta \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

$\varkappa$: Auftriebsklappen-Winkel

- **Signalfluss Längsbewegung** (vereinfacht, ohne Wind)

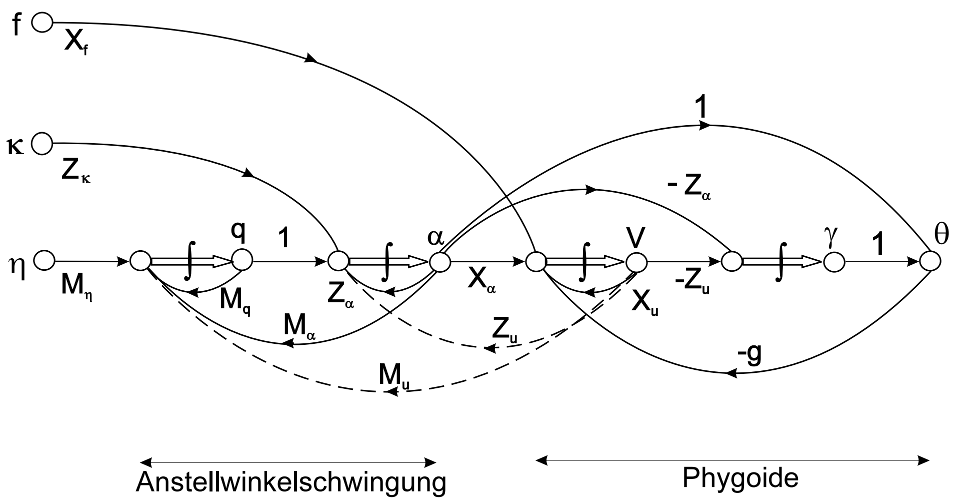


Bild 6.1

6.2 Sprungantworten

Beispielflugzeug Dornier Do 328

- **Flugzeugdaten**:

Flügelfläche	S	$=$	40	m^2
Bezugsflügeltiefe	$l\mu$	$=$	2.04	m
Halbspannweite	$b/2$	$=$	10.4	m
Masse	m	$=$	10500	kg
Maximalschub	F	$=$	27350	N

- **Flugzustand**: Reiseflug

Höhe	H	$=$	914	m
Geschwindigkeit	V	$=$	144	m/s
Bahnwinkel	γ	$=$	0	$grad$

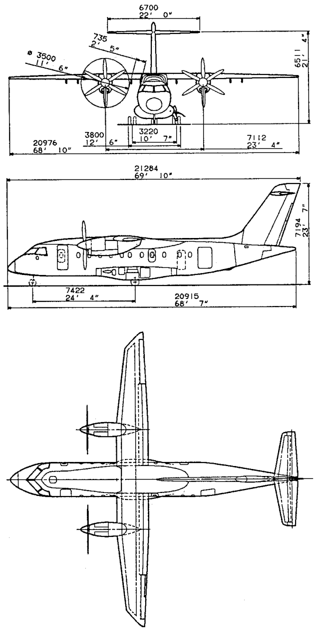


Bild 6.2

- **Sprungantworten Längsbewegung** Do 328, Reiseflug

Kurzzeitverhalten

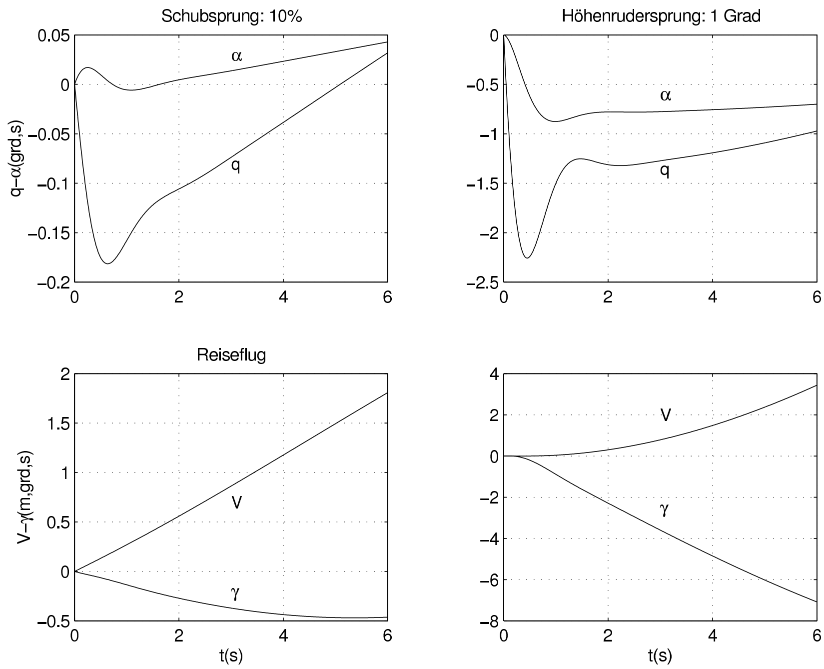


Bild 6.3

- **Sprungantworten Längsbewegung** Do 328, Reiseflug

Langzeitverhalten

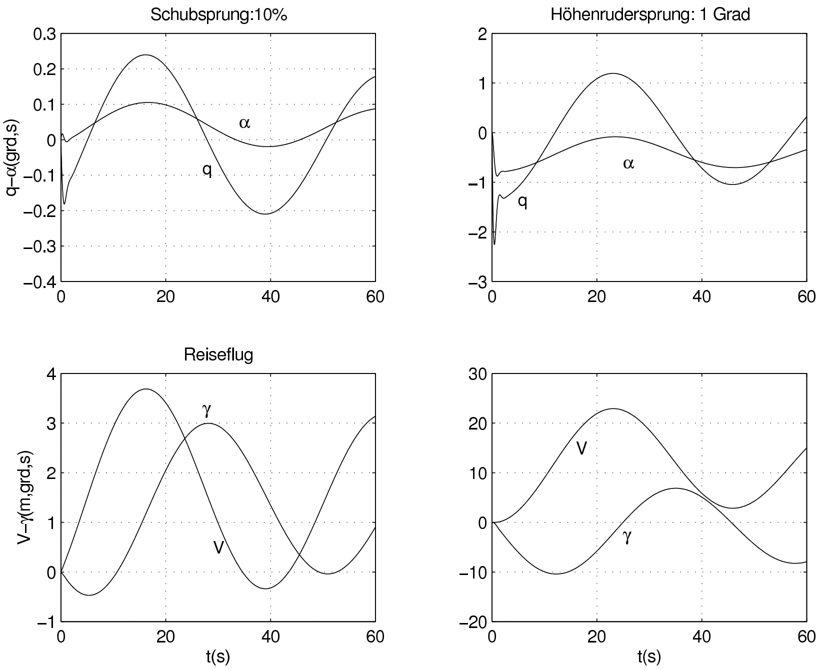
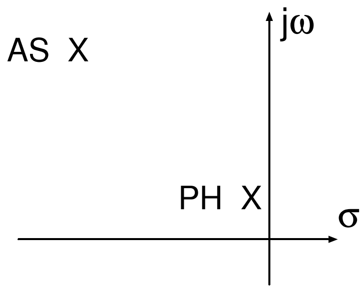


Bild 6.4

6.3 Eigenverhalten

Lösung der charakteristischen Gleichung $\quad | \, s \underline{I} - \underline{A} \, | \; = \; 0$:
2 konjugiert komplexe Pol-Paare



Typische Frequenzen:

AS : 0.5 Hz
PH : 0.02 Hz

daher i. a. getrennte Betrachtung von Anstellwinkel- und Bahnbewegung möglich

AS : <u>Anstellwinkelschwingung</u>
Schnelle Drehschwingung um y-Achse
i. a. gut gedämpft

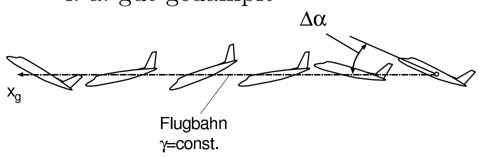


Bild 6.5

PH : <u>Phygoide</u>
Langsame Bahnschwingung
meist schlecht gedämpft

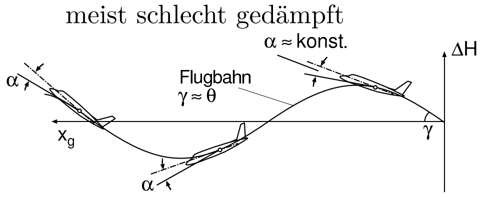


Bild 6.6

6.3.1 Anstellwinkelschwingung

- **Zustandsgleichung** für die Näherung der AS

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_q & M_\alpha \\ 1 & Z_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_\eta & (M_\varkappa) \\ (Z_\eta) & Z_\varkappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \varkappa \end{bmatrix} \tag{6.2}$$
$$\underline{\dot{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{B} \cdot \underline{u}$$

- Do 328 **Kurzzeitverhalten** 4. Ordnung, Näherung 2. Ordnung

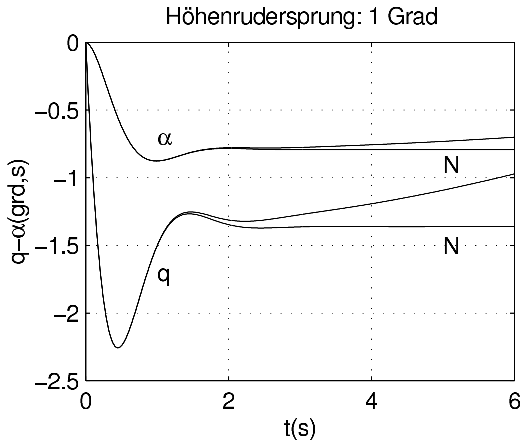


Bild 6.7

- **Signalflussdiagramm** AS-Näherung

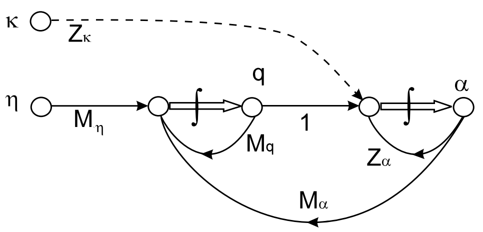


Bild 6.8

Kopplung zwischen den Integratoren (M_α) bestimmt Frequenz
Rückkopplung über die Integratoren (M_q, Z_α) bestimmt die Dämpfung (vgl. Schwinger, Bild 5.3)

- **Charakteristische Gleichung** Nennerpolynom der Übertragungsmatrix (vgl. Gl. (5.4))

$$|\, s\,\underline{I} - \underline{A}\,| = \left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_q & M_\alpha \\ 1 & Z_\alpha \end{bmatrix} \right|$$

$$\begin{vmatrix} s - M_q & -M_\alpha \\ -1 & s - Z_\alpha \end{vmatrix} = (s - M_q)(s - Z_\alpha) - M_\alpha = s^2 - (M_q + Z_\alpha)\, s + (M_q\, Z_\alpha - M_\alpha) \tag{6.3}$$

- Die charakteristische Gleichung eines Schwingers ist

$$N(s) = [\, s - (\sigma + j\omega)\,][\, s - (\sigma - j\omega)\,] = s^2 - 2\sigma s + \sigma^2 + \omega^2 \tag{6.4}$$
$$= s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2$$

$$\text{mit} \qquad \omega_0 = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$$

- Koeffizientenvergleich von (6.3-2) und (6.3-3) ergibt die charakteristischen Größen

$$\begin{aligned} &\text{- Eigenfrequenz} && \omega_{0AS} = \sqrt{M_q Z_\alpha - M_\alpha} \\ &\text{- Dämpfungsexponent} && \sigma_{AS} = \frac{1}{2}(M_q + Z_\alpha) \\ &\text{- Dämpfungsgrad} && D_{AS} = -\frac{\sigma_{AS}}{\omega_{0AS}} \end{aligned} \tag{6.5}$$

Zur Erinnerung:

$M_\alpha = \bar{q}\,\frac{S\,l_\mu}{I_y}\,C_{m\alpha}$ ”Feder-Wirkung”

$C_{m\alpha}$ Kenngröße der statischen Stabilität

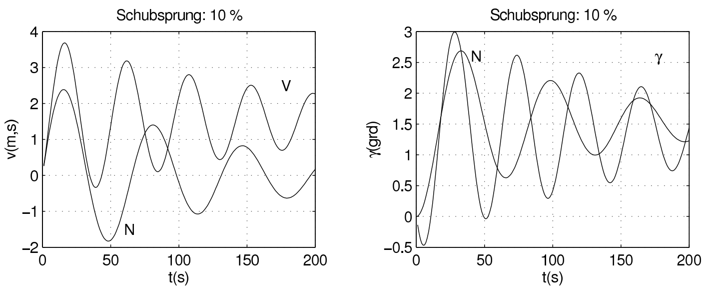
6.3.2 Phygoide

- **Zustands-Differentialgleichungen** für die Näherung

$$\begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_u & -g \\ -Z_u & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_f \\ 0 \end{bmatrix} f \tag{6.6}$$

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{B} \cdot \underline{u} \tag{6.7}$$

- **Sprungantworten** (Do 328, Reiseflug, System 4. Ordnung, System 2. Ordnung)



N: Näherung

Bild 6.9

- ständiger Austausch von kinetischer und potentieller Energie

- **Signalflussdiagramm**

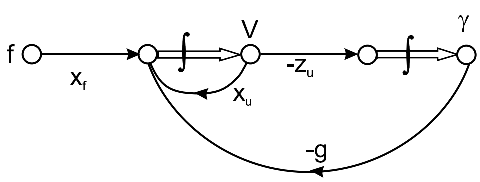


Bild 6.10

- **Charakteristische Gleichung**

$$|\,s\,\underline{I} - \underline{A}\,| = s^2 - X_u\,s - g\,Z_u = \tag{6.8}$$

$$= s^2 - 2\,\sigma_{PH}\,s + \omega_{0PH}^2 = 0$$

–Eigenfrequenz $\quad \omega_{0_{PH}} \;=\; \sqrt{-g\,Z_u} \;\approx\; \sqrt{g\,\frac{\rho S}{m}\,C_{A_0}} \;\approx\; \frac{g}{V_0}\sqrt{2} \quad (A_0 \;\approx\; G)$ (6.9)

d. h. Frequenz hängt nicht von Eigenschaften des Flugzeugs ab

– Dämpfung $\quad D_{PH} \;=\; -\frac{\sigma_{PH}}{\omega_{0_{PH}}} \;=\; \frac{-X_u}{2\sqrt{-g\,Z_u}} \;\approx\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{C_{W_0}}{C_{A_0}}$ (6.10)

d. h. kleine Gleitzahl $\frac{C_{W0}}{C_{A0}}$, kleine Dämpfung

- Die **Näherung** beschreibt den physikalischen Charakter der Eigenbewegung (Phygoide). Für die Untersuchung des Führungsverhaltens oder eine Reglerauslegung darf jedoch der Einfluss des Höhenruders über den Anstellwinkel nicht vernachlässigt werden. Daher: Erweiterung der Zustandsgleichungen um die stationäre Näherung für den Nickfreiheitsgrad. Nach Abklingen der Anstellwinkelschwingung gilt:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= 0 \\ \dot{q} &= 0 = M_\alpha\,\alpha + M_u\,V + M_\eta\,\eta \\ \alpha &= -\frac{1}{M_\alpha}\,(M_u\,V + M_\eta\,\eta) \end{aligned} \tag{6.11}$$

Aus Gl. (6.1) wird die um den Anstellwinkel erweiterte Näherung verwendet ($\dot{\alpha} \approx 0$, $q \approx 0$)

$$\begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_\alpha - g & X_u & -g \\ -Z_\alpha & -Z_u & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ V \\ \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_f \\ 0 \end{bmatrix} f \tag{6.12}$$

- Das **Signalflussdiagramm** ergibt sich mit (6.11), (6.12) und dem Zusammenhang $\theta = \gamma + \alpha$ zu:

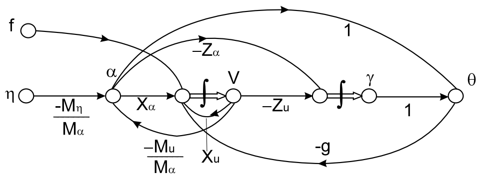


Bild 6.11

- Der Bahnwinkel ist mit dem Höhenruder über den Anstellwinkel steuerbar

- Die **Zustandsgleichung der erweiterten Phygoid-Näherung** ist mit (6.11), (6.12)

$$\begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (X_u - M_u\,\frac{X_\alpha - g}{M_\alpha}) & -g \\ (-Z_u + M_u\,\frac{Z_\alpha}{M_\alpha}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_f & -M_\eta\,\frac{X_\alpha - g}{M_\alpha} \\ 0 & M_\eta\,\frac{Z_\alpha}{M_\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ \eta \end{bmatrix} \tag{6.13}$$

- Charakteristische Gleichung (Federwirkung von M_u: "Geschwindigkeitsstabilität")

$$s^2 \;-\; s\,(X_u - M_u\,\frac{X_\alpha - g}{M_\alpha}) \;+\; g\,(-Z_u + M_u\,\frac{Z_\alpha}{M_\alpha}) \tag{6.14}$$

- Bahnbewegung aus der Sicht eines mitbewegten Beobachters: Ellipse / elliptische Spirale

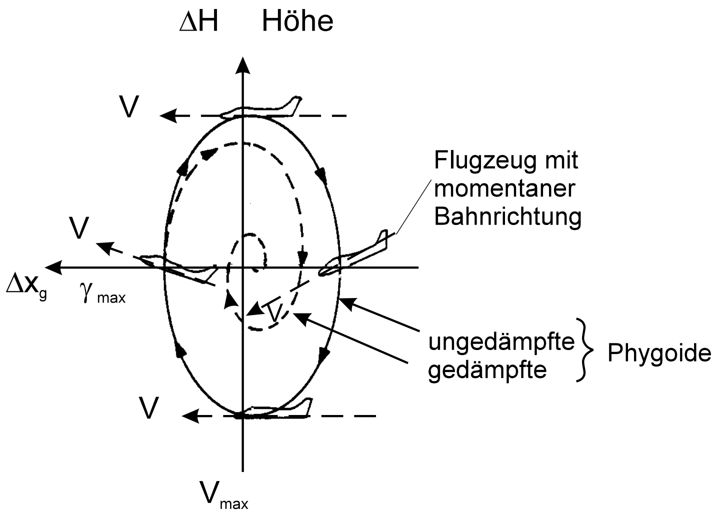


Bild 6.12

Ständiger Austausch von potentieller und kinetischer Energie.

6.4 Führungsverhalten

- **Berechnung des Übertragungsverhaltens** (Übertragungsfunktion)

-Zustandsgleichung $\quad \underline{\dot{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u}$
$\quad \underline{y} = \underline{C}\,\underline{x}$

-Laplace-Transformation (Anfangswerte: 0) $\quad (s\,\underline{I} - \underline{A})\,\underline{X}(s) = \underline{N}(s)\,\underline{X}(s) = \underline{B}\,\underline{U}(s)$

$\underline{X}(s) = \underline{N}^{-1}(s)\,\underline{B}\,\underline{U}(s) = \frac{\underline{N}_{adj}(s)}{|\underline{N}(s)|}\,\underline{B}\,\underline{U}(s) \;;\quad Y(s) = X(s)$

-Nennerpolynom $\quad N(s) = |\underline{N}(s)|$

-Zählerpolynom (Matrix) $\quad \underline{Z}(s) = \underline{N}_{adj}(s)\,\underline{B}$

-Schreibweise $\quad G_{ij}(s) = \frac{Y_i(s)}{U_j(s)} = \frac{Z_{ij}(s)}{N(s)}$

Übertragungsfunktion zwischen
Eingang j und Ausgang i

- Berechnung der Übertragungsfunktion mit der **Cramer Regel** Übertragungsfunktion zwischen Ausgang i und Eingang j

$$\frac{X_i}{U_j} = \frac{Z_{ij}(s)}{N(s)} = \frac{|\;\dots\;\underline{n}_{i-1}\quad \underline{b}_j\quad \underline{n}_{i+1}\;\dots\;|}{|\;\underline{n}_1\quad \dots\quad \underline{n}_i\quad \dots\quad \underline{n}_n\;|} \tag{6.15}$$

$\underline{n}_k$ Spaltenvektoren der charakteristischen Matrix $\underline{N}(s)$

$\underline{b}_k$ Spaltenvektoren der Eingangsmatrix $\underline{B}$

- Die Nennerfunktion $N(s)$ ist gleich der Determinanten von $\underline{N}(s)$

- Die Zählerfunktion $Z_{ij}(s)$ ist gleich der Determinanten, die entsteht, wenn man die i-te Spalte der charakteristischen Matrix $\underline{N}(s)$ durch die j-te Spalte der Eingangsmatrix $\underline{B}$ ersetzt.

- **Nennerpolynom** der Übertragungsfunktion der Längsbewegung (charakteristische Gleichung)

$$N(s) \;=\; |\,s\,\underline{I} - \underline{A}\,| \;=\; \begin{vmatrix} s - M_q & -M_\alpha & -M_u & 0 \\ -1 & s - Z_\alpha & -Z_u & 0 \\ 0 & g - X_\alpha & s - X_u & g \\ 0 & Z_\alpha & Z_u & s \end{vmatrix} \tag{6.16}$$

$$= \; (s - M_q) \begin{vmatrix} s - Z_\alpha & -Z_u & 0 \\ g - X_\alpha & s - X_u & g \\ Z_\alpha & Z_u & s \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -M_\alpha & -M_u & 0 \\ g - X_\alpha & s - X_u & g \\ Z_\alpha & Z_u & s \end{vmatrix}$$

$$= \; s^4 \;+\; a_3\,s^3 \;+\; a_2\,s^2 \;+\; a_1\,s \;+\; a_0$$

$$a_0 \;=\; g\,(M_\alpha\,Z_u \;-\; M_u\,Z_\alpha)$$

6.4.1 Schub

- **Übertragungsfunktion Fahrtänderung** bei Schubänderung ($f \;\rightarrow\; V$) Phygoidennäherung (vgl. (6.6))

$$\frac{V(s)}{f(s)} \;=\; G_{uf}(s) \;=\; \frac{\begin{vmatrix} X_f & g \\ (-Z_f) & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s - X_u & g \\ Z_u & s \end{vmatrix}} \;=\; \frac{X_f\,s \;+\; Z_f\,g}{s(s - X_u) \;-\; Z_u\,g} \tag{6.17}$$

- **Stationäre Fahrt** für f-Sprung f_∞

$$\lim_{s\to 0}\; G_{uf}(s) \;=\; \lim_{t\to\infty} \frac{V(t)}{f_\infty} \;=\; -\frac{Z_f}{Z_u}$$

$Z_f \;=\; 0$: keine stationäre Fahrtänderung durch Schubänderung
d. h. Schub verändert nur potentielle Energie

$-\frac{Z_f}{Z_u} \;<\; 0$: stationäre Fahrtabnahme durch Schuberhöhung

- **Beschleunigung** durch f-Sprung

$$\lim_{s\to\infty}\; G_{\dot{u}f}(s) \;=\; \lim_{s\to\infty} \cdot\, s \,\cdot\, G_{uf}(s) \;=\; \lim_{t\to 0} \frac{\dot{V}(t)}{f_\infty} \;=\; X_f$$

d. h. $\dot{V}(t = 0) \;=\; X_f \;\cdot\; f_\infty \;>\; 0$ positive Anfangsbeschleunigung

- **Sprungantwort** G_{uf}

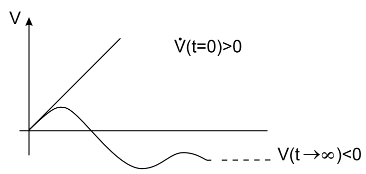


Bild 6.13

Allpassverhalten:

Anfangs- und Stationärwert haben unterschiedliches Vorzeichen

- **Übertragungsfunktion Bahnänderung** bei Schubänderung ($f \;\rightarrow\; \gamma$)

$$\frac{\gamma(s)}{f(s)} \;=\; G_{\gamma f}(s) \;=\; \frac{\begin{vmatrix} s - X_u & X_f \\ Z_u & (-Z_f) \end{vmatrix}}{N(s)} \;=\; \frac{-(s - X_u)\, Z_f \;-\; Z_u\, X_f}{s(s - X_u) \;-\; Z_u\, g} \tag{6.18}$$

- **Stationäre Bahnänderung** für f-Sprung f_∞

$$\lim_{s\to 0} G_{\gamma f}(s) \;=\; \lim_{t\to\infty} \frac{\gamma(t)}{f_\infty} \;=\; \frac{X_f}{g}$$

$Z_f = 0$: Steigflug bei Schuberhöhung ($f_\infty \;>\; 0\,,\; X_f \;>\; 0$)
Zunahme der potentiellen Energie

6.4.2 Höhenruder

- **Übertragungsfunktion Nickgeschwindigkeitsänderung** bei Höhenruderausschlag ($\eta \rightarrow q$) Anstellwinkelnäherung (vgl. (6.3))

$$\frac{q(s)}{\eta(s)} \;=\; G_{q\eta}(s) \;=\; \frac{\begin{vmatrix} M_\eta & -M_\alpha \\ Z_\eta & s - Z_\alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s - M_q & -M_\alpha \\ -1 & s - Z_\alpha \end{vmatrix}} \;=\; \frac{s\, M_\eta \;+\; (Z_\eta\, M_\alpha \;-\; Z_\alpha\, M_\eta)}{s^2 \;-\; (M_q \;+\; Z_\alpha)\, s \;+\; (M_q\, Z_\alpha \;-\; M_\alpha)} \tag{6.19}$$

- **Kurzzeit-Stationärwert** der Nickgeschwindigkeit für η-Sprung η_∞

$$\lim_{s\to 0} G_{q\eta}(s) \;=\; \lim_{t\to\infty} \frac{q(t)}{\eta_\infty} \;=\; \frac{Z_\eta M_\alpha \;-\; Z_\alpha M_\eta}{M_q Z_\alpha \;-\; M_\alpha} \;\approx\; \frac{Z_\alpha}{M_\alpha}\, M_\eta \;<\; 0$$

- **Anfangsreaktion Nickbeschleunigung**

$$\lim_{s\to\infty} G_{\dot q\eta}(s) \;=\; \lim_{s\to\infty} \cdot\, s \;\cdot\; G_{q\eta}(s) \;=\; \lim_{t\to 0} \frac{\dot q(t)}{\eta_\infty} \;=\; M_\eta \;<\; 0$$

- **Übertragungsfunktion α-Änderung**

$$\frac{\alpha(s)}{\eta(s)} \;=\; G_{\alpha\eta}(s) \;=\; \frac{\begin{vmatrix} s - M_q & M_\eta \\ -1 & Z_\eta \end{vmatrix}}{N(s)} \;=\; \frac{(s - M_q)\, Z_\eta \;+\; M_\eta}{s^2 \;-\; (M_q \;+\; Z_\alpha)\, s \;+\; (M_q\, Z_\alpha \;-\; M_\alpha)} \tag{6.20}$$

- **Kurzzeit-Stationärwert** der α-Änderung

$$\lim_{s\to 0} G_{\alpha\eta}(s) \;=\; \lim_{t\to\infty} \frac{\alpha(t)}{\eta_\infty} \;=\; \frac{-M_q Z_\eta \;+\; M_\eta}{M_q Z_\alpha \;-\; M_\alpha} \;\approx\; -\frac{M_\eta}{M_\alpha} \;<\; 0$$

- **Anfangsreaktion der α-Änderung**

$$\lim_{s\to\infty} G_{\dot\alpha\eta}(s) \;=\; \lim_{s\to\infty} \cdot\, s \;\cdot\; G_{\alpha\eta}(s) \;=\; \lim_{t\to 0} \frac{\dot\alpha(t)}{\eta_\infty} \;=\; Z_\eta \;<\; 0$$

- **Vergleich mit Nickreaktion**

Für $|Z_\eta| \;\ll\; |M_\eta|$ (Vorsicht bei Deltakonfiguration!)

ist $Z_{q\eta} = M_\eta\, (s - Z_\alpha)$

$Z_{\alpha\eta} = M_\eta$

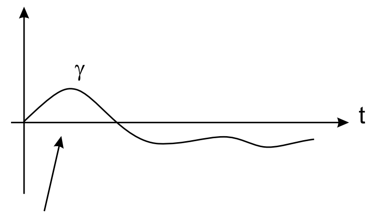
also: $Z_{\alpha\eta} = Z_{q\eta}\, \frac{1}{s - Z_\alpha}$

D. h. : Bei einer Höhenruderänderung erfolgt die Anstellwinkeländerung mit einer Verzögerung (Zeitkonstante $T = -\frac{1}{Z_\alpha}$) auf die Nickgeschwindigkeitsänderung.

- **Bahnänderung** bei Höhenruderänderung[2mm] Aus Zustandsgleichung (6.1) folgt

$$\lim_{t\to 0} \dot{\gamma}(t) = -Z_\eta \cdot \eta \approx \frac{\rho}{2} V_0 \frac{S}{m} C_{A\eta}\, \eta \tag{6.21}$$

  - Anfangsreaktion : Auftriebserhöhung bei "Drücken" ($\eta > 0$) durch Auftriebserhöhung durch Höhenruder ($C_{A\eta} > 0$), Beschleunigung nach oben



  - Anschließend : Sinken wegen Auftriebsverringerung am Flügel $\hookrightarrow$ Allpass

    Bild 6.14

    Besonders groß bei Delta-Konfigurationen

6.4.3 Auftriebsklappen

- **Übertragungsfunktion** Anstellwinkeländerung bei Änderung des Auftriebsklappen-Ausschlags ($\varkappa \to \alpha$)

$$\frac{\alpha(s)}{\varkappa(s)} = G_{\alpha\varkappa}(s) = \frac{\begin{vmatrix} s - M_q & M_\varkappa \\ -1 & Z_\varkappa \end{vmatrix}}{N(s)} = \frac{(s - M_q)\, Z_\varkappa + M_\varkappa}{s^2 - (M_q + M_\alpha)\, s + (M_q\, Z_\alpha - M_\alpha)} \tag{6.22}$$

- **Kurzzeit-Stationärwert** für $\varkappa$-Sprung $\varkappa_\infty$

$$\lim_{s\to 0} G_{\alpha\varkappa}(s) = \lim_{t\to\infty} \frac{\alpha(t)}{\varkappa_\infty} = \frac{-M_q Z_\varkappa + M_\varkappa}{M_q Z_\alpha - M_\alpha} \approx \frac{M_q\, Z_\varkappa}{M_\alpha} < 0$$

- **Anfangsreaktion** (Vertikalbeschleunigung $\ddot{z} \sim \dot{\alpha}$)

$$\lim_{s\to\infty} G_{\dot{\alpha}\varkappa}(s) = \lim_{s\to\infty} \cdot\, s \cdot G_{\alpha\varkappa}(s) = \lim_{t\to 0} \frac{\dot{\alpha}(t)}{\varkappa_\infty} = Z_\varkappa$$

6.5 Störverhalten

6.5.1 Horizontalwind

- **Phygoiden-Näherung**, ergänzt um Windeinfluss

$$V_A = V_K - V_W \qquad\qquad (V_A = V)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_K \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_u & -g \\ -Z_u & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_K \\ \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -X_u \\ Z_u \end{bmatrix} V_W \tag{6.23}$$

- **Signalflussdiagramm**

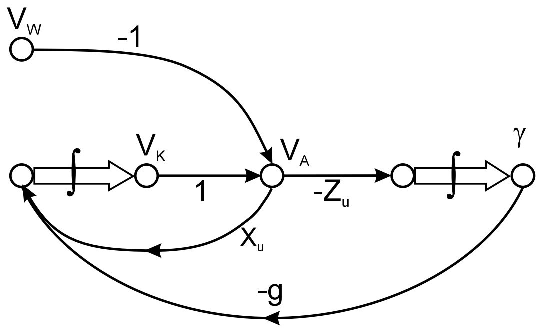


Bild 6.15

- **Übertragungsfunktion**

$$\frac{V_K(s)}{V_W(s)} = \frac{\begin{vmatrix} -X_u & g \\ Z_u & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s - X_u & g \\ Z_u & s \end{vmatrix}} = \frac{-X_u\, s - Z_u\, g}{s(s - X_u) - Z_u\, g} \tag{6.24}$$

- **Grenzwerte**

$$V_K\,(t \to \infty) = V_W$$
$$V_A\,(t \to \infty) = 0$$
$$\gamma\,(t \to \infty) = 0$$

- **Sprungantwort**

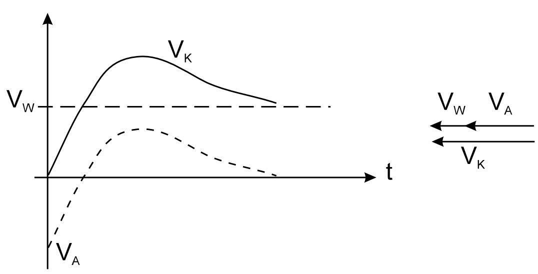


Bild 6.16

6.5.2 Vertikalwind

- **Anstellwinkel-Näherung**, mit Windeinfluss (s. (5.44))

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_K \\ \dot{\alpha}_K \\ \dot{\alpha}_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_q & M_\alpha & -M_\alpha \\ 1 & Z_\alpha & -Z_\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_K \\ \alpha_K \\ \alpha_W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{Wx} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w_{Wx} \qquad (6.25)$$

- **Signalflussdiagramm**

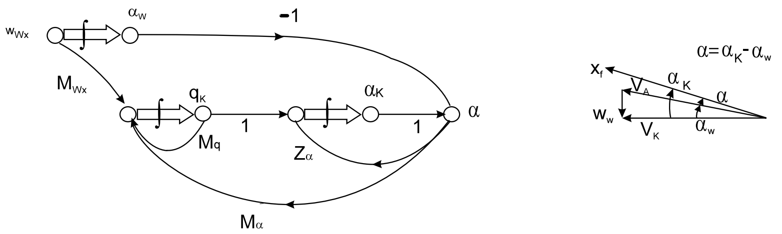


Bild 6.17

- **Grenzwerte**

$$\alpha_K\,(t \to \infty) = \alpha_W$$

$$\alpha\,(t \to \infty) = 0 \qquad\qquad \alpha\,(t \to 0) = -\alpha_W$$

$$\gamma\,(t \to \infty) = -\alpha_K$$

- **Sprungantwort**

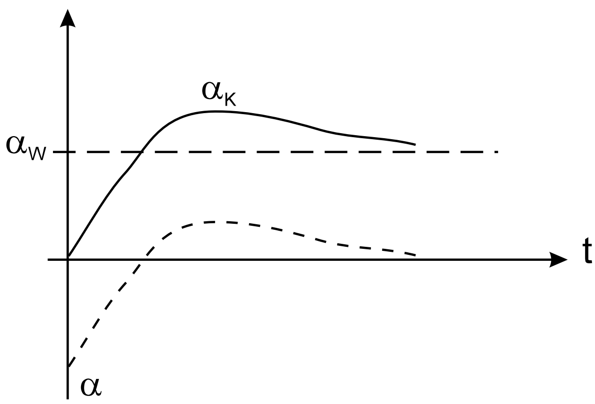


Bild 6.18

7 Dynamik der Seitenbewegung

7.1 Signalflussdiagramm

Zustandsgleichungen der Seitenbewegung, ohne Wind, vereinfacht

$$
\begin{bmatrix} \dot{r}_K \\ \dot{\beta}_K \\ \dot{p}_K \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}
=
\left[\begin{array}{cc|c|c} N_r & N_\beta & N_p & 0 \\ -1 & Y_\beta & 0 & Y_\phi \\ \hline (L_r) & L_\beta & L_p & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]
\begin{bmatrix} r_K \\ \beta_K \\ p_K \\ \phi \end{bmatrix}
+
\left[\begin{array}{cc} (N_\xi) & N_\zeta \\ 0 & (Y_\zeta) \\ \hline L_\xi & (L_\zeta) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]
\begin{bmatrix} \xi \\ \zeta \end{bmatrix}
\tag{7.1}
$$

i. a. 1 Schwingung
2 aperiodische Bewegungen
Weniger wichtige Ersatzgrößen in Klammern

- **Signalflussdiagramm Seitenbewegung** (vereinfacht, ohne Wind)

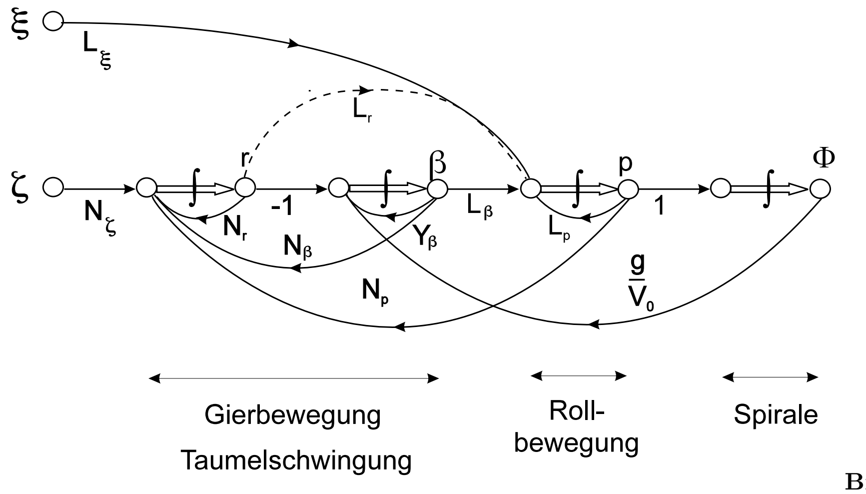


Bild 7.1

Brauchbare Näherung für kleines Schieberollmoment L_β , d. h. geringe Pfeilung

7.2 Sprungantworten

- **Sprungantworten Seitenbewegung** Do 328, Reiseflug

Kurzzeitverhalten (Daten siehe Anhang 9.4)

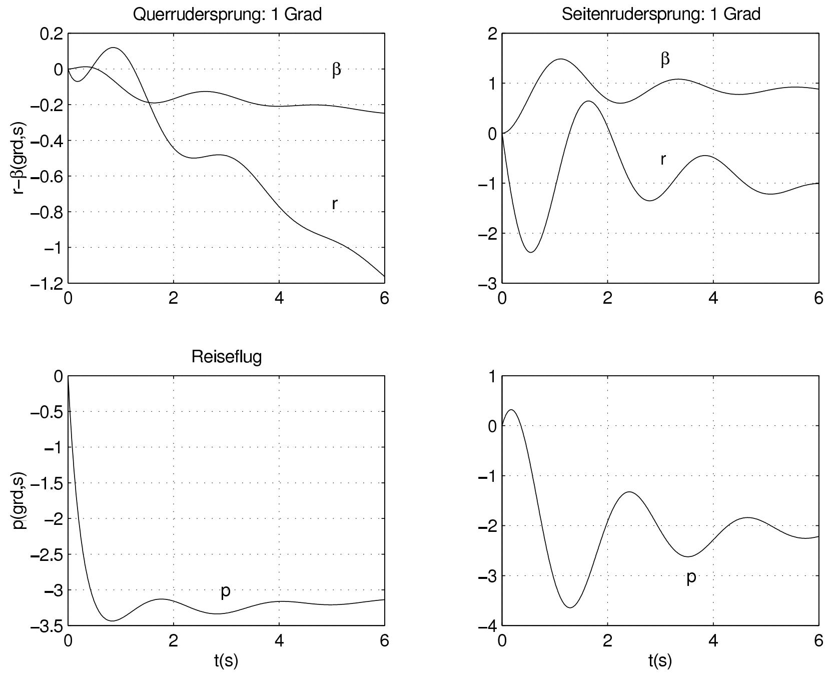


Bild 7.2

- **Sprungantworten Seitenbewegung** Do 328, Reiseflug

Langzeitverhalten

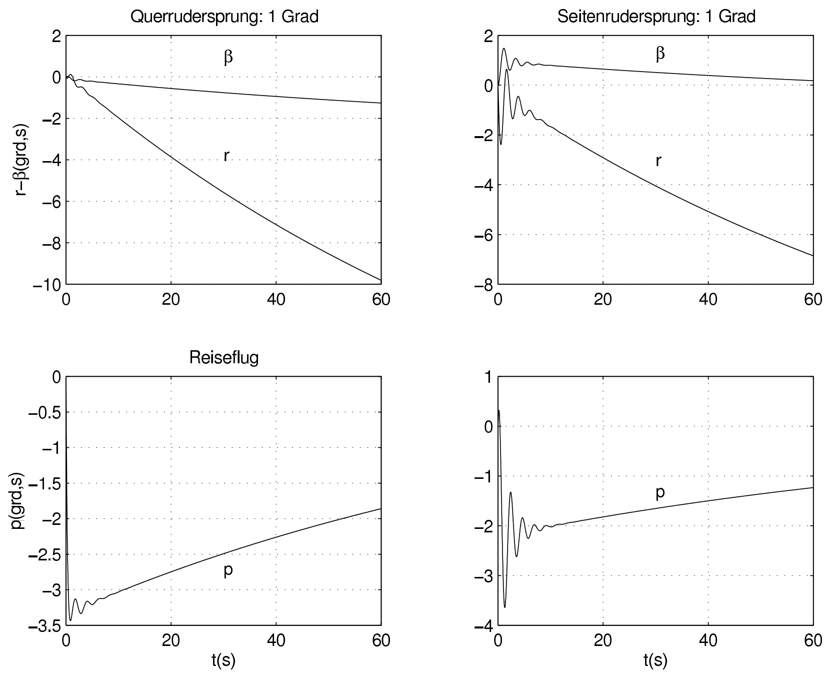


Bild 7.3

7.3 Eigenverhalten

- **Pole**

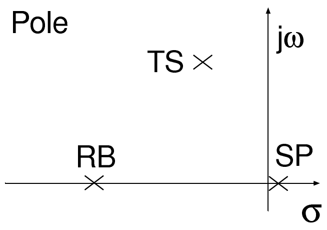


Bild 7.4

Trennung der Eigenbewegungsformen der Seitenbewegung nicht allgemein möglich. Parameter hängen stark von Flugzeugkonfiguration ab.

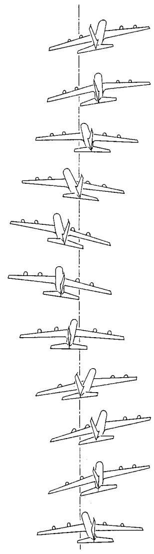


Bild 7.5 TS

TS : Taumelschwingung, schnell, schwach gedämpft
Roll-Gierkopplung

RB : Rollbewegung, schnelle aperiodische
Bewegung um Längsachse

SP : Spiralbewegung, langsam, aperiodisch
oft instabil
Pol in der rechten s-Halbebene

- **Prinzip : charakteristische Gleichung**

$$(s^2 \; - \; 2\,\sigma_{TS}\,s \; + \; \omega_{0TS}^2)(s \; + \; \frac{1}{T_R})(s \; + \; \frac{1}{T_S}) \; = \; 0 \qquad (7.2)$$

7.3.1 Taumelschwingung

- **Zustandsdifferentialgleichung** für die Näherung

$$\begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_r & N_\beta \\ -1 & Y_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_\zeta \\ 0 \end{bmatrix} \zeta \qquad (7.3)$$

$$\underline{\dot{x}} \; = \; \underline{A} \cdot \underline{x} \; + \; \underline{B} \cdot \underline{u} \qquad (7.4)$$

- **Sprungantworten** (Do 328, Reiseflug, System 4. Ordnung, System 2. Ordnung), N: Näherung

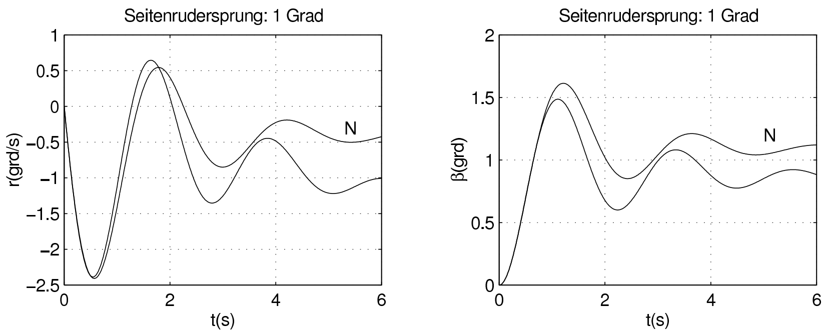


Bild 7.6

- **Signalflussdiagramm**

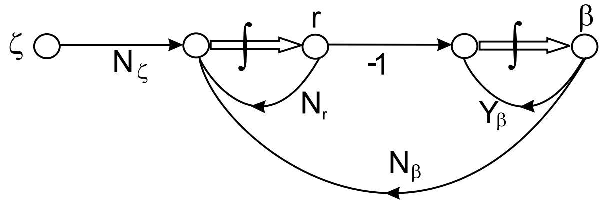


Bild 7.7

- **Charakteristische Gleichung**

$$|\,s\,\underline{I} - \underline{A}\,| \;=\; s^2 \;-\; s\,(N_r + Y_\beta) \;+\; (N_\beta + N_r\,Y_\beta) \;=\; 0$$
$$=\; s^2 \;-\; 2\,\sigma_{TS}\,s \;+\; \omega_{0_{TS}}^2$$

- Eigenfrequenz $\omega_{0_{TS}} \;=\; \sqrt{N_\beta + N_r\,Y_\beta} \;\approx\; \sqrt{N_\beta}$ (7.5)
  Federwirkung: "Statische Stabilität" der Seitenbewegung
- Dämpfungsexponent $\sigma_{TS} \;=\; \frac{1}{2}\,(N_r + Y_\beta)$ (7.6)
- Dämpfungsgrad $D_{TS} \;=\; -\,\frac{\sigma_{TS}}{\omega_{0_{TS}}} \;\approx\; -\,\frac{1}{2}\,\frac{N_r}{\sqrt{N_\beta}}$ (7.7)

7.3.2 Rollbewegung

- **Zustands-Differentialgleichung** für die Näherung von Roll- und Spiralbewegung

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_p & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_\xi \\ 0 \end{bmatrix} \xi \tag{7.8}$$
$$\underline{\dot{x}} \;=\; \underline{A} \;\cdot\; \underline{x} \;+\; \underline{B} \;\cdot\; \underline{u} \tag{7.9}$$

- **Sprungantworten** (Do 328, Reiseflug, System 4. Ordnung, System 2. Ordnung)

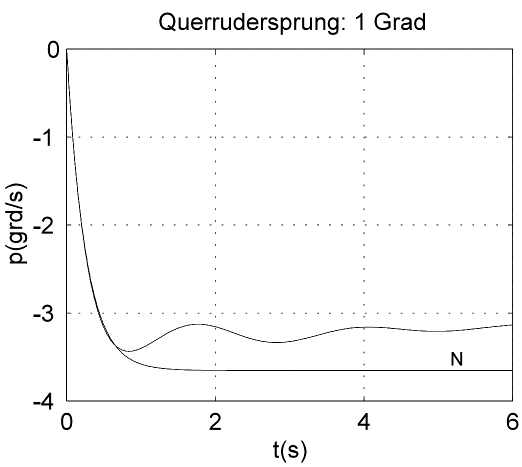


Bild 7.8 N: Näherung

- **Signalflussdiagramm**

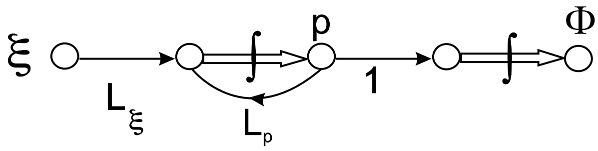


Bild 7.9

- **Charakteristische Gleichung**

$$s\,(s\;-\;L_p)\;=\;0 \tag{7.10}$$

$$\text{Rollzeitkonstante}T_{\scriptscriptstyle R}\;\approx\;-\,\frac{1}{L_p}\;=\;\frac{I_x}{\frac{\rho}{2}\,V_0\,S(\frac{b}{2})^2\,C_{lp}} \tag{7.11}$$

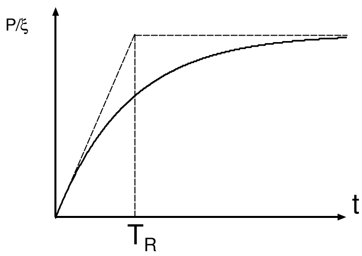


Bild 7.10

7.3.3 Spiralbewegung

- **Verbesserte Näherung** für Roll- und Spiralwurzel:

  Annahme: Gewichtsanteil und Zentrifugalkraft in Querkraftgleichung näherungsweise im Gleichgewicht

$$\begin{aligned} g\,\phi_0 &\approx\; V_0\,r \qquad \text{(vgl. Gl. 5.36, Y-Kräfte)}\\ Y_\beta\,\beta &\approx\; 0\\ \dot\beta &\approx\; 0 \end{aligned}$$

  Homogene SB-Zustandsgleichung

$$\begin{bmatrix} \dot r\\ 0\\ \dot p\\ \dot\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_r & N_\beta & N_p & 0\\ -1 & 0 & 0 & g/V_0\\ L_r & L_\beta & L_p & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r\\ \beta\\ p\\ \phi \end{bmatrix} \tag{7.12}$$

- **Charakteristische Gleichung**

$$s^2\;-\;s\left\{L_p\;-\;(N_p\;-\;\frac{g}{V_0})(\frac{L_\beta}{N_\beta})\right\}\;+\;\frac{g}{V_0}\,\frac{1}{N_\beta}\,(N_r\,L_\beta\;-\;N_\beta\,L_r)\;=\;0 \tag{7.13}$$

  Roll- und Spiralwurzel reell:

$$(s\;+\;\frac{1}{T_{\scriptscriptstyle R}})(s\;+\;\frac{1}{T_{\scriptscriptstyle S}})\;=\;s^2\;+\;(\frac{1}{T_{\scriptscriptstyle R}}\;+\;\frac{1}{T_{\scriptscriptstyle S}})\,s\;+\;\frac{1}{T_{\scriptscriptstyle R}\,T_{\scriptscriptstyle S}}\;=\;0\quad=\;s^2\;+\;a_1\,s\;+\;a_0$$

- **Koeffizientenvergleich**

  - Rollwurzel $\quad (\frac{1}{T_S} \approx 0)$

$$\frac{1}{T_R} \approx a_1 = -L_p \left\{ 1 - \frac{N_p - \frac{g}{V_0} \frac{L_\beta}{N_\beta}}{L_p} \right\} \approx -L_p$$

  - Spiralwurzel

$$\frac{1}{T_R} \frac{1}{T_S} \approx a_0 = \frac{g}{V_0} \frac{1}{N_\beta} (N_r L_\beta - N_\beta L_r)$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{T_S} = T_R \frac{g}{V_0} \frac{1}{N_\beta} (N_r L_\beta - N_\beta L_r) \qquad ; \quad T_R > 0$$

- **Stabilitätsforderung**: $\frac{1}{T_S} > 0$ (Pol links der Stabilitätsgrenze)

d. h. $$\frac{1}{N_\beta} (N_r L_\beta - N_\beta L_r) = N_r \left(\frac{L_\beta}{N_\beta} - \frac{L_r}{N_r}\right) \overset{!}{>} 0 \quad ; \quad \frac{L_\beta}{N_\beta} - \frac{L_r}{N_r} \overset{!}{<} 0 \qquad (N_r < 0) \tag{7.14}$$

7.4 Führungsverhalten

7.4.1 Querruder

- **Näherung Rollbewegung**

$$\dot{p} = L_p p + L_\xi \xi$$

$$s p = L_p p + L_\xi \xi$$

$$G_{p\xi}(s) = \frac{p}{\xi} = \frac{L_\xi}{s - L_p} = -\frac{L_\xi}{L_p} \cdot \frac{1}{1 + T_R s} \qquad ; \qquad T_R = -\frac{1}{L_p} \tag{7.15}$$

- **Anfangsverhalten** (Rollbeschleunigung)

$$\lim_{s\to\infty} G_{\dot{p}\xi}(s) = \lim_{s\to\infty} \cdot s \cdot G_{p\xi}(s) = \lim_{t\to 0} \frac{\dot{p}(t)}{\xi_\infty} = L_\xi \tag{7.16}$$

- **Stationärverhalten** (Rollgeschwindigkeit)

$$\lim_{s\to 0} G_{p\xi}(s) = \lim_{t\to\infty} \frac{p(t)}{\xi_\infty} = -\frac{L_\xi}{L_p} \tag{7.17}$$

- **Giergeschwindigkeit**

  - Anfangsreaktion (vgl. (7.1)

  $$\lim_{t \to 0} \dot{r} \;=\; N_\xi \, \xi$$

  - stationäres Verhalten, nach Abklingen der Rollbewegung

  $$\dot{r} \;\approx\; N_p \, p_\infty \;+\; N_\xi \, \xi_\infty$$

  $$p(t \to \infty) \;=\; -\,\frac{L_\xi}{L_p}\,\xi_\infty$$

  $$\dot{r} \;=\; (N_\xi \;-\; \frac{L_\xi}{L_p}\,N_p)\,\xi_\infty \quad = \; L_{\dot{\xi}}\,(\frac{N_\xi}{L_\xi} \;-\; \frac{N_p}{L_p})\,\xi_\infty$$

  $$\frac{L_\xi}{N_\xi} \;<\; 0 \qquad \text{"Gegengieren"} \quad \text{vgl. Kap. 4-3-3}$$

7.4.2 Seitenruder

- **Übertragungsfunktion** Giergeschwindigkeit bei Seitenruderausschlag Näherung für die Taumelschwingung

$$G_{r\zeta}(s) \;=\; \frac{N_\zeta\,(s \;-\; Y_\beta)}{s^2 \;-\; s\,(N_r \;+\; Y_\beta) \;+\; (N_\beta \;+\; N_r\,Y_\beta)} \tag{7.18}$$

$$\frac{\dot{r}}{\zeta}\,(t \to 0) \quad = \; N_\zeta$$

$$\frac{r}{\zeta}\,(t \to \infty) \;=\; \frac{r}{\zeta_\infty} \;=\; \frac{-N_\zeta\,Y_\beta}{N_\beta \;+\; N_r\,Y_\beta}$$

7.5 Störverhalten

- **Näherung Taumelschwingung**, mit Seitenwindeinfluss (s. (5.48))

$$\begin{bmatrix} \dot{r}_K \\ \dot{\beta}_K \\ \dot{\beta}_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_r & N_\beta & -N_\beta \\ -1 & Y_\beta & -Y_\beta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_K \\ \beta_K \\ \beta_W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -N_r \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_{Wx} \tag{7.19}$$

- **Signalflussdiagramm**

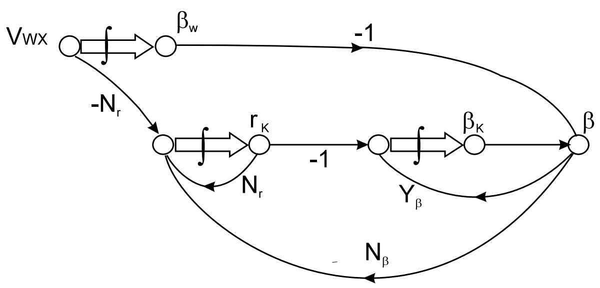


Bild 7.11

- **Grenzwerte**

$$\beta_K\,(t \to \infty) \;=\; \beta_W$$

$$\beta\,(t \to \infty) \;=\; 0 \qquad\qquad \beta\,(t \to 0) \;=\; -\beta_W$$

- **Sprungantworten**

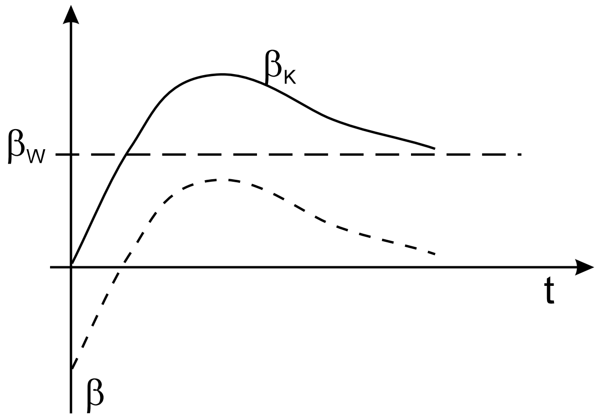


Bild 7.12

8 Flugeigenschaftsforderungen

8.1 Grundlagen

8.1.1 Vorschriften

- **Richtlinien** und Standards als Grundlagen für die Zulassung **ziviler Flugzeuge**:

    - FAA (Federal Aviation Agency, USA),

      FAR: ”Federal Airworthiness Regulations”

    - JAA (Joint Aviation Agency, Europa),

      LBA (Luftfahrtbundesamt, Braunschweig),

      JAR: ”Joint Airworthiness Regulations”

- z. B.

  FAR, Part 23: ”Airworthiness Standards, Normal, Utility and Acrobatic Airplanes”

  FAR, Part 25: ”Airworthiness Standards, Transport Category Airplanes”

- **Allgemeine Forderungen** , meist ohne konkrete Zahlenangaben, z. B.:

§23.141	”Das Flugzeug muss die Forderungen §23.143 bis 23.253 in den normalerweise erwarteten Betriebshöhen erfüllen, ohne dass es dabei außergewöhnlicher Geschicklichkeit, Wachsamkeit oder Kraftanstrengung des Flugzeugführers bedarf.”
§23.143	”Es muss möglich sein, ohne Gefahr des Überschreitens des sicheren Lastvielfachen und unter allen wahr- scheinlichen Betriebsbedingungen (einschließlich ... Motorausfall ...), einen weichen Übergang von einem Flugzustand zum anderen (einschließlich Kurven und Seitengleitflug) durchzuführen.”
§23.181	”Alle kurzperiodischen Längsschwingungen, die im Bereich zwischen der Überzieh- und der höchstzulässigen Geschwindigkeit auftreten, müssen sowohl mit loser, als auch mit fester Hauptsteuerung stark gedämpft sein.”

- **Richtlinien** und Standards für die Entwicklung und Zulassung **militärischer Flugzeuge**:

  - USAF MIL-8785C: ”Military Specification, Flying Qualities of Piloted Airplanes”, 1980

  - USAF MIL-1797-A: ” Military Standard, Flying Qualities of Piloted Vehicles”, 1990

Konkrete Forderungen an die Flugeigenschaften, eingeteilt nach

Flugzeugtyp (class): ”Transportflugzeug, Kampfflugzeug, ...”

Flugzeugzustand (flight phases): ”Reiseflug, Landeanflug, ...”

Gütegrad (level): ”Zufriedenstellend, brauchbar, ...”

8.2 Klassifizierungen

Flugzeugtyp/ Flugaufgabe	class I:	small, light aircraft,
	class II:	medium weight aircraft, low to medium manoeuverability,
	class III:	large, heavy aircraft, low to medium manoeuverability,
	class IV:	high manoeuverability aircraft.
Flugzustand/ Flugabschnitt	category A:	Those non-terminal flight phases that require rapid manoeuvering, precision tracking, or precise flight path control (e. g. air-to-air combat, terrain-following),
	category B:	Those non-terminal flight phases, that are normally accomplished using gradual manoeuvers and without precision tracking, although accurate flight path control may be required (e. g. climb, cruise),
	category C:	Terminal flight phases. They are normally accomplished using gradual manoevers and usually require accurate flight-path control (take-off, approach and landing).

Gütegrad/
Schwierigkeit der
Aufgabenerfüllung

level 1: Flying qualities clearly adequate for the mission flight phase. Aircraft is satisfactory without improvement (”satisfactory”).

level 2: Flying qualities adequate to accomplish the mission flight phase, but some increase in pilot workload or degradation in mission effectiveness, or both, exist (”acceptable”).

level 3: Flying qualities such that the aircraft can be contolled safely, but pilot workload is excessive or mission effectiveness is inadequate, or both. Category A-flight phases can be terminated safely, Category B and C flight phases can be completed (”controllable”).

8.2.1 Bewertungsverfahren

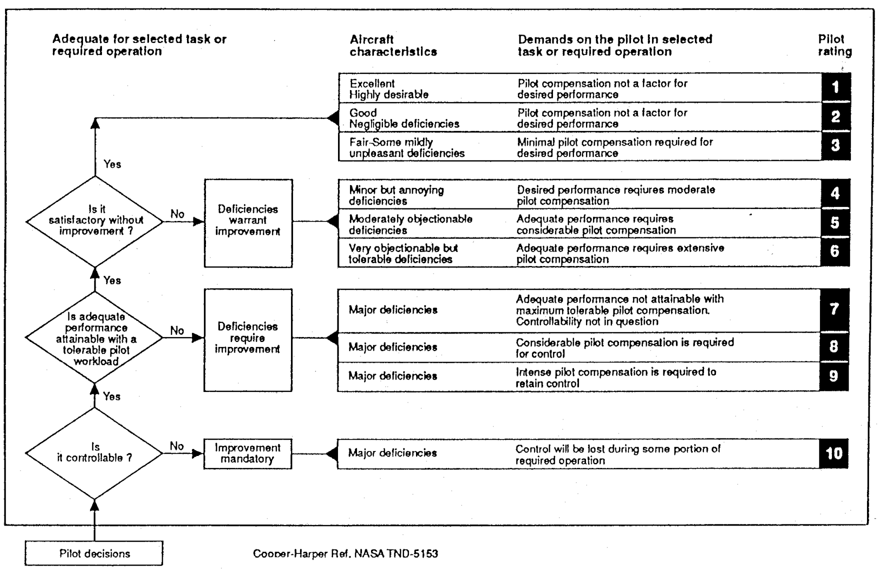


Bild 8.1

CHR: Cooper-Harper rating scale:

Flugeigenschaftsbewertung durch Piloten

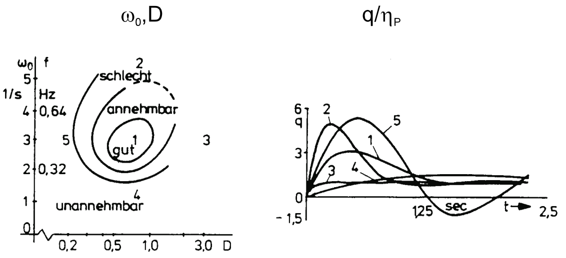
8.3 Längsbewegung

8.3.1 Anstellwinkelschwingung

- **Übertragungsfunktion** Anstellwinkel-Näherung

$$G_{q\eta}(s) \;=\; K\,\frac{1\;+\;T_\theta\, s}{1\;+\;\frac{2\,D}{\omega_{0AS}}\;s\;+\;\left(\frac{s}{\omega_{0AS}}\right)^2} \tag{8.1}$$

- **Flugeigenschaftskriterien** Eigenverhalten, Zeitverhalten



LEVEL	MIN	MAX
1	0.35	1.3
2	0.25	2.0
3	0.15	-

Bild 8.2

Frequenz Sprungantworten Dämpfungsgrad

Dämpfung CAT A/C (MIL 8785)

Pilotenbeurteilungen der Anstellwinkelschwingung

- **Manövrierfähigkeit**

  - Lastfaktorempfindlichkeit

$$\left.\frac{\Delta n_z}{\Delta\alpha}\right|_{t\;gro„} \;=\; \left.\frac{n_z/\eta}{\alpha/\eta}\right|_{s=0} \;=\; -\frac{V_0}{g}Z_\alpha \;=\; \frac{V_0}{g}\frac{1}{T_\theta} \;\approx\; \frac{C_{A\alpha}}{C_{A0}}$$

Verhältnis von erzielbarem Lastvielfachen zu notwendiger Anstellwinkeländerung.

Forderung:

$$\frac{\Delta n_z}{\Delta\alpha} \;\geq\; \frac{0.2}{5^\circ}(g) \;=\; 2.3\;\frac{1}{rad}$$

  - Nickbeschleunigung

Drehbeschleunigung zu quasistationär erreichtem Lastvielfachen: "control anticipation parameter" (CAP)

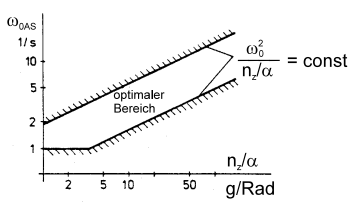


Bild 8.3

Anforderung an ω_{0AS}, n_z/α nach MIL-STD 1797

- C^*-Kriterium

$$C^* = n_{z\,pilot} + \frac{V_m}{g}\, q_K,\ n_{z\,pilot}\text{: Lastvielfaches am Pilotensitz,}$$

$$\frac{V_m}{g}\, q_K\text{: Gewichtete Nickgeschwindigkeit}$$

Forderung: Zeitbereich Frequenzbereich

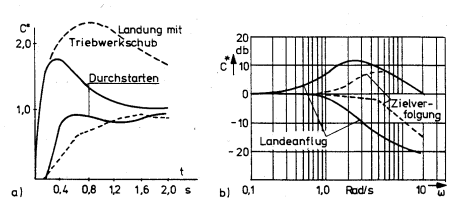


Bild 8.4 Grenzkurven

8.3.2 Phygoide

Bahnbewegung, Kenngrößen: Bahnwinkel γ, Geschwindigkeit V

- **Dämpfung**

  $D > 0.04$ für gute Flugeigenschaften (Level 1)

- **Stabilitäts-Handkraft** (vgl. Kap. 3.4-2)

  $\frac{dF_H}{dV} < 0$ Gradient von Steuerkraft zu Fahrtänderung

- **Bahnänderung/Nickwinkel**

  Positive Bahnwinkeländerung wird durch Aufnicken angekündigt

$$\frac{\gamma/\eta}{\theta/\eta} = \frac{-Z_\alpha}{s - Z_\alpha} = \frac{1}{1 + T_\theta s}; \quad T_\theta = -\frac{1}{Z_\alpha} \sim \frac{1}{C_{A\alpha} + C_{W0} + \alpha_0\, C_{W\alpha}} > 0$$

- **Bahnwinkeländerung zu Fahrtänderung** möglichst kleiner Null, Grenzwerte:

$$d\gamma/dV \leq 0.06°/kn \quad \text{(Level1)}$$
$$d\gamma/dV \leq 0.24°/kn \quad \text{(Level3)}$$

8.4 Seitenbewegung

8.4.1 Taumelschwingung

- **Frequenz:** $\omega_{0TS} > 1 \frac{1}{s}$ (class I) ; $\omega_{0TS} > 0.4 \frac{1}{s}$ (class III)

- **Dämpfung:** cat A : $D > 0.2$ cat B/C : $D > 0.08$, $\sigma < -0.15 \frac{1}{s}$

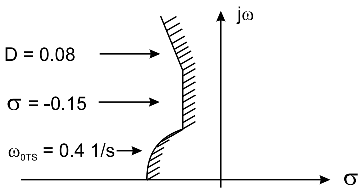


Bild 8.5

Beispiel:
Erlaubte Pollagen
für class III
cat B/C

- **Zusätzlich:** Anforderungen an Kopplungen zwischen Rollen und Gieren

8.4.2 Rollbewegung

$$\frac{p}{\xi} = \frac{K}{1 + T_R s}$$

- **Rollzeitkonstante** (T_R)

<table>
<tr><td>Level</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Leichte Flugzeuge</td><td>1.0</td><td>1.4</td><td rowspan="2">10</td></tr>
<tr><td>Schwere Flugzeuge</td><td>1.4</td><td>3.0</td></tr>
</table>

Beispiel:
Start/Landung (cat C)

- **Rolleistung** / Steuerwirksamkeit (K)

Zeitbedarf für Rollwinkel-Aufbau
z. B.

$t_{90°} < 1.0s$ (Luftkampf)
$t_{30°} < 1.0s$ (Landeanflug, class IV)
$t_{30°} < 2.5s$ (Landeanflug, class III)

8.4.3 Spiralbewegung

Leichte Instabilität erlaubt

$$\left.\begin{array}{ll} t_d \geq 12s & \text{cat A/C} \\ t_d \geq 20s & \text{cat B} \end{array}\right\} \text{Level 1}$$

t_d: Zeit zur Verdopplung der Amplitude

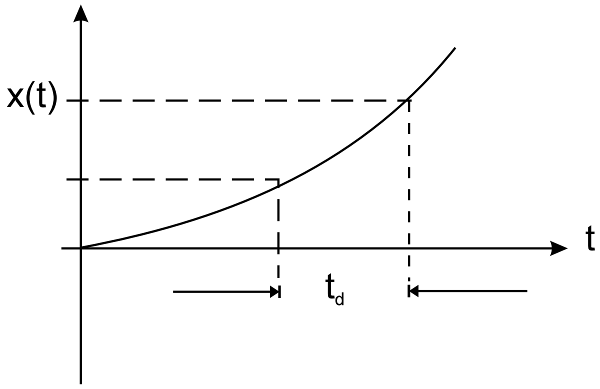


Bild 8.6

9 Anhang

9.1 Koordinatentransformation

Umrechnung von im Koordinatensystem a gegebenen Größen in das Koordinatensystem b mit Hilfe der Transformationsmatrix $\underline{M}_{ba}$

$$\underline{M}_{ba} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

m_{ij}: Richtungscosinus

Es gilt:

$$\underline{M}_{ba}^T = \underline{M}_{ab} \qquad (T\text{: transponiert}) \tag{9.1}$$

$$\underline{M}_{ba} = \underline{M}_{bc}\underline{M}_{ca} \tag{9.2}$$

9.1.1 Bildungsgesetz

Beispiel: Drehachse z_g, Drehwinkel ψ, Bild 2.3-5

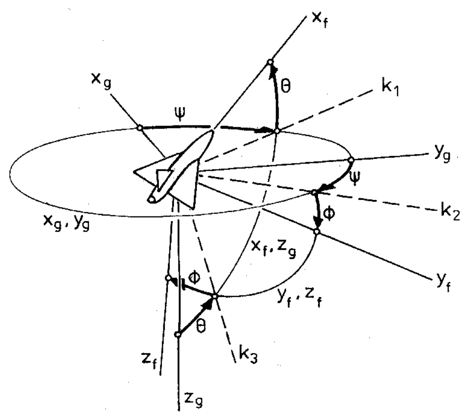


Bild 9.1

1. Das der Drehachse entsprechende Element der Hauptdiagonalen von $\underline{M}_{ba}$ ist gleich Eins. Es gilt die Zuordnung:

   x-Achse : m_{11}

   y-Achse : m_{22}

   z-Achse : m_{33}.

   Ist die Drehachse eine Knotenachse, so wird dieser das Hauptdiagonalelement der Achse zugeordnet, die bei der vorhergehenden Drehung in die Knotenachse überführt wurde. (Beispiel: $m_{33} = 1$)

2. Die anderen Elemente der Zeile und der Spalte, die sich in dem genannten Hauptdiagonalelement schneiden,sind gleich Null. (Beispiel: $m_{13} = m_{23} = m_{31} = m_{32} = 0$)

3. Die beiden anderen Elemente der Hauptdiagonale enthalten den Kosinus des Drehwinkels. (Beispiel: $m_{11} = m_{22} = \cos\psi$)

4. Das restliche Element der auf die Eins folgenden Zeile enthält den Sinus des Drehwinkels, das restliche Element der nächsten Zeile den negativen Wert davon.
Bei dieser Zählung folgt die erste auf die dritte Zeile.
(Beispiel: $m_{12} = \sin\psi, m_{21} = -\sin\psi$)

Beispiel: Überführung des geodätischen Koordinatensystems in das körperfeste Koordinatensystem ($\underline{M}_{fg}$)

1. Drehung: z_g = Drehachse; Drehwinkel ψ; $x_g \to k_1,\ y_g \to k_2$.

$$\text{Drehmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Drehung: k_2 = Drehachse; Drehwinkel θ; $k_1 \to x,\ z_g \to k_3$.

$$\text{Drehmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

3. Drehung: x = Drehachse; Drehwinkel ϕ; $k_2 \to y,\ k_3 \to z$.

$$\text{Drehmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

Die Transformationsmatrix ergibt sich als Produkt der drei Drehmatrizen:

$$\underline{M}_{fg} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{M}_{gf}^T$$

9.2 Ersatzgrößen

- **Längsbewegung**

$$X_u = -\bar{q}\frac{S}{m}\left[\left(\frac{2}{V_0}C_{W_0} + \frac{1}{a}C_{WM}\right) - \alpha_0\left(\frac{2}{V_0}C_{A_0} + \frac{1}{a}C_{AM}\right)\right] + \frac{1}{am}\frac{\partial F}{\partial M} \qquad X_\theta = -g$$

$$X_\alpha = -\bar{q}\frac{S}{m}\left[C_{W\alpha} - C_{A_0} - \alpha_0 C_{A\alpha}\right] \qquad X_f = \frac{1}{m}\frac{\partial F}{\partial \delta_F}$$

$$X_{\dot\alpha} = -\bar{q}\frac{S}{m}\frac{l\mu}{V_0}\left[C_{W\dot\alpha} - \alpha_0 C_{A\dot\alpha}\right] \qquad X_\varkappa = -\bar{q}\frac{S}{m}\left[C_{W\varkappa} - \alpha_0 C_{A\varkappa}\right]$$

$$X_q = -\bar{q}\frac{S}{m}\frac{l\mu}{V_0}\left[C_{Wq} - \alpha_0 C_{Aq}\right] \qquad X_\eta = -\bar{q}\frac{S}{m}\left[C_{W\eta} - \alpha_0 C_{A\eta}\right]$$

$$Z_u = -\bar{q}\frac{S}{mV_0}\left[\left(\frac{2}{V_0}C_{A_0} + \frac{1}{a}C_{AM}\right) - \alpha_0\left(\frac{2}{V_0}C_{W_0} + \frac{1}{a}C_{WM}\right)\right] - \frac{i_F}{am}\frac{\partial F}{\partial M} \qquad Z_f = -\frac{i_F}{mV_0}\frac{\partial F}{\partial \delta_F}$$

$$Z_\alpha = -\bar{q}\frac{S}{mV_0}\left[C_{A\alpha} + C_{W_0} + \alpha_0 C_{W\alpha}\right] \qquad Z_\varkappa = -\bar{q}\frac{S}{mV_0}\left[C_{A\varkappa} + \alpha_0 C_{W\varkappa}\right]$$

$$Z_{\dot\alpha} = -\bar{q}\frac{S}{mV_0}\frac{l\mu}{V_0}\left[C_{A\dot\alpha} + \alpha_0 C_{W\dot\alpha}\right] \qquad Z_\eta = -\bar{q}\frac{S}{mV_0}\left[C_{A\eta} + \alpha_0 C_{W\eta}\right]$$

$$Z_q = -\bar{q}\frac{S}{mV_0}\frac{l\mu}{V_0}\left[C_{Aq} + \alpha_0 C_{Wq}\right]$$

$$Z'_i = Z_i \cdot V_0$$

$$M_u = \bar{q}\frac{S\,l\mu}{I_y}\left(\frac{2}{V_0}C_{m_0} + \frac{1}{a}C_{mM}\right) + \frac{z_f}{aI_y}\frac{\partial F}{\partial M} \qquad M_q = M'_q + M_{\dot\alpha}$$

$$M_\alpha = \bar{q}\frac{S\,l\mu}{I_y}C_{m\alpha} \qquad M_f = \frac{z_f}{I_y}\frac{\partial F}{\partial \delta_F}$$

$$M_{\dot\alpha} = \bar{q}\frac{S\,l\mu}{I_y}\frac{l\mu}{V_0}C_{m\dot\alpha} \qquad M_\varkappa = \bar{q}\frac{S\,l\mu}{I_y}C_{m\varkappa}$$

$$M'_q = \bar{q}\frac{S\,l\mu}{I_y}\frac{l\mu}{V_0}C_{mq} \qquad M_\eta = \bar{q}\frac{S\,l\mu}{I_y}C_{m\eta}$$

$$M_{Wx} = M'_q - M_{\dot\alpha}$$

- **Seitenbewegung**

$$Y_\beta = \bar{q}\,\frac{S}{mV_0}\,C_{Q\beta} \qquad Y_\xi = \bar{q}\,\frac{S}{mV_0}\,C_{Q\xi}$$

$$Y_{\dot\beta} = \bar{q}\,\frac{S}{m}\,\frac{b/2}{V_0^2}\,C_{Q\dot\beta} \qquad Y_\zeta = \bar{q}\,\frac{s}{mV_0}\,C_{Q\zeta}$$

$$Y_p = \bar{q}\,\frac{S}{m}\,\frac{b/2}{V_0^2}\,C_{Qp}$$

$$Y_r = \bar{q}\,\frac{S}{m}\,\frac{b/2}{V_0^2}\,C_{Qr}$$

$$Y_\phi = \frac{g}{V_0}$$

$$L_\beta = \bar{q}\,\frac{S\,b/2}{\Delta}\left[I_z C_{l\beta} + I_{zx} C_{n\beta}\right] \qquad L_\xi = \bar{q}\,\frac{S\,b/2}{\Delta}\left[I_z C_{l\xi} + I_{zx} C_{n\xi}\right]$$

$$L_{\dot\beta} = \bar{q}\,\frac{S\,b/2}{\Delta}\,\frac{b/2}{V_0}\left[I_z C_{l\dot\beta} + I_{zx} C_{n\dot\beta}\right] \qquad L_\zeta = \bar{q}\,\frac{S\,b/2}{\Delta}\left[I_z C_{l\zeta} + I_{zx} C_{n\zeta}\right]$$

$$L_p = \bar{q}\,\frac{S\,b/2}{\Delta}\,\frac{b/2}{V_0}\left[I_z C_{lp} + I_{zx} C_{np}\right]$$

$$L_r = \bar{q}\,\frac{S\,b/2}{\Delta}\,\frac{b/2}{V_0}\left[I_z C_{lr} + I_{zx} C_{nr}\right]$$

$$N_\beta = \bar{q}\,\frac{S\,b/2}{\Delta}\left[I_x C_{n\beta} + I_{zx} C_{l\beta}\right] \qquad N_\xi = \bar{q}\,\frac{S\,b/2}{\Delta}\left[I_x C_{n\xi} + I_{zx} C_{l\xi}\right]$$

$$N_{\dot\beta} = \bar{q}\,\frac{S\,b/2}{\Delta}\,\frac{b/2}{V_0}\left[I_x C_{n\dot\beta} + I_{zx} C_{l\dot\beta}\right] \qquad N_\zeta = \bar{q}\,\frac{S\,b/2}{\Delta}\left[I_x C_{n\zeta} + I_{zx} C_{l\zeta}\right]$$

$$N_p = \bar{q}\,\frac{S\,b/2}{\Delta}\,\frac{b/2}{V_0}\left[I_x C_{np} + I_{zx} C_{lp}\right]$$

$$N_r = \bar{q}\,\frac{S\,b/2}{\Delta}\,\frac{b/2}{V_0}\left[I_x C_{nr} + I_{zx} C_{lr}\right]$$

$$\bar{q} = \frac{\rho}{2} V_0^2 \qquad \Delta = I_x I_z - I_{zx}^2$$

9.3 Literatur

/1/	Etkin, B.	Dynamics of Atmospheric Flight Flugmechanik und Flugregelung Dynamics of Flight	Wiley, New York, 1972 Berliner Union, 1966 Wiley, New York, 1994
/2/	Perkins, C.D. Hage, R.E.	Airplane Performance Stability and Control	Wiley, New York, 1949
/3/	Dickinson, B.	Aircraft Stability and Control for Pilots and Engineers	Pitman, London, 1968
/4/	Babister, A. W.	Aircraft Stability and Control	Pergamon Press, Oxford, 1961
/5/	Boisson	L'aérodynamique du vol	Dunod, Paris, 1969
/6/	Hafer, X. Sachs, G.	Flugmechanik	Springer, Berlin, 1989
/7/	Brockhaus, R.	Flugregelung www.springerlink.com	Springer, Berlin, 1994
/8/	McRuer, D. Ashkenas, I. Graham, D.	Aircraft Dynamics and Automatic Control	Princeton University Press, 1973
/9/	Schlichting, H. Truckenbrodt, E.	Aerodynamik des Flugzeuges I/II	Springer, Berlin, 1967/69
/10/		Begriffe, Größen und Formelzeichen der Flugmechanik, DIN 9300/LN9300	Beuth Verlag, Berlin

9.4 Symbolverzeichnis

	Bezeichnungen		
A	Dynamikmatrix, Auftrieb	a	Nennerkoeffizient, Schallgeschwindigkeit
B	Eingangsmatrix	b	Zählerkoeffizient, Spannweite
C	Ausgangsmatrix, Beiwert	c	Federkonstante
D	Durchgangsmatrix, Dämpfungsgrad, Druckpunkt	d	Dämpfungskonstante
F	Triebwerksschub, Funktion, Handkraft	f	Frequenz, Schubänderung, Profilwölbung
G	Übertragungsfunktion, Gewichtskraft	g	Gravitationskonstante
H	Höhe, Störmatrix	i	Einstellwinkel
I	Einheitsmatrix, Trägheitsmoment	l	Flügeltiefe, Bezugslänge
K	Verstärkungsfaktor	m	Masse
L	Rollmoment	n	Lastvielfaches
M	Nickmoment, Manöverpunkt, Transformationsmatrix	p	Rollgeschwindigkeit, Druck
M, Ma	Machzahl	q	Nickgeschwindigkeit
N	Giermoment, Nennerpolynom	$\overline{q}$	Staudruck
Q	Querkraft, Moment	r	Giergeschwindigkeit, Hebelarm
R	Resultierende Kraft	s	Laplace-Variabale, Positionsvektor
S	Flügelfläche, Schwerpunkt, Staupunkt	t	Zeit
T	Trägheitstensor, Zeitkonstante, Temperatur	u	Stellgröße, x-Geschwindigkeit
V	Geschwindigkeit, Volumen	v	y-Geschwindigkeit
W	Widerstand	w	z-Geschwindigkeit, Führungsgröße
X	x-Kraft, Weg longitudinal	x	Zustandsgröße, Abstand
Y	y-Kraft, Weg lateral	y	Ausgangsgröße
Z	z-Kraft, Weg vertikal	z	Störgröße

z_F	Schubradius
θ	Längsneigung
ϕ	Hängewinkel
ψ	Azimut
Ω	Drehgeschwindigkeit
Λ	Streckung
Δ	Abweichung
α	Anstellwinkel
β	Schiebewinkel
γ	Bahnwinkel
δ	Steuerausschlag, Abweichung
ζ	Seitenruderausschlag
η	Höhenruderausschlag
κ	Auftriebsklappenausschlag
λ	Eigenwert
ν	Kin. Zähigkeit, V-Form
ξ	Querruderausschlag
ρ	Luftdichte
σ	Dämpfungsexponent
χ	Bahnazimut
ω	Kreisfrequenz
ε	Dämpfungswinkel, Abwindwinkel

Indices

A	aerodynamische Größe
F	Schubgröße
K	Bahngröße
W	Windgröße
FR	Flügel-Rumpf
H	Höhenleitwerk
S	Seitenleitwerk
a	aerodynamische Koordinaten
e	experimentelle Koordinaten
f	flugzeugfeste Koordinaten
g	erdlotfeste Koordinaten
k	bahnfeste Koordinaten

Abkürzungen

AS	Anstellwinkelschwingung
LB	Längsbewegung
PH	Phygoide
RB	Rollbewegung
SB	Seitenbewegung
SP	Spirale
TS	Taumelschwingung